INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
(IMPA)

LEANDRO FIGUEIRA FREITAS

ANÁLISE COMBINATÓRIA VIVENCIADA NA MATEMÁTICA
UMA NOVA PROPOSTA

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional, PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro - RJ
2014

LEANDRO FIGUEIRA FREITAS

ANÁLISE COMBINATÓRIA VIVENCIADA NA MATEMÁTICA UMA NOVA PROPOSTA

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional, PROFMAT.

Aprovada em 31 de Agosto de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA - IMPA

Prof. Dr. CARLOS GUSTAVO MOREIRA - IMPA

Prof. Dra. LUCIA MARIA VILLELA

Rio de Janeiro - RJ

2014

Dedicatória

Dedico não só este trabalho, mas todas as horas demandadas na sua realização, a todos os Professores de Matemática que possuem o real interesse em melhorar a qualidade do aprendizado desta disciplina, tendo em mãos, este pequeno instrumento com o intuito de que possa auxiliá-los.

Agradecimentos

Mais uma etapa concluída em minha vida: o Mestrado Profissional. Agradeço a meus pais pela boa educação que recebi e a oportunidade que puderam me oferecer de estudar, com suas devidas cobranças e afagos. - Mãe, Pai, se hoje cheguei aonde cheguei foi por grande responsabilidade de vocês, muito obrigado. Agradeço também a minha esposa, pelo apoio, incentivo e entendimento às minhas ausências durante os estudos, pois sem ela e suas virtudes eu provavelmente teria postergado ou até mesmo desistido desta conclusão. Agradeço às minhas filhas que, embora não compreendessem, me deram força e vontade de ir além. Não posso deixar de agradecer também a todos aqueles que contribuíram, mesmo que de maneira singela, para que eu chegasse ao ponto de escrever estas palavras, pois nunca estamos sós neste mundo e precisamos sempre uns dos outros. - Deus, obrigado pela harmonia que se encontra em minha existência, me proporcionando mais este feito.

RESUMO

Em meio às dificuldades existentes no processo de ensino-aprendizagem da matemática, este trabalho propõe a introdução e a integração do Princípio Fundamental da Contagem com abordagens nos diversos conteúdos presentes no programa de matemática do Ensino Fundamental, desde o sexto até o nono ano deste segmento. De forma intuitiva, indutiva e, em um primeiro momento, sem formalidades, a proposta é favorecer o desenvolvimento cognitivo do aluno. Neste trabalho estão mostradas aplicações e sugestões, passo-a-passo, a serem empregadas no sexto ano do Ensino Fundamental, deixando os demais anos com sugestões breves de aplicações do Princípio Fundamental da Contagem, a serem verificadas no decorrer do estudo da matemática. Trata-se de uma proposta inspirada nos estudos de Jean Piaget a respeito do aprendizado infanto-juvenil, onde são destacadas fases de aprendizagem. Fases estas que devem ser observadas e seguidas ao longo da vida escolar da criança e do adolescente, despertando habilidades e aprimorando o raciocínio matemático, aumentando, com isso, a capacidade cognitiva do educando.

Palavras-chave

Matemática. Contagem. Raciocínio. Habilidades. Cognitiva.

ABSTRACT

Amid the difficulties in the teaching-learning process of mathematics, this paper proposes the introduction and integration of the Fundamental Principle of Counting with the various approaches present in the elementary school mathematics program, from the sixth until the ninth year. Intuitively, and inductively, at first, without formalisms, the proposal is to promote the cognitive development of the student. Applications and step-by-step worked examples, to be employed in the sixth grade of elementary school, are shown in this paper, leaving the other years with less detailed guidance in relation to the application of the Fundamental Principle of Counting to be checked during the study of mathematics. This is a proposal inspired by the studies of Jean Piaget regarding juvenile learning, where learning phases are regarded as paramount. These phases must be observed and followed throughout the school life of children and adolescents, developing skills and improving mathematical reasoning, increasing thereby the cognitive ability of the student.

Keywords:

Mathematics. Count. Reasoning. Skills. Cognitive.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Com base numa realidade vivenciada nos Ensinos Fundamental e Médio, viemos, neste trabalho, tratar de um assunto de suma importância para o desenvolvimento das propostas curriculares brasileiras.

Destinamos este trabalho à apreciação de todos que tenham algum interesse no assunto, principalmente a professores do Ensino Fundamental e Médio, aos quais o impacto se dará de maneira mais eloqüente, sendo então direcionados a estes algumas colocações que se fazem necessárias.

Não é difícil encontrar professores de matemática que não suportam a ideia de lecionar Análise Combinatória em turmas do segundo ano do ensino médio, onde geralmente este assunto é abordado, e, quando o fazem, é de forma simplória, direta e com pouca variedade de aplicações, seguindo um padrão pré-existente. Menos difícil ainda é perceber que este fato leva a um baixo nível de aprendizado por parte do discente, que é atropelado por informações que, na maior parte dos casos, são impostas pela presença de fórmulas e procedimentos a serem seguidos, o que torna o estudo do assunto ainda mais difícil, já que apenas uma minoria possui alguma afinidade com a própria matemática.

A Análise Combinatória trata da exploração das possibilidades, da busca por diferentes caminhos, analisando êxitos e falhas que possam surgir, gerando questionamentos a todo instante, e então se pergunta: onde encontramos tudo isso dentro do programa de matemática no Ensino Fundamental de uma escola brasileira? O que verificamos é que, na grande maioria das instituições de ensino, o aluno chega aos 16 ou 17 anos (geralmente, levando em conta a realidade atual) sem ter tido acesso a esse tipo de exploração intelectual, sem ter trabalhado esta habilidade que é importantíssima para o desenvolvimento cognitivo, sendo, então, tolhido no seu aprendizado.

OBJETIVO DESTE TRABALHO

Propomos neste trabalho a introdução da Análise Combinatória no desenvolvimento de diversos conteúdos de Matemática desde o sexto ano do Ensino Fundamental. Nesta etapa o aluno, normalmente, possui ainda seus 11 anos de idade, ou seja, ele está mais apto a receber e tratar informações, percebendo, questionando e vivenciando o raciocínio matemático. Trataremos desta questão até o nono ano deste mesmo segmento.

Nossa proposta não é acrescentar novos capítulos nos livros didáticos, mas sim, aproveitar os assuntos já abordados no programa atual de cada ano. A ideia é inserir problemas de contagem nestes assuntos, partindo da utilização do Princípio Fundamental da Contagem como ferramenta primordial na aprendizagem. Através de intervenções argumentativas e questionamentos simples, apresentaremos de maneira sutil, mas relevante, uma interseção entre o programa atual do Ensino Fundamental e o estudo inicial da Análise Combinatória.

Sendo esta introdução feita no sexto ano, começaremos com uma abordagem detalhada, a fim de mostrar minuciosamente como poderia ser inserida esta habilidade nos tópicos pertinentes a esta fase de aprendizagem, na qual, segundo Piaget (Munari, 2010, p.138), a criança está terminando a fase chamada de *Operatório-concreto*, onde ela já é capaz de relacionar diferentes aspectos e abstrair dados da realidade, e, entrará na fase por ele denominada de *Operatório-formal*, onde as estruturas cognitivas da criança atingem seu nível mais elevado de desenvolvimento, permitindo a abstração total e o raciocínio lógico na busca por soluções.

Já nas séries subsequentes, nossa abordagem se dará de forma menos minuciosa, sendo expostos mecanismos de trabalho para o desenvolvimento dos conteúdos, ficando a critério do docente sua apreciação e inferências.

2. PONTO DE PARTIDA

2.1. MOTIVAÇÃO

Se você, professor, possui a opinião de que a maior parte dos alunos desta fase escolar não é capaz de assimilar este conteúdo, compartilho uma experiência de trabalho que em muito me entusiasmou: em 2012 fui convidado a dar aulas em turmas preparatórias para as Olimpíadas de Matemática numa escola particular no Rio de Janeiro, no nível 1 (6° e 7° anos) e nível 2 (8° e 9° anos), onde alunos “comuns” se propuseram a assisti-las. Com pouco tempo e carga horária pequena, em grande parte foquei minhas atividades no raciocínio lógico, trabalhando bastante o Princípio Fundamental da Contagem. Para grande surpresa minha, os alunos se interessaram e participaram de maneira surpreendente, de modo que pude chegar a aplicações bastante complexas, que trariam complicações até mesmo para alunos em idade de fazer o ENEM. E acredite, eram alunos realmente “comuns”, que não possuíam grandes conhecimentos e nem bom ritmo de estudo, tanto que nem na segunda fase da Olimpíada conseguiram chegar, fato que de forma alguma me desencorajou a prosseguir com esta proposta, mas muito pelo contrário.

Com o resultado desta vivência, levei essa ideia para a sala de aula em outra escola, mas com pequenas abordagens, bem esporádicas. Deu certo. A maior parte dos alunos participou e gostou das colocações, motivando-me ainda mais.

No ano seguinte, em 2013, continuei com as turmas preparatórias para as Olimpíadas, nas quais pude preparar ainda mais aplicações do PFC, tornando as aulas bastante interessantes. O mesmo ocorreu nas turmas da outra escola, que não eram preparatórias.

Para mim ficou claro que nunca podemos subestimar a capacidade intelectual do nosso aluno, pois quando bem estimulado ele voa. E, sendo assim, temos o dever como professores e educadores, de proporcionar aos nossos educandos meios de obterem uma melhora no aprendizado e um real avanço intelectual, mesmo que muitos deles não entendam o objetivo deste estudo, devido principalmente à baixa faixa etária. Esta melhora no aprendizado ficou evidenciada com as aplicações do PFC, mostrando que podemos aplicá-lo em todas as turmas do Ensino Fundamental, desde o sexto ao nono ano, e, posteriormente darmos continuidade no Ensino Médio.

2.2. COMENTÁRIOS SEGUNDO OS PCN

Comecemos com um pequeno trecho extraído dos PCN, a serem encontrados no portal: *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf*

"Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. Adotam como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo."

A Análise Combinatória exerce papel muito importante em todo o contexto do estudo escolar. Sendo assim, vários trechos dos PCNs são pertinentes para o trabalho aqui proposto. Abaixo destacamos alguns destes pontos.

A Matemática ***"interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno."*** Por isso precisa ser trabalhada desde o início dos estudos.

"O conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contra-exemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos." E se este processo não iniciar de maneira prematura, poderá por em risco todo o aprendizado.

"A Matemática desenvolve-se, desse modo, mediante um processo conflitivo entre muitos elementos contrastantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, ..." que estão presentes fortemente dentro das aplicações propostas neste trabalho, com a inserção do Princípio Fundamental da Contagem desde o início do segundo segmento do Ensino Fundamental.

"A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades."

"Para tanto, é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, ..." E o que vivenciamos na Análise Combinatória é justamente esta agilização do raciocínio dedutivo, com aplicações em problemas e generalizações.

“É fundamental não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo.” Este trecho corrobora inteiramente a experiência vivida e relatada por mim anteriormente, mostrando que não devemos julgar a capacidade de nosso aluno. Completo lembrando que, exceto nossos alunos mais idosos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), todos os demais já nasceram numa era informatizada, onde o acesso aos diversos tipos de informações estão na palma da mão, tornando-os mais críticos e com muito mais conhecimento do que tivemos na mesma idade.

“Trabalhar coletivamente, por sua vez, supõe uma série de aprendizagens, como:
• perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
• saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro;
• discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias idéias;
• incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.
Essas aprendizagens só serão possíveis na medida em que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar idéias.” Mostra-se aí, o papel fundamental do professor, não só com relação à inserção do PFC no EF, mas também em toda a aprendizagem da Matemática.

“Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática.” E é neste alicerce que está fundamentado este trabalho, transferindo e aprimorando o conhecimento, modificando e reestruturando pensamentos já verificados e aplicados em contextos semelhantes, favorecendo o desenvolvimento dedutivo e criativo.

“Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses Conteúdos (conteúdos matemáticos do ensino fundamental) aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória.” Se nos PCNs está clara a importância da Análise Combinatória, então precisamos dar mais atenção a este assunto, ampliando sua aplicação e desenvolvimento, inclusive favorecendo o estudo da Probabilidade, também com grande importância na formação intelectual do estudante.

Associando à filosofia de aprendizagem *Piagetiana (melhor descrita no capítulo seguinte),* mostramos que o presente trabalho é compatível com importantes pontos levantados pelos PCNs, utilizando do Princípio Fundamental da Contagem como âncora para o desenvolvimento do aluno.

2.3. A PSICOLOGIA COGNITIVA E AS FAIXAS ETÁRIAS, SEGUNDO PIAGET

Publicada pelo Ministério da Educação, a obra Jean Piaget, de Munari (2010), faz parte da Coleção Educadores cujas obras objetivam contribuir para a formulação e implementação de políticas integradas de melhoria da equidade e qualidade da educação em todos os níveis de ensino formal e não formal.

Jean Piaget especializou-se na psicologia evolutiva e no estudo da epistemologia genética (teoria do conhecimento centrada no desenvolvimento natural da criança), revolucionando a educação, à medida que derrubou vários pontos de vista e teorias tradicionais de aprendizagem, servindo de inspiração para pesquisadores em educação e psicologia cognitiva.

Piaget pesquisou as características do pensamento infantil e seus estudos serviram de base ao surgimento de teorias que buscassem implantar uma metodologia inovadora, objetivando a formação de cidadãos criativos e críticos, através de uma aprendizagem que caminhasse para uma maior autonomia por parte do educando.

Neste lema, Jean Piaget propagou para o mundo a seguinte frase:

“O principal objetivo da educação é criar indivíduos capazes de fazer coisas novas e não simplesmente repetir o que as outras gerações fizeram.”

Jean Piaget em muito estudou o raciocínio lógico-matemático, acreditando ser fundamental para o desenvolvimento. Mas o desenvolvimento deste raciocínio dependeria de uma estrutura de conhecimento pré-estabelecida, pois não se pode fazer uma criança aprender aquilo que ainda não está em condições de absorver, ou até mesmo que esteja fora de seu interesse. Segundo Piaget, o desenvolvimento cognitivo se estabelece em quatro estágios, iniciando no nascimento e findando no início da adolescência, quando a criança atinge a capacidade plena de raciocínio.

O primeiro estágio é o *sensório-motor*, que vai do nascimento até os dois anos, caracterizado pelo desenvolvimento da percepção de si mesmo e dos objetos ao seu redor.

O segundo estágio é o *pré-operacional*, que vai dos dois aos sete anos, caracterizado pelo domínio da linguagem e simbologias.

Como terceiro estágio está o *operatório-concreto*, iniciando aos sete anos e terminando entre seus onze ou doze anos de idade, onde surge lógica nos processos mentais, dominando conceitos de tempo e número.

No quarto e último estágio, o *operatório-formal*, que se inicia próximo aos doze anos de idade, o adolescente conquista o domínio do pensamento lógico e dedutivo, possibilitando a abstração e raciocínio sobre hipóteses.

> “As operações formais assinalam, por outro lado, uma terceira etapa em que o conhecimento ultrapassa o próprio real para inserir-se no possível e para relacionar diretamente o possível ao necessário, sem a mediação indispensável do concreto: ora, o possível cognitivo, tal como, por exemplo, a sequência infinita de números inteiros, a potência do contínuo ou simplesmente as dezesseis operações resultantes das combinações de duas proposições p e q e de suas negações, é essencialmente extemporâneo. Com efeito, a primeira característica das operações formais é a de poder recair sobre hipóteses e não mais apenas sobre os objetos: é esta novidade fundamental da qual todos os estudiosos do assunto notaram o aparecimento perto dos 11 anos.”(p. 138)
>
> “Em geral, este último nível apresenta um aspecto marcante em continuidade, aliás com o que nos ensina toda a psicogênese dos conhecimentos a partir das indiferenciações iniciais: é na medida em que se interiorizam as operações lógico-matemáticas do sujeito, graças às abstrações refletidoras que elaboram operações sobre outras operações, e na medida em que é finalmente atingida esta extemporaneidade que caracteriza os conjuntos de transformações possíveis e não mais apenas reais, que o mundo físico e seu dinamismo espaço-temporal, englobando o sujeito como uma parte ínfima entre as demais, começa a tornar-se acessível a uma observação objetiva de certas de suas leis, e sobretudo a explicações causais que forçam o espírito a uma constante descentração na sua conquista dos objetos.”(p. 139)
>
> (Munari, 2010)

Esta última fase inicia-se aproximadamente quando nosso aluno se encontra no 6° ou 7° ano do Ensino Fundamental, no momento em que justamente está mais apto às deduções e abstrações, tornando altamente relevante a proposta deste trabalho. Ao iniciar o raciocínio combinatório no princípio desta fase, acreditamos estar criando maior facilidade na busca por alternativas relevantes, que é uma das bases para um bom aprendizado.

2.4. UMA PESQUISA BASTANTE RELEVANTE

A implantação adequada da Análise Combinatória no currículo escolar infelizmente esbarra numa grande resistência por parte de docentes e discentes. Cremos que boa parte desta dificuldade vem dos professores que, por variadas razões, não têm uma formação adequada na área, tendo então, dificuldade de levá-la à sala de aula.

Para ilustrar esta tese, uma enquete foi elaborada com o intuito de fazer uma sondagem a respeito do nível de escolaridade, afinidade e experiência no ensino da análise combinatória. Longe de ser uma pesquisa científica, buscamos uma identificação aproximada do grau de dificuldade dos professores em relação ao seu ensino, bem como o nível de aceitação em relação ao ensino do PFC a partir do 6° ano do ensino fundamental.

Para realização desta pesquisa foram contatados alguns professores próximos e, em sua maioria, professores escolhidos de maneira aleatória no sítio PROFESSORES DE MATEMÁTICA no *facebook*, pelo link https://www.facebook.com/#!/groups/profsmat/?fref=ts. A esses professores foram enviadas solicitações para que respondessem a um questionário através do link https://pt.surveymonkey.com/s/KMWHK7D, os quais nem todos responderam. Foram obtidas 160 respostas ao questionário, mas, a empresa SurveyMonkey, detentora do questionário *on line*, disponibilizou apenas as 100 primeiras respostas.

O questionário segue no apêndice.

De acordo com os dados coletados, 77% do público entrevistado leciona na rede pública do ensino básico, e, alguns aspectos devem ser destacados:

AFINIDADE COM A ANÁLISE COMBINATÓRIA:

- Apenas 46% gostam, tem bom conhecimento e facilidade em transmitir, embora 85% gostem da análise combinatória;
- 37% dizem ter pouco conhecimento do assunto;
- 19% dos professores entrevistados, além do pouco conhecimento do assunto, admitem lecionar este conteúdo;
- 11% dos professores não gostam, possuem pouco conhecimento do assunto e mesmo assim lecionam.

Acredito que o fato da maior parte dos professores pesquisados (85%) gostarem da análise combinatória possa indicar um bom empenho em lecionar este conteúdo já no 6° ano do ensino fundamental, mesmo que quase metade destes não tenha facilidade na sua transmissão.

O INÍCIO DO ESTUDO DO PFC NO ENSINO FUNDAMENTAL:

- 73% dos entrevistados acreditam que o ensino do PFC pode ser iniciado nas primeiras séries do ensino básico;
- Mas 94% dos professores entrevistados apóiam a tentativa de se iniciar este estudo a partir do 6° ano, mesmo com aparentes dificuldades que possam ocorrer.

Fatos que indicam uma tendência à aceitação desta abordagem a partir deste ano escolar, corroborando com a observação feita anteriormente.

COM RELAÇÃO AO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA:

- 19% dos entrevistados se apóiam nas fórmulas para ensinar análise combinatória.

Estes dados indicam que grande parte destes 19% não gosta ou possui dificuldade na sua transmissão.

Esta pesquisa mostra uma forte tendência a acreditarmos que as aplicações propostas neste trabalho terão, no mínimo, uma boa aceitação pela maior parte do corpo docente do país. Temos professores que estariam dispostos a experimentar novas abordagens em séries anteriores àquelas onde estão acostumados a abordar o PFC, numa tentativa de melhoria na qualidade do ensino-aprendizagem da matemática.

3. O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Este princípio baseia-se numa contagem simples de associações entre conjuntos distintos ou não. Estas associações podem ocorrer entre dois, três, quatro ou mais conjuntos. Uma observação bastante notória desta contagem de associações está no Produto Cartesiano entre dois conjuntos A e B:

Como por exemplo, vamos citar um conjunto A = {1, 2} e outro conjunto B = {3, 4, 5}. O Produto Cartesiano entre os conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), em que x pertence ao conjunto A e y pertence ao conjunto B.

Pelo exemplo dado, o Produto Cartesiano entre os dois conjuntos será dado por: $AXB = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$.

Nosso objetivo neste momento não é encontrar propriamente o Produto Cartesiano, mas sim, o número total de pares ordenados que podem ser formados, se tratando justamente da quantidade de associações entre dois conjuntos. Notemos que para cada elemento do conjunto A, poderemos fazer 3 associações diferentes com o conjunto B. Como o conjunto A possui 2 elementos, teremos o total de $2 \cdot 3 = 6$ associações. Por efetuarmos multiplicações entre as possibilidades existentes em cada um dos conjuntos, o Princípio Fundamental da Contagem também é conhecido como Princípio Multiplicativo.

Estendendo a ideia de associações para três conjuntos A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} e C = {8, 9, 10, 11, 12}, poderemos formar ternos ordenados (x, y, z), em que x pertence ao conjunto A, y pertence a B e z pertence a C. Teremos então, 3 possibilidades de escolha para um elemento do conjunto A, 4 possibilidades para o conjunto B e 5 para o conjunto C, totalizando $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ possibilidades de associações entre os três conjuntos mencionados.

Uma observação muito importante a ser feita é o fato de que em nosso primeiro exemplo foi perfeitamente possível descrever as possibilidades e chegar à conclusão da quantidade de associações, enquanto no segundo exemplo, foi primordial efetuar as multiplicações para chegarmos ao resultado total. Em conjuntos maiores, o Princípio Fundamental da Contagem se torna essencial na resolução destes problemas.

4. PENSANDO NO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nesta etapa do aprendizado, em que a matemática começa a tomar um corpo mais denso, poderemos introduzir a ideia do *Princípio Multiplicativo* na *Contagem*, aplicado aos conteúdos de Sistemas de Numeração, Operações com Números Naturais, Múltiplos, Divisores e Frações, antes mesmo de iniciar o estudo das Possibilidades [1], quando então poderemos ser mais abrangentes na exploração do tópico.

Não esquecendo que nosso aluno está em um processo de finalização da fase *operatório-concreto*, a construção de esquemas antes da resolução de um problema será de grande importância na conexão do real com o abstrato, favorecendo a inserção na fase *operatório-formal*, onde as estruturas cognitivas estarão em plena atividade.

É de grande importância que os esquemas sejam feitos junto aos alunos, mesmo que depois de determinadas resoluções, para que os cálculos efetuados sejam constatados de maneira real e dentro de seu visual, e, com isso, havendo a concretização do raciocínio utilizado.

Findo este ciclo, o aluno terá consciência da construção de esquemas para se chegar ao número total de algumas quantidades, correlacionando grupos distintos de elementos também distintos. Tendo sido trabalhado seu raciocínio abstrato de maneira gradativa e sem profundidade, dar-se-á início a um novo modo de enxergar e explorar possibilidades.

Aqui serão apresentados esquemas com o auxílio de pontos em negrito ou chaves, mas fica a critério do docente efetuar qualquer adaptação.

4.1. SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:

Quando falamos em sistemas de numeração, falamos sobre as escritas antigas onde símbolos representavam quantidades definidas, para, posteriormente, introduzir o conceito de base de um sistema de numeração, a começar pelo sistema de numeração decimal, o indo-arábico.

Por se tratar de um sistema de numeração posicional, poderemos, neste capítulo, dar início ao processo de contagem ao procurarmos a quantidade de números que podemos formar com certa quantidade de algarismos distintos, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem de maneira intuitiva e sem qualquer nomenclatura. Num primeiro momento a abordagem será feita sem a utilização de algarismos repetidos, mas, quando o fizermos, será sempre em quantidades pequenas para que os alunos não fiquem sobrecarregados com excesso de

[1] Conforme muito bem colocado no livro Matemática – Compreensão e Prática – 6° ano, de Ênio Silveira e Cláudio Marques, Editora Moderna.

conteúdo, nunca esquecendo os esquemas representativos quando se fizerem necessários.

Apoio Didático:

Atividade 1

Sabemos que o algarismo **1** representa uma unidade e que o algarismo **2** representa duas unidades. Sabemos ainda que se juntarmos estes dois algarismos estaremos formando novos números, dependendo da posição que os colocarmos, por exemplo:

- **12** é um número que representa doze unidades;
- **21** é um número que representa vinte e uma unidades.

Ambos os números formados possuem os mesmos algarismos, mas que, em posições diferentes, representam quantidades diferentes.

Poderemos, ainda, formar números com algarismos repetidos, que é o caso do **11** e do **22**, que representam quantidades ainda diferentes. Portanto, utilizando os algarismos 1 ou 2 para formar números com dois algarismos, teremos o total de quatro possibilidades: 12, 21, 11 e 22.

Após esta observação, é de muita importância que sejam mencionados outros exemplos ainda com números de dois algarismos distintos, para fixação da ideia trabalhada.

Atividade 2

Para formar números com três algarismos, utilizando apenas os algarismos 1 e 2, vamos analisar quantas seriam as possibilidades.

Devemos deixar que o grupo procure chegar a conclusões sem nossa ajuda, para posteriormente darmos diretrizes organizacionais.

Poderemos começar com todos os algarismos iguais, o que parece ser simples:

$$\begin{cases} 111 \\ 222 \end{cases}$$

Posteriormente, com um deles aparecendo exatamente duas vezes. Comecemos pela repetição do algarismo 1, e, posteriormente, com a repetição do algarismo 2.

$$\begin{cases} 112 \\ 121 \\ 211 \end{cases} \qquad \begin{cases} 221 \\ 212 \\ 122 \end{cases}$$

Portanto, utilizando apenas os algarismos 1 e 2, poderemos formar o total de 8 possibilidades de números com três algarismos cada.

Atividade 3

Ainda na formação de números com três algarismos, poderemos agora considerar uma terceira possibilidade. Iremos utilizar os algarismos **1**, **2** ou **3** para formar tais números.

A dificuldade parece aumentar (na visão do aluno), mas comecemos pelos números formados por três algarismos iguais, como na atividade anterior:

$$\begin{cases} 111 \\ 222 \\ 333 \end{cases}$$

Posteriormente, peguemos aqueles que possuem apenas um algarismo de cada. Vamos utilizar de um esquema que mostre as possibilidades começando por cada um dos três algarismos:

$$\begin{cases} 123 \\ 132 \end{cases} \qquad \begin{cases} 213 \\ 231 \end{cases} \qquad \begin{cases} 312 \\ 321 \end{cases}$$

Em seguida, pegaremos aqueles formados por dois algarismos iguais, primeiramente com a repetição do algarismo 1, posteriormente do 2 e finalizando com a repetição do algarismo 3.

$$\begin{cases} 112 \\ 121 \\ 211 \\ \\ 113 \\ 131 \\ 311 \end{cases} \qquad \begin{cases} 221 \\ 212 \\ 122 \\ \\ 223 \\ 232 \\ 322 \end{cases} \qquad \begin{cases} 331 \\ 313 \\ 133 \\ \\ 332 \\ 323 \\ 233 \end{cases}$$

Portanto, com a utilização dos algarismos 1, 2 ou 3, teremos 27 possibilidades de formação de números com três algarismos cada.

Ao término desta atividade, poderemos indagar nossos alunos sobre a quantidade de possibilidades na formação de números com quatro, cinco ou mais algarismos, chegando à conclusão de que seria muito trabalhosa a realização de esquemas para estas quantidades.

Atividade 4

Após a realização das etapas anteriores já poderemos introduzir o *Princípio Fundamental da Contagem*, mostrando a rapidez com que chegamos aos resultados procurados.

Na *Atividade 1*, existem números formados por dois algarismos, com duas possibilidades para cada posição, o algarismo 1 ou o algarismo 2:

- 1 ou 2 para o primeiro algarismo, e,
- 1 ou 2 para o segundo.

Ou seja, para cada uma das duas possibilidades de ocorrência na primeira casa, teremos outras duas para a segunda, nos possibilitando escrever:

- $\underline{2} \cdot \underline{2} = 4$ possibilidades totais.

$$\begin{cases} 1 \begin{cases} 1 & \rightarrow & 11 \\ 2 & \rightarrow & 12 \end{cases} \\ \\ 2 \begin{cases} 1 & \rightarrow & 21 \\ 2 & \rightarrow & 22 \end{cases} \end{cases}$$

E assim voltamos aos outros itens e mostramos como fica simplificado o raciocínio ao utilizarmos esta habilidade, podendo ainda serem verificadas possibilidades maiores, onde o trabalho seria muito desgastante, como, por exemplo, encontrar o total das possibilidades de números com cinco algarismos, utilizando apenas os algarismos 1, 2 ou 3, que resultaria em $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 243$.

Uma ideia simples que poderá motivar os alunos a aprender este “atalho matemático”, fugindo de esquemas complexos.

Mas não podemos nos iludir e acreditar que todo aluno do 6° ano terá compreendido tudo o que foi visto até agora, até mesmo porque não poderemos dedicar muito tempo à realização de atividades deste tipo no tópico de Sistemas de Numeração. Portanto, a ideia é trabalhar esta habilidade em muitos outros tópicos, de maneira gradativa, repetitiva e ao mesmo tempo em novas aplicações.

4.2. OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS:

Ao estudar a propriedade comutativa da adição, podemos abordar as diversas formas de escrevermos a soma de dois, três, quatro ou mais números diferentes, e ainda calcular a quantidade total dessas possibilidades, por exemplo:

- $2 + 3 = 5$
- $3 + 2 = 5$

Neste caso, teremos uma adição de duas parcelas: $\_\_ + \_\_$, em que são duas as possibilidades para a primeira (2 ou 3) e apenas uma possibilidade para a segunda parcela, que é o número restante, após termos preenchido a primeira. Portanto, serão $\underline{2} \cdot \underline{1} = 2$ formas de escrever uma soma de resultado 5 utilizando os números 2 e 3.

Observemos as somas abaixo:

- $2 + 3 + 4 = 9$
- $2 + 4 + 3 = 9$
- $3 + 2 + 4 = 9$
- $3 + 4 + 2 = 9$
- $4 + 2 + 3 = 9$
- $4 + 3 + 2 = 9$

As adições acima são feitas com três parcelas: $\_\_ + \_\_ + \_\_$, em que são três as possibilidades para a primeira (2, 3 ou 4), duas para a segunda parcela e finalmente uma única para a terceira. Portanto, serão $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$ formas diferentes de somarmos 2, 3 e 4, obtendo o mesmo resultado 9.

Esta abordagem complementa a abordagem feita nos Sistemas de Numeração, com o acréscimo de que o número utilizado na primeira parcela não poderá mais ser utilizado nas parcelas seguintes, o mesmo ocorrendo com o utilizado na segunda parcela.

Outro exemplo com quatro ou cinco algarismos será bastante útil, a fim de que fique bastante evidente que este processo de multiplicação das quantidades das possibilidades das parcelas é algo “fantástico” na resolução de problemas. Com isso, a ideia da *Análise Combinatória* surge, de forma intuitiva e experimental.

Posteriormente, na propriedade comutativa da multiplicação, o procedimento acima poderá ser novamente exposto, calculando a quantidade das diversas formas de multiplicarmos os mesmos números, obtendo o mesmo resultado, reforçando a ideia inicial do PFC.

Ao trabalhar a ideia da contagem nestas operações, surge a indagação pela utilização também na subtração ou divisão, que, se não for feita pelo aluno, o professor deverá dar início a este questionamento, cabendo a ele identificar com exemplos práticos, tal impossibilidade. Estaremos, já neste início, mostrando que este método não é possível de ser aplicado em todas as operações, e que, antes de iniciarmos um processo deveremos verificar se realmente as condições são favoráveis. Dá-se o início de um pensamento crítico sobre a utilização de um método na resolução de problemas.

Neste momento, espera-se que o aluno esteja apto e bem à vontade para lidar com a clássica abordagem que já existe em grande parte dos livros didáticos, quando calculamos o total de possibilidades de “combinarmos” uma calça com uma camisa, ou um tênis, ou, possibilidades de escolher um lanche contendo um suco, um tipo de pão e um recheio, escolhendo sempre um único item dentre os oferecidos. Mas, ainda não é o momento de aprofundamento desta abordagem, que deve ser vista de maneira bastante superficial.

Notemos que mencionar a palavra combinação é perigoso, pois estaremos incutindo na formação de nosso aluno, uma ideia errada sobre este termo dentro da matemática, fato que já ocorre em diversos livros didáticos. Poderíamos usar a termologia “escolhas”, que é igualmente simples, pois Combinação será propriamente estudada no segundo ano do ensino médio, podendo gerar confusões quando utilizado um termo de maneira inadequada.

4.3. MÚLTIPLOS DOS NÚMEROS NATURAIS:

Ao falarmos sobre os critérios de divisibilidade poderemos indagar sobre quantos seriam os números múltiplos de dois, com determinada quantidade de algarismos, definindo-os previamente para evitar a possibilidade de iniciarmos um número com zero, o que num primeiro momento tornaria mais dificultosa a associação de ideias.

Posteriormente indagaríamos sobre os múltiplos de 5 e os múltiplos de 10, onde consideraríamos a possibilidade do zero na ordem das unidades, e, ao mesmo tempo sua exclusão na primeira ordem à esquerda do número. Estaríamos, então, inserindo condicionais para a ocupação da ordem das unidades e para a ordem de maior valor relativo na formação dos números, dando continuidade ao processo iniciado anteriormente.

Apoio Didático:

Atividade 1

Um exemplo inicial para tratarmos neste capítulo poderia ser a procura por múltiplos de 2 com exatamente dois algarismos, sendo que poderíamos utilizar apenas os dígitos 1, 2, 3 ou 4.

A primeira questão que aparece é o fato de poder ou não repetir os algarismos, mas deveremos dar a oportunidade para que os alunos cheguem a este questionamento, caso contrário, o professor o faz surgir. Mas, num primeiro momento, consideremos a possibilidade de repetição, para suavizar a aplicação.

Vamos encontrá-los:

Primeiro devemos perceber para um número ser múltiplo de 2 ele deve terminar com um algarismo múltiplo de 2. São eles:

$$\begin{cases} 12 \\ 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} 22 \\ 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} 32 \\ 34 \end{cases} \qquad \begin{cases} 42 \\ 44 \end{cases}$$

Totalizando 8 possibilidades, quantidade esta que também pode ser obtida por processo semelhante ao feito anteriormente:

- $\underline{4} \cdot \underline{2}$, que seriam quatro possibilidades para ocupar a ordem das dezenas e duas para ocupar a ordem das unidades, resultando em 8 possibilidades no total.

Atividade 2

Utilizando os dígitos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantas são as possibilidades de formarmos números múltiplos de cinco, com 2 algarismos?

A primeira observação é que devemos considerar que um número múltiplo de 5 só poderá terminar em 0 ou 5, e que ainda poderemos repetir algarismos.

São eles:

$$\begin{cases} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15 \\ 25 \\ 35 \\ 45 \\ 55 \end{cases}$$

Totalizando 10 possibilidades. Contudo, pelo outro processo, o trabalho fica bastante minimizado, principalmente em casos mais complexos.

- Para a ordem das dezenas teremos cinco possibilidades, que vão do 1 ao 5, pois não podemos começar um número com o dígito 0 (zero).
- Para a ordem das unidades teremos duas possibilidades, que são 0 ou 5.
- $\underline{5} \cdot \underline{2} = 10$ possibilidades no total.

Atividade 3

Para finalizar este capítulo procuraremos saber quantos são os números múltiplos de 10 com exatamente 3 algarismos, dentre todos os existentes, ou seja, utilizando os algarismos do 0 ao 9 (são 10 no total).

Pensando de forma rápida:

- O número é formado por 3 algarismos: __ __ __
- Na ordem das centenas são 9 possibilidades no total, pois não podemos começar um número com o algarismo 0 (zero), apenas do 1 ao 9.
- Na ordem das dezenas são 10 possibilidades, pois qualquer algarismo pode ser utilizado, inclusive o zero.
- Na ordem das unidades só existe uma possibilidade, que é o algarismo 0 (zero), pois para que um número seja múltiplo de 10 ele deve terminar em zero.
- Tem-se: $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{1} = 90$ possibilidades no total, o que seria bastante cansativo chegar a este resultado se procurássemos por todos eles.

Estas três últimas atividades mostraram de maneira simples e bem objetiva como utilizar o PFC como auxílio na obtenção das quantidades de múltiplos de determinados números (alguns específicos), podendo ser perfeitamente empregado no 6° ano do Ensino Fundamental, sem, é claro, criarmos especificações mais detalhadas, como a não repetição dos algarismos, que, neste caso, acredito não estar apropriado à série, ou seja, à fase de aprendizado em que o aluno se encontra.

4.4. DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL:

Com relação aos divisores, nota-se que os livros didáticos, em sua maioria, não fazem com que o aluno entenda como encontrar os divisores de um número através da fatoração, ou, quando o fazem, o processo aparece de forma prática, como algo a ser memorizado pelo aluno, sem ser mostrada a origem dos cálculos, desfavorecendo o entendimento do assunto.

A proposta é a exploração das possibilidades, mostrar ao aluno que os divisores de um número são formados pelas diferentes maneiras de se obter produtos com seus fatores primos.

Apoio Didático:

Atividade 1

Começando por um número primo, que é divisível apenas por 1 e pelo próprio número, estaríamos inserindo a ideia de que o número 1 é divisor universal, ou seja, é divisor de todo número natural (conjunto até então estudado) e que todo número é divisível por ele próprio, resultando em quociente unitário.

O número 5, por exemplo, possui seus únicos divisores sendo 1 e 5, totalizando 2 divisores naturais.

Atividade 2

Aumentando a dificuldade para o número 6, que pode ser fatorado como $2 \cdot 3 = 6$, teremos os seguintes divisores:

- Na ausência dos fatores 2 e 3, consideremos o divisor 1, reforçando a ideia de que todo número natural é divisível por 1.
- Considerando apenas o fator 2, teremos o divisor 2.
- Considerando apenas o fator 3, teremos o divisor 3.
- Considerando os dois fatores, teremos o divisor $2 \cdot 3 = 6$

Totalizando 4 divisores naturais do número 6.

Atividade 3

Utilizando-se de um número com três fatores primos diferentes, como, por exemplo, o número 30, que fatorado fica na forma $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, teremos:

- Na ausência dos fatores primos, consideremos o divisor 1.
- Cada um dos fatores é, por si só, um divisor de 30, totalizando 3 divisores, 2, 3 e 5.
- Associando os fatores de dois em dois, teremos outros 3 divisores: $\begin{cases} 2 \cdot 3 = 6 \\ 2 \cdot 5 = 10 \\ 3 \cdot 5 = 15 \end{cases}$
- Considerando os três fatores, teremos o divisor $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Totalizando 8 divisores naturais do número 30.

Atividade 4

Com o número 12, fatorado da forma $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, poderemos explorar um campo maior: o fato de existirem fatores primos repetidos num divisor.

- Na ausência dos fatores primos, consideremos o divisor 1.
- Cada um dos fatores é, por si só, um divisor de 12, totalizando 2 divisores, 2 e 3.
- Associando os fatores de dois em dois, teremos outros 2 divisores:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 = 6 \\ 2 \cdot 2 = 4 \end{cases}$$

- Considerando os três fatores, teremos o divisor $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Totalizando 6 divisores naturais do número 12. Neste momento, é muito válida a observação de que, mesmo contendo fatores repetidos, deveremos considerar cada um deles como único na formação dos divisores.

Seria, de grande valia, a aplicação de um exemplo um pouco maior, sem grande complexidade, como o seguinte.

Atividade 5

Quantos são os divisores naturais do número 210?

O primeiro passo é fatorar o número 210, obtendo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

- Na ausência de todos os fatores primos, consideremos o divisor 1.
- Como cada um dos fatores é um divisor de 210, teremos 4 divisores, 2, 3, 5 e 7.
- Agrupando os fatores de dois em dois, teremos mais 6 divisores.
  $2 \cdot 3 = 6;$
  $2 \cdot 5 = 10;$
  $2 \cdot 7 = 14;$
  $3 \cdot 5 = 15;$
  $3 \cdot 7 = 21;$
  $5 \cdot 7 = 35.$
- Agrupando os fatores de três em três, teremos outros 4 divisores.
  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
  $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$
  $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$
  $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$
- Considerando os quatro fatores, teremos o divisor $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Totalizando 16 divisores naturais do número 210.

Seria tão simples se o professor utilizasse exemplos pequenos para mostrar os divisores, aguçando o raciocínio do aluno e, posteriormente, aplicar o processo da *Contagem* para determinar a quantidade de divisores naturais que possui um número natural, e não meramente apresentar uma fórmula, por alguns chamada de “lei do expoente”. Vale ressaltar que no 6° ano o conteúdo de *Potências* ainda está muito prematuro, assim como também no 7° ano, portanto, a quantidade de divisores só será vista com enfoque nas potências no 8° ano, em que já existe familiaridade com os expoentes.

Mesmo que estejamos falando de crianças de 6° ano, numa idade média de 11 anos, o aprendizado dever ter inserções feitas de maneira gradativa, questionativa, argumentativa e, sem achar que o aluno desta série será capaz de resolver os mais diversos problemas a respeito do assunto, pois isto poderia ser desastroso em relação a todo o processo de prática e absorção de conteúdo, que deve ser dividido ao longo dos anos.

Atividade 6

Com relação ao número 6, se quisermos saber simplesmente a quantidade total dos seus divisores naturais, sem encontrá-los, seguiremos os seguintes passos:

Primeiro deve-se fatorar o número 6.

$$2 \cdot 3 = 6$$

Pelo visto nas atividades anteriores, os divisores são encontrados fazendo combinações entre seus fatores primos, podendo conter ou não algum ou alguns destes fatores.

- O fator 2 pode estar ou não presente num divisor de 6.
- O fator 3 também pode estar ou não presente num divisor de 6.
- Ou seja, para o fator 2, existem duas possibilidades no divisor: estar ou não presente. E, para cada uma destas possibilidades existem outras duas para o fator 3, que também é o fato de estar ou não presente.
- Teremos então: $\underline{2} \cdot \underline{2} = 4$ possibilidades de divisores do número 6.

Neste caso, aparentemente foi mais trabalhoso fazer desta maneira do que encontrar seus divisores, mas normalmente fazendo assim minimizamos o trabalho.

Vejamos como fica o esquema:

$$\begin{cases} sem\ o\ fator\ 2 \begin{cases} sem\ o\ fator\ 3 \ \rightarrow\ 1 \\ \\ com\ o\ fator\ 3\ \rightarrow\ 3 \end{cases} \\ \\ com\ o\ fator\ 2 \begin{cases} sem\ o\ fator\ 3\ \rightarrow\ 2 \\ \\ com\ o\ fator\ 3\ \rightarrow\ 6 \end{cases} \end{cases}$$

Atividade 7

Também com referência a um número já estudado, o número 210, pode-se calcular a quantidade total dos seus divisores naturais, sem encontrá-los.

Para isso deveremos fatorar o número 210.

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

- Cada um dos seus fatores possui duas possibilidades: estar ou não presente no divisor de 210.
- Teremos então: $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 16$ possibilidades para divisores naturais de 210.

Atividade 8

Para o número 12, o procedimento é análogo, mas com algo mais.

Fatorando-o encontramos: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

- O fator 3 possui duas possibilidades: estar ou não presente no divisor.
- O fator 2 possui três possibilidades: não estar no divisor, aparecer uma única vez no divisor, ou, aparecer duas vezes no divisor.
- Para cada uma das duas possibilidades do fator 3 existirão três possibilidades para o fator 2: $\underline{2} \cdot \underline{3} = 6$ possibilidades de divisores.

  Esquematizando logo abaixo teremos:

$$\begin{cases} sem\ o\ fator\ 3 \begin{cases} sem\ \ o\ \ fator\ \ 2\ \rightarrow 1 \\ com\ \ um\ \ fator\ 2\ \ \rightarrow 2 \\ com\ \ dois\ fatores\ 2\ \ \rightarrow 4 \end{cases} \\ \\ com\ o\ fator\ 3 \begin{cases} sem\ \ o\ \ fator\ \ 2\ \rightarrow 3 \\ com\ \ um\ \ fator\ 2\ \ \rightarrow 6 \\ com\ \ dois\ fatores\ 2\ \ \rightarrow 12 \end{cases} \end{cases}$$

Como vimos, trata-se de uma ideia simples, surgida através da prática e de questionamentos, fortalecendo o cognitivo e favorecendo a interiorização do conteúdo e futuras conexões com outros tópicos.

4.5. FRAÇÕES

Este é um tópico em que aparentemente é difícil aplicar o Princípio Fundamental da Contagem com os conhecimentos adquiridos até este ano, mas, é possível.

Uma Fração Própria é aquela em que o numerador é menor que o denominador, ambos pertencentes ao conjunto dos números naturais (note que no 6° ano não trabalhamos ainda com o conjunto dos números inteiros). Portanto, podemos encontrar a quantidade total de frações próprias que podem ocorrer com denominador definido, independente da possibilidade de simplificação, para, posteriormente verificarmos apenas aquelas que não podem ser simplificadas.

Atividade 1

Poderemos procurar, então, a quantidade de frações próprias que podemos escrever com o denominador 5, por exemplo, utilizando apenas números naturais.

Notemos que, independente de podermos simplificar a fração, poderemos escrever para numerador os números 1, 2, 3 e 4, obtendo 4 possibilidades de frações.

Atividade 2

Procuremos agora, frações próprias com uma condição específica. Por exemplo, frações cujo numerador seja maior que um determinado número.

Quantas seriam as frações próprias com denominador igual a 15 e cujo numerador seja maior do que 7?

Por ser maior do que 7, deveremos escrever do número 8 ao número 14, encontrando 7 possibilidades. Neste momento pode-se revisar com os alunos como encontrar quantidades de números naturais entre dois outros números também naturais.

4.6. ESTUDO DAS POSSIBILIDADES

Trata-se de um tópico bastante comum em livros didáticos do 6° ano do Ensino Fundamental, embora alguns autores optem por dar início no 7° ano. Neste momento é apresentado o estudo das possibilidades de ocorrência de um determinado evento, tal como a escolha de tipos de vestimentas, tipos de alimentos, caminhos a serem percorridos, organização de livros em uma estante, pintura de bandeiras, maneiras de entrar e sair de uma sala com diversas portas, entre muitas outras formas de exploração do tema. O fato é que o aluno terá melhor entendimento desse assunto quando já tiver percorrido os tópicos anteriores a este. Não devemos nos esquecer de que nosso aluno está dando início à fase do *operatório-formal*, onde seu nível de abstração ainda é bastante limitado, determinando que se deixe os exemplos de maior interpretação para os anos posteriores.

Atividade 1

Nicole precisa arrumar-se para uma festa. Quando abre seu armário encontra duas calças e três blusas para escolher. De quantas maneiras diferentes Nicole poderá arrumar-se para ir a esta festa?

Denotemos as calças por: C_1 e C_2

Denotemos as blusas por: $B_1, B_2 \; e \; B_3$

Notemos que, para cada uma das calças que Nicole tem para escolher, poderá optar por qualquer uma das três blusas disponíveis, ou seja, para cada escolha de calça terá três opções de vestimenta. Como são duas opções de calças, ela terá no total, $2 \cdot 3 = 6$ opções para se vestir.

Possibilidades totais para vestimentas de Nicole: $\begin{cases} C_1 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{cases} \\ C_2 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{cases} \end{cases}$

Atividade 2

Nos mesmos moldes da Atividade 1, poderemos agora, escolher tipos de alimentos para compor uma refeição. Vejamos o seguinte exemplo:

Lívia chega a um restaurante e resolve almoçar feijão, arroz, salada e peixe. Quando olha para as opções, percebe que o restaurante oferece três tipos de feijão, dois tipos de arroz, cinco tipos de saladas e dois peixes diferentes. Sendo assim, de quantas maneiras diferentes Lívia poderá compor seu prato, escolhendo exatamente um tipo de cada um dos itens mencionados?

Vamos começar escolhendo feijão: teremos um total de três opções para esta escolha.

Ao escolhermos um tipo de arroz, onde teremos duas opções, estaremos com um total de $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades para compor um prato com feijão e arroz.

Para cada uma destas possibilidades haverá cinco tipos de saladas disponíveis. Teremos, portanto, um total de $6 \cdot 5 = 30$ possibilidades para compor um prato com feijão, arroz e salada.

Teremos ainda, mais duas possibilidades para a escolha do peixe, ou seja, para cada uma das 30 possibilidades anteriores, teremos mais duas opções para acompanhamento, totalizando $30 \cdot 2 = 60$ possibilidades para compor um prato com as opções oferecidas pelo restaurante.

Atividade 3

Suponhamos que a cidade de Rio Belo esteja separada da cidade de Rio Claro por exatamente três estradas, enquanto que entre as cidades de Rio Claro e Rio Bonito existam cinco estradas. De quantas maneiras poderíamos sair da cidade de Rio Belo e irmos até a cidade de Rio Bonito, passando por Rio Claro?

Pensando na primeira etapa da viagem, que seria ir da cidade de Rio Belo para a cidade de Rio Claro, teremos três possibilidades de escolha para uma estrada. E, para cada uma destas possibilidades, teremos ainda outras cinco possibilidades para sairmos de Rio Claro e irmos para Rio Bonito, totalizando $3 \cdot 5 = 15$ maneiras diferentes de sairmos da primeira cidade e irmos para a última.

Atividade 4

Ao organizar seus 4 livros diferentes em uma estante, um ao lado do outro, Lívia percebeu que poderia colocá-los de várias maneiras diferentes. Quantas seriam estas maneiras?

Importante observarmos que cada livro só poderá ocupar uma única posição na estante, sem levarmos em conta sua posição em relação à estante, mas sim, em relação aos outros livros. Teremos, então, quatro posições, as quais serão ocupadas por quatro livros. Sejam as lacunas ao lado representando as posições dos livros: $\_\_ \cdot \_\_ \cdot \_\_ \cdot \_\_$. Para a primeira posição teremos 4 opções de livros, para a segunda posição teremos 3 opções de livros, para a terceira teremos duas opções e para a última posição uma única opção. $\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 24$ maneiras diferentes de arrumar os livros.

5. PENSANDO NO 7° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

As aplicações feitas nas operações com números naturais poderão ser estendidas para os Números Inteiros, fato que aumenta sutilmente a dificuldade. Continuadamente aplicamos o *Princípio Fundamental da Contagem* na procura pelos múltiplos de um número inteiro, quantidade de divisores de um número natural ou inteiro, no estudo das Possibilidades, na Introdução ao Cálculo Algébrico, Produto Cartesiano e também de forma complementar no estudo da Probabilidade, que é trabalhada de maneira bastante superficial neste ano.

5.1. OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Neste momento, as aplicações do *Princípio Fundamental da Contagem* nas operações de adição e multiplicação observadas nos números naturais também poderão ser trabalhadas com os números inteiros, cabendo ao professor fazer a conexão de semelhança entre os conjuntos.

Ainda neste capítulo deverá ser reforçada a ideia de que nas operações de subtração e divisão, assim como no conjunto dos números naturais, não poderemos aplicar a propriedade comutativa, impossibilitando-nos da utilização do PFC para determinar a quantidade das possibilidades de obtermos os mesmos resultados nestas operações.

5.2. MÚLTIPLOS DOS NÚMEROS INTEIROS

Ao tratar dos números inteiros, trabalhamos com seus múltiplos. Poderemos então rever a forma de obtenção da quantidade de múltiplos de 2, 5 ou 10 com determinada quantidade de algarismos. Neste momento perceberemos que no conjunto dos números inteiros, basta que dobremos a quantidade dos múltiplos naturais, pois para cada número natural existe um número inteiro negativo de mesmo módulo.

Um cuidado muito importante que devemos observar é que quando procuramos os múltiplos de 2, por exemplo, que são menores do que 7, no conjunto dos números naturais, teremos como resposta os números 0, 2, 4 e 6, num total de 4 múltiplos. Mas, quando transcrevemos esta procura para o conjunto dos números inteiros, deveremos restringir um limite negativo também, especificando que procuramos os números inteiros entre -7 e 7 que são múltiplos de 2. Encontraremos, neste caso, os números -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, totalizando 7 múltiplos. Teremos, então, a observação de que nos casos em que o zero aparece como múltiplo, não poderemos dobrar a quantidade de múltiplos ao associar os Números Naturais com os Números Inteiros.

5.3. QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL OU INTEIRO:

Ao estudarmos potências no sétimo ano, suas propriedades são melhor exploradas, tornando o assunto mais familiar. Neste momento, poderemos voltar ao assunto trabalhado no 6° ano, que tratava da quantidade de divisores de um número natural. A diferença, é que agora, torna-se mais claro para o aluno fazer a associação entre as potências e o raciocínio anteriormente aplicado. Enquanto falávamos na ausência do fator primo, agora falaremos no mesmo fator elevado à potência zero. Quando falávamos na presença ou não de um determinado fator, agora falaremos neste fator elevado à potência zero ou à potência um. Quando um fator aparece duas vezes na decomposição de um número, estaremos então, dizendo que este fator poderá aparecer na composição de um divisor como tendo potência zero, um ou dois, e assim por diante, dando origem à tradicional fórmula para o cálculo da quantidade de divisores naturais de um número natural. Quando o assunto se tratar do conjunto dos números inteiros, basta que tomemos a quantidade encontrada para os naturais e a dobremos, pois para cada divisor natural, existirá o seu oposto dentro dos inteiros.

5.4. ESTUDO DAS POSSIBILIDADES

Há autores de livros didáticos que optam por iniciar este assunto no 7° ano do Ensino Fundamental, mas como pudemos notar, pode muito bem ser inserido ainda no 6° ano, com enunciados simples e de fácil compreensão, pois neste período o pensamento abstrato do aluno está iniciando seu desenvolvimento.

Já iniciada a fase do *operatório-formal*, no 7° ano, ele terá maior capacidade de entendimento de situações de maior interpretação, como muito bem abordado no livro *Vontade de Saber Matemática*[2]. Mas lembrando que nosso aluno ainda não está apto a desenvolver questões de grande complexidade, apenas com maior interpretação.

5.5. CÁLCULO ALGÉBRICO

Antes de dar início às expressões algébricas, apresentam-se para o aluno algumas sentenças matemáticas, distinguindo sentenças verdadeiras e falsas. Neste momento pode-se inserir o PFC como ferramenta para descobrir de quantas maneiras uma sentença matemática verdadeira pode ser escrita, preservando sua mensagem. Mas esta indagação deve ser feita de modo breve, sem entrarmos em detalhes ou expressões complexas. Eis alguns exemplos:

- $2 + 3 = 5$

Podemos escrever esta sentença das seguintes formas:

---

[2] Escrito por Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, 2ª ed. São Paulo: FTD, 2012. Volume destinado ao 7° ano do Ensino Fundamental.

$$\begin{cases} 2+3=5 \\ 3+2=5 \end{cases}$$

Neste momento deve ser observado que o primeiro membro da igualdade pode ser escrito de duas maneiras diferentes, concluindo que a sentença pode ser escrita de duas maneiras, já que o segundo membro só possui uma escrita.

- $1+2+4=7$

Podemos escrever esta sentença das seguintes maneiras:

$$\begin{cases} 1+2+4=7 \\ 1+4+2=7 \\ 2+1+4=7 \\ 2+4+1=7 \\ 4+1+2=7 \\ 4+2+1=7 \end{cases}$$

Observamos, então, que o primeiro membro da igualdade pode ser escrito de seis maneiras diferentes, concluindo que a sentença pode ser escrita de seis maneiras, já que o segundo membro só pode ser escrito de forma única.

Utilizando do PFC neste exemplo, poderemos escrever a sentença da seguinte forma: __ + __ + __ = __ , onde teremos três possibilidades para a primeira lacuna, duas para a segunda e uma única para a terceira, totalizando $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades de escrever o primeiro membro da igualdade, totalizando seis modos diferentes de escrever a sentença.

- $1+2+3+4<5+6$

Nesta sentença, poderemos variar tanto as posições do primeiro membro como as do segundo membro da desigualdade.

No primeiro membro teremos: __ + __ + __ + __ , onde teremos quatro possibilidades para a primeira lacuna, três para a segunda, duas para a terceira e uma única para a quarta lacuna, totalizando $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades diferentes de escrever o primeiro membro da desigualdade.

No segundo membro teremos: __ + __ , com duas possibilidades para a primeira lacuna e uma única para a segunda, totalizando $2 \cdot 1 = 2$ possibilidades diferentes para escrever o segundo membro da desigualdade.

Observaremos ainda que, para cada uma das vinte e quatro maneiras de escrever o primeiro membro da desigualdade, existirão duas possibilidades diferentes de se escrever o segundo membro. Concluímos, então, que existirá um total de $24 \cdot 2 = 48$ maneiras diferentes de escrever esta desigualdade.

Não é recomendado que se estenda nestas observações acerca das expressões algébricas, dando prosseguimento ao estudo do cálculo algébrico.

5.6. PRODUTO CARTESIANO

Na abordagem do Produto Cartesiano, normalmente não é mencionada a quantidade de pares ordenados que podem ser formados ao efetuar tal produto. E, quando mencionada aparece por meio de uma fórmula, ou seja, o número de pares ordenados que aparecem no Produto Cartesiano entre dois conjuntos A e B é dado pelo número de elementos do conjunto A multiplicado pelo número de elementos do conjunto B. Não é levado em conta o motivo desta multiplicação, que é um fato simples de ser entendido, principalmente por um aluno do 7° ano que já tenha uma introdução ao raciocínio utilizado no PFC.

Vamos exemplificar:

Se dado conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e outro conjunto $B = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$, quando fazemos o produto cartesiano AXB, formamos pares ordenados em que cada elemento de A associa-se a cada um dos elementos de B. Como já visto anteriormente, utilizaremos a ideia de que para cada elemento do primeiro conjunto, teremos 11 possibilidades para formação de um par ordenado. Como são 8 elementos neste primeiro conjunto, o total de pares ordenados, ou seja, o total de elementos de AXB é dado por $8 \cdot 11 = 88$.

É importante salientar que a ideia da contagem que está sendo aplicada no desenvolvimento deste questionamento é a mesma utilizada anteriormente em diversas outras aplicações, fazendo a conexão matemática entre vários assuntos que aparentemente estão destacados uns dos outros.

6. PENSANDO NO 8° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Em se tratando de 8° e 9° anos, as inserções do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)* começam a ficar escassas, pois o conteúdo matemático começa a ganhar maior formalidade, com conhecimentos mais específicos. Ressaltamos, com isso, a importância de que as abordagens feitas no 6° e 7° anos devam ser vivenciadas com bastante cuidado e muito bem vistas.

Contudo, novamente podemos explorar o *PFC* na multiplicação de polinômios, verificando que quando um polinômio possui A termos e outro polinômio possui B termos, ao multiplicarmos um pelo outro, encontramos um terceiro polinômio com exatamente AxB termos, sem considerarmos, é claro, uma possível adição entre termos semelhantes. Neste momento seria de grande valia a associação com o Produto Cartesiano.

Ao se trabalhar os princípios básicos da Estatística, num dado momento é apresentado o gráfico de setores, e, como de costume nos livros didáticos, os gráficos assim caracterizados aparecem coloridos, de maneira aleatória, estando cada setor com uma cor diferente dos demais. Poderemos, então, pesquisar junto ao nosso aluno, as variações que podem ocorrer ao pintarmos um gráfico de setores com duas, três ou quatro cores diferentes, em gráficos com dois, três ou quatro setores, apresentando, inclusive, algumas particularidades nesta pintura. Note a importância de que, para um aluno que se encontra no 8° ano, estas quantidades não sejam superiores a quatro, pois as diferentes formas de pintura devem ser expostas, o que tornaria o trabalho bastante exaustivo com quantidades maiores.

Com um pouco mais de Probabilidade nesta série poderemos continuar o processo que iniciamos no sétimo ano, introduzindo um pouco mais do *PFC* neste assunto, mas ainda de maneira simplificada. De acordo com experiências próprias, o máximo que poderemos explorar neste momento é a obtenção do espaço amostral com a utilização do *PFC*, conectando estes dois tópicos de estudo. Aplicações podem ser feitas aproveitando as abordagens dos anos anteriores, como por exemplo, a probabilidade de se escolher um determinado traje completo quando se dispõe de quantidades de calças, blusas e sapatos. Capturar aplicações anteriores e fazer pequenas inserções é um caminho bastante seguro para se buscar novos conhecimentos.

Ao trabalhar a contagem das diagonais de um polígono, por exemplo, abre-se espaço para verificação de outras situações que também exploram o raciocínio, mesmo que fora do *PFC*. Poderemos estender esta ideia para a quantidade de apertos de mão entre todas as pessoas presentes numa sala. Ou, a quantidade máxima de pontos que podemos obter com duas, três, quatro, cinco retas concorrentes, ou até mesmo n retas, concluindo uma relação entre o total de pontos e o número de retas. Esta última abordagem sugere, inclusive, a obtenção da soma de números naturais, de 1 até k. Posso assegurar que estas abordagens trazem dinamismo e bastante interesse dos alunos nas aulas.

7. PENSANDO NO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste momento deixa de ser uma tarefa direta trabalhar com o PFC, pois chegamos num momento em que os conteúdos são apresentados em tópicos curtos e não favorecem sua aplicação, pois as possibilidades de argumentações são reduzidas e quase nulas.

No entanto, ao começarmos o estudo dos polígonos regulares, onde neste ano há ênfase nos polígonos inscritos e circunscritos, fazemos uma breve revisão a respeito dos ângulos e diagonais dos polígonos. Com isso, estaremos dando continuidade à abordagem feita no 8° ano, quando procuramos o número total das diagonais, dos apertos de mão e dos pontos formados nas interseções de n retas. Dados três segmentos de reta de medidas diferentes, poderemos perceber que existem duas possibilidades para a formação de triângulos. Estendendo esta ideia para o quadrilátero, perceberemos, por construção, que existem seis possibilidades de formação deste polígono, utilizando-se de segmentos com medidas ou cores diferentes. Quando então poderemos criar situações específicas para a sua formação, como por exemplo, fixar um determinado lado.

Para um maior engajamento do *Princípio Fundamental da Contagem*, poderemos em determinados momentos de descontração e folga no conteúdo, tratar dos anagramas, que foi um assunto visto com números em séries anteriores. Estaremos introduzindo o conceito de permutações com letras ao invés de números, pegando uma ponte com palavras e números palíndromos, dentre outras características que possam surgir nestes anagramas. Fiz isso recentemente em uma escola, numa turma do 9° ano e o resultado foi fantástico. Totalmente sem formalidades, fui indagando meus alunos sobre as possibilidades de formação dos anagramas, inicialmente com duas ou três letras, para posteriormente criarmos um mecanismo para obtenção das quantidades e o interesse me surpreendeu, visto que é uma turma não trabalhada com o *PFC* nos anos anteriores. O quanto se pode explorar este assunto vai depender do interesse dos alunos e disponibilidade do professor, já que não se trata de conteúdo estabelecido como grade curricular para o 9° ano do Ensino Fundamental. Eis algo a ser pensado: por que não introduzirmos um tópico com o *Princípio Fundamental da Contagem* e suas aplicações neste ano escolar? Poderíamos então, revisar todas as aplicações do *PFC* já vistas desde o 6° ano, com leve profundidade. Tenho a certeza de que o ganho seria visível no decorrer do Ensino Médio.

8. BIBLIOGRAFIA

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática* – 6ª ed. São Paulo: Moderna, 2006. Obra em 4 v. para alunos do 6° ao 9° ano.

Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio, volume 2, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar, volume 5, 6ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

IEZZI, Gelson; Osvaldo Dolce, David Degenszajn; Roberto Périgo, Nilze de Ameida. *Matemática – Ciência e Aplicações, 2* ensino médio 5ª ed. São Paulo: Atual, 2010.

MUNARI, Alberto. Jean Piaget. Tradução e organização de Daniele Saheb. Coleção Educadores. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. Disponível em *http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me4676.pdf*. Acesso em 01/02/2014.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. *Matemática – Compreensão e Prática* – 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2008. Obra em 4 v. para alunos do 6° ao 9° ano.

SOUZA, Joamir Roberto; Pataro, Patrícia Rosana Moreno. *Vontade de saber matemática* 2ª ed. São Paulo: FTD, 2012. Obra em 4 v. para alunos do 6° ao 9° ano.

9. APÊNDICE:

Segue o questionário realizado:

1) Com relação a sua formação, você possui: (fique a vontade para marcar mais de uma opção)

( ) graduação incompleta.
( ) graduação completa.
( ) pós-graduação.
( ) mestrado incompleto.
( ) mestrado concluído.
( ) doutorado incompleto.
( ) doutorado concluído.

2) Você possui experiência: (esteja livre para marcar mais de uma opção)

( ) na rede pública de ensino básico.
( ) na rede pública de ensino superior.
( ) na rede particular de ensino básico.
( ) na rede particular de ensino superior.
( ) no preparatório para concursos vestibulares.

3) Sua preferência em Matemática está no raciocínio: (esteja livre para marcar mais de uma opção)

( ) algébrico.
( ) geométrico.
( ) aritmético.

4) Qual a sua afinidade em relação à Análise Combinatória? (marque uma única opção)

( ) não gosto, não sei e não leciono.
( ) não gosto, tenho pouco conhecimento e não leciono.
( ) não gosto, tenho pouco conhecimento, mas leciono quando solicitado.
( ) não gosto, tenho bom conhecimento do assunto e leciono se solicitado.
( ) gosto, tenho pouco conhecimento e não leciono.
( ) gosto, tenho pouco conhecimento, mas leciono.
( ) gosto, tenho bom conhecimento, mas dificuldade em transmitir.
( ) gosto, tenho bom conhecimento e facilidade em transmitir.

5) Com sua experiência, você acha que o Princípio Fundamental da Contagem pode ser visto com mais ênfase em séries anteriores: (marque uma única opção)

( ) desde o 6° ano do Ensino Fundamental.
( ) desde o 7° ano do Ensino Fundamental.
( ) desde o 8° ano do Ensino Fundamental.
( ) desde o 9° ano do Ensino Fundamental.
( ) desde o 1° ano do Ensino Médio.
( ) não, deve permanecer no 2° ano do Ensino Médio.
( ) prefiro não opinar, por me faltar experiência nas séries em questão.

6) No ensino da Análise Combinatória, utiliza fórmulas em todo o processo? (marque uma única opção)

( ) sim, sempre que vou introduzir uma abordagem nova.
( ) sim, como apoio na fixação do conteúdo.
( ) não utilizo fórmulas no ensino deste assunto.

7) Você teria segurança para desenvolver de forma básica, de imediato, e sem utilizar qualquer fórmula, uma aplicação: (esteja livre para marcar mais de uma opção)

( ) do Princípio Fundamental da Contagem?
( ) de Permutação Simples?
( ) de Permutação com Repetição?
( ) de Permutação Circular?
( ) de Arranjo?
( ) de Combinação?

8) Qual a importância que você dá ao estudo da Análise Combinatória? (marque apenas uma opção)

( ) não vejo importância relevante.
( ) possui pouca importância prática.
( ) importante para a formação geral.
( ) essencial para a boa formação geral .

9) O que você acha de ser ensinado o Princípio Fundamental da Contagem no Ensino Fundamental, desde o 6° ano, aplicado a vários conteúdos da própria matemática, ao longo de todo o Segmento? (marque uma única opção)

( ) uma péssima ideia.
( ) ruim, pois os alunos são muito imaturos ainda.
( ) talvez possa ser interessante, mas a dificuldade será grande.
( ) uma boa ideia.
( ) seria fundamental para aprendizados futuros.

10) Por favor, para possíveis contatos futuros que visem o melhoramento do processo de ensino-aprendizagem, insira seu nome (opcional), endereço de e-mail, Estado e Município. Agradeço a sua colaboração.