

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Programa Nacional de Mestrado Profissional em Matemática -

PROFMAT

**USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS
NA REVIGORAÇÃO DO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA.**

por Demétrius Melo de Souza

Orientador: Mestre Eduardo Wagner

RIO DE JANEIRO

2014

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Programa Nacional de Mestrado Profissional em Matemática -

PROFMAT

USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NA REVIGORAÇÃO DO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA.

por Demétrius Melo de Souza

Orientador: Mestre Eduardo Wagner

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, para obtenção do título de Mestre pelo Programa nacional de Mestrado profissional em Matemática - PROFMAT.

RIO DE JANEIRO

2014

ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω

"Quem não souber geometria, não entre."

Inscrição na entrada da Academia de Platão 387 AC.(possivelmente só uma lenda).

Agradecimentos

A Isaak Moiseevitch Yaglom.

À Profª Arilene (1ª à 3ª séries primárias) e
à Profª Celene, de Língua Portuguesa, ginásio,
ambas da Escola Municipal Leônidas Sobrinho Pôrto, em Bangu.

Ao Prof. Paulo Nobre (turma de oficiais-alunos - Tamandaré, 1988).

Ao saudoso Prof. Augusto César Morgado e
ao Prof. Eduardo Wagner,
com cujos livros me iniciei e me apaixonei pela Geometria.

Ao Prof. Flávio Dickstein,
ao Prof. Felipe Acker e
ao Prof. Rolci Cipolatti.

Todos do Instituto de Matemática da UFRJ.

A maior parte dos citados sequer tem ideia
da importância que tiveram em minha vida e em minhas escolhas.

Ao meu pai e à minha mãe.

Resumo

SOUZA, Demétrius Melo de. Uso de Transformações Geométricas na Revigoração do Ensino de Geometria Plana. Trabalho de fim de curso para obtenção do título de Mestre; orientador: Mestre Eduardo Wagner. PROFMAT, IMPA, 2004.

Este trabalho faz uma reflexão sobre o que de fato estudamos - ou deveríamos estudar - em geometria plana nas escolas primária e secundária (níveis Fundamental e Médio), no Brasil. Incentiva o uso de isometrias como ferramentas para auxiliar os alunos na tarefa de atingir os níveis mais elevados de abstração matemática. A abordagem é guiada por Isaak Moiseevitch Yaglom, nos seus volumes de Transformações Geométricas I e II ([1] e [2]) para o ensino e aprendizado de Geometria Euclideana Plana. São resolvidos uma série de problemas com diferentes graus de complexidade - alguns inéditos, outros amplamente conhecidos - fazendo uso das ferramentas abordadas, quais sejam: a Translação, a Rotação e a Reflexão. As resoluções foram desenhadas com o software Geogebra e animadas, em seguida, resultando em vídeos que poderão ser utilizados para difundir o conhecimento entre professores e, por estes, para ensinar seus alunos. Propõe a utilização de materiais e metodologias alternativas, assim como uma possível resposta para a pergunta: "Por que ensinar - ou aprender - Geometria?".

Abstract

This work is a reflection on what we actually study - or should do - in plane geometry in primary and secondary schools in Brazil. Encourages the use of isometries as tools to assist students in the task of achieving the highest levels of mathematical abstraction. The approach is guided by Isaak Moiseevitch Yaglom in his volumes of Geometric Transformations I and II ([1] and [2]) for the teaching and learning of Plane Euclidean Geometry. Namely, a series of problems varying degrees of complexity are solved - some unpublished, some widely known - making use of the tools discussed such as : Translation, Rotation and Reflection. Solutions were drawn with Geogebra (software) and animated, then, resulting in video files that can be used to raise awareness among teachers and, through these, to teach their students. The use of alternative materials and methodologies are proposed, as well as a possible answer to the question: "Why teach - or learn - Geometry?".

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Quais são os objetivos deste trabalho?	12
1.2	Quais não são os objetivos deste trabalho?	14
1.3	Metodologia e apresentação	15
2	Apresentando o Método	18
2.1	Começando pelo problema resolvido	18
2.2	Movimentos Rígidos no Plano (e fora dele).....	18
2.2.1	Translação	19
2.2.2	Rotação	24
2.2.3	Reflexão (ou simetria) com relação a uma reta	34
3	Questões Resolvidas	44
3.1	Demonstrações (quase) visuais.....	44
3.2	Questões que envolvem (muitas) contas	61
4	Formalização de Conceitos	79
4.0	Transformações e Classes de Equivalência	79
4.1	Translação	83
4.2	Rotação	85
4.3	Composição de transformações.....	94
5	Abordando o assunto	99
5.1	O que é? O que não é?	100
5.2	Sugestões de materiais e metodologia para uso em sala de aula.	101
6	Afinal, por que ensinar Geometria?.....	105
	O que é Geometria? (Segundo Isaak Moiseevitch Yaglom)	110
	Tradução.....	110
	Notações e Convenções Utilizadas	117
	Recursos Utilizados	118
	Bibliografia	123

1 Introdução

A educação (em especial, a educação matemática) passou por grandes mudanças na últimas décadas. Um dos pontos altos de toda esta revolução certamente foi a era do “prova não prova nada” (que, na verdade, deveria ter sido entendido com “prova não prova tudo”) e que culminou com a panaceia da aprovação automática na maior parte das escolas da rede pública de níveis Fundamental e Médio do Brasil¹.

Os efeitos negativos destas novidades didáticas foram sentidos sobremaneira pela população mais carente, mantendo analfabetizada² toda uma geração, com implicações econômicas, sociais e culturais ainda difíceis de mensurar. A matemática, por ser uma das disciplinas do núcleo comum, não passou ilesa por todas estas transformações.

Uma das grandes mudanças certamente foi a aparentemente permanente execração do "Calcule x". A escola deixou de focar o ensino no tecnicismo algébrico e passou a valorizar mais a contextualização, ou melhor, a aplicação da matemática no cotidiano e nas ciências que se relacionam de alguma forma com o dia a dia do aluno e da sociedade em que ele se encontra inserido.

Este movimento provocou uma reformulação quase radical na forma - e até no teor - como os conteúdos passaram a ser ministrados.

Dentre os efeitos promissores, destaca-se a busca por respostas - antes solenemente ignoradas - para perguntas como "por que estamos aprendendo isso?".

Já como efeitos retrógrados, convém citar a quase extinção – salvo em escolas mais tradicionais ou de excelência - de disciplinas como a álgebra básica

¹ Uma rápida, porém muito lúcida discussão sobre o tema da aprovação (ou progressão) automática pode ser encontrada em DEMO [5] e [8].

² O que afirmei, eu o fiz baseado em minha experiência de décadas de magistério e, ainda, enquanto cidadão politizado. O fato da sociedade hoje repudiar a aprovação automática já é uma evidência bastante forte de que os efeitos deste "projeto político-pedagógico" foram desastrosos. Há, entretanto, uma vasta gama de materiais acadêmicos sobre o assunto, entre os quais posso citar FERREIRA [12] e VIÉGAS [13].

e a geometria plana, ensinadas no curso Fundamental. Como o foco passou a ser a contextualização com o cotidiano, não foi nada fácil de se encontrar aplicação simples e imediata no dia a dia comum para coisas como fatoração de polinômios e a maior parte dos problemas resolvidos num curso convencional de Geometria Plana. Apenas como digressão, talvez não tenha havido tempo ainda para que a sociedade entenda que algumas - na verdade, muitas - ferramentas matemáticas possuem seu escopo de aplicação quase que exclusivamente na própria matemática. Tolher os alunos do domínio destas ferramentas fará com que o domínio de outras, com aplicabilidade mais óbvia mas que tenham como pré-requisito aquelas ferramentas, seja quase que impossibilitado.

A rigor, o ensino de Geometria já estava bastante deficiente, mesmo antes da década de 90, sobretudo nas escolas públicas brasileiras, por conta de outros fatores que se sobrepunham uns aos outros por décadas, sendo o principal deles, talvez, a incapacidade de alunos e professores de lidarem com o conteúdo na forma proposta. No que tange aos alunos, ressaltam-se a carência de pré-requisitos técnicos para manipulação das equações e expressões algébricas utilizadas e o fato de normalmente o material didático, assim como a metodologia utilizada pelo professor, não estarem em sintonia com o grau de abstração acessível aos alunos em classe. Segundo o modelo de Van Hiele, a comunicação fica muito prejudicada se as partes se encontram em níveis distintos de abstração (propriedade da separação, em USISKIN [9] p. 5). Com relação aos professores, uma parcela considerável ainda não domina - ou não se sente à vontade em lecionar - o conteúdo presente nos livros didáticos (PAVANELLO [6] pag. 8 a 10), o que pode ser visto como resultado da falha na condução do conteúdo enquanto estes mestres eram alunos, gerando um mecanismo de feedback negativo. Em outras palavras, este ciclo vicioso começa quando o aluno não aprende e, portanto, conclui que não gosta da matéria. O curso de licenciatura, por sua vez, em geral, não consegue mudar a sua forma de encarar a realidade e ele acaba entrando em sala de aula ainda com a forma de enxergar a Geometria consolidada na adolescência, o que faz com que ele se esquive de ensinar (e aprender) a disciplina fabricando, assim, mais alunos refratários à matéria.

Não é de todo absurdo inferir que, mais do que simplesmente não saber "para que serve a Geometria", o método utilizado pela escola limitando-se - não raro - ao emprego imediato de fórmulas e à algebrização de problemas³ é uma das razões, se não a principal delas, para declínio do ensino da Geometria. E com relação a este declínio, há boas razões para acreditar que este efeito de aniquilação da Geometria não é uma particularidade do Brasil. WHITELEY [11] exhibe estatísticas que indicam clara queda da produção científica na área, da quantidade de professores dedicados à disciplina e do percentual da carga horária dedicado à Geometria tanto nos cursos de Graduação quanto no Nível Médio na América do Norte ao longo do século XX. O texto também sugere, como já foi feito aqui, que estes fatores não ocorrem isoladamente, mas se interferem e se acentuam - em ressonância - para, ao longo de gerações, chegarmos ao quadro que se apresenta hoje para a sociedade.

Um ponto importante a se questionar é: isso é importante? Ou seja, será que este abandono do ensino da Geometria - como milenarmente tem sido ministrado - não é bom para a Escola do nosso mundo globalizado? Na verdade, perguntar isso é quase o mesmo que perguntar "por que estudamos Geometria?". Este caminho continuará a ser seguido ao longo dos próximos parágrafos até o fim deste trabalho. Mas, de antemão, é possível ressaltar que há algumas razões - que não serão tratadas com profundidade neste texto - que denunciam de forma bastante contundente a importância do ensino de Geometria, pelo menos no nível Fundamental. Entre elas, o aprimoramento de habilidades ligadas a: representação e medição do espaço (físico ou não), visualização espacial (noções de profundidade e perspectiva), compreensão e elaboração de esquemas e diagramas (pensamento visual), investigação, experimentação, ordenação, classificação, criatividade⁴.

³ O foco do problema é resolver uma equação. Problemas assim são encontrados facilmente em coleções de matemática no Brasil. Por exemplo, duas retas se intersectam em um ponto e são mostrados dois ângulos (opostos pelo vértice), um deles vale $2x+60$, o outro vale $3x+30$. Pede-se os valores dos ângulos.

⁴ Muito já foi escrito sobre as habilidades desenvolvidas pela Geometria com crianças. Convém citar SOARES ([7] p. 49 a 52), WHITELEY ([11] p. 7 e 8). Muitas destas habilidades - sobretudo as que lidam com aspecto concreto e descritivo da disciplina - podem ser desenvolvidas também através de outras atividades, como a dança, a pintura etc. Por conta disso, e pelo fato deste trabalho

No rumo de responder à pergunta "por que estudamos isso?", o ensino da maior parte dos tópicos - e problemas - da geometria plana permanece sem resposta. Para a maior parte das aplicações cotidianas e até mesmo para as aplicações na própria matemática, considerando apenas as habilidades desenvolvidas quase que exclusivamente pela Geometria (excluindo-se disposição, organização e compreensão espacial, criatividade etc), pouca coisa será necessária além de:

- conhecimento raso das definições e axiomas elementares;
- trigonometria básica e lei dos cossenos (tendo como caso particular o Teorema de Pitágoras, é claro);
- a noção de área e perímetro de alguns poucos polígonos e do círculo;
- conhecimento raso de semelhança de triângulos.

Até mesmo cursos essencialmente ligados à Matemática (Engenharia, por exemplo) não utilizam em suas principais cadeiras aplicabilidade para a maior parte dos problemas tratados num curso tradicional de geometria plana. Para ser mais preciso, vou limitar o escopo desta análise aos cursos de Cálculo, Análise, Álgebra, Álgebra Linear, Geometria Diferencial e até mesmo Geometria Descritiva. Os cursos de Licenciatura, em contrapartida, não são uma exceção. Historicamente falando (pelo menos até o fim do século passado), não têm sido capazes de instrumentar suficientemente bem os futuros professores tanto para o ensino quanto para o próprio aprofundamento da disciplina e dos métodos utilizados. Entendo que a ênfase exagerada dada nestes cursos a matérias que ficam completamente fora do escopo de conteúdos lecionados (muitos semestres de Cálculo e Análise, por exemplo), assim como o excesso de disciplinas pedagógicas puramente teóricas e generalistas (em detrimento de disciplinas que explorem efetivamente as necessidades que o futuro professor terá de conteúdo e ferramentas quando se formar) são fatores decisivos para que o profissional de magistério chegue ao mercado de trabalho sem condições suficientes para se encantar e desempenhar com maestria o ensino da Geometria. Já entrando no

estar focado sobremaneira para municiar professores de nível médio, meus melhores argumentos justificando a necessidade do ensino de Geometria serão guardados para as seções finais deste trabalho.

século XXI, esta tendência, entretanto, não parece mais irreversível. A popularização de softwares de Geometria Dinâmica⁵ e o seu uso incentivado pelos cursos oferecidos pelo IMPA e SBM destinados à atualização e reciclagem de professores da rede pública, assim como a popularização das Olimpíadas de Matemática (com destaque para a OBMEP) são algumas iniciativas que certamente podem fomentar a revitalização do ensino da Geometria em moldes mais eficientes e promissores.

Apesar do quadro que foi pintado nos últimos parágrafos, a geometria é uma das mais antigas ciências e tem feito parte do currículo escolar praticamente desde que a própria instituição "Escola" foi "inventada". Deve haver, portanto, alguma razão, suficientemente forte, para justificar o ensino de Geometria num nível mais sofisticado do que apenas o básico necessário para cobrir as aplicações que aparecem no dia-a-dia.

A pergunta a ser respondida, então, seria: "Por que aprender geometria?".

Antes disso, seria bastante oportuno se pudéssemos responder de forma compreensível para alunos dos níveis Fundamental e Médio a pergunta: "O que é geometria?".

As introduções dos volumes I e II do livro de transformações geométricas (traduzidos para o inglês) do YAGLOM ([1] p. 4-8 e [2] p.7-14), parecem cumprir bem este e outros requisitos. Por conta disso, este trabalho será inspirado e, na verdade, guiado, nas ideias que lá estão.

1.1 Quais são os objetivos deste trabalho?

1. Utilizar a noção de geometria apresentada nas introduções do Yaglom ([1] p. 4-8 e [2] p.7-14), e amplamente utilizada na referida obra, a título de proposta pedagógica, para que ela:
 - I. Norteie alguns tópicos de geometria ministrados no nível Fundamental.

⁵ O Geogebra possui um papel decisivo, mas não podemos desprezar outros de grande importância como o Sketch Pad, o Cabri e o CAR.

- II. Seja efetivamente apresentada para alunos de nível Médio, onde uma ampla reflexão sobre o assunto passaria a fazer parte do conteúdo de geometria ministrado neste período, em lugar de uma mera repetição ou de um aprofundamento técnico do conteúdo já visto no curso Fundamental.
2. Apresentar e resolver, num formato bem mais amigável do que os utilizados nos textos ora disponíveis, problemas fazendo uso de isometrias, muitos deles já amplamente conhecidos até mesmo pelo público com pouca escolaridade. Com relação aos problemas de construção, principalmente os disponíveis no YAGLOM [1], como o conteúdo ministrado no Brasil possui basicamente o objetivo de calcular alguma grandeza, alguns dos problemas lá propostos sofreram adaptações no sentido de transformar parte deles em problemas de cálculo.
 - I. Como o cálculo depende, em parte ou no todo, de um processo de construção, foi utilizado o Geogebra como ferramenta para realizar estas construções; ferramenta esta que pode ser perfeitamente substituída, no caso de não haver interesse ou possibilidade da escola utilizar um computador, por réguas (ou esquadros) e compasso. Todos os arquivos utilizados estarão disponíveis quem quiser repetir ou interagir de alguma forma com as construções utilizadas. O objetivo, com isso, é incentivar o uso do Geogebra como ferramenta alternativa ao uso dos instrumentos tradicionais para desenho - já citados -, pelo menos, para alunos com idade e experiência prévia (com estes instrumentos) adequados para esta abordagem.
3. As ferramentas teóricas utilizadas neste trabalho (translação, rotação e reflexão), além de serem amplamente utilizadas em outros contextos, como álgebra linear, cinemática e dinâmica rotacional de corpos rígidos, oferecem um escopo de aplicações que, embora ainda não estejam no nível das aplicações cotidianas, podem auxiliar bastante os alunos que se candidatarem aos cursos de ciências exatas na Universidade, cursos estes

que possuem atualmente, em geral, alto grau de reprovação. Isso, por si só, já cumpre parte de um dos objetivos deste trabalho, que é fornecer uma resposta bem fundamentada à pergunta feita originalmente: “Por que aprender Geometria?”. Além disso, são destacadas uma série de demonstrações que são extremamente simples - e divertidas - de serem feitas (a soma dos ângulos externos de um polígono convexo, por exemplo) com as ferramentas citadas, se comparadas com as que são utilizadas atualmente pela escola tradicional.

4. A maior parte do esforço para forjar este trabalho foi dedicado a construir as animações que resolvem os problemas e demonstram parte dos teoremas utilizados ao longo deste texto. Espero, com isso, que estas animações se revelem como um agente facilitador - e incentivador - para alunos e professores no estudo das transformações geométricas.
5. Ainda com relação à pergunta “Por que aprender Geometria?”, a própria discussão capaz de nos levar cada vez mais perto de respondê-la pode ser uma razão para “aprender Geometria”, uma vez que permite - ou melhor, condiciona e, em alguns casos, obriga – uma reflexão organizada e sistemática sobre algo realmente complexo. Esta experiência de refletir de forma sistemática e organizada sobre assuntos complexos talvez seja, em última análise, a verdadeira razão da geometria estar entre os conteúdos de núcleo comum da Escola, como a conhecemos, desde quando ela foi fundada.

1.2 Quais não são os objetivos deste trabalho?

1. Esgotar os temas apresentados.
2. Definir rigorosamente o que vem a ser geometria. Acredito que, como faz o YAGLOM ([1] e [2]), e inclusive como proposta para o estudo de demais temas complexos, apresentar – sob vários prismas - o que parece ser e o que não parece ser geometria, ajudará bem mais na sua conceituação do

que simplesmente apresentar uma resposta pronta, mesmo que esta já seja amplamente aceita pela sociedade acadêmica.

3. Substituir o texto do YAGLON [1]. O foco deste trabalho está no primeiro volume. Mesmo assim, não foram explorados em detalhes sequer metade dos problemas que lá estão (as razões de ter optado por este caminho serão detalhadas mais adiante). Para quem deseja se aprofundar no assunto, a leitura detalhada do texto "original" (de qualquer das suas traduções) faz-se imprescindível.
4. Incentivar a substituição dos instrumentos tradicionais de desenho pelo Geogebra. Considero fundamental que a primeira abordagem em Desenho Geométrico seja feita com as ferramentas físicas tradicionalmente utilizadas, como a régua, o compasso, os esquadros e o transferidor. Só após dominar o uso destas ferramentas mostra-se benéfica a apresentação do Geogebra ou de qualquer outro software de desenho.

1.3 Metodologia e apresentação

Há uma série de excelentes livros que tratam do assunto principal deste trabalho, quais sejam, as "Transformações Geométricas", ou os "Movimentos Rígidos", para ser mais específico. Só para citar alguns, além do YAGLON [1], destaca-se PETERSEN ([16] capítulos 2 e 3) e COXETER ([17] cap. 4). Ocorre que a maior parte da boa literatura existente (parte inclusive disponível na web) oferece alguns - ou muitos - obstáculos à utilização pelo professor ou pelo aluno mais curioso. A maior parte delas está em inglês, ou em livros de difícil acesso, ou em linguagem de difícil acesso (muitos focam exclusivamente construções, por exemplo; assunto que, em geral, não compõe a ementa dos cursos nas escolas brasileiras). Além disso, o assunto normalmente pressupõe a utilização de movimentos no plano para a resolução dos problemas; e todo o conteúdo (exceto em alguns poucos sítios da internet) encontra-se estático, muitos deles sequer contêm boas figuras para auxiliar a imaginação.

Desta forma, não me parecia coerente trabalhar para criar mais um material que, além de não ser tão completo como alguns dos citados, contivesse os mesmos problemas. A solução foi dar movimento ou, ao menos, dividir a explicação em etapas, junto com a pertinente sequência de figuras, de forma a tornar a comunicação entre nós e o leitor mais amigável. Por isso, a opção pelos vídeos para a maior parte dos problemas e teoremas trabalhados nas páginas seguintes. Os problemas e teoremas são apresentados, mas, embora haja uma explicação textual e estática, é oferecida, como alternativa, um link que remete o leitor a um vídeo em que o problema, ou teorema, é resolvido, ou demonstrado, de uma forma que certamente tornará mais fácil o acompanhamento e assimilação por mestres e facilitará a exposição do assunto para os seus alunos. Produzir um vídeo que resolva um problema é bem mais trabalhoso do que produzir a versão estática da resolução do mesmo problema. Por conta desta escolha, e da necessidade de criar problemas mais adaptados ao contexto da educação brasileira, o trabalho acabou sendo produzido com uma quantidade menor de exemplos do que gostaria, mas que acabou não se limitando meramente a repetir as questões encontradas no YAGLOM [1]. Há, portanto, questões e teoremas de várias fontes, embora o importante, de fato, não sejam as questões ou teoremas em si - muitos dos quais amplamente conhecidos pela comunidade - e, sim, a forma de resolvê-los e as ferramentas utilizadas.

Também evitei repetir a sequência didática - amplamente utilizada na Escola brasileira - que inicia a apresentação do conteúdo para o aluno pela demonstração, que, em verdade, encontra-se quase no fim da lógica biológica do processo de aprendizado. Portanto, na Seção 2 o foco está em mostrar a aplicabilidade das transformações enunciando apenas as propriedades e as ilustrando com exemplos simples. São mostradas algumas das vantagens que podemos obter ao olhar a Geometria sob este novo prisma.

Além do fato de os movimentos rígidos serem amplamente utilizados no cotidiano, é um dos objetivos deste trabalho mostrar que é possível utilizá-los sem acrescentar ao conteúdo já ministrado (muito) mais teoremas e conceitos abstratos. Por conta disso, nas seções 2 e 3, o conteúdo teórico básico exposto

será propositalmente pueril. A resolução dos problemas com base neles será, entretanto, rigorosa.

O uso exaustivo da técnica se dará na Seção 3.

O assunto será tratado com um rigor maior quanto aos fundamentos mais elementares - ou intuitivos -, inclusive demonstrando teoremas utilizados, somente na Seção 4. Na condução dos conteúdos em sala de aula, sugiro deixar a Seção 4 por último, trabalhando-a apenas depois que os alunos dominarem as ferramentas básicas ou manifestarem interesse em se aprofundarem no assunto.

Como brilhantemente explicado pelo próprio Isaak Moiseevitch Yaglom, a Geometria, como a utilizamos, não pode ser caracterizada somente por rotações, translações e reflexões (simetrias). Estas transformações, apesar de comporem um conjunto autossuficiente a ponto de definir uma Geometria (isso será visto em mais detalhes mais à frente), não caracterizam a Geometria - que estamos acostumados a usar - que, não raro, reconhece como indistinguíveis não apenas figuras congruentes, mas, também, figuras semelhantes. Uma pergunta que merece ser respondida é: por que não tratar toda a obra (volumes 1, 2 e 3), restringindo o trabalho apenas aos movimentos rígidos? Dissecar sobre o conteúdo de todos os volumes (YAGLOM [1], [2], [15]) tornaria a obra tão longa que a afastaria do seu objetivo, que é, além de mostrar a técnica, estimular a reflexão sobre o porquê de aprendermos Geometria. Além disso, o tempo para concluir o trabalho teria que ser muito maior se pretendesse manter o mesmo padrão de qualidade utilizado neste. Por último, a receptividade de uma obra tão extensa para um assunto tão aparentemente fora de eixo teria grande chance de afastar os leitores, distanciando este trabalho ainda mais de outro dos seus objetivos, que é a divulgação deste conteúdo para alunos e mestres de todo o país.

2 Apresentando o Método

2.1 Começando pelo problema resolvido

Problemas de construção, não só no YAGLOM [1], mas em praticamente todos os livros de construções geométricas do mercado, começam pela "Presunção do Problema Resolvido". Ou seja, começamos a resolvê-lo perguntando:

Se o problema já estivesse resolvido, que propriedades poderíamos assegurar que existiriam entre todos os seus elementos?

2.2 Movimentos Rígidos no Plano (e fora dele)

O estudo de uma geometria baseando-se em Transformações Geométricas não irá jogar fora o que sabemos de Geometria Euclideana. Ao contrário, achar um conjunto de transformações que caracterize exatamente aquilo de que a nossa mais popular Geometria trata irá nos ajudar a aproveitar de forma mais plena tudo que já sabemos. Portanto, o que será feito é tão somente adicionar a toda a rede de axiomas e teoremas, algumas ferramentas que, apesar de serem desconcertantemente simples e intuitivas, solucionam problemas que, mesmo para um iniciado na Geometria Euclideana tradicional, pareceriam insolúveis.

Há muito o que definir e conceituar aqui. As ideias teóricas em que se baseia este trabalho não são inéditas; só o texto em que está baseado este trabalho (o YAGLOM) possui mais de meio século. E este texto está radicalmente inspirado nas ideias de Felix Christian Klein, que, no final do século XIX, através do "*Erlanger Program*", fornecia uma resposta à pergunta "O que é Geometria?", que inquietava os matemáticos no furor do renascimento da Geometria no século XIX, criando uma ponte extremamente elegante com a Teoria dos Grupos (e a álgebra, obviamente). Geometria poderia ser vista, então, como *"a ciência que estuda as propriedades das figuras que são preservadas pelas transformações de um certo grupo de transformações ou, como se diz, a ciência que estuda os*

*invariantes por um grupo de transformações*⁶. Portanto, sem necessidade de fazer uma pesquisa mais detalhada, os conceitos tratados aqui já estão estabelecidos há mais de 140 anos, o que permite uma certa liberdade para retirar o foco das demonstrações e transferi-lo para o que, em geral, consolida de fato o aprendizado em matemática, que são os exercícios.

Na verdade, os vários tipos de "movimentos rígidos" são ferramentas de elevado teor intuitivo que podem ser utilizadas com crianças ainda no primeiro segmento do nível Fundamental, ou, falando mais amplamente, com qualquer público que esteja nos dois estágios iniciais do modelo de Van Hiele, não importando muito as suas idades, padrão cultural ou socioeconômico.

Como o texto estará sempre abordando transformações (e movimentos), haverá no contexto da explicação sempre uma figura que é transformada em (ou movida para a posição de) uma outra. Neste texto, dois pontos ou segmentos são ditos homólogos se um é imagem do outro por esta transformação, ou ainda se, mediante o movimento proposto, um deles é feito coincidir integralmente com o outro.

2.2.1 Translação

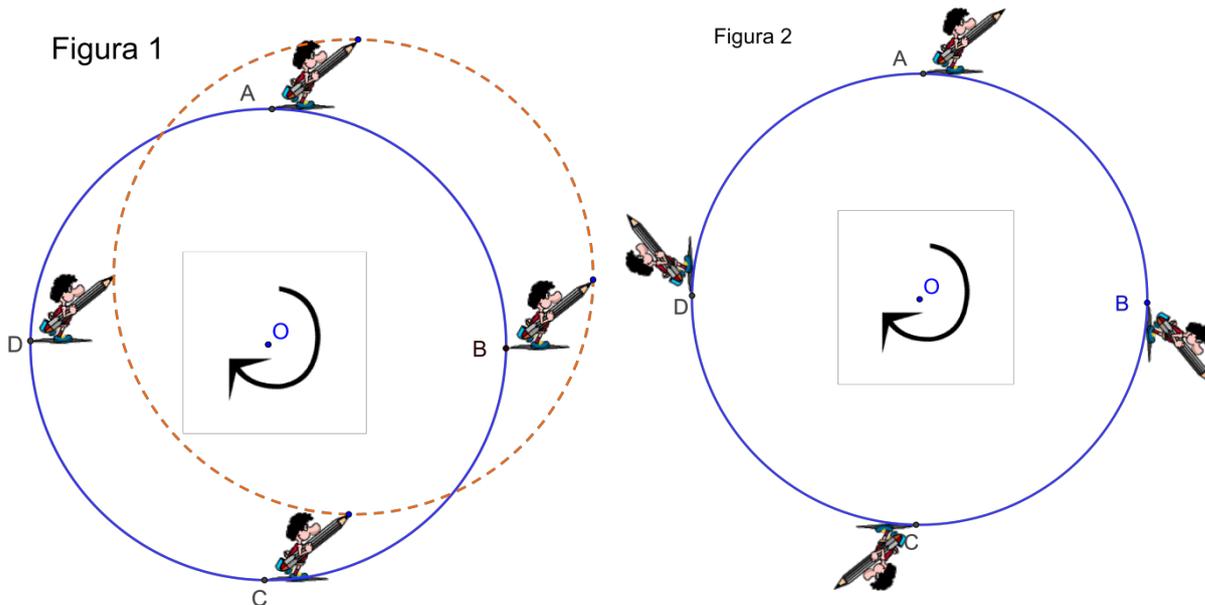
Transladar uma figura é o mesmo que movê-la no plano sem rotacioná-la. Apesar desta "definição" ser curta e aparentemente precisa para boa parte das pessoas que têm contato com ela pela primeira vez, ela se utiliza de um conceito que não foi exposto ainda, que é a rotação. Isso pode causar alguma confusão.

Considerando as figuras abaixo...

Na primeira, o boneco (Flaudemíglío) foi "arrastado" ao longo da circunferência azul pela sequência de pontos ABCDA, mas seu lápis (e todo o resto da figura) possui sempre a mesma inclinação. Se forem considerados dois pontos quaisquer no boneco posicionado, por exemplo, em A, o segmento que os liga será paralelo ao segmento que liga os mesmos dois pontos no boneco

⁶ YAGLOM [18] p.115. Para melhor entendimento de todo o contexto, da fundamentação e das implicações o "Erlanger Program" ("Erlangen" era o nome da universidade onde Felix Klein lecionava em 1872), recomendo fortemente a leitura de, pelo menos, o capítulo 7 de YAGLOM [18].

posicionado em qualquer outro ponto (B, C ou D). Se considerarmos um ponto qualquer do boneco, sim, efetuamos uma rotação daquele ponto com relação a algum centro (na Figura 1, em geral, para pontos diferentes, teremos centros diferentes). Isso, por si só, já nos impede de considerar o movimento do boneco como um todo como uma rotação em torno de O. Mas, mesmo que ignorássemos a trajetória e considerássemos apenas pontos inicial e final do movimento (como na passagem de A para B, por exemplo), o fato de pontos diferentes do Flaudemíglío percorrerem arcos de ângulos diferentes em torno de O contraria a definição de rotação, que será dada mais adiante (é possível notar que o ângulo percorrido pelo raio da circunferência, ao passar de A para B é maior, por exemplo que o arco, com centro em O, descrito pela ponta do lápis).



Na segunda figura, se considerarmos dois pontos quaisquer no boneco posicionado, por exemplo, em A, o segmento que os liga fará sempre 90° com o segmento que liga e os mesmos dois pontos no boneco posicionado em B. Isso indica que, de A para B o boneco sofreu uma rotação de 90° com relação ao centro O da circunferência. Ao contrário da imagem anterior, todos os pontos descrevem arcos de mesma amplitude (angulação) com relação ao centro da mesma circunferência.

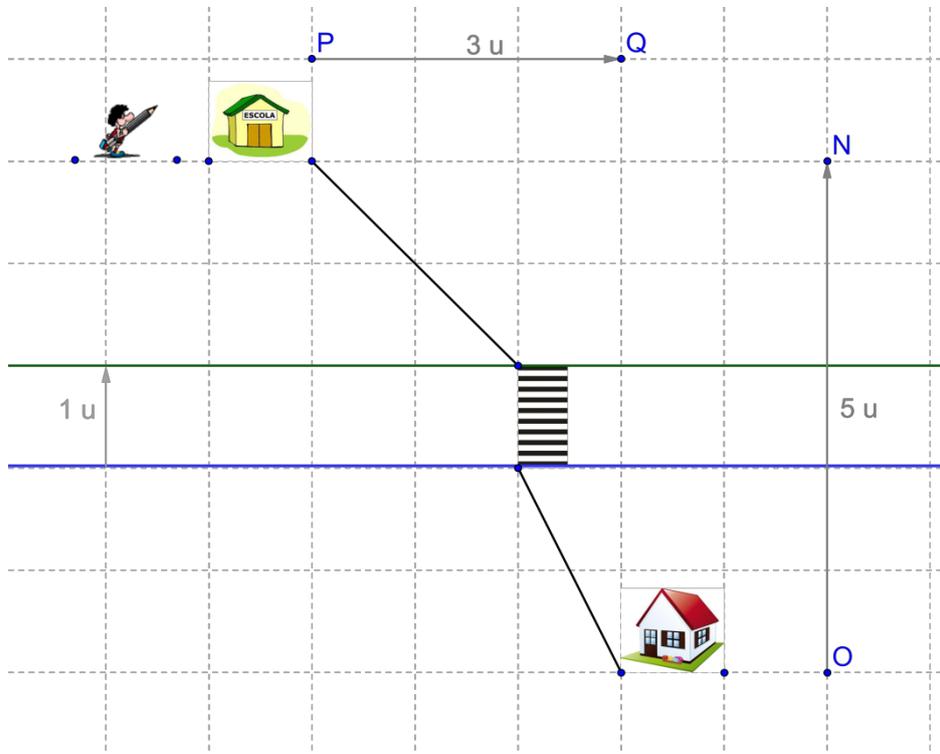
Apesar de, em ambas figuras, ter aparentemente havido uma rotação, em função das convenções que adotamos, o que ocorreu na figura 1 será tratado como um caso de translação e o que ocorreu na figura 2 como um caso de rotação.

Uma definição mais radical seria dizer que transladar uma figura de A para B no plano é *"arrastá-la de forma que, considerando apenas as posições inicial e final da figura, todos os seus pontos percorram segmentos de reta de mesmo comprimento, paralelos e igualmente orientados com relação ao deslocamento da figura"*. É claro que, quanto mais precisos nos tornamos, normalmente mais intangível se torna o conceito. Portanto, se o aluno não reconhece a necessidade de um conceito mais preciso para o movimento de translação, não fará mal se, num primeiro contato, for dada a definição com a qual esta seção foi iniciada, desde que seguida de exemplos concretos - de preferência não textuais - a fim de esclarecer seus pormenores.

Uma translação é caracterizada unicamente pelo deslocamento de uma distância d ao longo de uma direção e de um sentido. Grosso modo, para os iniciados, será mais fácil dizer simplesmente que uma translação é caracterizada por um vetor. Por conta desta semelhança, a composição de translações será, novamente, uma translação. Fato mais óbvio que este é a invertibilidade de translações. Ou seja, toda translação identificada pelo vetor \vec{v} pode ser invertida por uma outra identificada pelo vetor $-\vec{v}$.

Exemplo nº 1

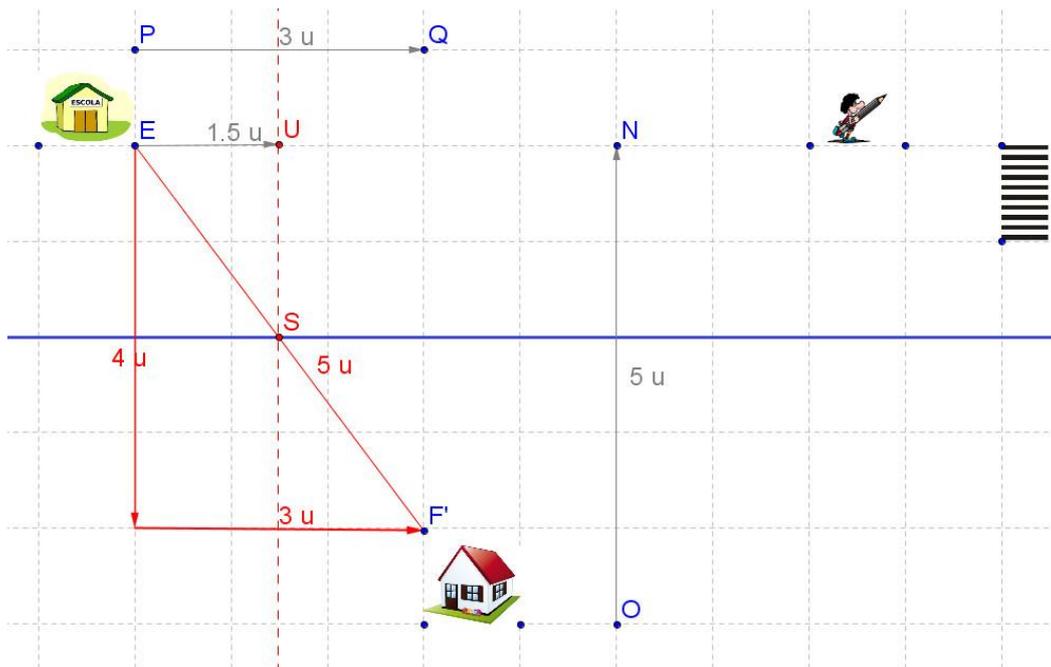
A questão da faixa de pedestres (ou da ponte).



Flaudemíglío, como as demais crianças de seu bairro, precisa ir de casa à escola e, no caminho, atravessar uma rua extremamente movimentada e perigosa. Após a TV local mostrar o problema que Flaudemíglío enfrentava, o prefeito se comprometeu não só a construir uma faixa de pedestres, como a minimizar o caminho percorrido pelo menino da escola até a sua casa. De posse do mapa (acima) da parte da cidade que nos interessa, determine a distância total que Flaudemíglío irá percorrer após a construção da faixa.



Resolução em vídeo: [translacao_1.avi](#)



O objetivo é construir uma faixa de pedestres em uma rua entre a casa e a escola de forma a minimizar a distância total percorrida.

O problema é que há uma infinidade de pontos possíveis para se instalar uma faixa de pedestres naquela rua. O prefeito, então, procura o ponto exato para instalar a faixa de tal forma que o caminho de casa à escola (e vice-versa) seja o menor possível.

Como a largura da rua é fixa e a faixa deve ficar perpendicularmente à calçada, podemos transladar os pontos que estão na parte de baixo do desenho (a casa e a margem azul) perpendicularmente à rua de 1 unidade (que é a largura a rua).

Desta forma, retirada a parte do problema que não varia (a largura da rua), a pergunta que deve ser feita passa a ser:

Qual é o menor caminho a ser traçado da casa transladada até a escola (figura acima)? Sem a rua para atrapalhar, fica bem claro que o caminho procurado é uma reta (a menor distância entre dois pontos de um plano).

Tem-se, pelo Teorema de Pitágoras, que a distância EF vale 5 unidades. Somando este valor com 1 unidade do comprimento da faixa de pedestres, a distância da casa até a escola será de 6 unidades.

Também é possível descobrir, por semelhança de triângulos, em que ponto da via (ponto S) a faixa deve ser construída (veja indicação na figura acima).

2.2.2 Rotação

Uma rotação é definida por um ângulo orientado e um centro. Podemos visualizar facilmente uma rotação com todos os seus elementos desenhando uma figura qualquer numa folha de papel e prendendo esta folha à mesa através de uma "tachinha" no ponto P onde desejamos que seja o centro da nossa rotação. Agora, rotacionamos toda a folha do ângulo desejado.

Propriedades das Rotações no Plano (formalizações na Seção 4):

1) Quando rotacionamos uma figura de um ângulo θ com relação a um centro O, um dos ângulos formados entre um segmento genérico de uma das figuras e o seu homólogo na outra será exatamente θ .

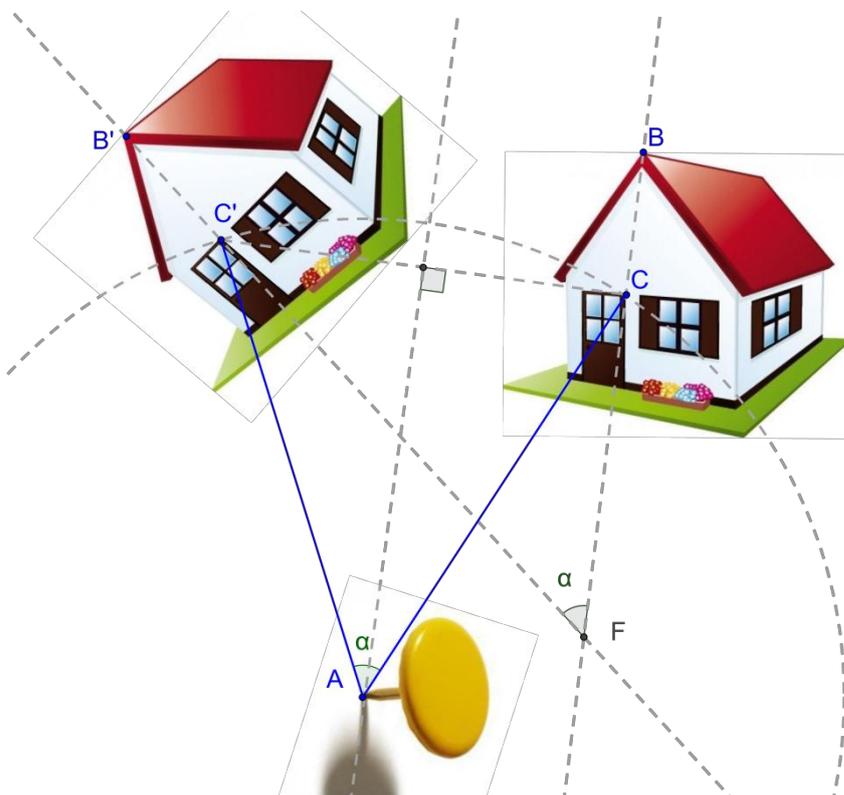
Uma questão interessante é: *dadas uma figura e a sua imagem após uma rotação, como achar o centro e o ângulo de rotação?*

O procedimento é bem simples. Como em uma rotação o ângulo entre dois segmentos homólogos (o original e a sua imagem após a rotação) coincide sempre (em valor e orientação) com o ângulo de rotação, podemos fazer o seguinte (próxima figura):

1) Estendendo dois segmentos homólogos quaisquer (CB e C'B', abaixo) até encontrar a sua interseção, identificamos o ângulo de rotação (α , no caso).

2) Ligando dois pontos quaisquer homólogos (C e C', no nosso exemplo), construímos os arcos capazes de olhar o segmento CC' segundo o ângulo (α) que achamos. Em geral, acharemos dois arcos capazes, que

corresponderão a rotações no sentido horário ou anti-horário. A interseção da mediatriz do segmento CC' com o arco escolhido nos dará o centro da rotação procurada. Na figura abaixo, a figura da casa é rotacionada de um ângulo α com relação ao ponto A no sentido anti-horário.



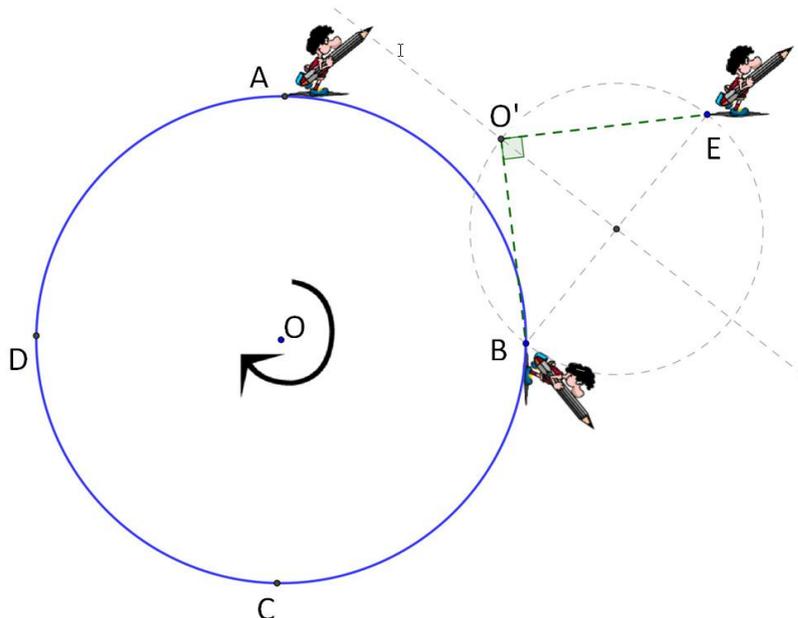
2) Se duas figuras são tais que todos os pares segmentos homólogos formam um ângulo $\theta \neq 0$ segundo uma certa orientação, então existe um centro O segundo o qual pode-se obter uma das figuras a partir da outra por uma rotação de um ângulo θ , segundo a mesma orientação.

Num dos comentários da figura 2 da seção anterior foi dito que "de A para B o boneco sofreu uma rotação de 90° com relação ao centro O da circunferência".

A rigor, não seria de todo errado dizer simplesmente que a rotação havia sido de 90° , sem citar o centro. Na verdade, em lugar de rotacionar o boneco com relação ao centro O , poderíamos, primeiro, transladá-lo de A para B e, em seguida, rotacioná-lo com relação ao ponto B de 90° . O efeito seria o mesmo. Neste caso...

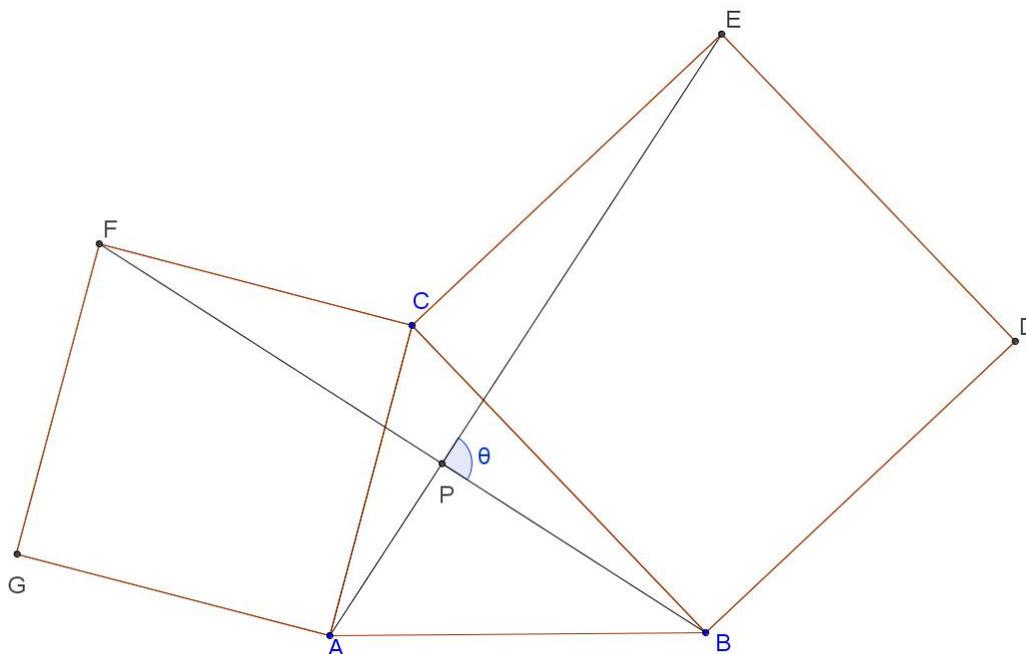
**"Rotação de 90° com centro em O =
Translação de A para B + Rotação de 90° com relação a B."**

A rigor, poderíamos transladá-lo para qualquer outro ponto que sempre haveria uma rotação que traria o nosso herói para a posição B da figura 2 (seção anterior). Na figura abaixo, por exemplo, ele foi posto num ponto E - qualquer - do plano e foi construído um arco capaz de enxergar o segmento BE sob um ângulo de 90° . Em seguida, foi traçada a mediatriz de BE e O' foi escolhido (de ambas as possíveis interseções da mediatriz com os arcos envolvidos) de tal forma que a rotação que conduzisse o Flaudemíglío de E para B se desse no sentido horário.



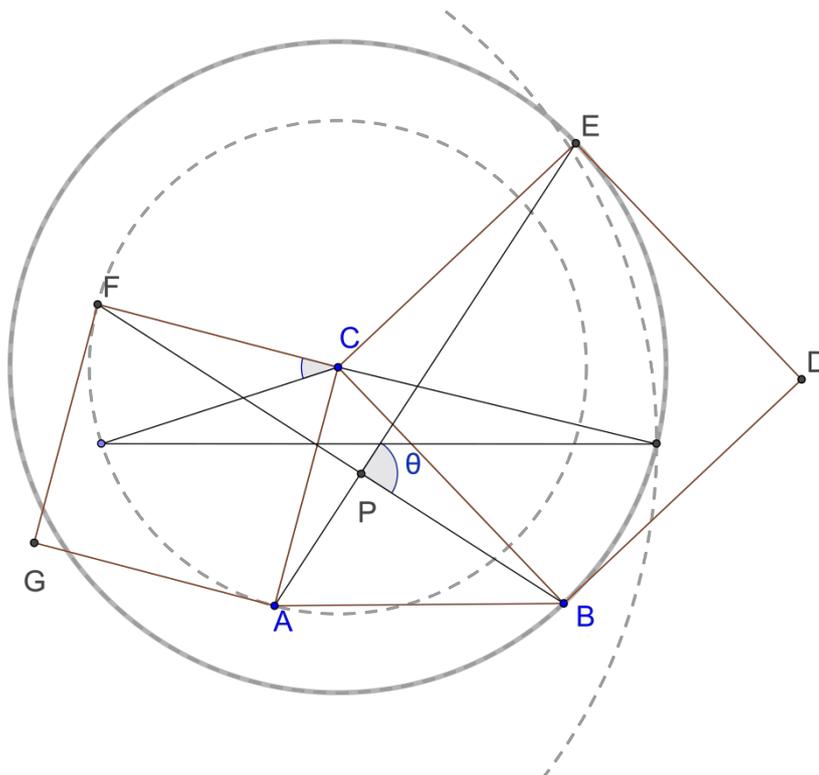
Exemplo nº 2

ABC é um triângulo qualquer, BCDE e ACFG são quadrados. Queremos determinar o valor de θ



Resolução em vídeo: [rotacao_web_1](#)

Vamos descobrir o valor do ângulo θ simplesmente realizando uma rotação de 90° do triângulo CFB em torno do ponto C.



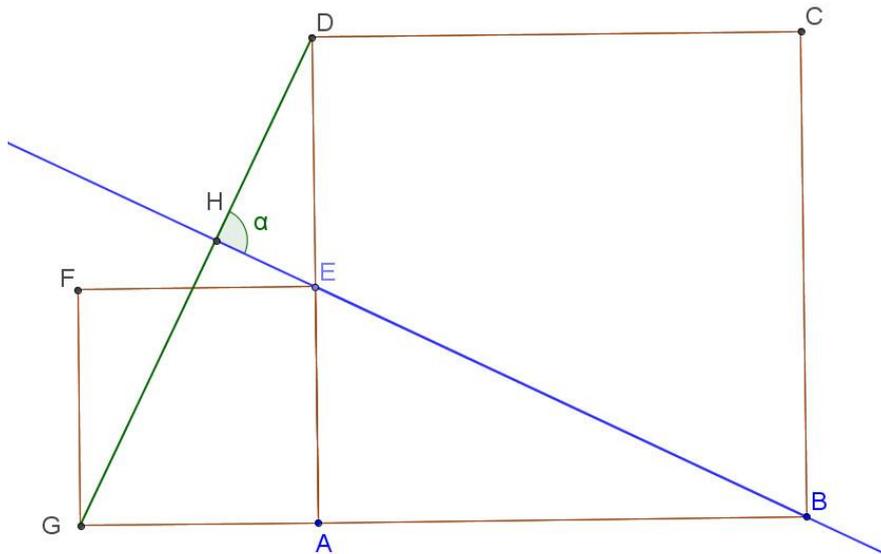
Como a rotação faz CF coincidir com CA, o ângulo segundo o qual o triângulo CFB foi rotacionado foi precisamente 90° . Ocorre que, efetuando a rotação do segmento CB segundo um ângulo reto no sentido anti-horário em torno de C, o lado CB obrigatoriamente irá coincidir com CE pois BDEC é um quadrado.

A mesma rotação irá fazer coincidir o segmento FB com o segmento AE, pois o triângulo CFB não foi deformado durante a rotação. Como em uma rotação, todos os segmentos homólogos giram de um mesmo ângulo em uma mesma direção, podemos concluir que o segmento de reta FB também foi rotacionado de 90° para coincidir com AE.

O ângulo θ é, portanto, um ângulo reto.

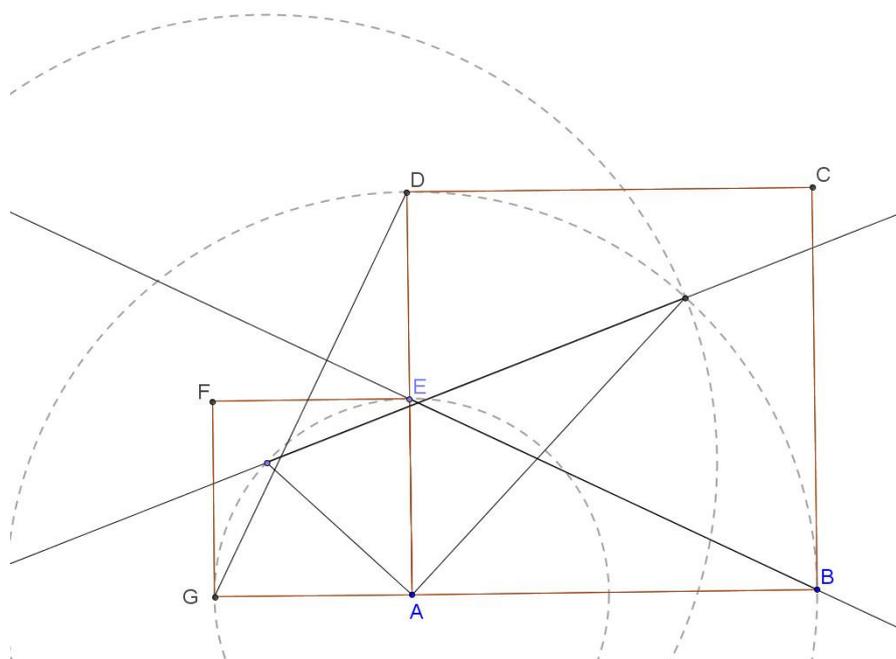
Exemplo nº 3

Dois quadrados AEFG e ABCD são dispostos lado a lado como mostra a figura. Pede-se calcular o valor do (menor) ângulo formado pelas retas que contêm os segmentos por EB e GD.



Resolução em vídeo: [rotacao web 2](#)

Determinaremos o valor do ângulo α apenas rotacionando o triângulo ADG, de um ângulo de 90° em torno do ponto A. A rotação conduzirá o segmento AG até fazê-lo coincidir com o segmento AE.



Se o lado AD for rotacionado em torno de A de 90° ele coincidirá com o lado AB, pois ABCD é um quadrado. Como fizemos uma transformação rígida (o ângulo entre lados homólogos coincide com o ângulo de rotação), temos que:

- 1) O lado DG irá necessariamente coincidir com BE.
- 2) O ângulo entre BE e DG valerá 90° .

3) composição de duas rotações pode ser, ou uma rotação, ou uma translação.

Se for uma rotação, resta a pergunta, como localizar o novo centro da rotação resultante?

Exemplo nº 4

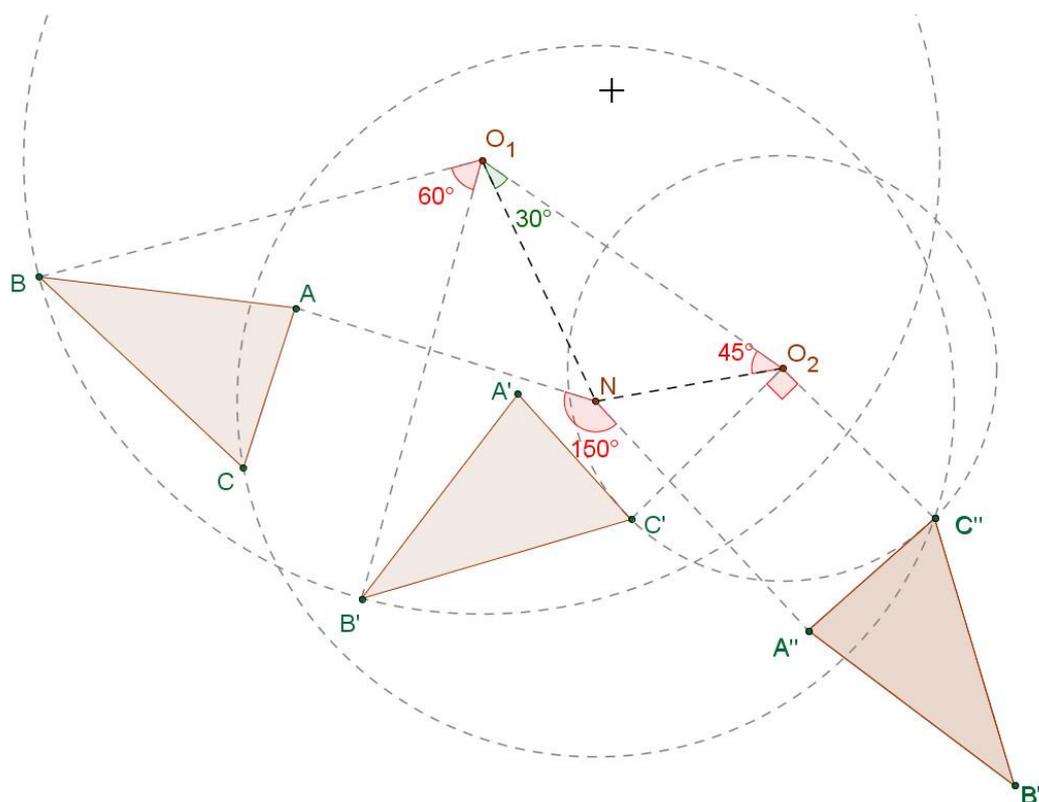


Exemplo em vídeo: [rotacao 1.avi](#)

A próxima figura contém um triângulo ABC que é rotacionado com relação ao ponto O_1 de 60° no sentido anti-horário. A sua imagem (o triângulo

$A'B'C'$) é rotacionada de 90° , também no sentido anti-horário, com relação ao centro O_2 , gerando o triângulo $A''B''C''$.

Ora, a composição destas duas rotações será uma rotação de 150° , que não é uma translação (caso em que o ângulo resultante é cômputo a 0°). Logo, existe um ponto N em torno do qual podemos girar o triângulo ABC para obtermos imediatamente, o triângulo $A''B''C''$.

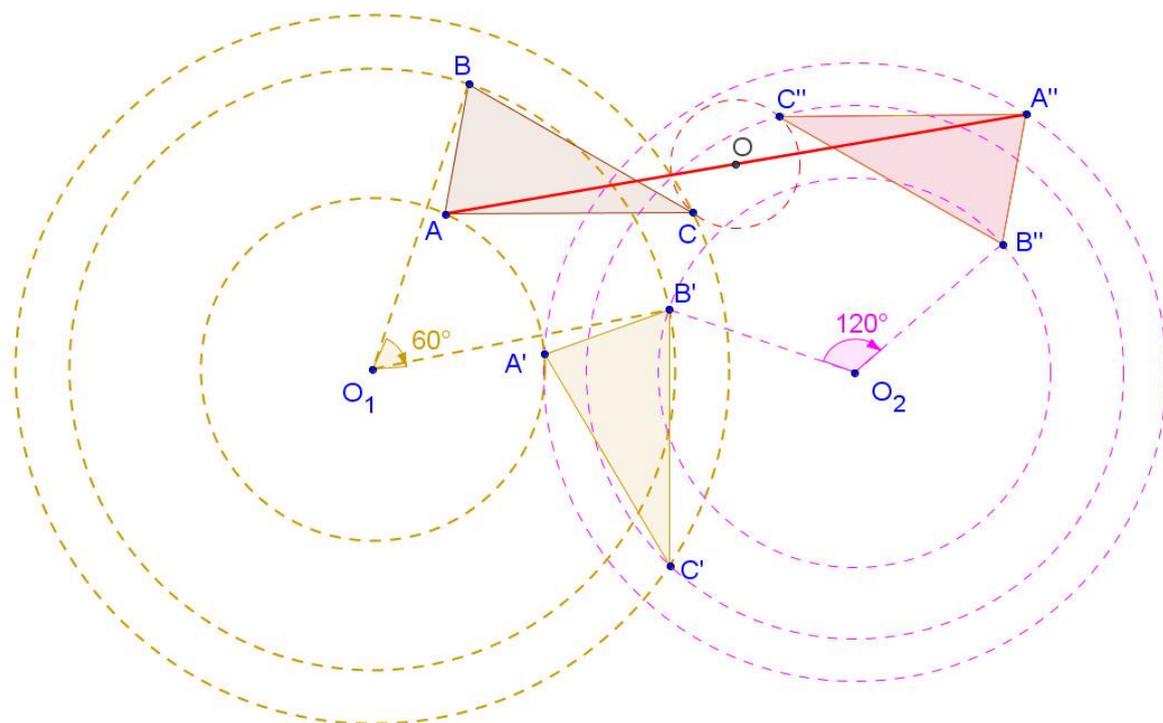


O processo para achar o novo centro N é bem simples. N será a interseção de:

- 1) Reta resultante da rotação da reta que contém o segmento O_1O_2 em torno de O_1 , em sentido contrário ao da 1ª rotação e da metade do ângulo desta, em módulo. No desenho, é o segmento O_1N . Vale ressaltar que o ângulo que O_1N forma com O_1O_2 é de 30° (metade de 60°) e que a rotação de O_1O_2 , que redundou em O_1N , foi no sentido horário (contrário ao sentido original).
- 2) Reta resultante da rotação da reta que contém O_1O_2 em torno de O_2 , no mesmo sentido da 2ª rotação, da metade do ângulo desta, em módulo. No

desenho, é o segmento O_2N . É importante observar que o ângulo que O_2N forma com O_1O_2 é de 45° (metade de 90°) e que a rotação de O_1O_2 , que redundou em O_2N , foi no sentido anti-horário (sentido original).

Quando a composição de rotações resultar numa rotação de um ângulo côngruo a 180° , teremos um caso de uma "meia volta". Abaixo, um exemplo do triângulo ABC que sofreu duas rotações, ambas no sentido horário, redundando numa rotação final de 180° : a primeira de 60° em torno de O_1 , a segunda de 120° em torno de O_2 . A composição destes movimentos leva o triângulo ABC no triângulo $A''B''C''$ de tal forma que os lados permanecem paralelos, embora inversamente orientados. $A''B''C''$ representa uma meia volta do triângulo ABC em torno de O , que fica exatamente no ponto médio de qualquer um dos segmentos AA'' , BB'' ou CC'' .



4) Quando é que a composição de duas rotações não redundam em uma rotação?

Duas rotações não resultarão numa outra rotação apenas quando a soma dos ângulos de rotação for um arco côngruo a 360° . Neste caso, a composição destes movimentos resulta numa translação. Nesta situação, não precisamos saber os valores de ambos os ângulos de rotação. Se um deles for 130° , por

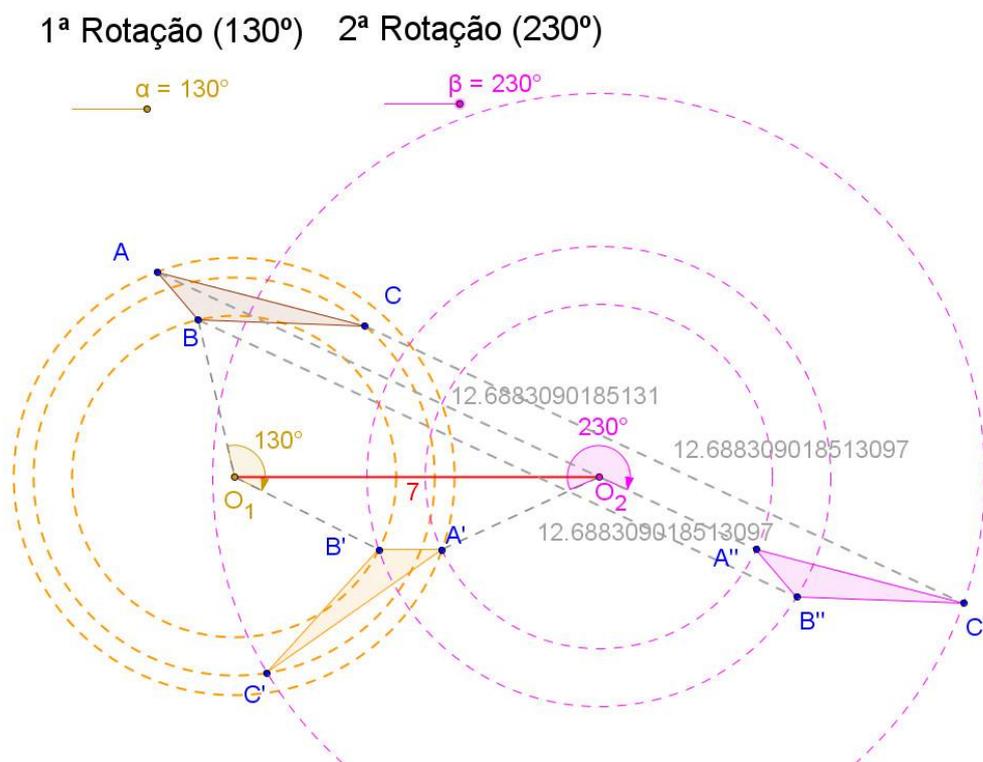
exemplo, o outro será os mesmos 130° só que em sentido contrário (ou 230° no mesmo sentido).

Por ser uma translação, todos os pontos se deslocam numa direção, num mesmo sentido e ao longo de uma mesma distância. A distância que caracteriza esta translação pode ser achada calculando-se:

$$d = 2 \times (\text{distância entre os centros}) \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Onde α é a menor determinação positiva do módulo do menor ângulo de rotação (no caso que ilustramos acima, 130°)

Abaixo mostramos um exemplo de um triângulo ABC que foi rotacionado de 130° em torno de O_1 (levando ABC em A'B'C') e, em seguida, de 230° em torno de O_2 (levando A'B'C' em A''B''C''), ambas as rotações em sentido horário (a segunda poderia ser entendida como 130° no sentido anti-horário).



Os segmentos CC'' , AA'' e BB'' são paralelos entre si e possuem o mesmo comprimento, que é igual a $2 \times 7 \times \sin\left(\frac{130^\circ}{2}\right) \sim 12,68830901851309$.

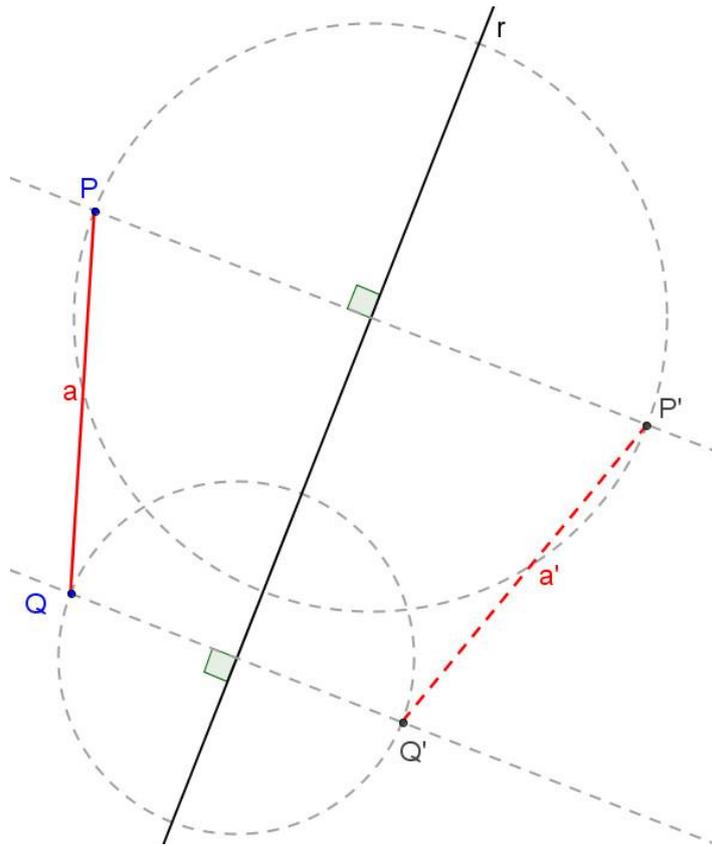
Translações e rotações formam um conjunto especial de movimentos rígidos no plano que preservam orientação. Ou seja, ao executar qualquer sequência de translações e rotações de um objeto no plano, a figura final pode ser superposta à primeira (por uma outra sequência de rotações e translações) de forma a coincidirem todos os seus pontos sem necessidade de retirá-la do plano para isso. Isso parece bem óbvio quando tratamos translações e rotações como movimentos (se a figura B foi obtida da figura A por uma sequência de movimentos que a mantiveram o tempo todo com a mesma face em contato com o plano, basta executar estes movimentos em ordem contrária que ela coincidirá com A novamente). Mas já não é tão óbvio quando tratamos estes movimentos como transformações. Na seção seguinte, estas figuras (que podem ser superpostas por movimentos mantendo sempre a mesma face em contato com o plano) serão chamadas de **figuras diretamente congruentes**.

2.2.3 Reflexão (ou simetria) com relação a uma reta

De todos os movimentos rígidos tratados neste texto, este é o que no Brasil parece ser o mais difundido, por conta do ensino de óptica geométrica. Será seguido o mesmo roteiro das seções anteriores: serão mostrados os conceitos na forma aparentemente mais ingênua, exemplos cujo foco não é o cálculo de valores (embora possam ter algum cálculo) e as formalizações (aquelas que forem consideradas importantes) serão deixadas para a seção 4. A seção seguinte trará aplicações do for apresentado aqui.

O simétrico de um ponto P com relação a uma reta r é a imagem de P como se r fosse um espelho plano.

Como uma figura geométrica é formada por pontos, para achar a reflexão de uma figura com relação a uma reta, basta fazer o mesmo com cada um dos seus pontos.

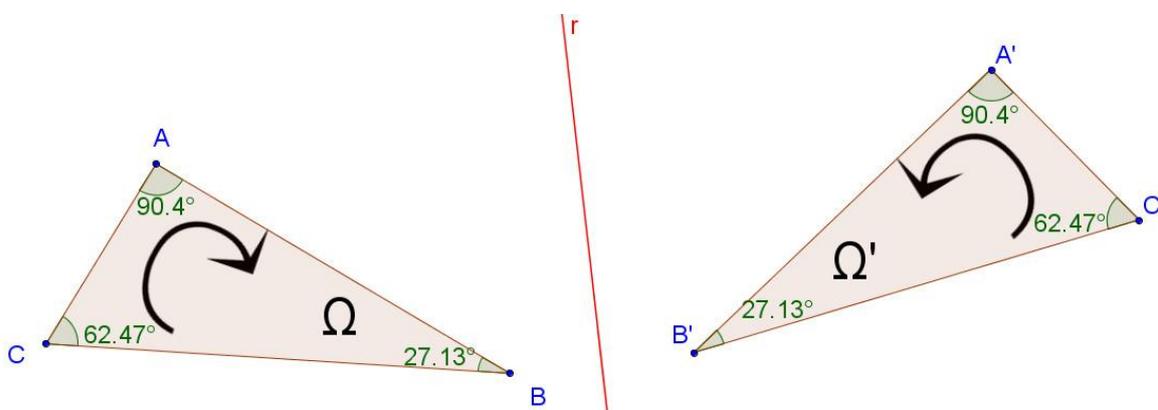


Mas uma característica interessante aparece quando tentamos refletir uma figura que não possua um eixo de simetria. Objeto e imagem deixam de ser "superponíveis" mediante os movimentos rígidos já estudados (translação e rotação). Em física, costuma-se ouvir que as imagens são enantiomorfas com relação aos respectivos objetos. Para figuras planas, funciona como se retirássemos a figura do papel e a virássemos invertendo a face em contato com o papel. Portanto, para conseguirmos reproduzir com um movimento o efeito da simetria teríamos que obrigatoriamente efetuar o movimento no espaço. Portanto...

A reflexão pode ser vista como um movimento rígido realizado no espaço, retirando a figura da folha de papel e fazendo-a rotacionar com relação ao eixo que utilizamos como "espelho" até que ela novamente encontre o papel, no outro semi-plano.

Uma característica deste movimento é que ele não preserva orientação. Ou seja, se marcarmos os pontos A, B e C em Ω de tal forma que o caminho ABCA

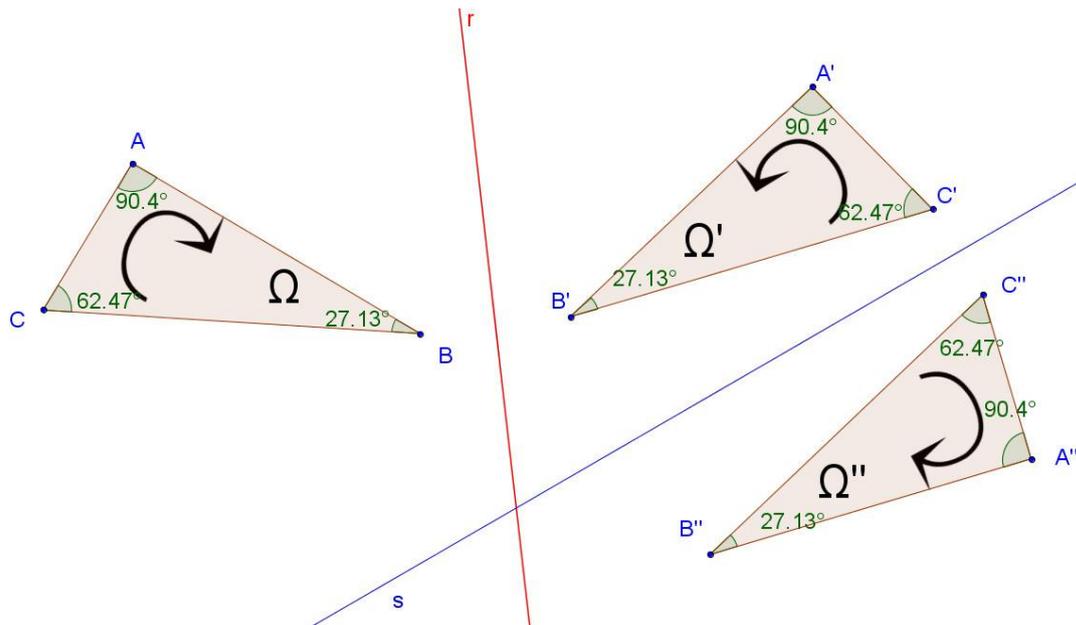
fica orientado no sentido horário, na figura simétrica (Ω'), o caminho análogo $A'B'C'A'$ será percorrido no sentido anti-horário.



Neste caso, diremos que Ω e Ω' são figura inversamente congruentes.

Como a congruência como nós a utilizamos em Geometria Plana não faz distinção entre as figuras ABC e $A'B'C'$ acima, jamais poderíamos conceituar nossa Geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob os movimentos já estudados (rotação e translação), embora, como veremos, estas transformações por si só sejam capazes de definir uma (outra) Geometria. Portanto, sob o ponto de vista das transformações rígidas abordadas, a classe de figuras congruentes a uma figura Ω pode ser dividida em **figuras diretamente congruentes** e **figuras inversamente congruentes** a Ω .

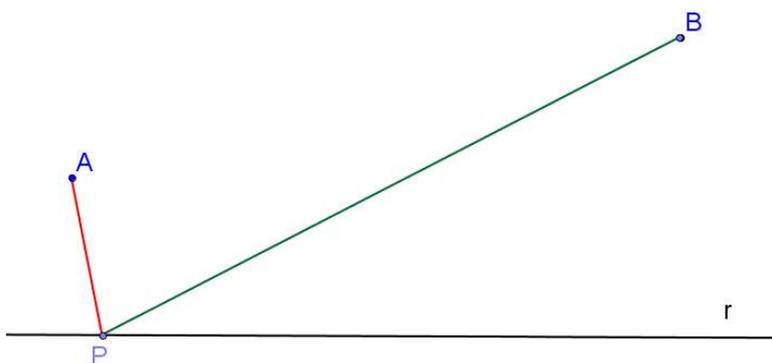
Como só há dois possíveis sentidos de rotação (horário e anti-horário), após duas reflexões sucessivas, a imagem volta a ser diretamente congruente com relação ao objeto.



Exemplo nº 5

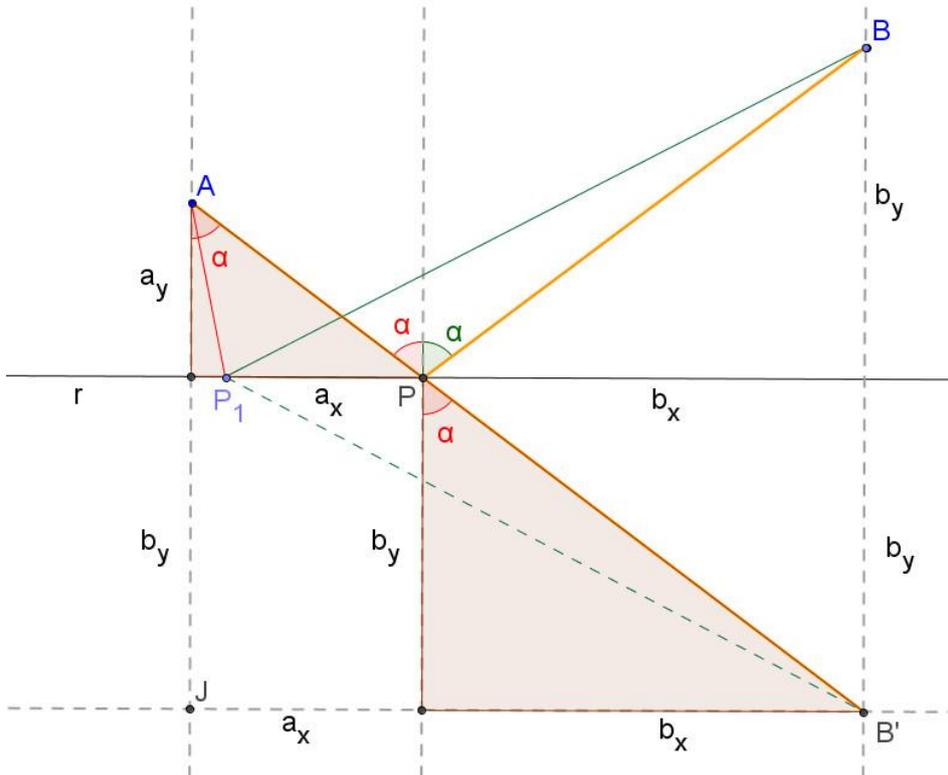
Considere um plano dividido em dois semiplanos por uma reta r . Em um destes semiplanos considere dois pontos A e B , como mostra a figura abaixo. Vamos considerar um ponto P , qualquer, em r . A questão é:

Como escolher o ponto P de forma que a soma das distâncias $PA+PB$ seja mínima?



Resolução em vídeo: [reflexao_1.avi](#)

A estratégia será refletir o ponto B com relação à reta r , achando assim o ponto B' , simétrico de B com relação à r .



Desta forma, teremos $PB = PB'$, o que fará a soma $AP + PB$ ser rigorosamente igual a $AP + PB'$.

Podemos então esquecer por um momento o caminho APB e nos concentrar no caminho APB' . A pergunta original portanto, muda para:

“Como podemos escolher o ponto P de forma que $AP + PB'$ seja mínimo?”

Para esta pergunta, entretanto, a resposta é óbvia. P será a interseção do segmento de reta AB' com a reta r .

Um detalhe importante a observar é que, como AP e PB' estão alinhados, os ângulos que AP e PB' fazem com a perpendicular a r possuem a mesma medida. O mesmo acontecerá com os ângulos que AP e PB formam com a vertical. Este, aliás, é um princípio físico básico da reflexão da luz, enunciado informalmente da seguinte forma: **“O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”**.

Na verdade, os princípios são equivalentes, ou seja, o caminho será mínimo se, e somente se, a poligonal representar o caminho que a luz faria de A para B sendo refletida por um espelho posicionado em r.

Com isso reunimos, então, todas as condições para:

- 1) Calcular o comprimento de AP + PB.
- 2) Determinar qual o ângulo α .

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AJB', temos:

$$AP + PB = AP + PB'$$

$$AP + PB = \sqrt{(a_y + b_y)^2 + (a_x + b_x)^2}$$

Uma vez definidos a reta r e os pontos A e B, também sabemos os valores de a_y e b_y , assim como a soma $a_x + b_x$. O valor de α pode ser achado a partir da sua tangente (com lados paralelos, o triângulo formado pelos "as" é semelhante ao triângulo formado pelos "bs"). Tem-se então que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_x}{b_y} = \frac{a_x}{a_y}$$

COMPOSIÇÃO DE SIMETRIAS (OU REFLEXÕES).

Exemplo nº 6



Conteúdo em vídeo: [reflexao_composicao.avi](#)

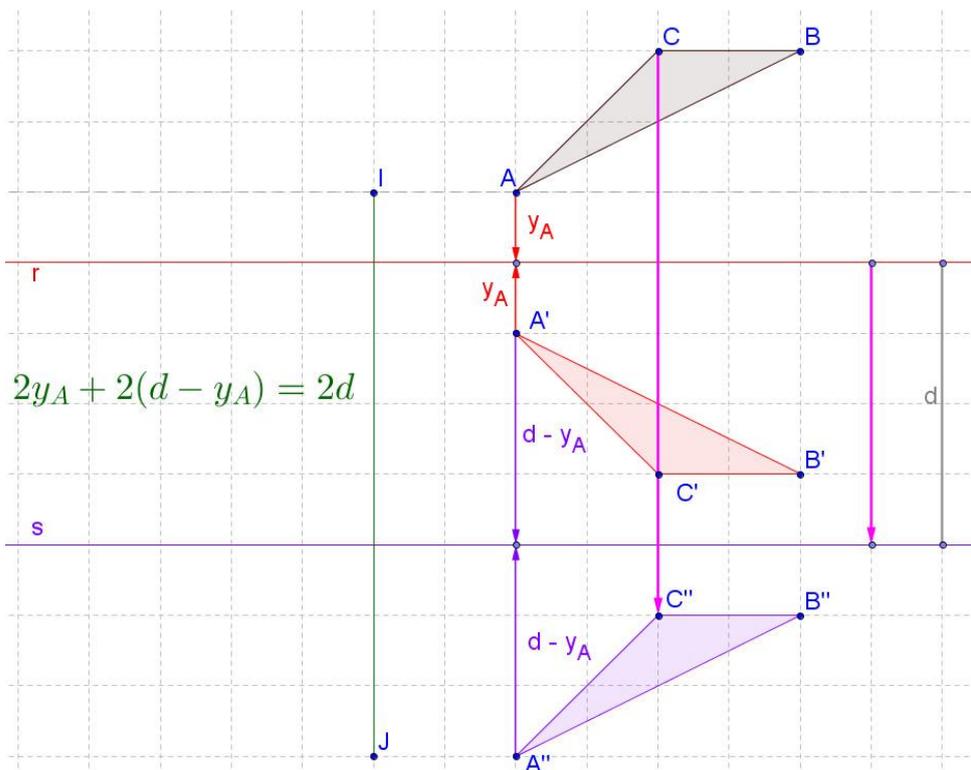
1) Duas reflexões sobre uma mesma reta transformam um objeto nele mesmo. Este fato, apesar de ser bem óbvio, quando encarado sob o ponto de vista das transformações, revela um comportamento bem diferente dos demais movimentos já estudados: *a transformação inversa de uma reflexão com relação a uma reta s é ela mesma.*

2) Duas reflexões sucessivas de uma figura Ω com relação a duas retas paralelas equivalem a uma translação:

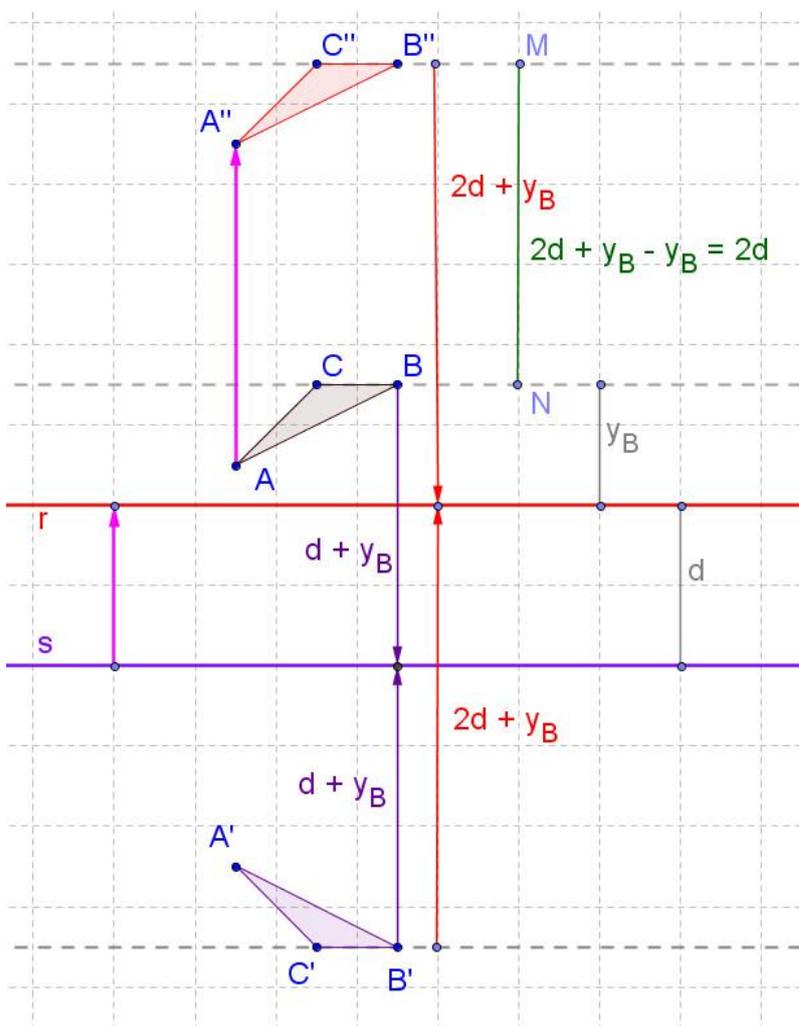
- a) de uma distância igual ao dobro da distância entre as retas e...
- b) no sentido que vai da reta que serviu à primeira reflexão até a reta que serviu à segunda reflexão.

Este fato também é bem fácil de ver. Por isso não perderemos muito tempo nele (a figura abaixo e o vídeo disponibilizado ilustram bem este caso). Vale ressaltar que, na próxima figura, ABC e $A'B'C'$ são inversamente congruentes, enquanto ABC e $A''B''C''$ são diretamente congruentes, como ocorre em qualquer translação.

Na figura abaixo, a primeira reflexão ocorre com relação à reta **r (vermelha)**, enquanto a segunda com relação à reta **s (roxa)**. A distância entre dois pontos homólogos é sempre a mesma e os segmentos de reta determinados por eles são paralelos (perpendiculares às retas **r** e **s**) e igualmente orientados. A composição das reflexões, portanto, funciona como uma translação ao longo da direção perpendicular às retas de uma distância igual ao dobro da distância entre as retas e no sentido que vai da **reta da 1º reflexão (vermelha)** para a **reta da segunda reflexão (roxa)**.



E, na próxima figura, o contrário. A primeira reflexão ocorre com relação à **reta roxa** e a segunda com relação à **reta vermelha**.



Os demais casos são de verificação análoga, como quando a figura inicial se encontra entre as retas r e s . Esta verificação pode ser feita de forma mais compacta por Geometria Analítica, mas recomendo que o professor não entregue esta solução pronta ao aluno; mostre os casos separadamente, como foi feito aqui, e, quando ele já tiver dominado completamente esta etapa, se julgar pertinente, sugira um caminho com o qual ele possa concluir a mesma coisa instalando um sistema de eixos cartesianos em uma única figura. A utilização do Geogebra também ajuda bastante, como mostra o vídeo anexo.

3) A composição de reflexões de uma figura Ω em retas concorrentes equivale a uma rotação...

- a) de Ω em torno do ponto de encontro das retas;
- b) em um ângulo igual ao dobro do ângulo entre as retas, medido da reta onde ocorreu a primeira reflexão para a reta onde ocorreu a segunda reflexão;
- c) no sentido percorrido no item anterior para se avaliar o ângulo entre as retas.

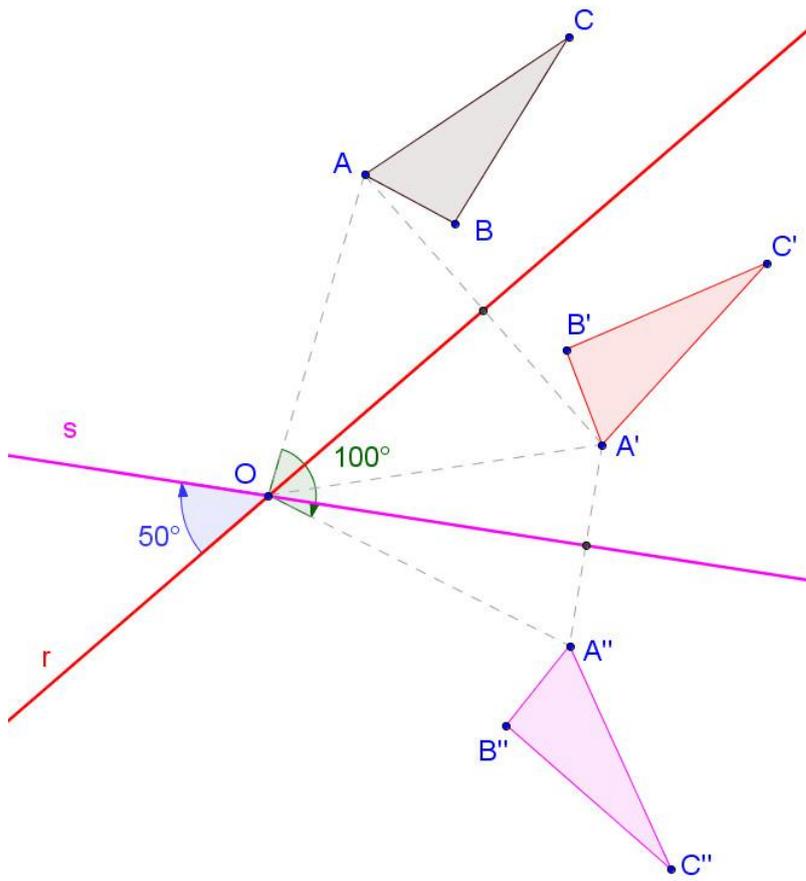
Podemos ver isso considerando dois segmentos genéricos:

- 1) segmento entre um ponto qualquer de Ω e o centro de rotação e...
- 2) segmento entre o respectivo ponto homólogo em Ω' e o centro de rotação;

O ângulo definido por estes segmentos será o mesmo qualquer que seja o ponto escolhido (figura abaixo, ou o vídeo relacionado). Além disso, os seus comprimentos serão sempre iguais.

Como nos casos anteriores, as figuras ABC e A"B"C" são diretamente congruentes, como é de se esperar que aconteça numa rotação.

Na imagem abaixo, a sequência de reflexões ocorre como já foi feito anteriormente. O triângulo ABC é transformado em A'B'C' por reflexão primeiramente com relação à **reta r** e, este último, é transformado em A"B"C" por reflexão relação à **reta s**. O triângulo A"B"C" pode ser obtido diretamente de ABC por uma rotação com centro em O e ângulo igual ao dobro do ângulo entre as retas, como detalhado acima.



3 Questões Resolvidas

As questões destacadas nesta seção provêm de várias fontes: algumas foram criadas por mim, outras adaptadas a partir do próprio Yaglom ([1]) ou de outros livros - ou de páginas da web - algumas delas amplamente conhecidas, inclusive, pelo público leigo. Todas estão resolvidas em detalhes usando as ferramentas apresentadas na seção anterior. Todas as questões foram desenhadas e resolvidas com a ajuda do Geogebra. Estão disponibilizados, na seção de [Recursos Utilizados](#), links para os arquivos usados.

3.1 Demonstrações (quase) visuais

Nesta seção, será dada ênfase às soluções cujo foco não é o tratamento algébrico ou o cálculo de valores.

Problema nº 1

Considere:

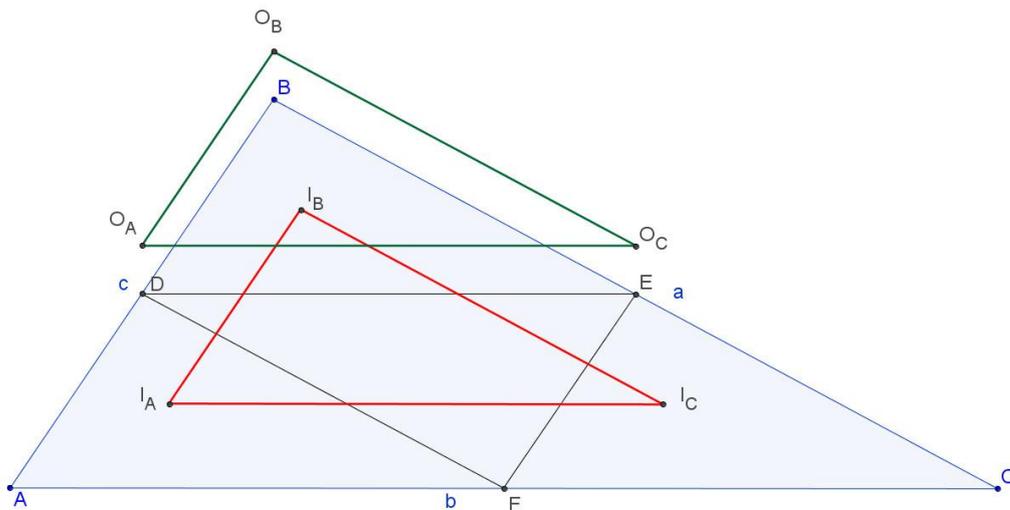
- a) um triângulo qualquer ABC;
- b) D, E e F os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC e AC;
- c) I_A, I_B, I_C os incentros, respectivamente, dos triângulos DAF, BDE e EFC;
- d) O_A, O_B, O_C os ortocentros, respectivamente, dos triângulos DAF, BDE e EFC;

Calcule as relações que existem entre

$\text{Área}(O_A O_B O_C), \text{Área}(I_A I_B I_C)$ e $\text{Área}(ABC)$;



Resolução em vídeo: [translacao triangulos.avi](#)



Considere a figura acima.

Vamos transladar o triângulo BDE, no sentido de B para A de uma distância igual à metade do comprimento do lado BA. Nesta operação, B é transformado em D, D é transformado em A e E é transformado em F.

A circunferência inscrita em BDE é transladada paralelamente a BA da mesma distância (metade de BA). O mesmo acontece com seu centro. Como a transformação é rígida, o mesmo acontecerá com O_B , que será transladado da mesma distância, mesma direção e mesmo sentido, e transformado em O_A .

Repetiremos o processo, transladando DAF de forma a transformá-lo em EFC. Analogamente, a translação ocorrerá no sentido de A para C, de uma distância igual à metade do lado AC. Como no 1º caso, I_A e O_A serão deslocados de $AC/2$ no sentido de A para C, transformando-se, respectivamente, em I_C e O_C .

O processo será repetido mais uma vez transformando o triângulo EFC no triângulo BDE.

Como em uma translação todos os pontos deslocam-se de uma mesma distância em uma mesma direção, isso nos garante duas coisas:

- 1) Os lados do triângulo $I_A I_B I_C$ (ou $O_A O_B O_C$) são paralelos aos lados do triângulo ABC.

2) Os lados do triângulo $I_A I_B I_C$ (ou $O_A O_B O_C$) possuem metade do tamanho dos lados do triângulo ABC aos quais eles são paralelos.

Logo...

$$\frac{\text{Área}(\Delta O_A O_B O_C)}{\text{Área}(\Delta I_A I_B I_C)} = 1 \quad \text{e} \quad \text{Área}(\Delta O_A O_B O_C) = \text{Área}(\Delta I_A I_B I_C) = \frac{1}{4} \text{Área}(\Delta ABC)$$

O "Teorema dos Bicos"

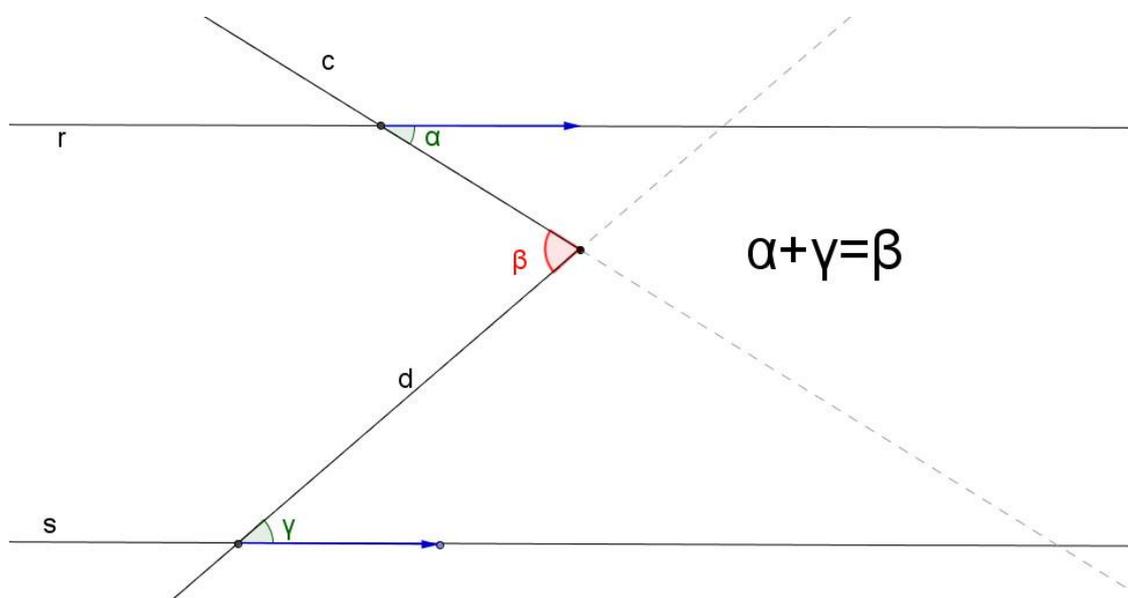
"Em retas paralelas cortadas por várias transversais que formam uma poligonal como nas figuras abaixo, a soma dos ângulos que "olham" para um sentido definido pelas paralelas coincide com a soma dos ângulos que "olham" em sentido contrário."

Problema nº 2

Com duas transversais



Resolução em vídeo: [questao1.avi](#)



Vamos rotacionar o vetor azul, inicialmente sobre a reta r , no sentido dos ponteiros do relógio em α graus de modo que esse vetor se alinhe com a reta c e,

em seguida, translandá-lo de modo que sua origem coincida com a interseção das retas c e d.

Vamos rotacioná-lo agora no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio de em β graus de modo que esse vetor se alinhe com a reta d e, em seguida, translandá-lo de modo que sua origem coincida com a interseção das retas s e d.

Finalmente, vamos rotacioná-lo em γ graus no sentido dos ponteiros do relógio até que ele se alinhe com a reta s.

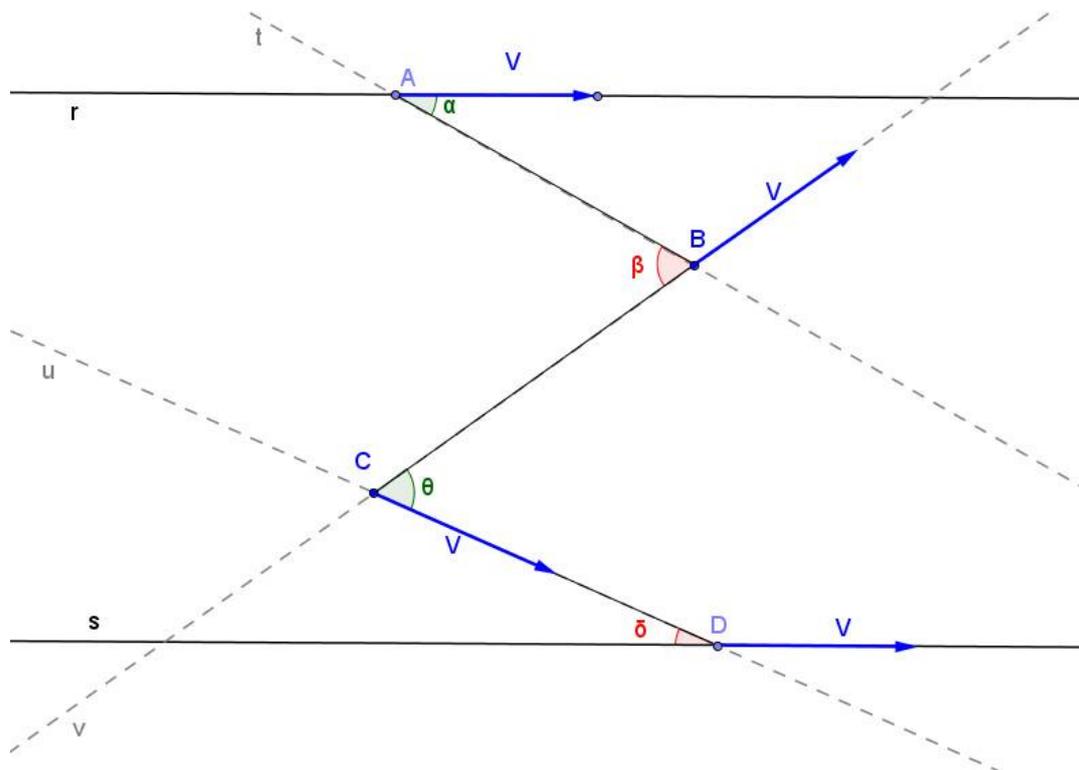
Considerando positiva a rotação no sentido dos ponteiros do relógio e verificando que o vetor encontrado após essas rotações tem a mesma direção e sentido do vetor original sem ter completado uma única volta sequer, conclui-se que esse vetor sofreu uma rotação de 0° . Como, então, $\alpha - \beta + \gamma = 0$, logo $\beta = \alpha + \gamma$.

Problema n° 3

Com três transversais



Resolução em vídeo: [paralelas 2.avi](#)



Considerando o vetor V em sua posição inicial (ao longo da reta r), vamos rotacioná-lo de α graus no sentido dos ponteiros do relógio de modo que ele se alinhe com a reta t e, a seguir, vamos transladá-lo de modo que sua origem coincida com o ponto B .

Em seguida, vamos rotacioná-lo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio em β graus de modo que ele se alinhe com a reta v e, a seguir, iremos transladá-lo de modo que sua origem coincida com o ponto C .

Continuando, vamos rotacioná-lo em θ graus no sentido dos ponteiros do relógio de modo que ele se alinhe com a reta u e, em seguida, iremos transladá-lo de modo que sua origem coincida com o ponto D .

Por último, vamos rotacioná-lo em δ graus no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio de modo que ele se alinhe com a reta s .

A posição final do vetor V possui, portanto, a mesma direção e sentido que a sua posição inicial sem ter dado uma única volta completa sequer em torno da sua origem. Logo, ele sofreu uma rotação de 0° .

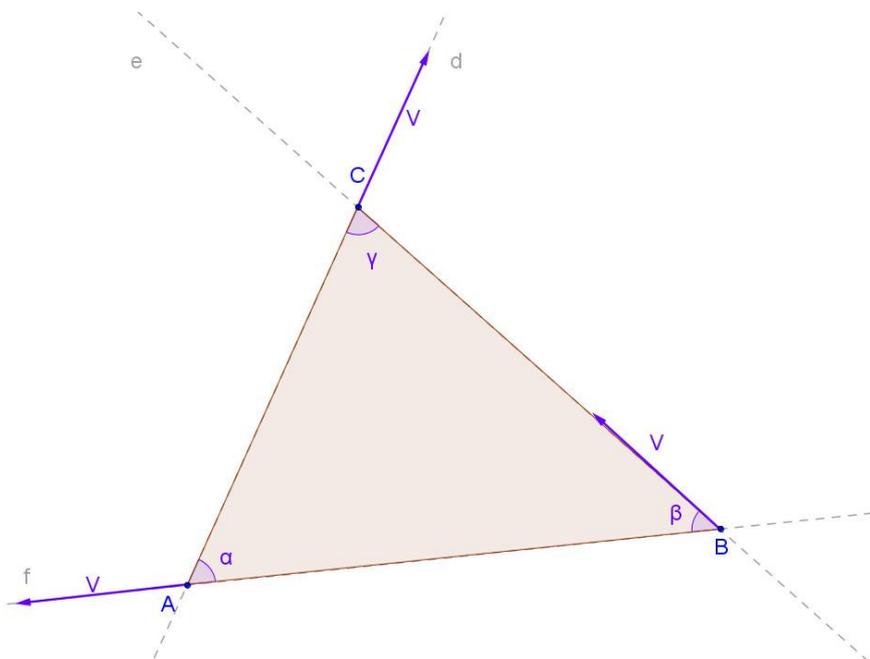
Considerando positiva a rotação no sentido dos ponteiros do relógio, temos que $\alpha - \beta + \theta - \delta = 0$, logo $\beta + \delta = \alpha + \theta$.

Problema nº 4

Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Resolução em vídeo: [rotacao 3 triangulo.avi](#)



Vamos rotacionar o vetor V inicialmente colinear com a reta d (figura acima) no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio de modo que este coincida com a reta e e, em seguida, vamos transladá-lo de modo que sua origem coincida com o ponto B .

Vamos rotacioná-lo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio de modo que este coincida com a reta f e, em seguida, vamos transladá-lo de modo que sua origem coincida com o ponto A .

Por fim, vamos rotacioná-lo novamente no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio de modo que este coincida com a reta d .

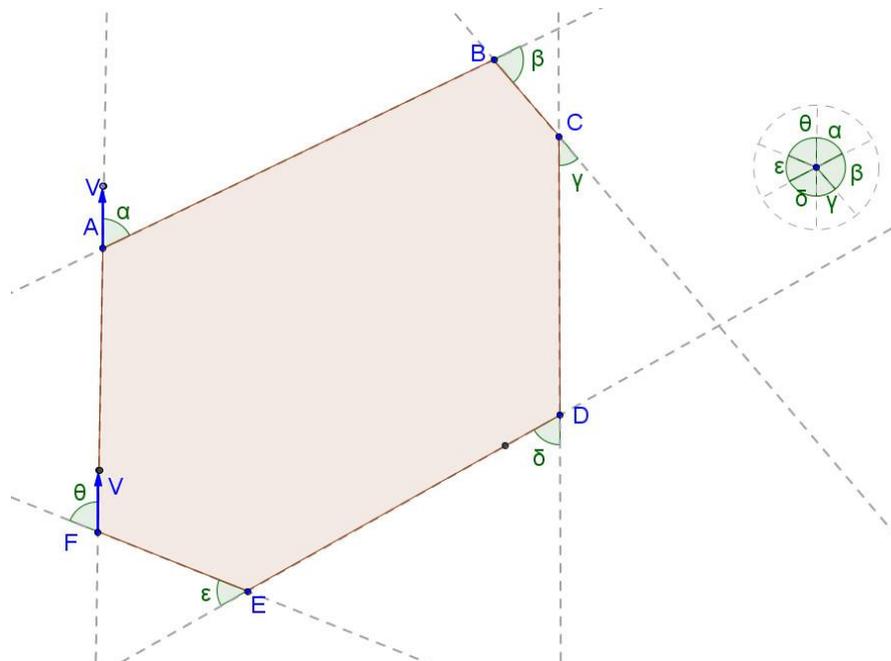
Ao fim de todos esses movimentos, o vetor estará na mesma direção e sentido contrário à posição inicial sem ter dado uma única volta completa, ou seja, este vetor terá sido rotacionado em 180° , o que prova que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Problema nº 5

Soma dos ângulos externos de um polígono convexo.



Resolução em vídeo: [rotacao_angulos_externos.avi](#)



Utilizaremos o recurso de rotação de um vetor V para calcular a soma dos ângulos externos de um hexágono convexo. Na verdade, o processo é o mesmo para qualquer polígono convexo. É interessante também a aplicação desta ferramenta para avaliar somas de ângulos em polígonos não convexos, principalmente os estrelados, mas não veremos isso neste texto.

Faremos seguidas rotações em torno de sua origem e translações ao longo de sua reta suporte. E computaremos a soma dos ângulos das rotações de V .

Começaremos com a rotação do vetor V em torno do ponto A de α graus e, em seguida, vamos transladá-lo ao longo da reta que contém os pontos A e B de modo que a sua origem coincida com o ponto B .

Prosseguindo, faremos a rotação do vetor V de β graus e, em seguida, nós o transladaremos ao longo da reta que contém os pontos B e C de modo que sua origem coincida com o ponto C.

Repetindo o processo, o vetor varrerá os ângulos γ , δ , ε e θ sempre no mesmo sentido (horário) e os ângulos de rotação vão compondo, setor a setor, a figura de um círculo. Na última rotação cujo centro será o ponto F, V retornará à mesma direção e sentido originais, completando, então, uma única volta em torno de sua origem, ou seja, a soma dos ângulos externos de um hexágono convexo vale 360° .

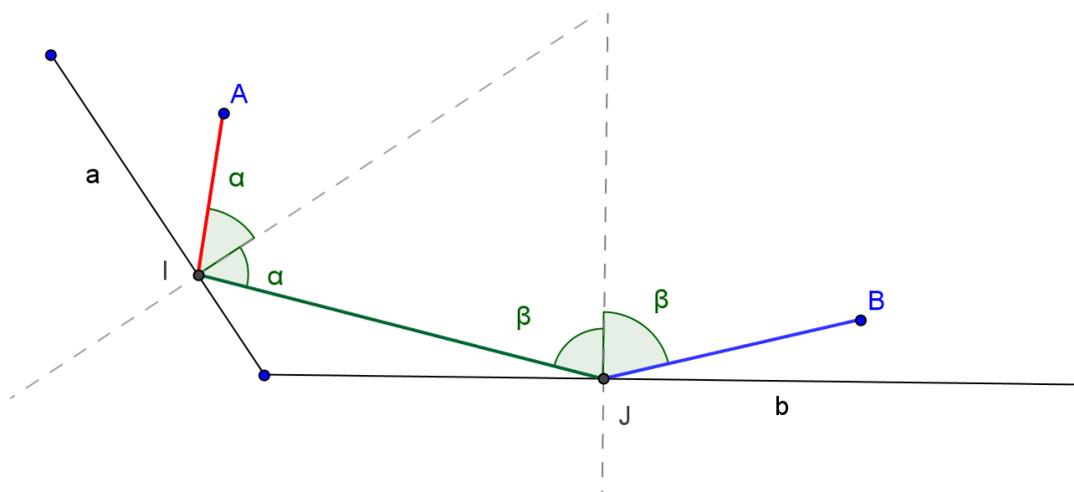
Este processo repetir-se-á qualquer que seja o polígono no plano (desde que seja convexo) e o resultado será sempre o mesmo.

Problema nº 6

Traçar trajetória de um raio de luz sendo refletido em dois espelhos

De um ponto A lançamos um raio de luz que deverá sofrer duas reflexões: a primeira no espelho **a** e a segunda no espelho **b**. O raio de luz deverá ser lançado de tal forma que a sua trajetória ao sair de **b** passe necessariamente por B.

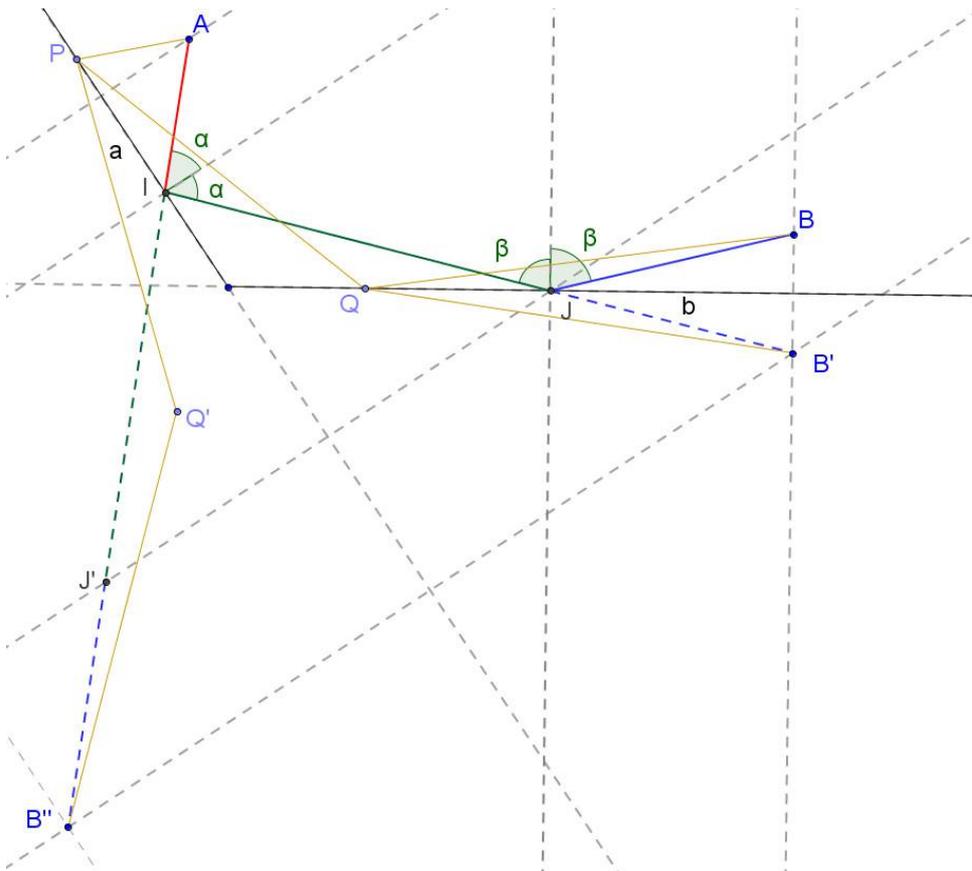
Como traçar esta trajetória precisamente dados os espelhos e os pontos A e B entre eles (figura abaixo)?





Resolução em vídeo: [reflexao 2.avi](#)

Como já fizemos antes, vamos começar investigando o problema como se ele já estivesse resolvido. Se o problema já estivesse resolvido, a reflexão de B com relação ao espelho **b** faria com que os segmentos JB' e IJ se alinhassem (ao longo de uma reta).



Refletindo B' com relação à reta que contém o espelho **a**, acharemos B''. Fazendo o mesmo com relação a J, acharemos J'. Refletindo B'J, construiremos B''J'.

Agora podemos notar que AI e IJ' (que já sabíamos que estava alinhado com J'B'') também estão alinhados. Como a reflexão preserva os ângulos (como qualquer movimento rígido), I, J' e B' estão alinhados.

Parece que agora ficou claro como obter graficamente os pontos necessários para determinar a trajetória do raio de luz.

Primeiro passo: refletimos B com relação à reta que contém o segmento **b**, obtendo B'.

Segundo passo: refletimos B' com relação à reta que contém o segmento **a**, obtendo B''.

Terceiro passo: ligamos o ponto B' ao ponto A, encontrando o ponto I.

Quarto passo: ligamos I ao ponto B'', encontrando o ponto J.

Achados os pontos I e J, podemos, então, traçar o raio de luz que parte de A e alcança B, sendo refletido primeiramente em **a** e depois em **b**. O caminho procurado é a poligonal AIJB.

Vamos agora voltar para o caso genérico e verificar como ficaria o caminho APQB após as mesmas reflexões. Vale ressaltar que, como esperado, o caminho APQB (= APQ'B'') é sempre maior que o caminho AIJB (= AIJ'B''), uma vez que:

- 1) Ambos ligam o ponto A ao ponto B''.
- 2) AIJ'B'' é uma linha reta.

Isso nos permite reenunciar o problema original da seguinte forma:

Na figura, trace o menor caminho APQB a ser percorrido tal que P é um ponto do segmento de reta **a e Q é um ponto do segmento **b**.**

A solução é obviamente a mesma: basta fazermos coincidir o ponto (genérico) P com o ponto I e o ponto Q com o ponto J.

O problema do caminho mínimo, pelo menos para essa configuração de pontos e segmentos de reta, continua equivalendo ao problema da reflexão de um raio de luz em espelhos planos.

Problema nº 7

Simétricos do ortocentro

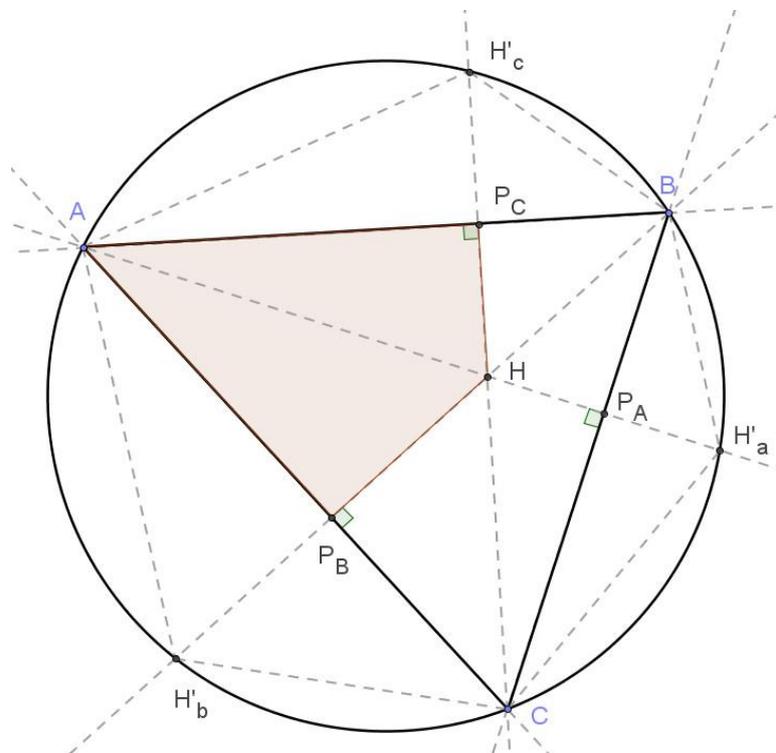
Provar que, em qualquer triângulo ABC no plano, os pontos simétricos do ortocentro com relação aos lados do triângulo estão sobre a circunferência que circunscreve ABC .



Resolução em vídeo: [reflexao 4.avi](#)

Vamos primeiro provar que a assertiva vale para um triângulo acutângulo.

No quadrilátero AP_BHP_C (próxima figura), $\angle P_BHP_C = 180^\circ - \hat{A}$. Mas $\angle P_BHP_C = \angle BHC$ (opostos pelo vértice H) e $\angle BHC = \angle BH'_aC$ (pois H'_a é reflexo de H com relação ao lado a). Logo, $\angle BH'_aC = 180^\circ - \hat{A}$. Portanto, o quadrilátero ABH'_aC é circunscritível. A circunferência que contém A , B e C também contém H'_a e, por analogia, H'_b e H'_c .



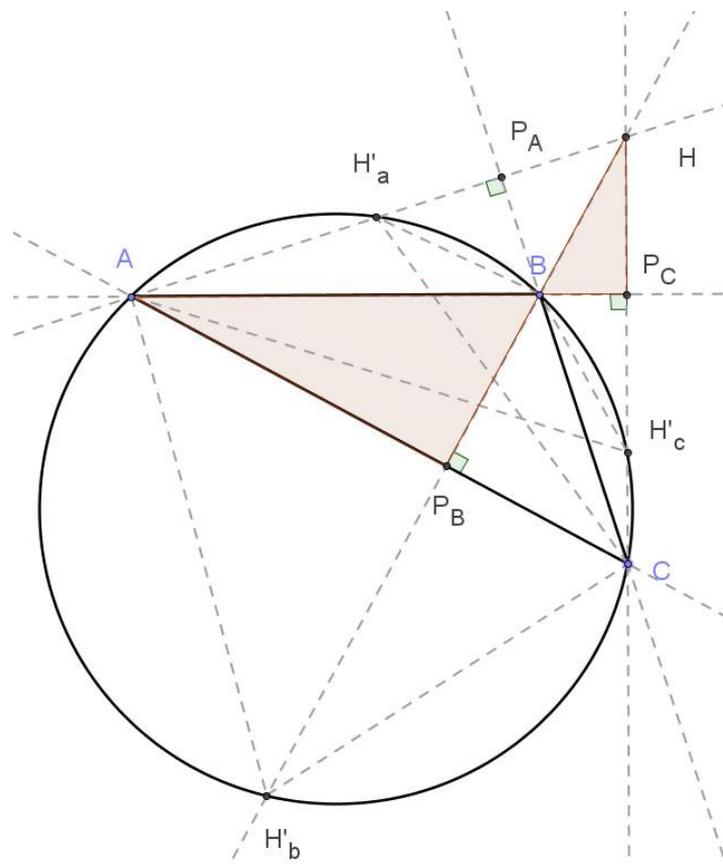
Vamos, então, fazer algo análogo no triângulo obtusângulo.

Na figura a seguir, H'_c é o simétrico de H com relação ao lado c .

$\sphericalangle AHC = \sphericalangle AH'_b C = \delta$ (pois H'_b é o reflexo de H com relação ao lado b). No quadrilátero $HP_A BP_C$, $\sphericalangle P_A BP_C = 180^\circ - \delta$ (este quadrilátero é inscritível). Portanto, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle P_A BP_C = 180^\circ - \delta$, o que faz com que o quadrilátero $ABCH'_b$ seja inscritível. Ou seja, a circunferência que passa por A , B e C também passa por H'_b .

$\sphericalangle BHC = \sphericalangle BH'_a C$ (consequência da preservação de ângulos da reflexão). Os triângulos $AP_B B$ e $HP_C B$, por sua vez, são semelhantes. Logo $\sphericalangle BHC = \hat{A} = \sphericalangle BH'_a C$. Ou seja, tanto A quanto H'_a "enxergam" BC segundo um mesmo ângulo. Logo, a circunferência que passa por A , B e C também passa por H'_a .

Raciocínio análogo pode ser feito para H'_c .



Problema nº 8

O Problema de Fagnano (COXETER [17] p. 88)

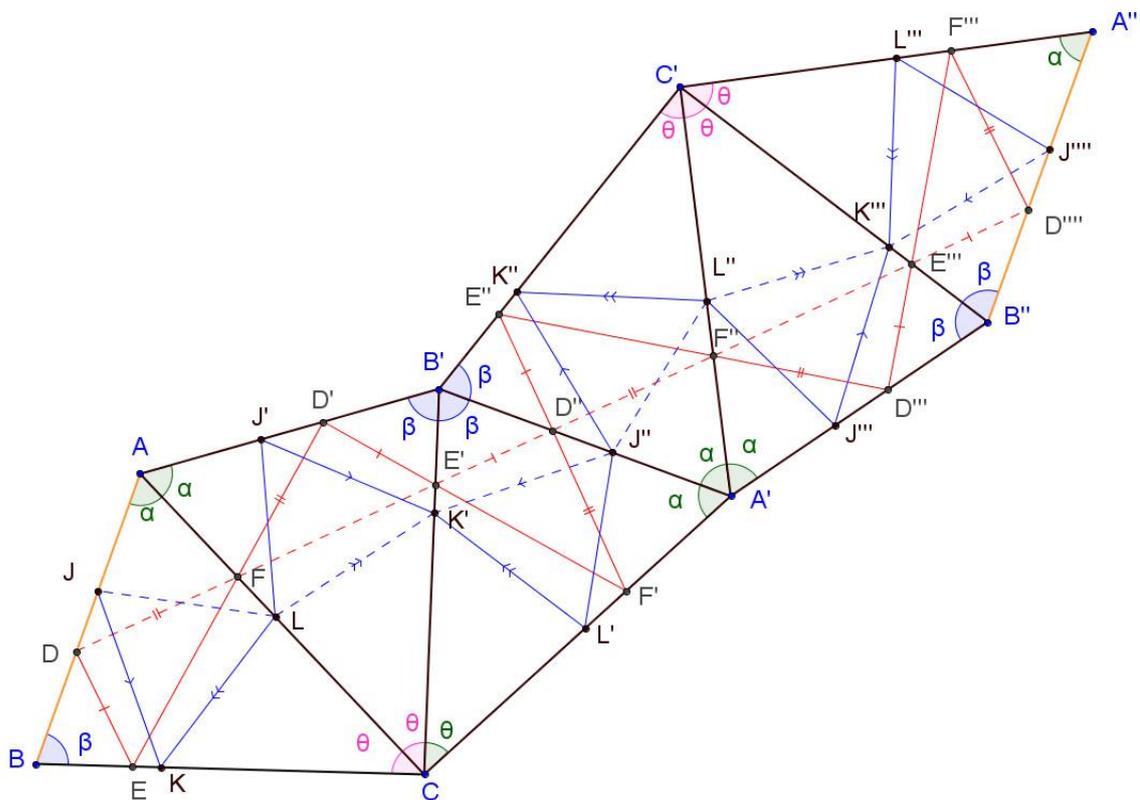
Considere um triângulo acutângulo ABC e sobre os lados AB , BC e CA considere, respectivamente, os pontos J , K e L . O perímetro de JKL será mínimo se o triângulo JKL for o triângulo órtico de ABC (o triângulo formado pelos pés das alturas do triângulo ABC).

(Há um resultado semelhante para triângulos obtusângulos.)



Resolução em vídeo: [reflexao 6.avi](#)

Vamos considerar o triângulo acutângulo ABC , seu triângulo órtico DEF e um triângulo qualquer JKL com vértices nos lados ABC como mostra a figura abaixo.



Agora vamos refletir o triângulo ABC com relação ao lado AC . Destacaremos com um tracejado dois lados distintos (um em ABC , outro em

AB'C) do triângulo órtico que concorrem em F e dois lados distintos do triângulo genérico que concorrem em L (da mesma forma: um em ABC, outro em AB'C).

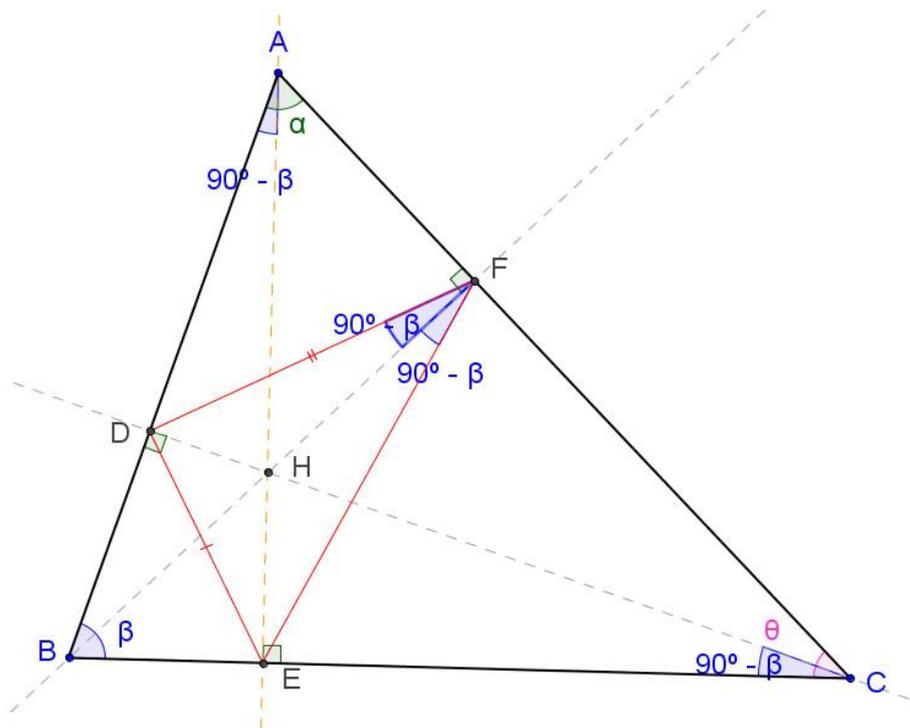
Agora vamos refletir o triângulo AB'C com relação ao lado B'C. Repetiremos o processo, analogamente, tracejando os lados distintos do triângulo genérico que concorrem em K', assim como os lados distintos do triângulo órtico que concorrem em E'.

Mais uma reflexão, com relação a A'B', tracejando os segmentos distintos que concorrem em J'', e o mesmo com relação a D''. Mais uma reflexão, com relação a A'C', destacando o segmento azul e o vermelho como fizemos nos casos anteriores. E finalmente a última reflexão (com relação a C'B''), tracejando os segmentos diferentes que concorrem em K''' e E'''. Percebe-se, pela figura, que a linha tracejada azul é uma poligonal, enquanto a vermelha é um segmento de reta.

Mas, para provar isso, precisamos do seguinte teorema:

As alturas de um triângulo acutângulo ABC bisseccionam os ângulos internos de seu triângulo órtico.

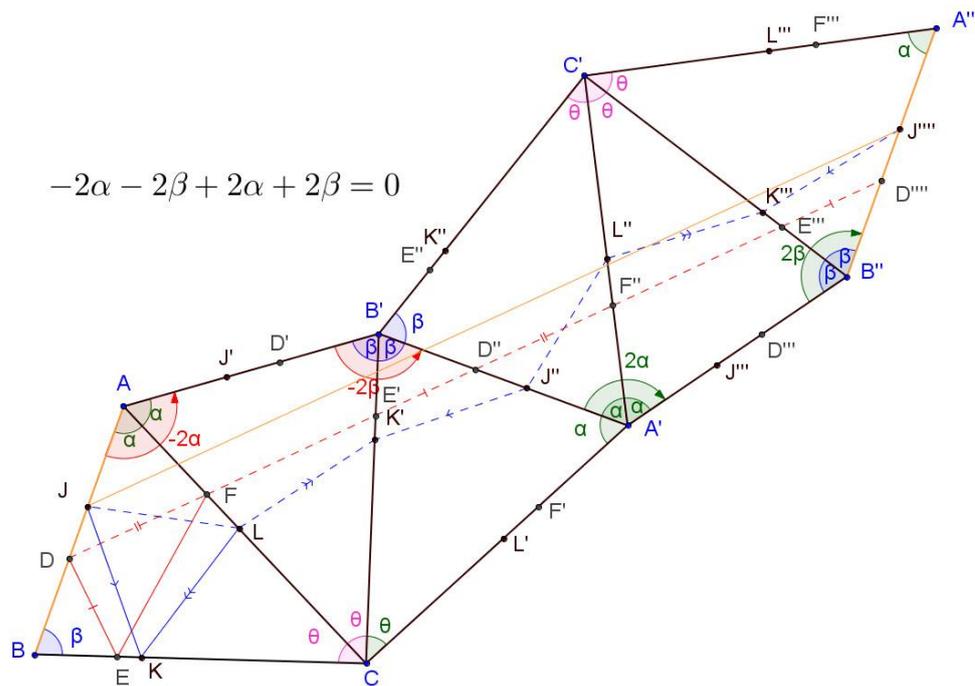
Os ângulos opostos do quadrilátero ADHF (próxima figura) são suplementares. Logo, o quadrilátero ADHF é inscritível. O ângulo $\sphericalangle DAH = 90^\circ - \beta$ e $\sphericalangle DAH = \sphericalangle DFH$ (ambos subentendem a corda DH), logo $\sphericalangle DFH = 90^\circ - \beta$.



De forma análoga, verifica-se que os ângulos $\angle ECH$ e $\angle EFH$, inscritos na mesma circunferência, “enxergam” o segmento HE sob um mesmo ângulo. $\angle EFH = 90^\circ - \beta$, $\angle EFH = \angle ECH$. Com isso, provamos que a altura relativa ao lado AC bissecciona o $\angle DFE$ do seu triângulo órtico.

Como o lado AC não tem nada de especial, o raciocínio poderá ser repetido para os demais lados e para as demais alturas.

Voltando ao problema de Fagnano (figura a seguir), como vimos, o fato de BF ser a altura com relação ao lado AC faz com que seja também bissetriz do ângulo DFE.



Inicialmente ele sofreu uma rotação de 2α no sentido anti-horário e, em seguida, uma rotação de 2β também no sentido anti-horário, uma rotação de 2α no sentido horário e uma rotação de 2β , também no sentido horário.

O segmento AB sofreu efetivamente uma translação pois o ângulo total de rotação foi zero, pois $-2\alpha - 2\beta + 2\alpha + 2\beta = 0$. Temos então que:

- 1) AB é paralelo a $A''B''$.
- 2) O polígono $DD''J''J$ é um paralelogramo, concluímos que $JJ'' = DD''$.

A poligonal tracejada azul (que vai de J a J'') representa o comprimento do dobro do perímetro do triângulo genérico, mas o comprimento de DD'' é igual ao dobro do perímetro do triângulo órtico que é igual a JJ'' . Portanto,

$JJ'' (= DD'') \leq$ comprimento da poligonal azul.

Perímetro do triângulo órtico \leq perímetro do triângulo genérico

Ou seja, de todos os triângulos inscritos num triângulo acutângulo ABC, o que tem o menor perímetro é o seu triângulo órtico DEF.

3.2 Questões que envolvem (muitas) contas

Explicar é preciso... Traduzindo de ([3] p.7).

Emil Artin (1898-1962) ficou famoso por palestras extremamente claras e extraordinariamente bem apresentados que ele sempre deu sem utilizar quaisquer notas. Um dia, no meio do caminho em uma demonstração, de repente, ele hesitou e disse: "Esta conclusão é trivial". Depois de alguns segundos, ele repetiu: "é trivial, mas eu não sei por quê." Ele, então, pensou na questão por mais um minuto e disse: "Eu sei que é trivial, mas eu não a estou mais entendendo." Ele refletiu sobre isso alguns momentos mais e finalmente disse: "desculpe-me, eu tenho que olhar as minhas notas de aula". Em seguida, ele saiu da sala e voltou dez minutos depois, dizendo: "ela realmente é trivial". (Testemunhado pelo Prof. Josef Schmid, Fribourg)

O aluno brasileiro, especialmente os que possuem conhecimento pueril em matemática, normalmente relaciona mentalmente matemática com contas, de tal forma que, na ausência de contas, aquele conhecimento, ou lhe parece inútil, ou não parece ser matemática. E esta análise, ou pré-conceito, é bem natural em um país em que as provas, em geral, por serem objetivas - múltipla escolha -, parecem estar de fato interessadas apenas no resultado e, não, no raciocínio utilizado alcançá-lo.

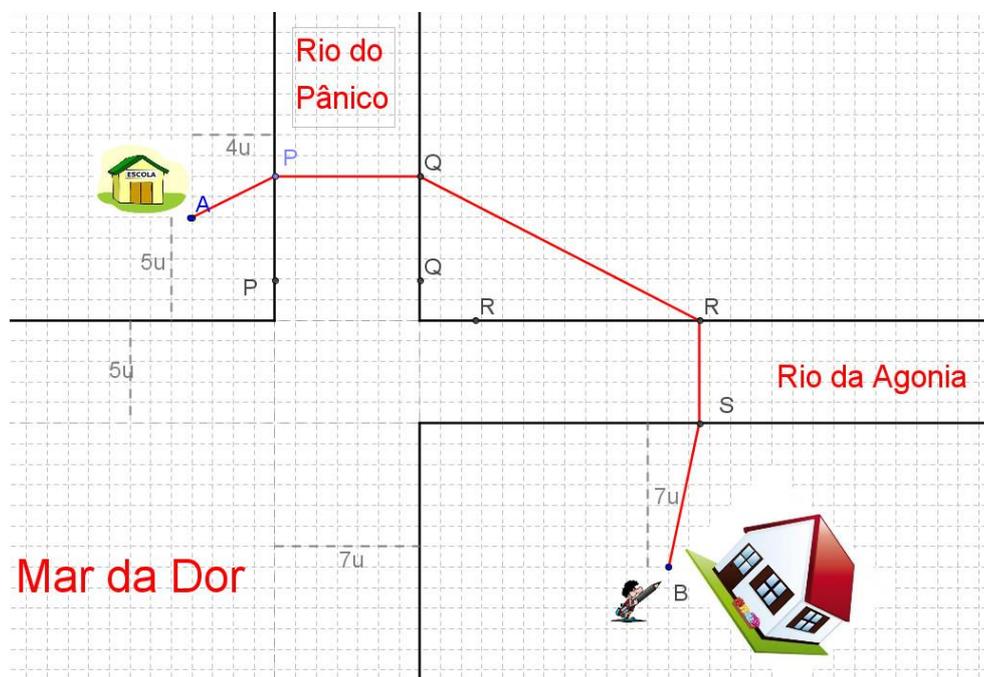
O objetivo desta seção é mostrar que é possível fazer contas com os problemas de construção. Tratei de adaptar os problemas de tal forma a não produzir contas muito extensas, pois isso tiraria o foco do que realmente interessa para este trabalho, que é aplicação das transformações estudadas.

Problema nº 9

Caminho mínimo por duas pontes.

Flaudemíglia mora no ponto B e estuda na escola localizada em A. No seu caminho, ele tem que atravessar dois rios muito perigosos: o Rio do Pânico e o Rio da Agonia; ambos desembocando no Mar da Dor. Para evitar a travessia de barco, que tornava a viagem bem mais perigosa, o prefeito decidiu construir duas pontes, uma em cada rio, de forma que o caminho entre a casa e a escola de Flaudemíglia fosse o mais curto possível.

O mapa local está abaixo. Como construir este caminho e qual o seu comprimento total?

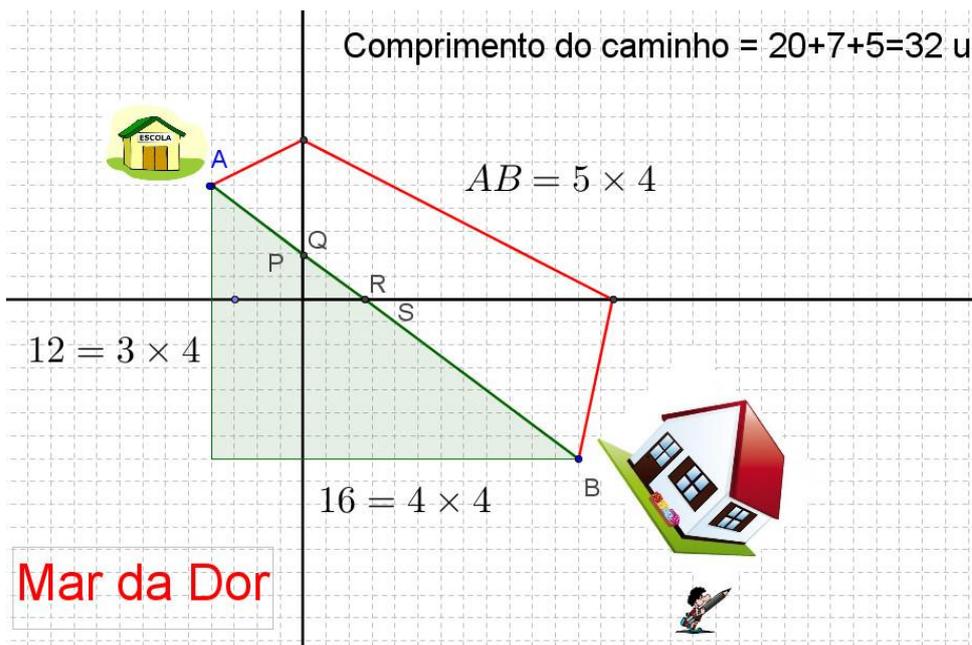


Resolução em vídeo: translacao_rios_perpendiculares.avi

Primeiro transladamos a parte inferior do Rio da Agonia (e tudo que está abaixo dela) na direção perpendicular às margens do rio, de S para R, até que as margens se sobreponham uma à outra.

Em seguida, transladamos a margem direita do Rio do Pânico (e tudo que se encontra à direita dela), perpendicularmente às margens, de Q para P até que as margens se sobreponham.

O objetivo da translação é eliminar as partes do caminho (o tamanho das pontes) cujos comprimentos serão sempre os mesmos qualquer que seja o caminho que se escolha. Feito isso, poderemos nos concentrar somente na parte que nos interessa, que é a parte que varia de uma escolha para a outra. O resultado será a figura abaixo:



Visto desta forma, fica bem claro que o menor caminho entre A e B será um segmento de reta. Como o triângulo formado é pitagórico, o comprimento da parte variável do problema será o comprimento de AB, ou seja, 20 unidades de comprimento. Também é relativamente simples, por semelhança de triângulos, achar as coordenadas dos pontos exatos onde as pontes devem ser construídas.

O comprimento total a ser percorrido será a soma do comprimento variável com os comprimentos das pontes. Ou seja, o caminho que Flaudemíglgio percorrerá diariamente de casa para a escola (ou da escola para casa) medirá

$$20 + 7 + 5 = 32 \text{ unidades de comprimento.}$$

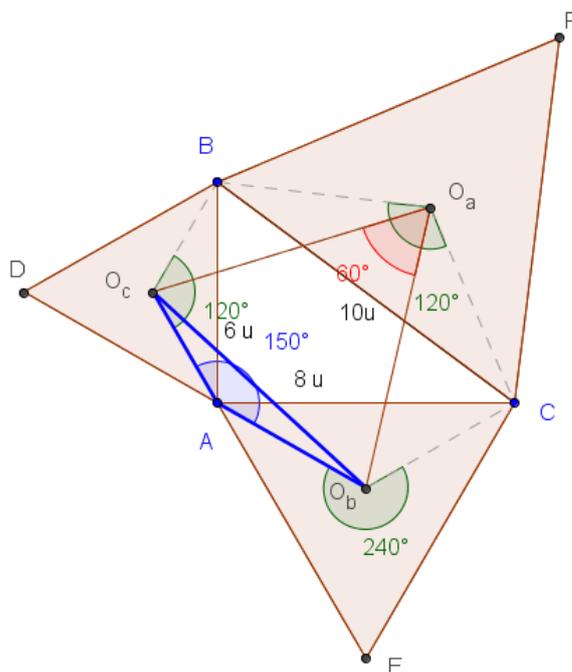
Problema nº 10

Considere um triângulo ABC, retângulo em A, de lados 6, 8 e 10. Construa triângulos equiláteros ABD, BCF e ACE externamente ao triângulo ABC. Determine o valor da área do triângulo formado pelos baricentros destes triângulos equiláteros.



Resolução em vídeo: [rotacao 4.avi](#)

Considerando o problema resolvido, poderíamos deduzir que...



O ponto O_a é o centro de uma rotação de 120° no sentido horário que leva C em B. E O_c é o centro de uma rotação de 120° no sentido horário que leva B em A.

Vamos então encontrar o centro da composição destas duas rotações, que é capaz de levar o ponto C diretamente em A, rotacionando-o de 240° no sentido horário. Para tanto, faremos o que o teorema da composição determina:

1. rotacionar a reta suporte de O_aO_c em torno de O_a (1° centro de rotação) no sentido anti-horário (contrário ao da 1° rotação) de um ângulo de 60° (metade do ângulo da 1° rotação).
2. rotacionar a reta suporte de O_aO_c em torno de O_c (2° centro de rotação) no sentido horário (igual ao da 2° rotação) de um ângulo de 60° (metade do ângulo da 2° rotação).

Temos que o ponto de encontro destas duas retas será exatamente o nosso centro de rotação de 240° que levará o ponto C diretamente ao ponto A.

Percebe-se que:

1. O_b é exatamente o centro do 3º triângulo equilátero com base em AC construído externamente ao triângulo ABC ($\angle CO_bA = 120^\circ$ e $CO_b = O_bA$).
2. $O_aO_bO_c$ é equilátero (2 ângulos internos de 60°).
3. O resultado anterior vale para qualquer triângulo ABC.

Para alcançarmos o nosso objetivo, que é determinar a área do triângulo $O_aO_bO_c$, basta descobrirmos o valor de qualquer um de seus lados. Isolaremos, portanto, o triângulo AO_cO_b .

$$\text{Como } O_c \text{ é baricentro, } AO_c = 2/3 \text{ da altura de } ADB = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} u$$

$$\text{Como } O_b \text{ é baricentro, } AO_b = 2/3 \text{ da altura de } ADB = \frac{2}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} u$$

Pela lei dos cossenos temos

$$O_cO_b^2 = (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 150^\circ$$

Temos então que $O_cO_b^2 = \frac{300}{9} + 16\sqrt{3}u^2$, logo, como o triângulo é

equilátero, temos que sua área é igual a $\left(\frac{100}{3} + 16\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{3} + 12u^2$

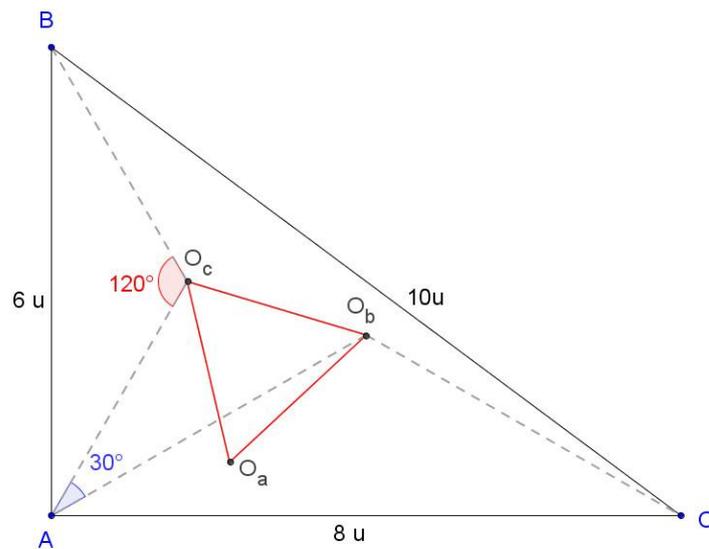
Problema nº 11

Considere o problema anterior, só que os triângulos equiláteros serão construídos agora em semiplanos opostos aos anteriormente escolhidos. Determine a nova área do triângulo formado pelos baricentros dos triângulos equiláteros.



Resolução em vídeo: [rotacao 4 1.avi](#)

Novamente, imaginando a figura do problema já resolvido...



O ponto O_a é o centro de uma rotação de 120° no sentido anti-horário que leva C em B.

E O_c é o centro de uma rotação de 120° no sentido anti-horário que leva B em A.

O ponto O_b pode ser visto como centro de uma rotação de 240° no sentido anti-horário que leva C diretamente em A ($\sphericalangle CO_bA = 120^\circ$), ou seja, O_b é o centro da composição das duas primeiras rotações, centradas em O_a e O_b .

Vamos então encontrar o centro da composição destas duas rotações, que levará o ponto C diretamente em A, rotacionando-o de 240° no sentido anti-horário. Para tanto, faremos o que o teorema da composição determina:

3. rotacionar a reta suporte de O_aO_c em torno de O_a (1º centro de rotação) no sentido horário (contrário ao da 1ª rotação) de um ângulo de 60° (metade do ângulo da 1ª rotação).
4. rotacionar a reta suporte de O_aO_c em torno de O_c (2º centro de rotação) no sentido anti-horário (igual ao da 2ª rotação) de um ângulo de 60° (metade do ângulo da 2ª rotação).

O ponto de encontro destas duas retas será exatamente o nosso centro de rotação de 240° que levará o ponto C diretamente ao ponto A.

A sequência de movimentos acima nos permite concluir que o triângulo $O_A O_B O_C$ é equilátero.

Para alcançarmos o último objetivo, que é determinar a área do triângulo $O_A O_B O_C$, basta descobrir o valor de qualquer um de seus lados. Isolaremos, portanto, o triângulo $A O_C O_B$.

$$\begin{aligned} \text{Como } O_c \text{ é baricentro, } AO_C &= (2/3 \text{ da altura do triângulo com base em AB}) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } O_b \text{ é baricentro, } AO_B &= (2/3 \text{ da altura do triângulo com base em AC})= \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} u \end{aligned}$$

Pela lei dos cossenos, temos

$$O_C O_B^2 = (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^\circ$$

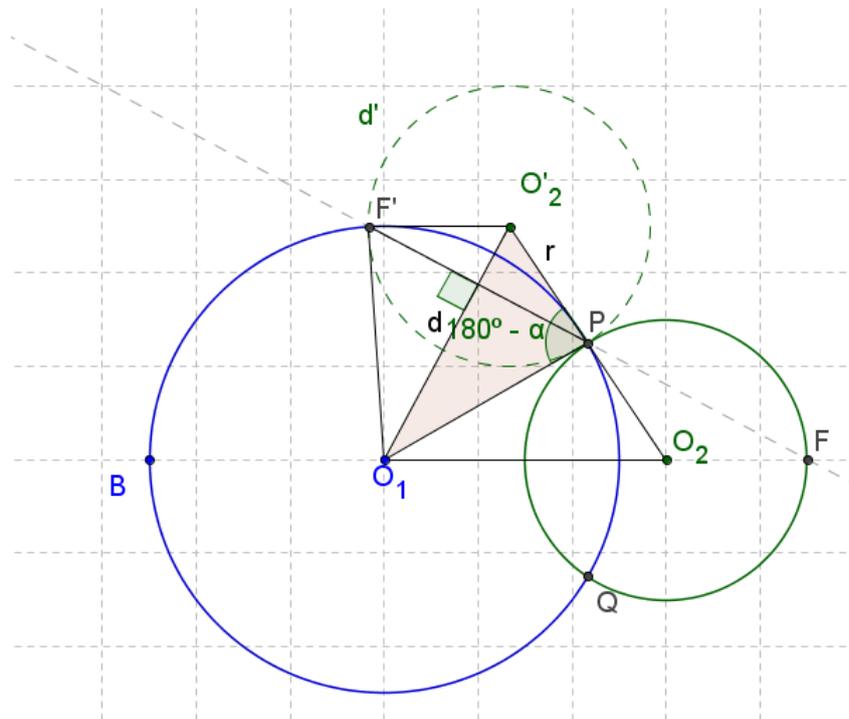
Tem-se, então, que $O_C O_B^2 = \frac{300}{9} - 16\sqrt{3} u^2$, logo, como o triângulo é equilátero, a sua área é igual a $\left(\frac{100}{3} - 16\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{3} - 12u^2$

Problema nº 12

Considere duas circunferências de raios 3 e 5, e cujos centros distam 6 unidades um do outro. Seja P um dos pontos de interseção destas circunferências. Construa uma secante que passe por P e corte ambas as circunferências segundo cordas de um mesmo comprimento. Calcule o tamanho de cada uma destas cordas.



Resolução em vídeo: [rotacao_circulo_1.avi](#)



Se o problema estivesse resolvido, rotacionar a circunferência menor de 180° em torno de P...

- 1) Transformaria F em F'
- 2) Definiria $O_1O'_2$ como mediatriz de PF'.

Nosso objetivo é calcular o comprimento de PF'(que é igual a PF). Para tanto consideremos então o triângulo O_1PO_2

Calculemos o $\cos \alpha$

$$O_1O_2^2 = PO_2^2 + PO_1^2 - 2 \cdot PO_2 \cdot PO_1 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{O_1O_2^2 - PO_2^2 - PO_1^2}{2 \cdot PO_2 \cdot PO_1} = \frac{6^2 - 3^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} \therefore \cos \alpha = \frac{-1}{15}$$

Calcularemos também o valor do $\sin \alpha$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{-1}{15}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{224}{225} \therefore \sin \alpha = \frac{4\sqrt{14}}{15} \quad (\text{pois com } 0 < \alpha < 180^\circ)$$

Agora, consideremos o triângulo $O_1PO'_2$. Vamos achar o comprimento de PF' calculando sua área de duas formas diferentes e igualando os resultados.

Para tanto precisaremos saber primeiro o valor de d (O_1O_2) nas mesmas unidades.

De posse dessas informações calcularemos o valor de PF

$$d^2 = r^2 + O_1P^2 - 2r O_1P \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-\cos \alpha) = 34 - 30 \cdot \frac{1}{15}$$

$$d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Área } \triangle O_1O_2'P = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{PF'}{2}}{2}$$

$$\frac{5 \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{14}}{15}}{2} = \sqrt{2} \cdot PF'$$

$$PF' = 2\sqrt{7} = PF$$

Problema nº 13

Considere três circunferências concêntricas de raios $5u$, $7u$ e $8u$. Construa um triângulo equilátero de tal forma cada uma dessas circunferências contenha um - e apenas um - de seus vértices. Calcule a medida do lado deste triângulo.



Resolução em vídeo: [rotacao circulo 2.avi](#)

Considere três circunferências concêntricas, Ω , Σ , Γ de raios respectivamente iguais a $5u$, $7u$ e $8u$.

Se o problema já estiver resolvido, rotacionando a circunferência Γ de 60° (sentido anti-horário) em torno de P . Transformaríamos A em A' e Q em Q' como mostra a figura.

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{11}{14}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{\pm\sqrt{75}}{14}, \text{ com } 0 < \alpha < 180^\circ \quad \therefore \text{sen}\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\cos(60^\circ + \alpha) = \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{14} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{-1}{7}$$

Calcularemos agora PQ' (ou PQ).

Aplicando novamente a lei dos cossenos, agora ao triângulo APQ'.

$$PQ'^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{-1}{7}$$

$$PQ' = \sqrt{129}$$

Calculado o lado de PQQ', precisamos saldar uma dívida. Quando construímos o problema em que as medidas eram 5, 7 e 8, havíamos encontrado duas soluções possíveis.

Vamos agora, então, resgatar da configuração inicial a segunda solução e calcular o lado do 2º triângulo equilátero que pode ser formado.

Temos que os triângulos AA'R' e AA'Q' são congruentes (ambos possuem lados 5 u, 7 u e 8 u).

Isolando o triângulo APR', percebemos que precisamos conhecer as linhas trigonométricas de $60^\circ - \alpha$.

$$\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{14} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{13}{14}$$

E, finalmente, o lado do 2º triângulo equilátero

$$(PR')^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{13}{14}$$

$$PR' = \sqrt{49 + 64 - 104}$$

$$PR' = 3$$

O problema de se construir e calcular os lados dos triângulos cujos vértices pairam sobre 3 circunferências concêntricas, entretanto, pode aparecer de outra forma. Podemos querer simplesmente saber quais são os triângulos equiláteros (como construir e quais são as medidas dos seus lados) cujos vértices distam $5u$, $7u$ e $8u$ de um determinado ponto fixo A no plano.

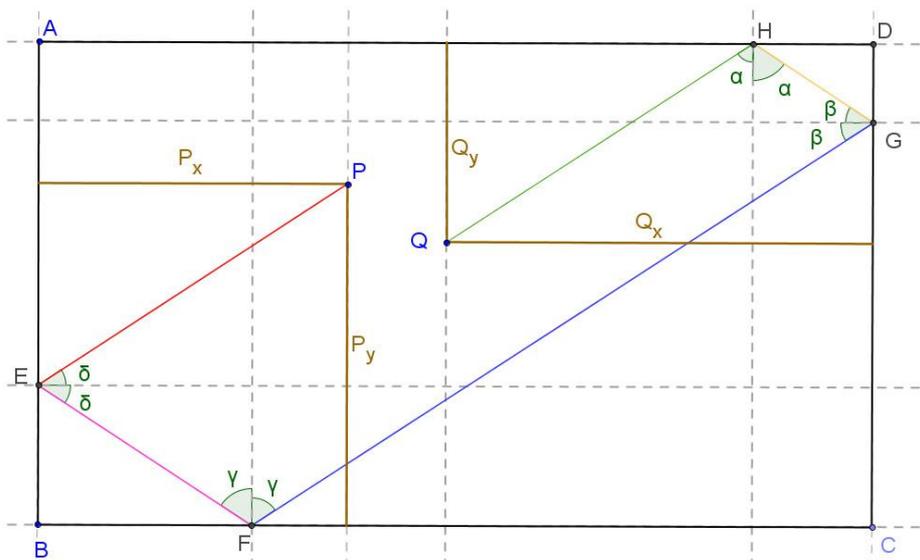
Os problemas são idênticos.

Problema nº 14

Vamos considerar o retângulo $ABCD$ mostrado abaixo, que ilustra uma mesa de sinuca, e, sobre ela, dois pontos P e Q .

Com uma tacada numa bola localizada em P , um jogador deseja fazê-la ricochetear sucessivamente nas bordas AB , BC , CD e DA da mesa até que ela atinja finalmente o ponto Q .

Em que direção ele deve lançar a bola? Construa a trajetória percorrida e calcule o seu comprimento.

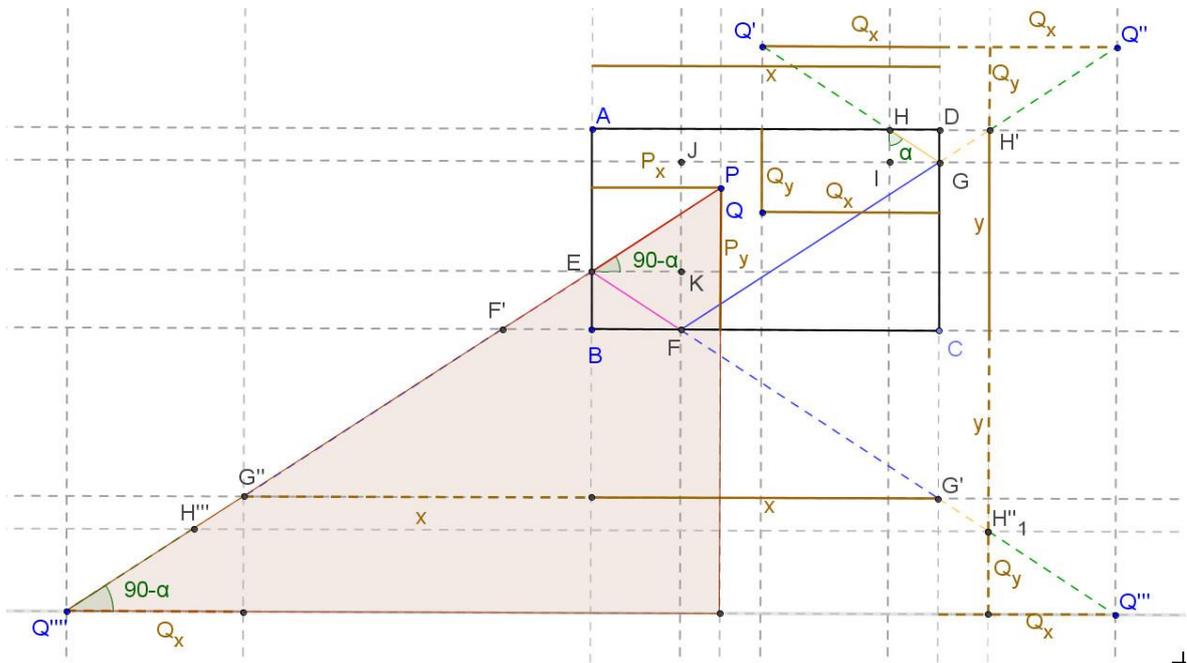




Resolução em vídeo: [reflexao 3.avi](#)

Iremos admitir que os choques das esferas com as bordas da mesa funcionam geometricamente como raios de luz num espelho plano.

Para construir a trajetória, vamos fazer como fizemos no exercício de reflexão em dois espelhos.



Refletimos Q (o último ponto da trajetória) com relação a DA, obtendo Q'. Em seguida, refletimos Q' com relação a CD, obtendo Q''. Depois refletimos Q'' com relação a BC, obtendo Q'''. Por último, refletimos Q''' com relação a AB, obtendo Q''''.

Agora ligamos a última imagem (Q''') ao ponto de partida P, obtendo o ponto E, de contato da esfera com o lado AB da mesa. Ligando E ao ponto Q''', achamos o ponto F (ponto de incidência com o lado BC). Ligando F ao ponto Q'', achamos G e finalmente ligando G ao ponto Q', achamos H (último ponto de contato antes de passar por Q).

Terminada a construção do caminho, vamos agora desdobrá-lo para calcular o seu comprimento em função dos parâmetros dados. Isolaremos o

No triângulo HIG, temos $\beta = 90^\circ - \alpha$.

No triângulo GJF, $\gamma = \alpha$.

No triângulo EKF, $\delta = 90^\circ - \alpha$.

$90^\circ - \alpha$ também é o ângulo entre PQ'''' e o cateto horizontal.

Temos então que:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y + Py + Qy}{x + Px + Qx}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x + Px + Qx}{y + Py + Qy}$$

Podemos imaginar também o que aconteceria se a bola retornasse ao ponto de partida após ricochetear em todas as bordas, ou seja, $Q = P$.

Para o jogador conseguir fazer isso, bastaria que ele, no momento de jogar, alinhasse o seu taco na direção da diagonal da mesa, o que mostra a expressão $\operatorname{tg} \alpha$, abaixo.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x+x}{y+y} = \frac{x}{y}$$

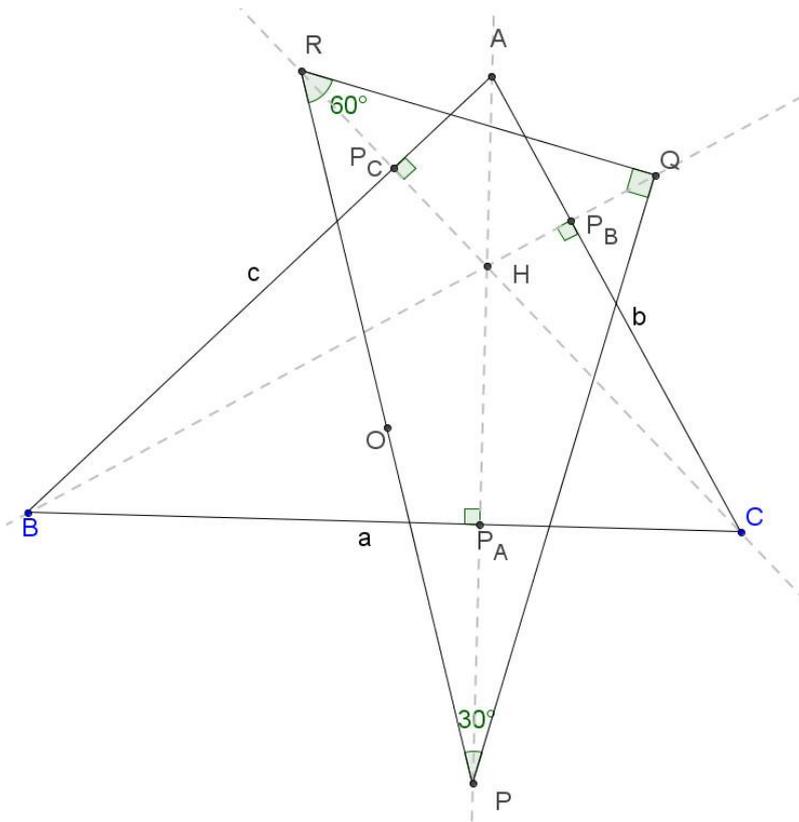
Interessante questionar, e investigar, se os resultados acima valem quaisquer que sejam as posições de P e Q dentro do retângulo ABCD.

Problema nº 15

Considere um triângulo PQR, retângulo em Q, de hipotenusa igual a 2, tal que $\hat{P} = 30^\circ$. Sabendo que P, Q e R são pontos simétricos do ortocentro de um triângulo ABC com relação, respectivamente, aos seus lados a, b e c, determine a área do triângulo ABC.



Resolução em vídeo: [reflexao 5.avi](#)



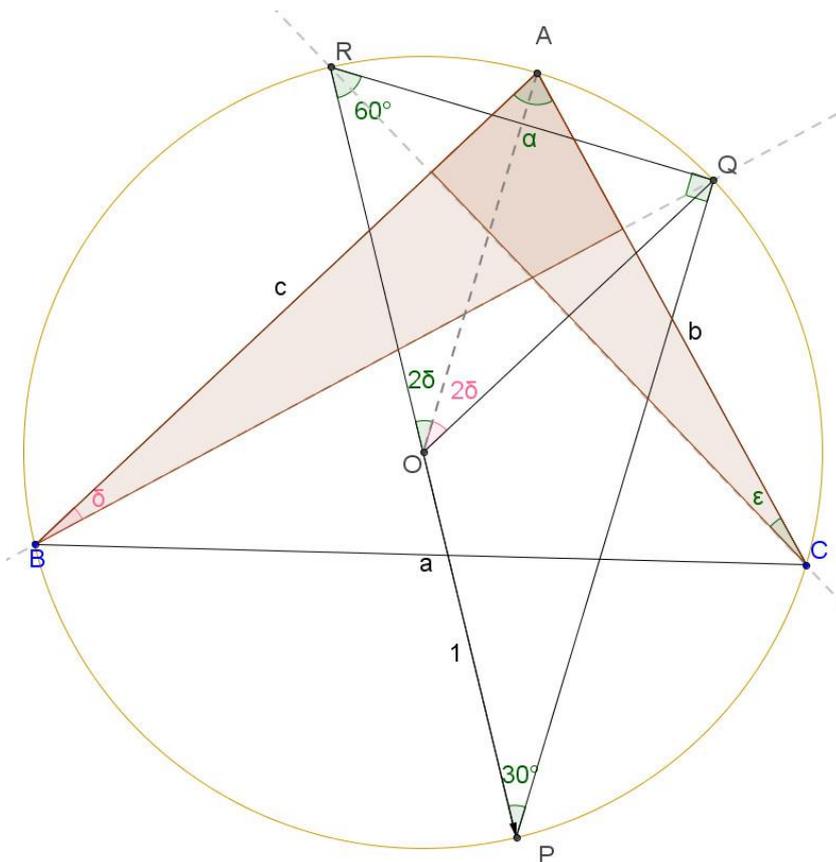
Podemos observar acima a figura final, como se o problema já estivesse resolvido. O ponto Q é o simétrico de H com relação ao lado b. O ponto R é o simétrico de H com relação ao lado c e P é simétrico de H com relação ao lado a.

Como já foi demonstrado, P, Q e R estão na mesma circunferência que contém A, B e C e como o triângulo PQR é retângulo, PR é o diâmetro da circunferência de centro O e raio 1. O ângulo RAQ mede 60° , pois o ângulo inscrito RPQ mede 30° . Os ângulos inscritos RCA e ROA possuem as mesmas extremidades; o mesmo acontece com os ângulos QOA e QBA. Veremos que os ângulos QBA e RCA são congruentes. Consideremos que $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$

$$QBA = 90^\circ - \alpha = \delta, \quad QOA = 2\delta = 2(90^\circ - \alpha),$$

$$RCA = 90^\circ - \alpha = \varepsilon, \quad ROA = 2\varepsilon = 2(90^\circ - \alpha).$$

Logo, $90^\circ - \alpha = \delta = \varepsilon$



Como $\widehat{ROA} = \widehat{QOA}$ e $\widehat{QOR} = 60^\circ$, o vértice A divide ao meio o ângulo \widehat{QOR} .

Analogamente, como $\widehat{RCB} = \widehat{PAB}$ e $\widehat{POR} = 180^\circ$ e $\widehat{ROB} = \widehat{POB}$, $\widehat{ROB} = \widehat{POB} = 90^\circ$.

Analogamente, como $\widehat{PAC} = \widehat{QBC}$ e $\widehat{POQ} = 120^\circ$ e $\widehat{POC} = \widehat{QOC}$, $\widehat{POC} = \widehat{QOC} = 60^\circ$.

Com isso, os ângulos do triângulo ABC ficam evidentes, temos os três ângulos inscritos numa circunferência que valem metade dos arcos que subtendem, temos:

$$\widehat{A} = 75^\circ, \widehat{B} = 45^\circ \text{ e } \widehat{C} = 60^\circ.$$

Aplicando a Lei dos Cossenos, no triângulo ABC, temos:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = 2, \quad b = \sqrt{2},$$

$$\frac{c}{\sin 60^\circ} = 2, \quad c = \sqrt{3}$$

Para calcularmos a área do triângulo ABC, precisamos do valor do $\sin 75^\circ$.

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{Área do triângulo ABC} = \frac{bc \sin 75^\circ}{2}$$

$$\text{Área do triângulo ABC} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{8} = \frac{\sqrt{3} + 3}{4}$$

4 Formalização de Conceitos

Esta seção será utilizada para abordar alguns conceitos e teoremas - a maior parte deles já estudados em seções anteriores - que, a meu ver, necessitam ser consolidados com um pouco mais de rigor. Aproveitarei para estabelecer e explorar ligações entre as ideias apresentadas.

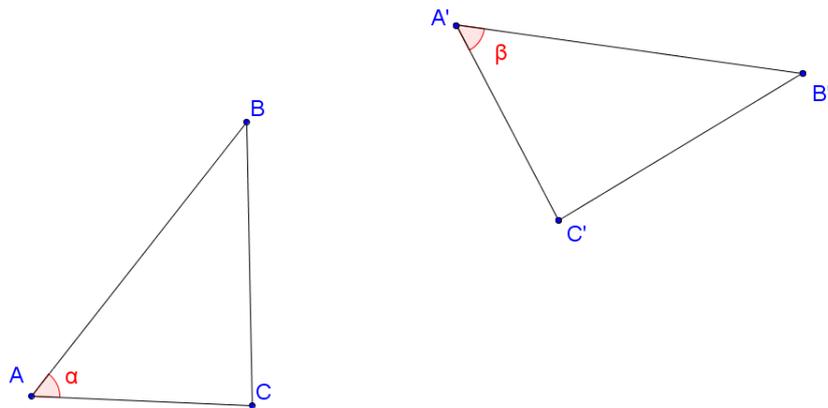
4.0 Transformações e Classes de Equivalência

As transformações que serão tratadas nesta seção - e já detalhadas em todo o texto precedente - serão sempre bijeções de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ em outro conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$. A e B são reconhecíveis no mundo físico como "*figuras geométricas*".

Além disso, neste trabalho, temos nos ocupado com movimentos rígidos. Ou seja, movimentos que preservam distâncias. Desta forma, se A_1 e A_2 são pontos do conjunto A transformados, respectivamente, em B_1 e B_2 e se $d(P,Q)$ for uma métrica (que é reconhecida, neste texto, ordinariamente como distância no plano), teremos que $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$.

Preservar distâncias implica preservar ângulos.

Com efeito, se A é movido para (ou transformado em) A', B para B' e C para C', o ângulo α (formado pelos segmentos AB e AC) irá coincidir com o ângulo β (formado pelos segmentos A'B' e A'C') pois, como todos os tamanhos dos lados foram mantidos, numa abordagem mais tradicional, teríamos o caso mais óbvio de congruência, que é o LLL. Como isso vale para quaisquer 3 pontos da figura considerada, teremos que a "transformação rígida" preservará todos os ângulos da figura transformada.



Transformações que preservam distâncias são chamadas genericamente de Isometrias.

Apesar desta introdução, o tratamento analítico (em coordenadas cartesianas) destas transformações será evitado. O conceito de Geometria trazido à tona originalmente por Felix Klein (1872) está profundamente ligado à Teoria de dos Grupos. Sugiro fortemente aos professores de nível Médio que não estejam familiarizados com a noção de Grupo, que procurem bons livros⁷ de Álgebra e leiam sobre o assunto.

Para definir um grupo, precisamos de um conjunto de objetos (números inteiros, por exemplo) e de uma operação que possa ser realizada com eles (a soma, por exemplo), de tal forma que esta operação cumpra certos requisitos:

- 1) a operação precisa ser fechada para o conjunto utilizado (a soma de dois inteiros sempre é um inteiro, no nosso exemplo);
- 2) a operação precisa ser associativa (a soma é claramente associativa).
- 3) a operação precisa possuir elemento neutro (no nosso caso, o zero faz este papel, pois $0 + x = x + 0 \quad \forall x$ inteiro).
- 4) a operação precisa possuir, para todo elemento do conjunto, um elemento inverso (no nosso caso, o inverso de x seria o $-x$ pois $-x + x = x + (-x) \quad \forall x$ inteiro .

⁷ Recomendo o HERSTEIN ([19], capítulo 2).

No caso de Grupos de Transformações, o nosso "conjunto de objetos" conterá Transformações sobre figuras do plano e a "operação" que utilizaremos será a operação de composição.

Desta forma poderemos definir, por exemplo, o Grupo das Rotações em torno de um ponto fixo P , onde uma rotação genérica seria representada por $R_{P,\theta}$. A rotação de uma figura Ω de 30° em torno de P seria representada, por exemplo, por $R_{P,30}(\Omega)$. A rotação de 50° do resultado desta última em torno de P seria representada por $R_{P,50}(R_{P,30}(\Omega))$, ou $R_{P,50} \circ R_{P,30}(\Omega)$ (há várias maneiras de representar composição; o símbolo, de fato, é imaterial).

É relativamente simples verificar que:

- 1) a composição de duas rotações em torno de um mesmo ponto sempre poderá ser substituída por outra em torno do mesmo ponto;
- 2) como a rotação que decorre da composição de rotações em torno de um ponto, é perfeitamente caracterizada pelo ângulo final e este é a soma dos ângulos que representam as rotações presentes na composição, a composição de rotações neste grupo será, também, associativa (pois a soma é associativa);
- 3) a rotação que representa o elemento neutro é $R_{P,0}$.
- 4) a inversa de $R_{P,\theta}$ é $R_{P,-\theta}$.

Também poderíamos definir, por exemplo, o conjunto de todas as reflexões no plano. Uma reflexão genérica com relação a uma reta r seria, representada, portanto, por H_r . O problema é que este conjunto, junto com a operação de composição, não possui todas as propriedades necessárias para podermos caracterizá-lo como um Grupo, algebricamente falando. Por exemplo, a composição de reflexões nem sempre dará como resultado uma reflexão. Se r e s são paralelas separadas por uma distância d , $H_r \circ H_s(\Omega)$ dará como resultado a translação de Ω numa direção perpendicular a qualquer uma das retas r ou s . Como o resultado é uma figura diretamente congruente com Ω , não há no plano uma reflexão capaz de representar esta composição.

Uma questão que deve ser abordada é: *qual a vantagem de se dar este tratamento "algébrico" às Transformações no plano?*

Ao enxergar as Transformações sob o prisma da Teoria dos Grupos, podemos, com muito mais facilidade e segurança, definir Classes de Equivalência, que seriam conjuntos de coisas que nos parecem iguais, ou, como costumamos dizer, congruentes. Sabemos, por exemplo, que todos os triângulos com lados medindo 3u, 4u e 5u no plano são congruentes entre si. Na verdade, a melhor maneira de dizer isso seria: todos os triângulos com lados medindo 3u, 4u e 5u no plano são indistinguíveis entre si para nossos padrões de congruência. Para uma criança na classe de alfabetização, ou para artista plástico, ou um perito criminalista, isso pode não ser tão óbvio. Mesmo que dois triângulos possuam os mesmos lados, o fato de um ser verde e o outro vermelho, por exemplo, pode torná-los completamente diferentes um do outro.

Determinar quais características devemos observar a fim de discernir se dois objetos são de fato "iguais" segundo um determinado critério é, portanto, fundamental para termos sucesso em um sem número de atividades mundanas; inclusive, definir o que é uma Geometria.

A importância da Teoria dos Grupos fica óbvia quando estudamos as propriedades que devemos exigir de uma relação qualquer entre elementos de um conjunto a fim de que ela consiga segregar desse universo subconjuntos em que as figuras que pertençam a um mesmo subconjunto sejam, segundo determinado critério, indistinguíveis entre si. Para que uma relação qualquer seja considerada de equivalência, ela precisa ser transitiva, simétrica e reflexiva. Digamos que T seja a relação *é a imagem de uma rotação em torno de P de* e atue sobre figuras no plano. É bastante fácil constatar que:

- 1) T é reflexiva pois, qualquer que seja a figura Ω , " Ω *é a imagem de uma rotação em torno de P de* Ω ". Basta considerarmos uma rotação de zero grau.

- 2) T é simétrica pois, quaisquer que sejam as figuras Ω e Ψ , se " Ω é a imagem de uma rotação em torno de P de Ψ ", então " Ψ é a imagem de uma rotação em torno de P de Ω ". Se usamos $R_{p,\theta}$ na primeira assertiva, basta usarmos $R_{p,-\theta}$ na segunda.
- 3) Finalmente, T é transitiva, pois, quaisquer que sejam as figuras Ω , Ψ e Γ , se $R_{p,\theta}$ é tal que $\Psi = R_{p,\alpha}(\Omega)$ e $\Gamma = R_{p,\beta}(\Psi)$, podemos afirmar que " Γ é a imagem de uma rotação em torno de P de Ω ", pois $\Gamma = R_{p,\alpha+\beta}(\Omega)$.

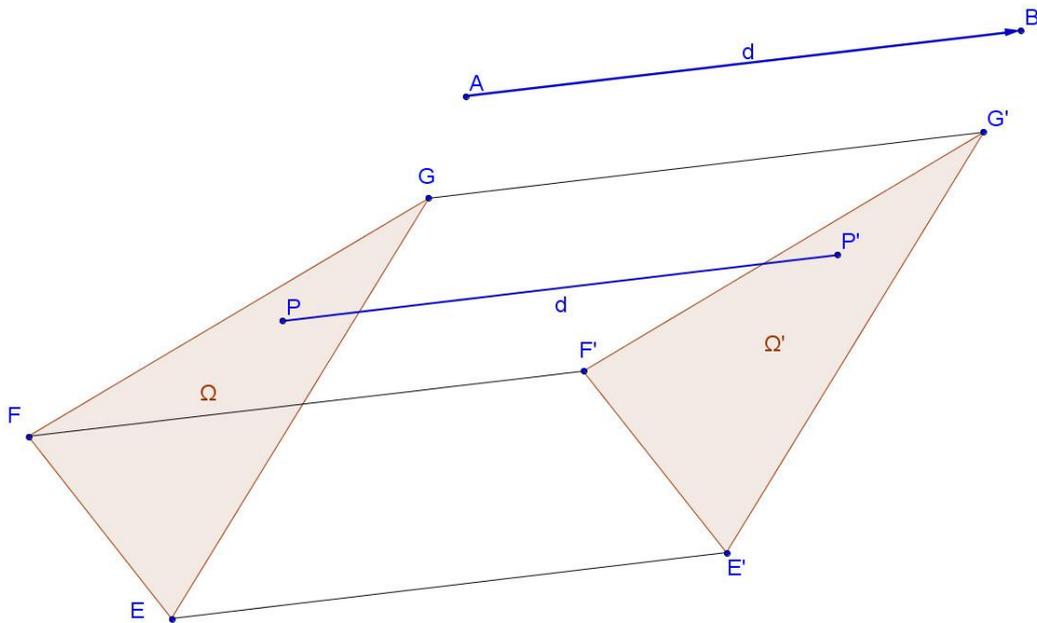
Poderíamos considerar como equivalentes, congruentes ou mesmo iguais a Ω todas as figuras do plano que se relacionam com Ω por esta relação de equivalência. Com isso, criaríamos a Classe de Equivalência das figuras que se relacionam com Ω por T. Poderíamos também definir uma Geometria como sendo o estudo de todas as propriedades que não variam para figuras dentro de uma mesma classe de equivalência definida por T.

O mesmo não conseguiríamos fazer se T fosse definida, por exemplo, como " Ω é a imagem de uma reflexão (com relação a alguma reta no plano) de Ψ ", pois esta relação sequer é reflexiva, uma vez que não há qualquer reflexão no plano que transforme uma figura nela mesma.

4.1 Translação

Diremos que uma figura plana Ω foi transladada paralelamente a um segmento de reta AB, de A para B (para economizar palavras, diremos simplesmente que Ω foi transladada na direção $\overrightarrow{v_{AB}}$), ao longo de uma distância d, se a todo ponto P, de Ω , fizermos corresponder um ponto P', em Ω' de tal forma que

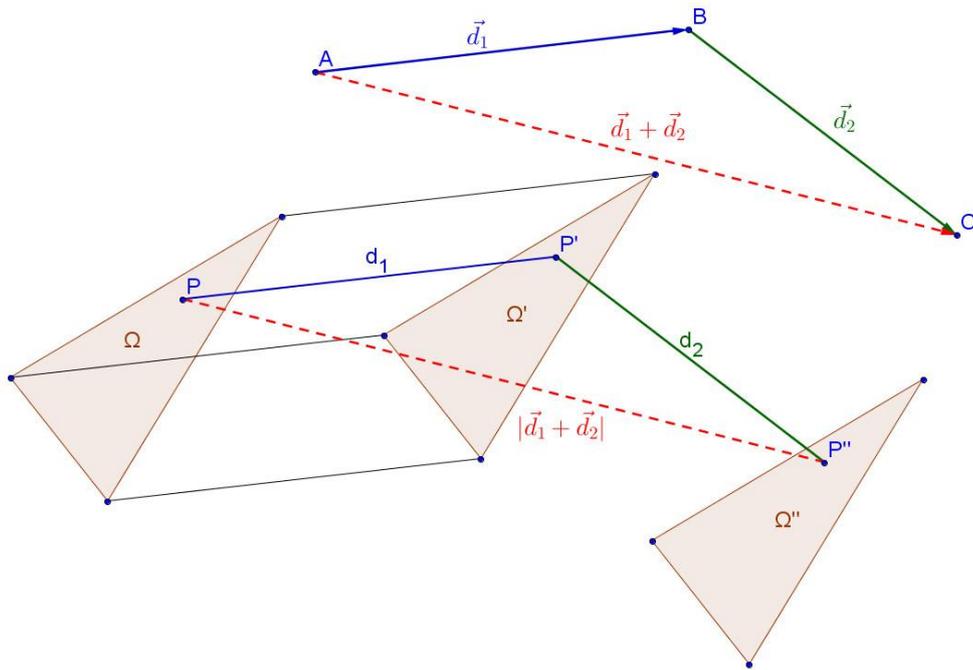
- 1) o segmento PP' seja paralelo e igualmente orientado a AB (ou seja, se B estiver à direita de A, P' precisa estar à direita de P) e
- 2) $PP' = d$.



Propriedades:

1) A translação é um movimento rígido, ou seja, preserva distâncias. Isso pode ser facilmente constatado notando-se que, para um segmento genérico EF, o polígono EFF'E' é um paralelogramo. (Uma vez que, na figura acima, $\sphericalangle E'EF + \sphericalangle EFF' = 180^\circ$ - colaterais internos, pois $FF' \parallel EE'$. Além disso, e $FF' = EE' = d$.)

2) A composição de duas translações é uma translação. Se todo ponto P de Ω é transladado de um vetor \vec{d}_1 (transformando P em P') e, em seguida, de um vetor \vec{d}_2 (que transforma P' em P''), a transformação resultante levará P em P'' pelo vetor $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$. Se prosseguirmos com este paralelo entre translações e vetores, concluiremos que a composição de translações também é comutativa, ou seja, se $T_{\vec{d}_1}$ translada Ω na direção \vec{d}_1 e $T_{\vec{d}_2}$ translada Ω na direção \vec{d}_2 , $T_{\vec{d}_1}(T_{\vec{d}_2}(\Omega)) = T_{\vec{d}_2}(T_{\vec{d}_1}(\Omega)) = T_{\vec{d}_1 + \vec{d}_2}(\Omega)$.



3) Sempre podemos inverter uma translação. Para toda translação $T_{\vec{d}}$, sempre podemos achar uma translação $T_{-\vec{d}}^{-1} = T_{-\vec{d}}$ tal que $T_{-\vec{d}}(T_{\vec{d}}(\Omega)) = T_{\vec{d}}(T_{-\vec{d}}(\Omega)) = \Omega$.

4.2 Rotação

Diremos que uma figura plana Ω foi rotacionada com relação a um centro O (contido no mesmo plano de Ω) de um ângulo orientado θ sendo transformada na figura Ω' se fizermos corresponder a todo ponto P de Ω um ponto P' , em Ω' de tal forma que

- 1) o ângulo POP' seja igual a θ (preservando-se a sua orientação, é claro).
- 2) PO e $P'O$ possuam o mesmo comprimento.

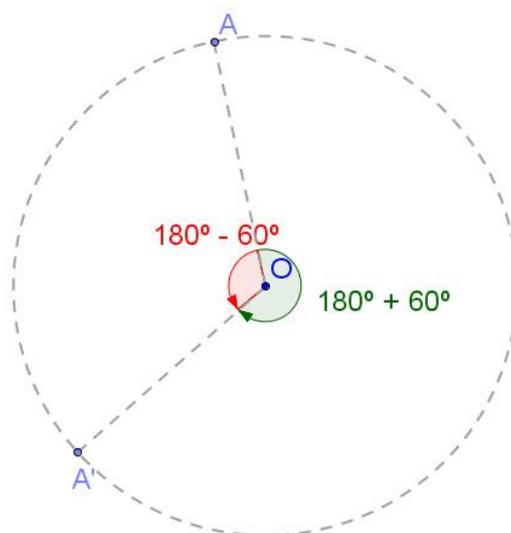
Ou seja, para fazermos coincidir PO com PO' basta girarmos PO de um ângulo θ (no sentido a ele atribuído, por ser um ângulo orientado) em torno de O .

Algumas convenções e implicações me parecem bem óbvias, mas vou citá-las, mesmo assim.

1) Será utilizado o grau ($^{\circ}$) como unidade de medida de ângulo para facilitar a leitura, uma vez que é a medida mais popular no Brasil e a o tratamento genérico (sem eleger uma unidade) tornaria o texto bem mais difícil de ser lido.

2) Definir uma orientação para θ é dizer que, no referencial adotado, valores positivos de θ significam uma rotação em um determinado sentido (horário, por exemplo) e valores negativos de θ significam rotação no sentido contrário.

3) Na maioria dos casos irá nos interessar trabalhar com ângulos positivos não maiores que 180° . Se nos limitarmos a este escopo, rotacionar uma figura de $180^{\circ} + \alpha$, com $0 < \alpha \leq 180^{\circ}$, possui o mesmo efeito que rotacionar a figura de um ângulo $\alpha - 180^{\circ}$, ou seja, rotacionar de $180^{\circ} - \alpha$ no sentido contrário ao convencionado como positivo. Em muitas figuras, em lugar de representar um ângulo como negativo, daremos uma cor a ele (vermelho, no caso, para o sentido anti-horário). Na figura abaixo fomos deliberadamente redundantes. A rotação de 240° no sentido horário equivale a uma rotação de 120° no sentido anti-horário ou, simplesmente, a uma rotação de -120° .



4) Mais genericamente (esta abordagem não será comum neste texto), rotacionar uma figura de um ângulo $k \cdot 360^{\circ} + \theta$, com $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 360^{\circ}$ terá

o mesmo efeito que rotacioná-la de θ graus no mesmo sentido. Ou seja, rotacionar de $480^\circ (1 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$ é equivalente a rotacionar de 120° , rotacionar de $-480^\circ (-2 \cdot 360^\circ + 240^\circ)$ é o mesmo que rotacionar de 240° .

4.2.1 Precisamos demonstrar que:



Conteúdo em vídeo: [rotacao_0.avi](#)

1) Se a figura ω' é a imagem da figura ω pela rotação com centro em O de um ângulo θ (para fixar ideias, vamos considerar o sentido horário), e se os segmentos AB e $A'B'$ são segmentos homólogos, respectivamente, nas figuras ω e ω' , um dos ângulos formados entre as retas r e r' - que contêm AB e $A'B'$ será igual a θ , também. Ou seja, r' será a imagem da rotação de r em torno de P (interseção de r e r') por um ângulo θ (no sentido que convencionamos).

2) Reciprocamente, se os ω e ω' são figuras tais que:

2.1) A todo segmento AB em ω (ou ω') corresponde um e um único segmento $A'B'$ em ω' (ou ω), ambos com o mesmo comprimento.

2.2) Considerando as retas r e r' que contêm, respectivamente AB (em ω) e $A'B'$ (em ω'), e o seu ponto de interseção P , r' pode ser obtida a partir de r por uma rotação de um ângulo θ (que, para fixar ideias, vamos considerar no sentido horário) em torno de P .

Os itens acima nos garantem que, se ω for rotacionada de um ângulo θ (no sentido convencional, com relação a qualquer ponto no plano), os segmentos homólogos de ω e ω' ficam paralelos dois a dois de tal forma que uma translação será suficiente para que consigamos sobrepor perfeitamente ω a ω' .

Exceto quando $\theta \cong 360^\circ$ (porque, neste caso, a figura não sofre rotação alguma), poderemos sempre achar um ponto N que será o centro de uma rotação de um ângulo θ (que, para fixar ideias, vamos considerar no sentido horário) que transformará ω em ω' .

Demonstração:

→ Demonstrando primeiro 1).

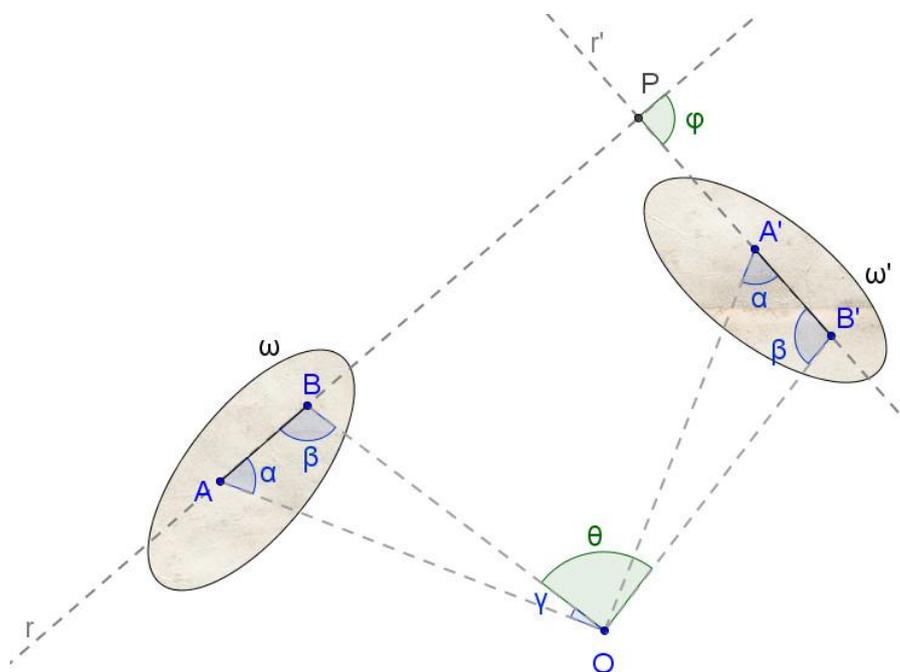
Nas duas próximas figuras já se encontram os elementos que caracterizam A'B' como resultado de uma rotação de AB em torno de O.

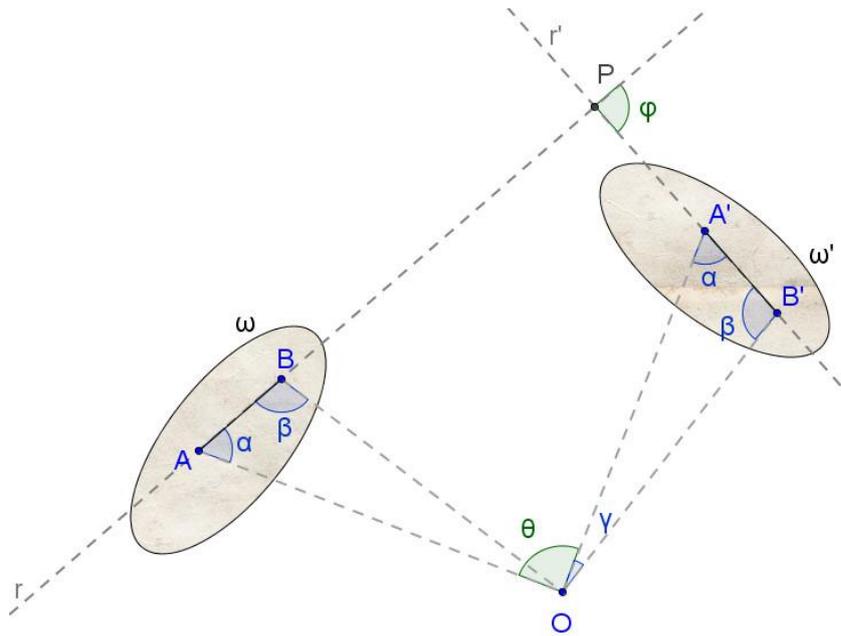
Considerando o quadrilátero OAPB',

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta + 180^\circ - \varphi = 360^\circ$$

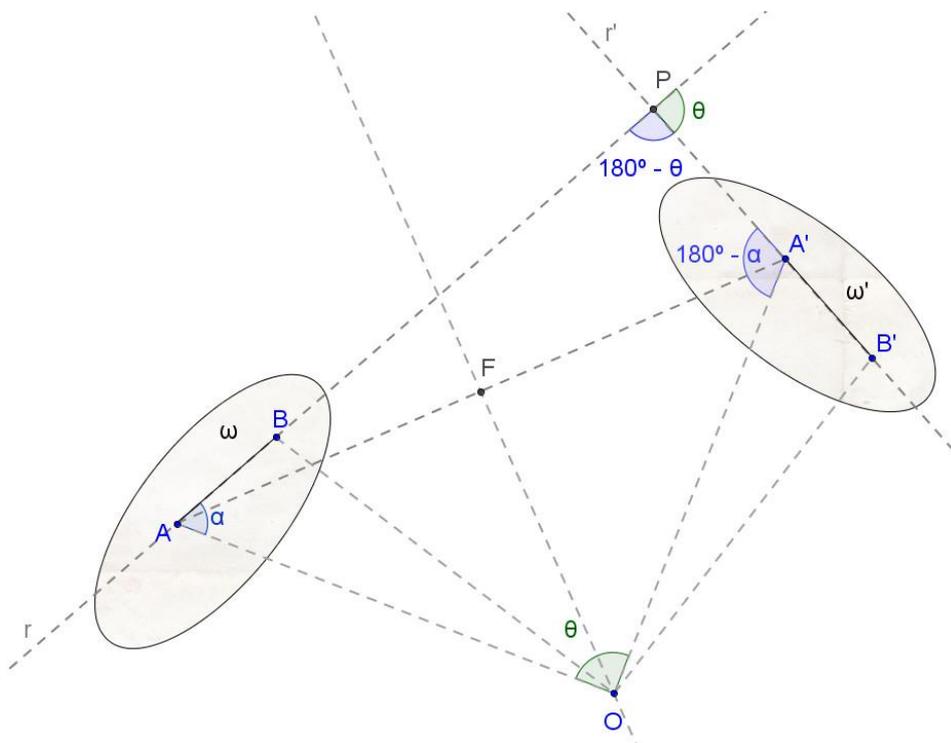
Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$\theta = \varphi$$





← Demonstrando 2)



A figura acima contém os segmentos homólogos AB e $A'B'$, assim como o ângulo θ formado pelas retas que os contêm no sentido convencional.

Com base em AA' , podemos construir um (na verdade, dois) arco capaz de abertura igual a θ . Traçamos a mediatriz de AA' e escolhemos o ponto O (haverá

dois pontos possíveis, cada um deles em um dos possíveis arcos que podem ser construídos; nos dois semiplanos definidos por AA') de tal forma que o ponto O seja o centro da rotação de um ângulo θ (sentido convencional) que carrega A em A' .

Como o ângulo APA' vale $180^\circ - \theta$ (por hipótese), P se encontra no arco capaz que enxerga o segmento AA' sob um ângulo suplementar a θ . Ou seja, existe uma única circunferência que contém os vértices do quadrilátero $AOA'P$. Por conta disso, podemos garantir que os ângulos OAP e $OA'P$ são suplementares, ou seja, se o ângulo OAB mede α , o ângulo $OA'B'$ também medirá α . Esta informação associada ao fato de que OA mede o mesmo que OA' (por construção) e AB mede o mesmo que AB' (por hipótese) nos permite concluir que os triângulos OAB e $OA'B'$ são congruentes e que, portanto, OB mede o mesmo que OB' e, além disso, o ângulo BOB' vale mede, também, θ .

Portanto B' é a imagem de B por uma rotação de um ângulo θ em torno do ponto O no sentido convencional, como queríamos demonstrar.

4.2.2 Composição de Rotações



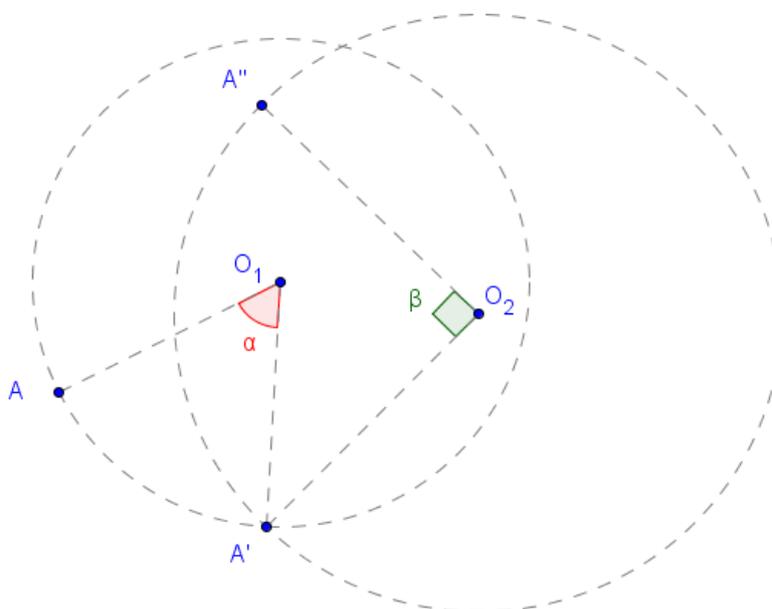
Conteúdo em vídeo: [rotacao 2.avi](#)

Vamos, agora, demonstrar o método para se achar a centro da composição de duas rotações ilustrado no exemplo 4, seção 2.2.2. A composição de rotações nem sempre resultará numa rotação. Caso a soma dos ângulos envolvidos seja um arco côngruo a 360° , a composição resultará numa translação. Portanto, antes de começarmos, vamos eliminar os casos óbvios e degenerados considerando duas rotações, uma de um ângulo α , sentido anti-horário, em torno de O_1 , outra de um ângulo β , sentido horário, em torno de O_2 , tais que:

- 1) O_1 e O_2 são pontos distintos do plano. É relativamente fácil ver e demonstrar que, se O_1 e O_2 coincidem, o novo centro de rotação será O_1 (ou O_2) e o ângulo de rotação será a soma algébrica dos ângulos - utilizando como negativo o sinal da rotação no sentido horário (ou anti-

horário; a escolha é arbitrária) e como sinal negativo a rotação em sentido contrário à anteriormente escolhida.

2) A soma algébrica $\alpha + \beta$ (considerando a convenção sugerida no item anterior) não pode ser um ângulo côngruo a 360° . Neste caso, a soma de duas rotações é uma translação e, se os centros O_1 e O_2 são pontos distintos do plano, não há uma única rotação que represente a composição das duas.



Para acharmos o centro da rotação que faz de A'' imagem de A por uma rotação de $|\alpha - \beta|$, neste caso específico, no sentido horário, procuraremos no plano pelos seguintes pontos:

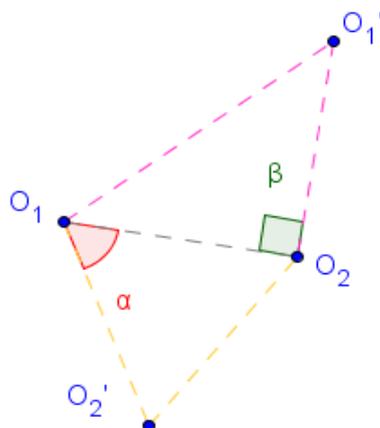
1) O ponto O_1' , imagem de O_1 pela composição destas rotações (figura a seguir).

A imagem de O_1 pela primeira transformação é o próprio O_1 . Já a imagem da “imagem de O_1 pela primeira rotação” (ou seja, o próprio O_1) pela segunda rotação será o ponto O_1' , como mostrado na figura abaixo.

2) O ponto O_2' cuja imagem, pela composição destas rotações será o ponto O_2 .

O ponto O_2' cuja imagem será o ponto O_2 pode ser obtido rotacionando-se O_2 de um ângulo α no sentido contrário ao original que, neste caso, seria o

sentido horário. Já a imagem da “imagem de O_2' ” (o ponto O_2) pela segunda rotação será o próprio O_2 .



A rotação que desejamos levará

1) O_2' em O_2 e...

Neste caso, o Lugar Geométrico de todas as rotações possíveis, será a mediatriz do segmento O_2O_2' .

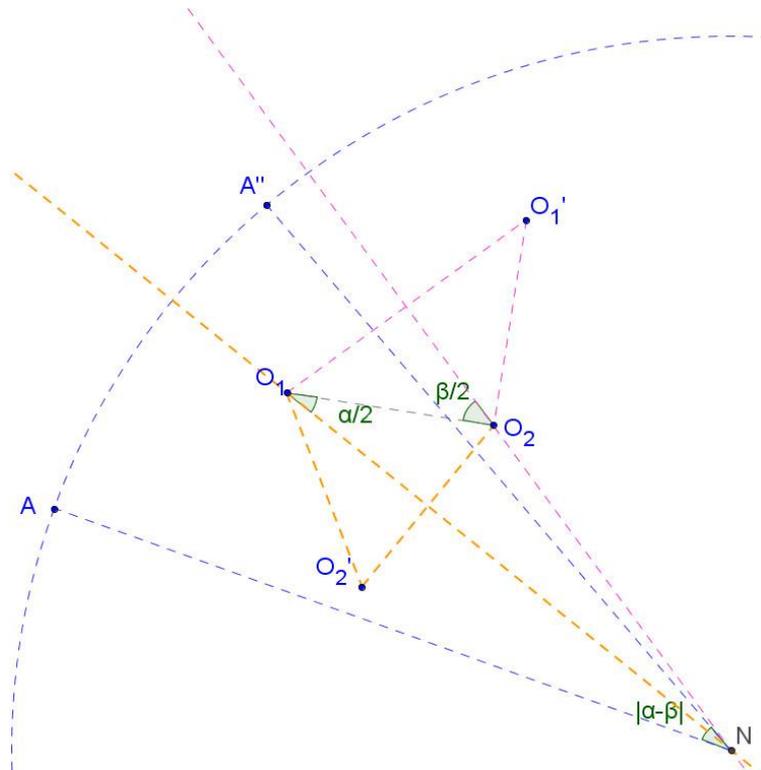
2) O_1 em O_1' .

Neste caso, o Lugar Geométrico de todas as rotações possíveis, será a mediatriz do segmento O_1O_1' .

O ponto de encontro destas duas mediatrizes será o centro (**N**) da rotação desejada (figura abaixo).

Repetindo e ratificando, o processo para achar o novo centro **N** é bem simples. **N** será a interseção de:

- 1) Reta resultante da rotação da reta que contém o segmento O_1O_2 em sentido contrário ao da 1ª rotação, da metade do ângulo desta, em módulo.
- 2) Reta resultante da rotação da reta que contém O_1O_2 no mesmo sentido da 2ª rotação, da metade do ângulo desta, em módulo.



O caso degenerado - quando $\alpha + \beta \cong 360^\circ$ - vale ser destacado. Este caso, por sua vez, sempre pode ser considerado como uma rotação α num sentido seguida de uma rotação α em sentido contrário (pois se $\beta \cong 360^\circ - \alpha$, $\beta \cong -\alpha$).

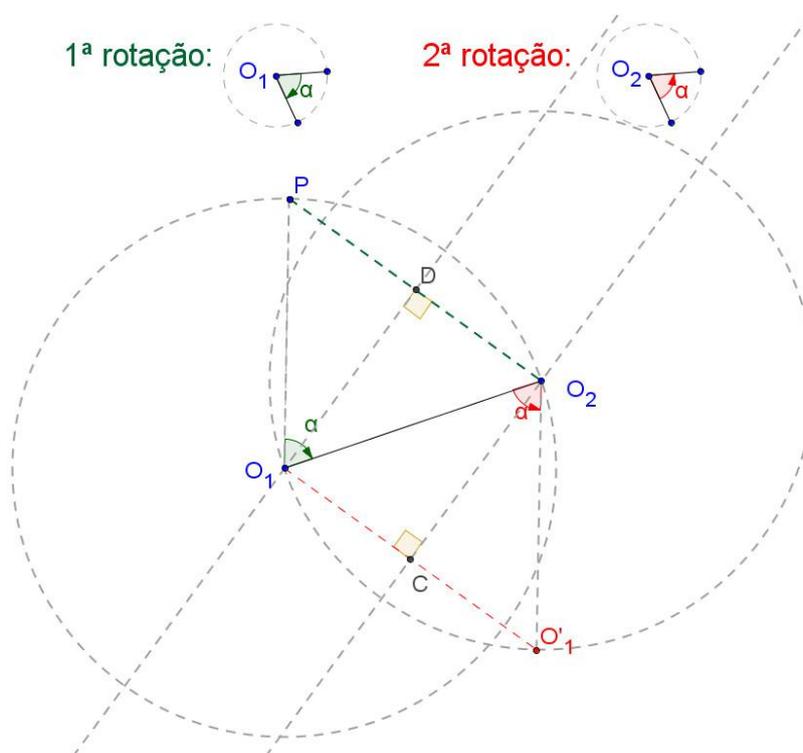
Seguindo esta metodologia e as rotações indicadas abaixo (próxima figura), o ponto O_1 é um ponto fixo para a primeira rotação e é transformado em O'_1 pela segunda rotação.

O ponto P é transformado em O_2 pela primeira rotação e, este, é ponto fixo para a segunda rotação.

A composição de rotações, portanto, leva O_1 em O'_1 e P em O_2 . Como os triângulos O_2O_1P e $O_1O_2O'_1$ são congruentes, $O_1PO_2O'_1$ é um paralelogramo. Por ser uma translação, não conseguiremos achar o centro da "nova rotação", o que coaduna com o fato de que $O_1D // O_2C$. Por ser uma translação, para acharmos a distância que caracteriza esta translação basta que achemos qualquer uma das distâncias, de P a O_2 ou de O_1 a O'_1 , uma vez que, em uma translação, todos os pontos são deslocados de uma mesma distância numa mesma direção e num mesmo sentido.

Desta forma, será suficiente calcularmos a medida de $O_1O'_1$, por exemplo.

$$O_1O'_1 = 2O_1C = 2 \cdot O_1O_2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



4.3 Composição de transformações

Vou listar aqui todos os fatos importantes que já vimos sobre composição de transformações e agregar a este rol mais alguns.

- 1) A composição de translações é sempre uma translação.
- 2) A composição de rotações pode redundar numa rotação ou numa translação.
- 3) Translação e rotação transformam figuras em outras diretamente congruentes com relação às primeiras.

Pode ser acrescentada a estes três itens a informação de que:

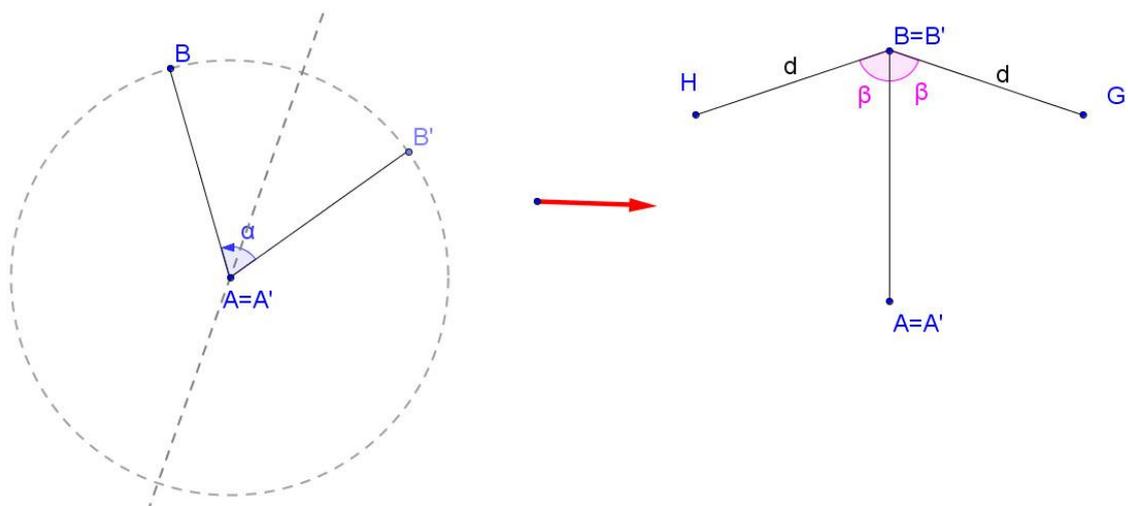
4) se duas figuras no plano são diretamente congruentes entre si, então sempre poderemos sobrepor uma à outra pela composição de uma rotação⁸ seguida ou não de uma translação⁹.

De fato, se as figuras Ω e Ω' são diretamente congruentes, consideremos um segmento de reta AB em Ω e seu homólogo $A'B'$ em Ω' (figura a seguir). Podemos transladar a figura de uma distância igual à distância entre A e A' de forma a fazer A' coincidir com A . Em seguida, podemos rotacionar o segmento $A'B'$ em torno de A de forma a fazer B coincidir com B' , uma vez que $AB = A'B'$. Agora, consideremos um terceiro ponto C , em Ω - e seu homólogo C' , em Ω' , tal que a distância entre C e B seja d e que $\sphericalangle ABC = \beta$ (as mesmas condições persistirão, obviamente, se trocarmos B por B' a C por C' pois as transformações que fizemos são rígidas e as figuras, por hipótese, diretamente congruentes). Do ponto em que paramos, só há dois pontos no plano que satisfazem a estas condições, a saber, os pontos G e H (figura abaixo). Como as figuras são diretamente congruentes, não poderemos ter C em G e C' em H (ou o contrário). Logo, C e C' coincidem. Como A , B e C são pontos genéricos de Ω , acabamos de mostrar como fazer coincidir Ω' com Ω em todos os seus pontos usando uma translação e uma rotação¹⁰.

⁸ Em caso de não ser necessário fazer uma rotação, pode-se considerar como tendo sido feita uma rotação de zero grau.

⁹ Em caso de não ser necessário fazer uma translação, pode-se considerar como tendo sido feita uma translação de uma distância igual a zero.

¹⁰ Poderíamos ser até mais econômicos, se quiséssemos, utilizando, ou somente uma translação (caso em que todos os lados homólogos são paralelos entre si), ou somente uma rotação, em caso contrário.



5) Duas figuras inversamente congruentes podem ser sempre sobrepostas uma a outra pela composição de uma rotação¹¹, seguida de uma translação¹², seguida de uma reflexão¹³.

Com efeito, a diferença entre este raciocínio e o anterior é que, no segundo desenho da figura acima, C e C' não mais coincidirão, uma vez que as figuras são inversamente congruentes; C coincidirá com G e C' com H, ou o contrário. Refletindo Ω' com relação à reta que contém o segmento AB (ou A'B'), C, finalmente coincidirá com C'.

Como já enunciamos, Isometrias são transformações no plano que preservam distâncias. Duas figuras do plano podem ser consideradas congruentes se uma pode ser transformada na outra por uma sequência finita de transformações isométricas. Agora somos capazes de precisar melhor o escopo destas transformações e reenunciar o que reconhecemos por figuras congruentes:

Duas figuras no plano são consideradas congruentes se uma pode ser inteiramente superposta à outra em todos os seus pontos

¹¹ Em caso de não ser necessário fazer uma rotação, pode-se considerar como tendo sido feita uma rotação de zero grau.

¹² Em caso de não ser necessário fazer uma translação, pode-se considerar como tendo sido feita uma translação de uma distância igual a zero.

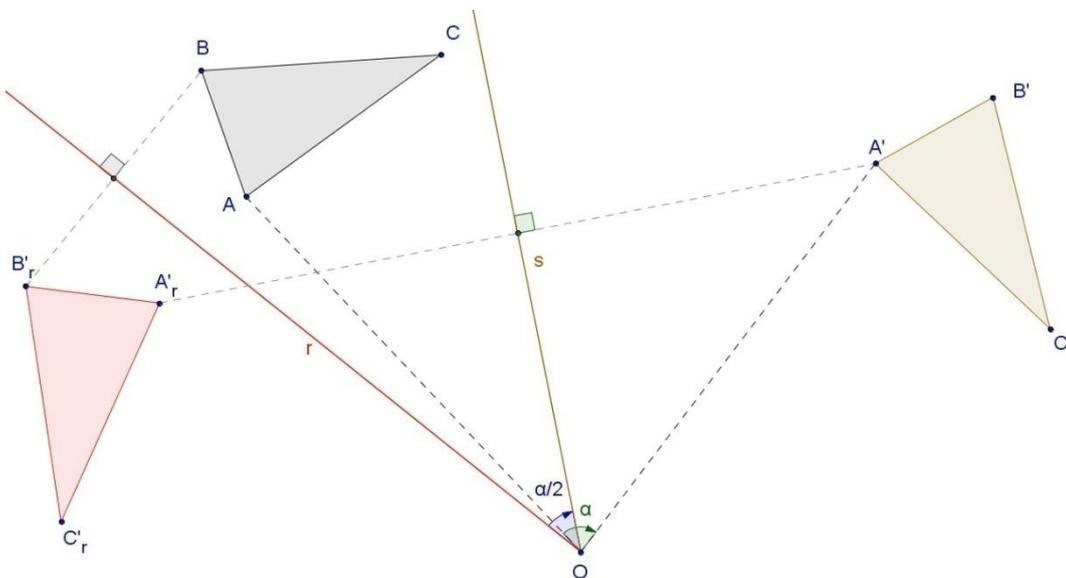
¹³ Novamente, poderíamos ser mais econômicos, pois uma translação e uma reflexão já seriam suficientes para fazer coincidir Ω' com Ω .

pela composição de uma quantidade finita de translações, rotações ou reflexões.

Se estamos falando de uma Geometria que considera congruentes todos os triângulos de lados $3u$, $4u$ e $5u$, mas que os considera distintos de um triângulo de lados $6u$, $8u$ e $10u$, então podemos definir esta Geometria como:

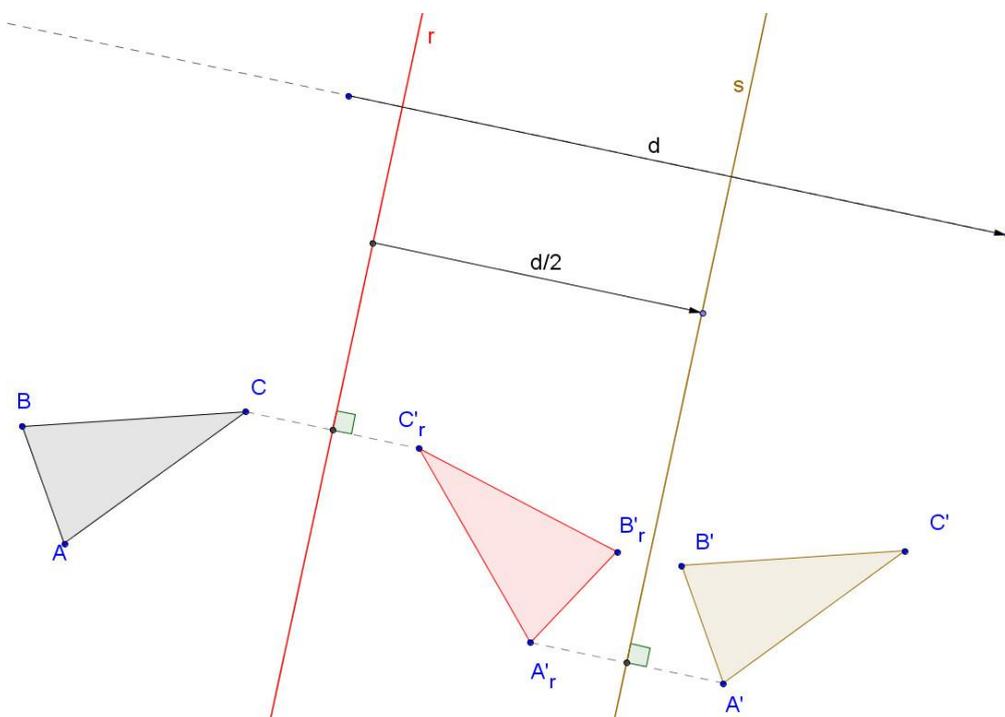
O estudo de todas as propriedades das figuras no plano que permanecem invariantes quando submetidas à composição de qualquer quantidade finita de translações, reflexões ou rotações.

Vimos (seção 2.2.3) que duas reflexões com relação a retas concorrentes redundam numa rotação. Logo, qualquer reflexão pode ser representada no plano como uma composição de duas reflexões, como mostra a figura a seguir. O triângulo $A'B'C'$ é a imagem de ABC por uma rotação de um ângulo α (sentido horário) em torno de O . O efeito da rotação será completamente substituído por duas reflexões sucessivas de ABC ; uma com relação a uma reta r , qualquer (gerando $A'_rB'_rC'_r$), e a seguinte com relação a uma reta s disposta $\alpha/2$ graus no sentido horário com relação a r .



Também na seção 2.2.3 vimos que duas reflexões com relação a retas paralelas redundam numa translação. Desta forma, toda translação pode ser representada como uma composição de duas reflexões, como mostra a figura a seguir.

O triângulo $A'B'C'$ é a imagem de ABC por uma translação por um vetor \vec{d} (de comprimento igual a d). O efeito da translação será completamente substituído por duas reflexões sucessivas de ABC ; uma com relação a uma reta r , qualquer, perpendicular a \vec{d} (gerando $A'_rB'_rC'_r$), e a seguinte com relação a uma reta s paralela a r , disposta a uma distância igual a $d/2$ unidades de comprimento com relação a r na mesma direção de \vec{d} .



Ou seja, o conjunto de transformações que elegemos para representar completamente todo o rol de isometrias no plano (rotações, translações e reflexões) pode ser convenientemente trocado por reflexões. Ou seja, sempre poderemos transformar uma figura em outra que atenda aos nossos critérios de congruência através de uma composição adequada de reflexões (com relação a retas convenientemente escolhidas)¹⁴.

¹⁴ Este resultado é uma tanto surpreendente uma vez que a reflexão era a mais "rebelde" das transformações que elencamos; além de não poder ser realizada como um movimento no plano - e, sim, fora dele -, não atendia aos critérios da Teoria de Grupos para a composição.

5 Abordando o assunto

Vale ressaltar que, ao longo de todo o texto, até aqui, foram utilizadas quase que indistintamente as expressões "movimento" e "transformação"¹⁵. Por que usar dois termos se eles se referem à mesma coisa?

Para os alunos que possuem pouca capacidade de abstração, considero muito inóspita a ideia de "transformação". Para este público, recomendo que o professor trabalhe os conceitos sob a óptica do "movimento". Em lugar de mostrar o teorema pronto, dê um objeto ao aluno e conduza a sequência de experimentos de forma que ele alcance as suas próprias conclusões. Se ele chegar a uma conclusão equivocada, convém fazer perguntas adequadas para que ele, ao respondê-las (fazendo possivelmente outros experimentos), consiga corrigir o rumo do seu raciocínio.

Por experimento, estou me referindo a atividades como arrastar uma cadeira de um lugar para o outro, com ou sem rotação, desenhar o reflexo de uma figura com relação a uma reta em uma folha de papel ou até mesmo conduzir uma composição de movimentos de uma figura no Geogebra. Qual experimento conduzir irá depender do que se pretende abordar, do nível de abstração do aluno (é claro que, numa mesma turma, podemos ter níveis de abstração bem discrepantes, o que sugere experimentos bem diferentes) e do material disponível no momento. Este último item obrigará o professor a observar, obviamente, a experiência do aluno com o referido material. Por exemplo, usar compasso e esquadros com os alunos que não têm experiência com estas ferramentas pode comprometer o que se pretende ensinar uma vez que, além de refletir sobre o conteúdo alvo, eles terão que, simultaneamente, dominar a ferramenta escolhida. Neste caso, antes de tratar especificamente do assunto alvo, sugiro treinar a aluno no uso das ferramentas físicas necessárias para tal abordagem.

¹⁵ A rigor, os conceitos não se substituem, mas a troca de um pelo outro pode ser didaticamente muito conveniente. "Movimento" é um conceito ligado a uma experiência física que, além de não dispensar a existência do tempo, nos remete à ideia de que o caminho utilizado também é importante, não somente as posições inicial e final. O mesmo não ocorre com o conceito de transformação, que depende apenas do conceito de função, sendo completamente irrelevante o que ocorre entre os extremos.

5.1 O que é? O que não é?

Traduzindo de ([3], p.1), "*O desenvolvimento da ciência ocidental está baseado em duas grandes conquistas: a evolução do sistema de lógica formal (com a Geometria Euclideana) pelos filósofos gregos, e a descoberta da possibilidade de descobrir relações de causalidade através da experimentação sistemática (durante a Renascença).*" (Albert Einstein, em uma carta a J.C. Switzer, em 23/04/1953).

O interessante da discussão levantada pelo YAGLOM ([1], [2] e [15]) quando indaga "O que é Geometria?" é mostrar uma maneira de conceituar a Geometria de tal forma que:

- 1) fuja da abordagem que utiliza como fundamentação básica a aceitação ou não dos axiomas de Euclides.
- 2) permita que facilmente consigamos conceituar outra geometria que não aquela com a qual estamos acostumados (Geometria Euclideana Plana ensinada nos níveis Fundamental e Médio no Brasil) com ferramentas concretas.

Com relação ao item 1) acima, e como vimos ao longo das páginas anteriores, de forma alguma foram abandonados os axiomas de Euclides para adotar apenas as transformações detalhadas neste texto. A ideia por trás da proposta é fornecer ferramentas mais intuitivas (concretas) ao aluno para que ele consiga galgar mais naturalmente todos os degraus do modelo de Van Hiele (Visualização, Análise, Dedução - formal e informal - e Rigor)¹⁶ ao longo da sua vida escolar. Um pouco mais que isso, acredito ter demonstrado que as transformações geométricas (ou, pelo menos, os movimentos rígidos estudados), além de encontrarem um amplo escopo de aplicações no cotidiano, constituem um mesmo conjunto bem definido de ferramentas que é capaz de acompanhar o aluno desde a fase mais concreta (a Visualização) até a fase mais abstrata (o Rigor) uma vez que este conjunto de ferramentas é capaz de mostrar ao aluno como construir uma Geometria diferente da "usual" de forma bem mais direta e

¹⁶ Ver USISKIN [9].

intuitiva do que as propostas tradicionalmente utilizadas (com a não aceitação do 5º postulado de Euclides, por exemplo).

Mas, afinal, por que é tão importante conhecer outras geometrias?

Quando o aluno vê no quadro escrito que a soma e a multiplicação de números, digamos, racionais são comutativas e associativas, este conhecimento lhe parece - não raro - bastante inútil. Por ser inútil, ou ele irá esquecê-lo, ou ele irá memorizá-lo para - quem sabe - utilizá-lo no próximo exame e, em seguida, irá esquecê-lo da mesma forma. Em lugar de simplesmente enunciar as propriedades (ou, pior que isso, tentar demonstrá-las), é preferível mostrar ao aluno um leque de (outras) operações, com o mesmo conjunto de números, de preferência, e pedir para o aluno separar aquelas que - por contra exemplo - ele definitivamente pode afirmar que não possuem pelo menos uma das propriedades elencadas (comutatividade ou associatividade).

Ou seja, uma das maneiras mais eficientes de mostrar "O que é?" é mostrando "O que não é?". E isso ocorre não só com os não iniciados. A própria história da matemática mostra que conhecemos mais plenamente o conjunto dos Números Reais quando descobrimos os números "não Reais", como os Complexos, por exemplo. Seguindo este raciocínio, delimitar o que entendemos como a Geometria Euclideana plana - ou mesmo parte dela - e mostrar o que está fora deste escopo me parece um passo fundamental na aquisição do Rigor, que seria o último nível do modelo de Van Hiele.

5.2 Sugestões de materiais e metodologia para uso em sala de aula.

Apesar deste trabalho objetivar atender professores e alunos de nível Médio, é importante destacar o quão é saudável para o aluno - qualquer que seja a série em que esteja - cumprir as etapas de visualização e análise antes começar a resolver os problemas quantitativos que apresentamos. Este é o grande diferencial de se trabalhar com Transformações Geométricas quando

comparamos com as ferramentas tradicionais com as quais fomos educados. Os movimentos rígidos tratados neste trabalho:

1) São ferramentas que podem ser utilizadas desde os primeiros anos escolares sem sequer mencionar a palavra "matemática". Ajudam a implementar noções de orientação espacial e detalhamento sistemático (análise) de imagens e trajetórias, o que é fundamental para qualquer área do saber, uma vez que esquemas e gráficos são utilizados indistintamente por todas os ramos do conhecimento para análise de dados, processos e fluxo de ações ou informações. Basta que o professor e a escola optem por seguir este programa de trabalho;

2) São ferramentas original e essencialmente concretas. Isso nos remete, em geral, à faixa etária dos 6 aos 12 anos¹⁷ (PINHEIRO [22] - cap.3 pag. 39), quando a abstração é, em geral, uma barreira difícil de ultrapassar. Mas, a rigor, a ausência de capacidade de abstração é um empecilho para pessoas de qualquer idade e é um sério obstáculo à capacidade de argumentação do indivíduo, qualquer que seja o tópico sobre o qual ele pretenda dissertar. Ou seja, a Geometria, sob a óptica das Transformações (rígidas ou não), prepara o aluno, como talvez nenhuma outra área da matemática seja capaz de fazer, para as os níveis – segundo classificação de Van Hiele - mais elevados do raciocínio lógico-matemático.

3) Podem ser trabalhados conceitos sofisticados de forma bastante lúdica, aspecto que é importante considerar quando trabalhamos com o público infanto-juvenil ou em ambiente onde se vive em constante estresse, como em cursos de reciclagem de mão de obra especializada.

Há uma série de materiais disponíveis na Internet com a parte mais concreta ilustrando a aplicabilidade de vários grupos de Transformações Geométricas. Para os alunos que ainda se encontram na fase mais concreta (em geral, alunos de nível Fundamental), carecendo de manipulação para consolidar a análise, deixo como sugestão, portanto, MALATI [4] e LEIVAS [10] e as questões

¹⁷ Esta estimativa foi feita com base em experiências próprias. Mas para não transitar demais o perigoso campo da especulação, adicionei a referência a seguir.

mais simples deste trabalho (como o as questões ligadas com a soma de ângulos de polígonos convexos ou estrelados, em paralelas cortadas por transversais ou em problemas que utilizem estes conceitos). Para alunos de nível Médio, sugiro a utilização de todos os demais exercícios e exemplos (assim como tantos outros - disponíveis na bibliografia, principalmente YAGLOM [1], PETERSEN [16] e COXETER [17], e na internet - que não pudemos abordar aqui por falta de tempo e espaço), bem como as demonstrações e uma contínua e redundante repetição de questionamentos como:

- 1) Quais das transformações estudadas são invertíveis? Quais transformam uma figura nela mesma?
- 2) Sabemos, por exemplo, que a rotação pode ser substituída por rotação + translação. Há outras formas de representar uma transformação através de composição de transformações? Quais?
- 4) A composição de transformações rígidas é sempre...
 - 4.1) comutativa?
 - 4.2) associativa?
 - 4.3) fechada? (Ou seja, se uma transformação em um certo espaço de transformações¹⁸ previamente escolhido leva a figura Ω em Ω' e outra leva Ω' em Ω'' , há alguma do mesmo espaço que transforme Ω diretamente em Ω'' sem passar por Ω' ?)
- 5) O que mudaria se estes movimentos e estas transformações ocorressem no espaço?

Na verdade, parte desta análise já foi feita no texto deste trabalho, mas insisto que o assunto em sala nunca seja ministrado através uma lista extensa de propriedades - que provavelmente será memorizada e esquecida em seguida. Todos estes questionamentos são naturais quando tratamos de movimentos. A conclusão (a inferência, em caso de resposta positiva, ou a prova, com contra-exemplo, em caso de resposta negativa) também é bastante intuitiva e

¹⁸ É sempre bom criar o hábito identificar os "objetos" onde as transformações atuarão (no nosso caso, são conjuntos bem definidos de pontos no plano, como polígonos e curvas) e quais transformações serão utilizadas. Este último escopo é o que chamamos de "Espaço de Transformações" que pode variar desde a rotação em torno de um ponto fixo O até ao conjunto de todas as transformações estudadas podendo, inclusive, englobar uma transformação qualquer que não tenha sido abordada e que tenha sido descoberta em sala pelos próprios alunos.

radicalmente visual, o que facilita sobremaneira o acesso do aluno a este nível de exploração que será certamente o ingresso para que ele entre no nível mais elevado do raciocínio abstrato, que é o Rigor.

6 Afinal, por que ensinar Geometria?

Esta seção não se propõe a demonstrar coisa alguma. Toda exposição feita até então sobre a Geometria e, em particular, sobre as isometrias servirá apenas de subsídio técnico para embasar melhor o que considero ser a melhor resposta para a pergunta que intitula esta parte do trabalho. Para chegar até a resposta, entretanto, precisarei listar algumas ideias que considero consensuais. Se o leitor discordar radicalmente delas, é melhor interromper a leitura. A omissão deste capítulo não comprometerá o que já foi visto até aqui.

A nossa civilização (pelo menos a ocidental e não muito pobre) vive plenamente a realidade da obsolescência programada, descartando o que lhe parece velho ou antiquado mesmo antes de ter o domínio, ou mesmo o simples conhecimento, de todas as suas potencialidades. Isso é flagrante em eletrônicos, mas acaba se estendendo para quase todos os bens de consumo, para as relações interpessoais e até mesmo para o conhecimento adquirido. Embora a educação para consumir seja implacável, o comando para se desfazer, entretanto, nem sempre funciona. Não raro, deixa como efeito colateral o ímpeto pela acumulação. Não se joga fora, mas também não se reaproveita. Venera-se a quantidade, em detrimento da qualidade e até mesmo da funcionalidade. Na ânsia de conhecer ou de usufruir do novo, guarda-se o que acabou de ser etiquetado como obsoleto em algum recanto, do quarto, da estante, da mente ou do HD (disco rígido). *Quem sabe algum dia será possível parar e analisar mais demoradamente aquele arquivo morto?* O tempo passa e o resultado é que, além de não se ter domínio sobre coisa alguma, não se tem mais o quarto, a estante, o HD... Ou a mente. A solução – como sempre – é adquirir outro depósito de coisas; quando é possível, é claro.

Pelo menos na última década, por conta da divulgação mais ostensiva dos efeitos extremamente danosos ao planeta causados por esta ilusão da infinitude de recursos, as discussões em torno deste tema se intensificaram e já parecemos estar chegando ao consenso de que precisamos repensar profundamente nossa forma de interagir com nossos pares, com nós mesmos e com o meio ambiente. Toda esta reflexão nos conduz ao conceito de reaproveitamento e inverte o

sentido dos esforços empenhados. Em lugar de, freneticamente, produzirmos novos recursos, precisamos utilizar plenamente os que já estão sob nosso domínio.

Não dá para viver todo este turbilhão de mudanças sem repensar velhos paradigmas. E a Escola, que abriga um mundo deles, não tem como (nem deve) sair ilesa deste processo. *Qual, então, o papel que a Escola deve exercer na construção de uma sociedade sustentável?*

De todas as funções da Escola (foge ao escopo deste trabalho uma discussão aprofundada e consistente sobre o tema), gostaria de destacar a capacitação do aluno para manter, ou ao menos buscar, uma relação sustentável e - se possível - promissora, consigo mesmo, com o grupo onde se encontra inserido e com o meio ambiente. Esta frase esconde um extenso e complexo rol de possibilidades de implementação que certamente passarão por aspectos biológicos (cuidado com o corpo, hábitos alimentares) , sociais (desfrutar e contribuir para a convivência em grupo, respeitando - ou propondo - regras), psicológicos (descobrir seus talentos, suas frustrações, seus medos, suas esperanças e conseguir dialogar com eles, quando necessário), políticos, ecológicos, entre tantos outros.

Em quase todos os aspectos citados - senão em todos -, deparar-nos-emos com a difícil necessidade de fazer uma escolha. E, excetuando-se as escolhas soberanamente passionais - como escolher com quem se casar, por exemplo -, praticamente todas as demais dependerão da análise de um monte de informações e o traçado de um caminho lógico consistente que as ligue até a sua opção eleita. E isso ocorrerá desde as aparentemente mais simples - como escolher o detergente, o carro, o tipo e a quantidade de alimento consumido - até as mais complexas - como escolher a sua profissão, onde aplicar o seu dinheiro, em qual prefeito votar, qual projeto priorizar ou qual política pública adotar.

A escola - através das várias disciplinas já em uso - destina boa parte do seu tempo fornecendo subsídios técnicos capazes de embasar tais decisões. No escopo da matemática, por exemplo, justificamos o ensino de juros porque qualquer que seja o rumo tomado pelo aluno em sua vida, ele certamente algum

dia precisará tomar decisões importantes que serão tão mais acertadas quanto mais ele dominar este conteúdo.

Reduzir a matemática ao mero cálculo de valores para um fim específico é, entretanto, desprezar o que de mais valioso há nela. A matemática, a rigor, estuda os problemas, identifica os comportamentos recorrentes e, ou os isola, identificando e estudando novos padrões, ou usa os padrões já conhecidos para modelar as questões propostas e lhes fornecer uma solução coerente. Para fazer isso, a pessoa precisa ser capaz de não se perder em um mar de implicações e modelos e, mais que isso, precisa ser capaz de documentar todas as etapas do seu raciocínio para que qualquer pessoa (inclusive ela mesma) – independente do seu grau de instrução, cor, religião, posição social ou econômica - possa - a qualquer tempo – questionar, endossar ou repudiar a validade da sua tese.

É esta capacidade, de análise, síntese e modelagem, que, acredito, é o mais valioso legado da Matemática.

E qual seria o papel da Geometria nesse contexto?

Um dos objetivos subjacentes almejados por este trabalho foi mostrar que o uso das Transformações Geométricas é capaz de acompanhar o aluno desde as fases mais concretas, em que ele basicamente depende de observação e da experimentação, até as fases mais abstratas, em que ele consegue criar ou perceber critérios para separar e identificar semelhantes de um grupo maior, onde elas eles originalmente estejam inseridos.

Só para ilustrar o quanto estas capacidades podem aparecer em contextos completamente aparentemente desconectados da Matemática, o artigo 5º da nossa Constituição Federal¹⁹ começa com a famosa assertiva “Todos são iguais perante a lei(...)”. Ocorre que, de fato, não somos todos iguais. O que a frase diz, na verdade, é que a lei determinará as classes de equivalência que valerão em nossa sociedade. A lei (a própria Constituição, no caso) determinará quais serão os grupos de iguais a quais os critérios para se encaixar cada um em cada um desses grupos. Justiça, segundo esta óptica, é “tratar igualmente os iguais e

¹⁹ O artigo 5º fala dos direitos e deveres individuais e coletivos. Escolhi este artigo porque meu objetivo era fazer uso, como já disse, de tópicos que fossem consensuais. E é bem difícil refutar a tese de que o domínio do que se encontra escrito neste artigo é fundamental para todas as pessoas, independente das suas escolhas profissionais ou pessoais.

desigualmente os desiguais, na exata medida de suas desigualdades”. (NERY JUNIOR, 1999, p. 42 apud BARRETO [21]).

Mesmo assim, algo análogo pode ser feito também pela Álgebra ou pela Aritmética. Por que destacar, então, a Geometria?

O papel decisivo da Geometria se revela quando percebemos que ela faz um uso exaustivo de algo que – em geral – o matemático despreza, que é a evidência visual. A mais poderosa ferramenta da Geometria talvez seja, mesmo, a visão. A Geometria se utiliza da visualização física de teoremas e conceitos, assim como da documentação através de figuras, das tais cadeias de implicações, sem perder de vista o rigor necessário para o nível de abstração em que o aluno se encontra. Utilizar recorrentemente, significa treinar. E este treino recursivo confere ao aluno a capacidade de produzir e identificar argumentações consistentes e separá-las de todas as outras que, por descuido ou até mesmo má-fé, contenham falha de construção. Esta capacidade de dar conta do rastro do raciocínio com figuras funciona como se mantivéssemos um de nossos pés calçando um sapato comum (o aspecto concreto da disciplina) e o outro pé em um patim (o lado abstrato). O aluno pode trilhar vários caminhos, ir e voltar quantas vezes achar necessário e, ou ficar assim para sempre, mantendo um pé em cada calçado mas com domínio pleno do mapa por onde circula, ou finalmente sentir-se tão à vontade com a patim a ponto de optar por deslizar com ambos os pés, por conta de não ver mais tanta graça - ou vantagem - no calçado convencional, caso em que ele estará pronto para se especializar em Matemática.

Além de tudo o que já foi dito, vale ressaltar que o conjunto de ferramentas que foram utilizadas – mesmo que temperadas ou recoloridas com um pouco de tecnologia (o Geogebra, a internet, as animações etc) -, segundo os mandamentos do consumismo do qual precisamos nos livrar, já deveriam ter sido substituídas, por serem muito velhas. Utilizar estas ferramentas por vários anos escolares seguidos, descobrindo surpresas e potencialidades – em geral – a partir de ideias extremamente simples e ingênuas, é uma lição de como reaproveitar e de que, mesmo que aparentemente contraditório para alguns, explorar profundamente as potencialidades de um pequeno conjunto de boas ferramentas

pode nos ensinar muito mais do que aprender superficialmente a utilizar uma nova a cada dia.

Eis, finalmente, a principal razão de se ensinar Geometria: acredito que a geometria seja, pedagogicamente falando, o caminho mais curto e sustentável para desenvolver no aluno a capacidade de argumentação que, para ser consistente, carece de todas as habilidades sobre as quais a matemática se ancora e das quais um cidadão completo - qualquer que seja a sua especialização - não pode prescindir, como a experimentação, a análise, a síntese e o reconhecimento de padrões.

Num sistema democrático, onde se deve usar o convencimento em detrimento da força, não se pode abrir mão do poder da argumentação, em qualquer nível que se imagine: o cidadão com ele mesmo, com sua família, com o condomínio onde mora, com os seus colegas de trabalho, com os governos e, principalmente, com os meios de comunicação. Os grandes poderes constituídos (corporações, governos etc) investem massivamente com base na capacidade ou - o que é mais comum - na incapacidade de argumentar do cidadão. Dotar o cidadão da capacidade de avaliar questões complexas, mesmo não tendo conhecimento completo de todos os detalhes que turvam a visão do assunto principal é, efetivamente, investir na construção de um mundo que, ao menos, consiga não se destruir.

O que é Geometria? (Segundo Isaak Moiseevitch Yaglom)

Tradução

Abaixo, traduzi trechos da Introdução da obra de YAGLOM ([1] p. 4-8 e [2] p.7-14) que começam no livro I e terminam no livro II, a partir do original em inglês. Recomendo fortemente que esta parte do trabalho não seja ignorada, apesar de estar classificada aqui como um apêndice. A mera repetição do que já foi escrito se justifica porque, de tão perfeitos que são os argumentos utilizados, achei inútil tentar escrever algo diferente. Enquanto a obra em si nos apresenta o método, a introdução nos encoraja a repensar nossos paradigmas. E refletir sobre o que é Geometria, pelo menos no escopo deste trabalho, é tão ou mais importante quanto aprender a resolver os seus problemas. Por isso, a importância que está sendo dada ao texto "original".

O que é Geometria?

(Do livro "Geometric Transformations" – Yaglom – Volumes I e II)

Na primeira página do livro de geometria para alunos de 2º Grau por A. P. Kiselyov²⁰, imediatamente após as "definições" de ponto, reta, plano, corpo e a declaração: "uma coleção de pontos, linhas, superfícies e corpos, colocados no espaço, de uma maneira usual, é chamada figura geométrica", a seguinte definição de geometria é dada: "Geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas." Então, tem-se a impressão de que a questão colocada como título dessa introdução já foi respondida nos textos de geometria da escola secundária, e que é desnecessário preocupar-se com isso a partir de então.

Mas esta impressão da natureza simplista do problema é equivocada. A definição de Kiselyov não pode ser chamada de falsa; entretanto ela é de certo modo incompleta. A palavra "incompleta" tem um caráter muito geral, e de maneira alguma todas as propriedades das figuras são estudadas em Geometria. Então, por exemplo, não há importância qualquer em geometria se um triângulo é desenhado em um papel branco ou em um quadro negro; a cor do triângulo não é objeto de estudo na geometria. É verdade, alguém poderia responder, a geometria estuda propriedades das figuras geométricas, no sentido definido acima, e que a cor é uma propriedade

²⁰ Este é o livro de Geometria usado na antiga União Soviética.

do papel no qual a figura foi desenhada e não uma propriedade da figura mesmo. Entretanto, esta resposta pode ainda deixar um certo sentimento de insatisfação; para se ter uma maior convicção, poder-se-ia pensar em uma precisa definição matemática de exatamente quais propriedades das figuras são estudadas em geometria, e tal definição está faltando. Este sentimento de insatisfação aumenta quando alguém se presta a explicar porque é que, em geometria, estuda-se a distância de um vértice do triângulo desenhado no quadro a certas linhas como, por exemplo, ao lado oposto ao ângulo, e não a outras linhas, como, por exemplo, à margem do quadro. Tal explicação pode dificilmente ser dada simplesmente com base na definição dada acima.

Antes de continuar com a demonstração nós devemos notar que um livro texto de nível secundário não pode ser censurado pela imprecisão de tal definição. A definição de Kiselyov é, talvez, a única que pode ser dada num primeiro curso de geometria. É suficiente dizer que a história da geometria começa há mais de 4000 anos, e a primeira definição científica de geometria, a definição a qual é um dos grandes alvos deste livro, foi dada somente há 80 anos atrás (em 1872), pelo matemático alemão F. Klein. Foi necessária a criação de uma geometria não euclidiana por Lobachevsky antes dos matemáticos claramente reconhecerem a necessidade de uma definição exata do assunto de que realmente trata a geometria; somente depois de feito isso, tornou-se claro que o conceito intuitivo de "figuras geométricas", que fazia pressupor que não poderia haver muitas "geometrias", não poderia fornecer uma base suficiente para a extensa estrutura da ciência "geometria".

Vamos agora tentar tornar mais claro exatamente quais propriedades das figuras geométricas são estudadas em geometria. Nós já vimos que a geometria não estuda todas as propriedades das figuras, mas somente algumas delas; antes de termos uma definição precisa daquelas propriedades que pertencem à geometria nós podemos somente dizer que a geometria estuda as "propriedades geométricas" das figuras. Esta adição à definição de Kiselyov não completa, por si mesma, a definição; a questão agora passa a ser: o que são "propriedades geométricas?", e nós podemos responder apenas que elas são "aquelas propriedades estudadas pela geometria". Com isso, acabamos andando em círculo; definimos geometria como sendo a ciência que estuda as propriedades geométricas das figuras, e propriedades geométricas como sendo aquelas que são estudadas pela geometria. Para quebrar este círculo, precisamos definir "propriedade geométrica" sem a palavra "geometria".

Para estudar a questão sobre "quais são as propriedades geométricas das figuras" vamos relembrar a seguinte bem conhecida proposição: "O problema de construir um triângulo dados dois lados a e b e o ângulo C formado por eles possui apenas uma solução"(figura 1-a)²¹.

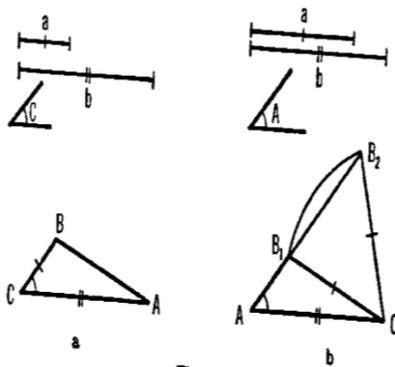


Figure 1

Por outro lado, a última frase pode parecer incorreta, uma vez que não existe realmente apenas um triângulo com lados dados a e b formando um ângulo C e, sim, infinitos triângulos (Figura 2), de tal maneira que nosso problema não possui apenas uma solução, mas infinitas soluções. O que então a assertiva de que "existe um único triângulo" realmente quer dizer?

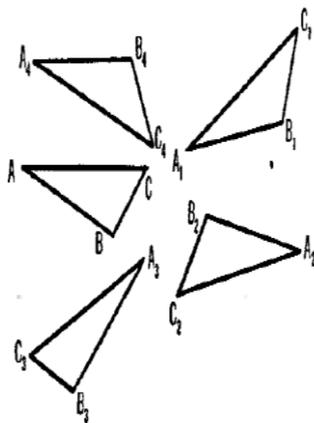


Figure 2

²¹ Em contraste a isso, o problema de construir um triângulo dados os lados a e b e um ângulo A , oposto, pode ter duas soluções (figura 1-b).

A afirmação de que, a partir dos lados a e b , formando um ângulo C entre eles, há apenas um triângulo que possa ser construído, claramente quer dizer que todos os triângulos que possuem dois lados a e b , com um ângulo C entre eles, são congruentes entre si. Portanto, seria mais preciso dizer que, a partir de dois lados e um ângulo entre eles, pode-se construir infinitos triângulos, mas todos congruentes entre si. Então, em geometria, quando alguém diz que existe um único triângulo com lados a e b formando um ângulo C , então, triângulos que diferem apenas com relação a suas posições não são considerados diferentes. E, a partir do instante em que definimos geometria como a ciência que estuda as "propriedades geométricas" das figuras, então, claramente somente as figuras que tenham as mesmas propriedades geométricas serão indistinguíveis umas das outras. Por conta disso, figuras congruentes terão exatamente as mesmas propriedades geométricas. Reciprocamente, figuras que não são congruentes terão propriedades geométricas diferentes. Se assim elas não fossem, elas também seriam indistinguíveis.

Desta forma, acabamos de chegar à requerida definição de propriedades geométricas de figuras: propriedades geométricas das figuras são aquelas propriedades comuns a todas as figuras geométricas. Agora podemos dar uma resposta precisa à pergunta de por que, por exemplo, a distância de um dos vértices de um determinado triângulo à borda da lousa não é estudada em geometria: esta distância não é uma propriedade geométrica visto que ela poderá ser diferente para dois triângulos congruentes quaisquer. Por outro lado, a altura de um triângulo é uma propriedade geométrica, uma vez que correspondentes alturas serão sempre as mesmas para triângulos congruentes.

Agora estamos muito mais próximos da definição de geometria. Nós sabemos que geometria estuda as "propriedades geométricas" das figuras, ou seja, aquelas propriedades que são as mesmas para figuras congruentes. Só nos resta então responder a pergunta: "O que são figuras congruentes"?

A última questão pode deixar o leitor desapontado e pode criar a impressão de que, embora tenhamos caminhado bastante, não conseguimos chegar a lugar algum; nós simplesmente trocamos um problema por outro, igualmente difícil de ser resolvido. Entretanto, isso não é de fato o caso; a questão de se esclarecer quando duas figuras são realmente diferentes não é de todo difícil, e o texto de Kyseliov nos dá uma completa e satisfatória resposta para isso: "Duas figuras são ditas congruentes se uma delas pode ser deslocada no espaço de tal forma a fazer coincidir ambas as figuras em todas as suas partes.". Em outras palavras, figuras

geométricas são aquelas que podem ser sobrepostas uma a outra por meio de um movimento ; por conta disso, as propriedades geométricas das figuras, ou seja, aquelas propriedade comuns a todas as figuras congruentes, são aquelas que não são alteradas a partir do movimento das figuras.

Finalmente chegamos à seguinte definição de geometria:" Geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas que não são alteradas pelos movimentos das figuras."

.....
(O trecho a seguir é a continuação desta introdução, que consta no segundo volume.)
.....

Considerando o ponto em que paramos, parece que as propriedades geométricas mais importantes das figuras geométricas são distâncias entre seus vários pontos, uma vez que o conceito de distância entre pontos - o comprimento de um segmento - parece ser o conceito mais importante em toda a geometria. Entretanto, se nós examinarmos cuidadosamente os teoremas da geometria elementar, da forma como são apresentados nos textos de Kiselyov, nós veremos que o conceito de distância entre pontos raramente figura entre estes teoremas. Todos os teoremas relacionados com retas paralelas e perpendiculares (por exemplo:"se duas retas paralelas são cortadas por uma terceira, então os ângulos correspondentes são iguais", ou ainda "por um ponto fora de uma determinada reta, existe apenas uma reta perpendicular a ela"), a maior parte dos teoremas envolvendo circunferências (por exemplo, "por três pontos não colineares existe uma única circunferência que os contém"), muitos dos teoremas sobre triângulos e polígonos (por exemplo,"a soma dos ângulos internos de um triângulo vale dois retos", ou "as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e biseccionam os ângulos internos do losango") não guardam qualquer relação com o conceito de distância. E mesmo naqueles teoremas em que a fórmula explicitamente contém o conceito de distância (por exemplo, "a bissetriz de um ângulo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes às partes", ou "numa circunferência, a maior das cordas está mais próxima do centro", ou mesmo no Teorema de Pitágoras: "se os lados de um triângulo retângulo estiverem expressos nas mesmas unidades, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos"), na verdade, não é o comprimento de algum segmento que é de fato importante, mas as razões entre dois ou mais segmentos. E fica mais fácil convencer alguém disso

quando se pensa no conteúdo destes teoremas. Por exemplo, no Teorema de Pitágoras, não é na verdade o comprimento dos lados dos triângulos que interessa, mas somente as razões entre os lados e a hipotenusa: este teorema diz que, se um triângulo retângulo de catetos b e c é tal que k e l são as razões entre estes catetos e a hipotenusa a (ou seja, $b/a = k$, $c/a = l$), então $k^2 + l^2 = 1$.

Não é difícil de entender o princípio geral por trás disso. O conceito de comprimento de um segmento não pode prescindir da adoção de uma unidade de medida específica para os comprimentos dos lados; os números que medem os comprimentos de um mesmo segmento serão diferentes se estes eles vierem expressos em centímetros, quilômetros ou polegadas. Mas o conteúdo dos teoremas geométricos não podem depender de uma unidade de medida particularmente escolhida. Segue que, em teoremas geométricos, comprimentos não podem figurar, por eles mesmos; em vez disso, nós encontramos apenas as razões de dois ou diversos segmentos (estas razões não dependem da unidade de medidas utilizada).

(...)

Portanto, o conceito de distância entre pontos que, de acordo com nossa definição de geometria, deveria exercer um papel básico, de fato não aparece diretamente nos teoremas geométricos. Esta circunstância já fora salientada por F. Klein, o primeiro a dar uma definição precisa de geometria. Realmente, a definição de geometria é um pouco diferente da que foi dada na introdução do Volume 1. Ei-la: "geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas que não são alteradas por transformações de similaridade". Transformações de similaridade (ou semelhança) podem ser definidas como aquelas transformações que não alteram as razões entre as distâncias de pares de pontos; esta definição abstrata de transformações de similaridade pode ser trocada por uma lista de todas as transformações deste tipo existentes. (...) A definição de Klein assevera que, num certo sentido, não apenas a geometria não distingue entre figuras congruentes, como também não faz distinção entre figuras semelhantes. De fato, de modo a garantir que dois triângulos são congruentes, e não meramente semelhantes, nós precisamos ter previamente fixa do uma unidade de medida com a qual iremos, a partir de então, medir os lados de ambos os triângulos. É esta "indistinção" entre figuras semelhantes que nos permite representar figuras de grandes dimensões em um quadro; o professor utiliza este princípio quando pede aos alunos para reproduzir "rigorosamente" em seus cadernos a figura que ele está desenhando no quadro e que, é claro, não poderia de forma alguma caber em seus cadernos sem que tivesse seu tamanho reduzido.

Nós vemos, então, que o papel essencial em geometria, é, de fato, exercido pelas relações de similaridade (ou semelhança).

Notações e Convenções Utilizadas

Além das notações e convenções de domínio público em Matemática, no escopo deste texto valem as seguintes:

$A \cong B$ significa que o arco A é côngruo ao arco B (quando A e B representarem arcos ou ângulos, é claro).

AB pode significar "o segmento AB" ou "a medida do segmento AB". O contexto fará a distinção.

$AB=CD$ normalmente significará que o segmento AB e o segmento CD possuem as mesmas medidas. Excepcionalmente, poderá significar que o ponto A coincide com o ponto C e o ponto B coincide com o ponto D, de tal forma que o segmento AB coincide no plano com o segmento CD. A distinção entre uma coisa e outra será pelo contexto, uma vez que as explicações são - em geral - ilustradas.

Em muitas ocasiões, foi utilizada a notação de **ângulos verdes**, para rotação no **sentido horário** e **ângulos vermelhos** para rotação no **sentido anti-horário**. Mas há contextos em que isso é contraproducente (confunde mais do que explica). A notação foi adotada por escopo de explicação (resolução, exemplo, demonstração etc). Uma vez iniciada com uma notação, esta foi mantida ao longo da explicação em curso, salvo, é claro, menção no próprio texto do contrário.

"*Demonstrar*" e "*provar*" no escopo deste trabalho querem dizer a mesma coisa. Mas não são o mesmo que "*verificar*", que será "convencer-se empiricamente, por experimentação". De alguns fatos - por me parecerem muito óbvios²² ou por achar que a demonstração desviaria muito o trabalho dos seus objetivos - dispensei uma demonstração. Para estes, a obviedade sugerida foi apenas "verificada". Dependendo do estágio em que o aluno esteja (aqui "*aluno*" é qualquer um que esteja aprendendo, não interessando a sua idade ou nível de formação), verificar pode ser muito mais importante que provar.

²² Considero absolutamente óbvio o fato do óbvio ser relativo. Ou seja, o que num contexto é óbvio, em outro contexto pode não mais sê-lo.

Recursos Utilizados

Para desenhar as figuras foi utilizado o software Geogebra. Na maior parte do tempo utilizei a versão 4.2.51 porque a última versão continha um bug que não exibia a interface para alterar o estilo de um segmento de reta. Desta forma, para desenhar um segmento tracejado, por exemplo, seria necessário escrever o código, o que tornaria o trabalho bem mais demorado. Todos os arquivos utilizados estão no link abaixo.

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCRVQ1bkJJX0locVk/edit?usp=sharing>

O melhor software que encontrei para produção dos vídeos foi o BB FlashBack - <http://www.bbsoftware.co.uk/bbflashback.aspx>. Mas há muitos softwares - inclusive gratuitos, como o CamStudio (<http://camstudio.org/>) - que fazem basicamente o mesmo, embora não de forma tão profissional. Para produzir bons vídeos, basta fazer uso da deste software de gravação a partir da captura de telas, junto com um outro qualquer para edição de vídeos (o Windows Movie Maker, por exemplo - <http://www.baixaki.com.br/download/windows-movie-maker.htm>). Bom, é claro, uma boa dose de paciência e capricho são imprescindíveis.

As músicas utilizadas são todas de distribuição gratuita e obtidas através do site <http://freemusicarchive.org/>. Abaixo a lista das músicas, vídeos e respectivos créditos.



translacao_1.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=H9XkQSwm8rc>

Lee_Maddeford_-_12_-_Tki_with_Les_Gauchers_Orchestra.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCX2dWZWpuUllOTm8/edit?usp=sharing>

John_Harrison_with_the_Wichita_State_University_Chamber_Players_-_01_-_Spring_Mvt_1_Allegro.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCMzVNXzdoNFpuUzg/edit?usp=sharing>



rotacao_web_1.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=FShCj2DqgLg>

John_Harrison_with_the_Wichita_State_University_Chamber_Players_-_11_-_Winter_Mvt_2_Largo.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCS0FSTHRwMHF1Zm8/edit?usp=sharing>



rotacao_web_2.avi

http://www.youtube.com/watch?v=23ZVk_lwvok

Chris_Zabriskie_-_16_-_Prelude_No_16.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCVWxqeHIOb25Jejq/edit?usp=sharing>



rotacao_1.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=KQli9xbujOI>

Kevin_MacLeod_-_J_S_Bach_Brandenburg_Concerto_No4-1_BWV1049.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCNXowcXY4RHVYM28/edit?usp=sharing>

Kevin_MacLeod_-_J_S_Bach_Prelude_in_C_-_BWV_846.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCVIZDRGpHclBETWc/edit?usp=sharing>



reflexao_1.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=TvfE5rcgZ-U>

Josh_Woodward_-_07_-_Already_There_No_Vocals.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCNFFNZXdScE1NQVU/edit?usp=sharing>



reflexao_composicao.avi

http://www.youtube.com/watch?v=3XFse_qA3Vc

Advent_Chamber_Orchestra_-_01_-_Albinoni_-_

_Concerto_for_2_Oboes_in_F_Major_Op9_no3_1_Allegro.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCaVF4aloxR1BzWkU/edit?usp=sharing>

Advent_Chamber_Orchestra_-_09_-_Corelli_-_Concerto_Grosso_Op6_no4.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCOURickdmYVh1TDQ/edit?usp=sharing>



translacao_triangulos.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=LlaAUegJsm0>

Josh_Woodward_-_02_-_Swansong_Instrumental_Version.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCS0RRtNExYW16MGM/edit?usp=sharing>



questao1.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=CeUdzMzZFFs>

Kevin_MacLeod_-_W_A_Mozart_Divertimento_K131.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCUGswa09DV0RnLVE/edit?usp=sharing>



paralelas_2.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=u4jsNirJnQE>

Advent_Chamber_Orchestra_-_01_-_Bach_-_
_Brandenburg_Concerto_no3_mvt3_allegro.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCQy1BdHN6TUZHVmM/edit?usp=sharing>



rotacao_3_triangulo.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=8CSqgsIc4cw>

Advent_Chamber_Orchestra_-_12_-_Vivaldi_-_
_Credo_Credo_in_Unum_Deum.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCZTZ4VGdWRmY4WFE/edit?usp=sharing>



rotacao_angulos_externos.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=zxhKZesKh4Y>

Josh_Woodward_-_04_-_Go_Instrumental.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCcmItalBIZFQ2S1k/edit?usp=sharing>



reflexao_2.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=FZCqgTVURPs>

Josh_Woodward_-_03_-_Infinite_Horizon_No_Vocals.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCcGtKV0RYLWRneFk/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_12_-_Motionless_Land_No_Vocals.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCZVBzemFtS2JpaE0/edit?usp=sharing>



reflexao_4.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=mSUXdHyEyck>

Josh_Woodward_-_18_-_The_Bottom_Instrumental.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCVWFqbVI6LVY2SDA/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_20_-_Rogue_Nation_Instrumental.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCVHNhb2FqlluMWs/edit?usp=sharing>



reflexao_6.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=E0A71Z2Slhq>

Josh_Woodward_-_08_-_Dont_Close_Your_Eyes_Instrumental.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCN0o2NWdaYmtCX1U/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_12_-_Shadows_in_the_Moonlight_Instrumental.mp3
<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCQWhVZWpGcW4xLWc/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_16_-_Memorized_Instrumental.mp3
<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCcDJuS01KQ1kyNOU/edit?usp=sharing>



translacao_rios_perpendiculares.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=wtKHKvwCHts>

John_Harrison_with_the_Wichita_State_University_Chamber_Players_-_03_-_Spring_Mvt_3_Allegro_pastorale.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCTWh4dj0N0hyTzA/edit?usp=sharing>



rotacao_4.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=yosEyJonsPc>

Josh_Woodward_-_12_-_Stars_Collide_Instrumental_Version.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCQUxnMnIPWF9aWUE/edit?usp=sharing>



rotacao_4_1.avi

http://www.youtube.com/watch?v=bqo2YU_055Q

Josh_Woodward_-_02_-_Cherubs_No_Vocals.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCcVpTNTNieFVpcmM/edit?usp=sharing>



rotacao_circulo_1.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=LRNeJ1Ddv-w>

Josh_Woodward_-_24_-_Gemini_Instrumental_Version.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCQmtRVGpHRIhKb0k/edit?usp=sharing>



rotacao_circulo_2.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=XPMY8DhBarU>

Kevin_MacLeod_-_Camille_Saint-Sans_Danse_Macabre.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCNnU3WF94MmZXcTA/edit?usp=sharing>



reflexao_3.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=YD9PUVUBE3c>

Josh_Woodward_-_04_-_Effortless_-_Instrumental.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCbS1vT1R6LVZDMW8/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_12_-_Nincompoop_No_Vocals.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCc2FsUkl5ekh4aWM/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_22_-_Afterglow_Instrumental.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCN1VDSDFZRER1bjg/edit?usp=sharing>



reflexao_5.avi

http://www.youtube.com/watch?v=vmzd_fDQQA

Josh_Woodward_-_16_-_Water_in_the_Creek_Instrumental_Version.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCdmZ3bEI0UFRnNG8/edit?usp=sharing>

Josh_Woodward_-_18_-_Little_Tomcat_Instrumental_Version.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCMFRrZEhfTWdPNVE/edit?usp=sharing>



rotacao_0.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=pXx2ktVxMe8>

Dexter_Britain_-_05_-_Seeing_The_Future.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCWUdqMnVDT0hXbnM/edit?usp=sharing>

Dexter_Britain_-_07_-_The_Time_To_Run.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCazg0bFpGZ0NIRmM/edit?usp=sharing>



rotacao_2.avi

<http://www.youtube.com/watch?v=TICCoHp7504>

Chris_Zabriskie_-_01_-_Prelude_No_1.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCd2VRYTJHVUR1RnM/edit?usp=sharing>

Chris_Zabriskie_-_01_-_

_The_Temperature_of_the_Air_on_the_Bow_of_the_Kaleetan.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCQ0FYNDdhY2Jpblk/edit?usp=sharing>

Chris_Zabriskie_-_05_-_Prelude_No_5.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCbm5tS1NqaDc0Wm8/edit?usp=sharing>

Chris_Zabriskie_-_14_-_Prelude_No_14.mp3

<https://drive.google.com/file/d/0B239qU0-opwCck5EM3hmNHBsa2M/edit?usp=sharing>

Bibliografia

[1] YAGLOM, Isaak Moiseevitch. Geometric Transformations I. Traduzido do russo para o inglês por Allen Shields. New Mathematical Library - 1962 - Volume 8.

[2] YAGLOM, Isaak Moiseevitch. Geometric Transformations II. Traduzido do russo para o inglês por Allen Shields. New Mathematical Library - 1968 - Volume 21.

[3] OSTERMANN, Alexander e WANNER, Gerhard. Geometry by Its History. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[4] MALATI. Geometry - Module 2 - Transformations - Teacher document - Grades 8 and 9. <http://academic.sun.ac.za/mathed/malati/sec02.pdf> (Acesso em 23/05/2014).

[5] DEMO, Pedro. Promoção Automática e Capitulação da Escola.1998. <http://educa.fcc.org.br/pdf/ensaio/v06n19/v06n19a02.pdf> (acesso em 23/05/2014).

[6] PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do Ensino da Geometria: Uma visão Histórica. <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=vtls000045423> (acesso em 23/05/2014).

[7] Soares, Luís Havelange. Aprendizagem Significativa na Educação, Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica. UFPB - 2009. <http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/DissertacaoHavelange.pdf> (acesso em 24/05/2014).

[8] DEMO, Pedro. Avaliação. 2010. <http://www.ufvjm.edu.br/site/educacaoemquimica/files/2010/10/Avaliacao-Pedro-Demo.pdf> (acesso em 23/05/2014).

[9] USISKIN, Zalman. Van Hiele levels of achievement in secondary school. Universidade de Chicago - 1982.

http://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf (acesso em 23/05/2014).

[10] LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometria de Transformações. FURG - ULBRA - UFPR . http://www.apm.pt/files/Co_Leivas_486fe4f620fb3.pdf (acesso em 23/05/2014).

[11] WHITELEY, Walter. The Decline and Rise of Geometry in 20th Century North America. York University - 1999 .
<http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/cmescg.pdf> (acesso em 23/05/2014) .

[12] FERREIRA, Sebastião Aparecido. Inclusão Social, Progressão Continuada, e Ciclos no Estado de São Paulo. Dissertação e Mestrado - Universidade de São Carlos - 2004.
http://www.btdt.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=482 (acesso em 23/05/2014).

[13] VIÉGAS, L. de S. Progressão Continuada em uma perspectiva crítica em Psicologia Escolar: história, discurso oficial e vida diária escolar. 2007. 238 p (Tese Doutorado) - Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo , 2007. http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde-06052008-171129/publico/Viegas_doutorado.pdf (acesso em 23/05/2014).

[14] BARBOSA, Paula Márcia et al. Importância do Pensamento Visual na Geometria. <http://www.sbemrj.com.br/sbemrjvi/artigos/b1.pdf> (acesso em 24/05/2014)

[15] YAGLOM, Isaak Moiseevitch. Geometric Transformations III. Traduzido do russo para o inglês por A. Shenitzer. New Mathematical Library - 1973 - Volume 24.

[16] PETERSEN, Julius. Construções Geométricas. Traduzido por Samsão Woiler e Hugo Monteiro de Barros Carl. Livraria Nobel - 1963.

[17] COXETER, H. S. M e Greitzer, S. L..Geometry Revisited. New Mathematical Library - 1967 - Volume 19.

[18] YAGLOM, Isaak Moiseevitch. Felix Klein and Sophus Lie - Evolution of the Idea of Simetry in the Nineteenth Century. Traduzido do russo para o inglês por Sergei Sossinsky. Birkhäuser - 1988.

[19] HERSTEIN, I. N.. Topics in Algebra - 2nd Edition. John Wiley & Sons.

[20] Klein Vignettes. http://wikis.zum.de/dmuw/The_Klein_Project/Klein_Vignettes (acesso em 07/06/2014).

[21] BARRETO, Ana Cristina Teixeira. Igualdade entre sexos - Carta de 1988 é um marco contra discriminação. <http://www.conjur.com.br/2010-nov-05/constituicao-1988-marco-discriminacao-familia-contemporanea> (acesso em 14/06/2014).

[22] PINHEIRO, Ana Cláudia Martinez. Que crianças são estas? : retratos de infância a partir de cadernos de texto / Ana Cláudia Martinez Pinheiro ; orientadora: Maria Aparecida C. Mamede Neves. – 2006. (http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/Busca_etds.php?strSecao=resultado&nrSeq=9653@1 Acesso em 22/06/2014)