

IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada  
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática

# **Combinatória Revisitada:**

## **Uma Introdução à Teoria de Ramsey**

Aluno: Paulo Cesar Sampaio Junior

Orientador: Professor Doutor Carlos Gustavo T. de A. Moreira

Rio de Janeiro

2014



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>O Princípio das Gavetas de Dirichlet</b>	<b>7</b>
2.1	Apresentação . . . . .	7
2.2	Primeiras Aplicações . . . . .	7
2.3	Formalização . . . . .	9
2.4	Noções sobre Grafos . . . . .	12
<b>3</b>	<b>O Teorema de Ramsey para Grafos</b>	<b>15</b>
3.1	O Teorema de Ramsey para Grafos Bi-cores . . . . .	15
3.2	O Teorema de Ramsey para Grafos $k$ -cores . . . . .	18
3.3	Estimativas para números de Ramsey . . . . .	19
3.3.1	Estimativas Superiores para $R(a, b)$ . . . . .	19
3.3.2	Estimativas Inferiores para $R(a, b)$ . . . . .	20
3.4	Números de Ramsey conhecidos . . . . .	21
<b>4</b>	<b>O Teorema de Ramsey para Hipergrafos</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Experiência em Sala</b>	<b>27</b>
5.1	Aula 1 . . . . .	27
5.2	Aula 2 . . . . .	28
5.3	Conclusão . . . . .	29
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>30</b>



# Capítulo 1

## Introdução

A Combinatória é um ramo da matemática discreta extremamente atraente a estudantes e curiosos em geral. Talvez pela pouca exigência de um amplo conhecimento de matemática – somente números naturais, operações fundamentais e noções sobre conjuntos – ou talvez pela simplicidade e elegância com que seus métodos resolvam problemas aparentemente difíceis, esse tema desperta o interesse de grande parte dos alunos do ensino básico e superior. Contudo, os problemas de *contagem*, que surgem como os primeiros exemplos, podem passar a ideia equivocada de que a Combinatória está limitada a isto: *contar*. Nos referimos à contagem quando desejamos fazer uma análise quantitativa dos elementos de um dado conjunto que cumpra certas condições. Por outro lado, há questões que versam sobre a *existência* de um conjunto dadas certas condições. Nesse caso, não desejamos saber o número de elementos desse conjunto, mas dizer se ele contém algum elemento. Essa segunda classe de problemas necessitam de uma abordagem diferenciada, onde as “fórmulas” de contagem têm pouca (ou nenhuma) relevância.

Uma ferramenta simples e muito útil frequentemente utilizada na abordagem de tais problemas é o *Princípio das Gavetas de Dirichlet* ou *Princípio das Casas dos Pombos*, como veremos no capítulo 2. Esses problemas, muitas vezes rotulados como “de raciocínio”, podem ser resolvidos por uso dessa técnica, de maneira simples e natural.



Figura 1.1: Princípio das Casas dos Pombos

Outro assunto de grande importância na modelagem de problemas diversos, com um campo próprio dentro da matemática, é a *Teoria dos Grafos*. Faremos uma breve apresentação do tema na parte final do capítulo 2, seguida de algumas definições, teoremas e exemplos. Veremos como o uso de grafos associado ao Princípio das

Gavetas resulta numa excelente técnica para se abordar o famoso problema *Amigos e Estranhos*<sup>1</sup>, resultando numa exposição gráfica e visualmente atraente do problema.

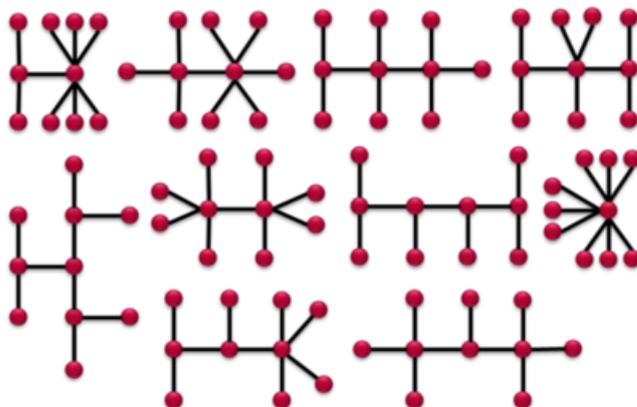


Figura 1.2: Exemplos de Grafos

Os capítulos 3 e 4 tratam do Teorema de Ramsey, objeto central de um campo da matemática chamado *Teoria de Ramsey*. O nome é dado em homenagem ao matemático inglês Frank Plumpton Ramsey (1903–1930), autor de diversos trabalhos nas áreas de matemática combinatória, economia e filosofia.

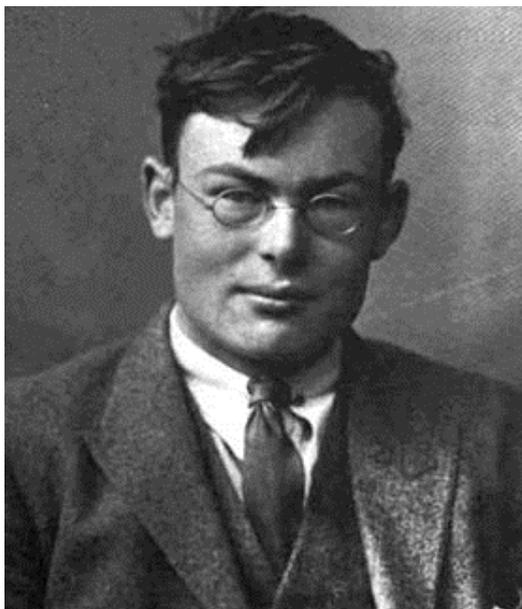


Figura 1.3: Frank P. Ramsey

A Teoria de Ramsey vem se mostrando um campo vasto e desafiador, tendo diversos problemas em aberto. Em 1998, o matemático Tim Gowers<sup>2</sup> recebeu a Medalha Fields em reconhecimento por seus trabalhos nessa área.

<sup>1</sup>*Friends and Strangers*, como é internacionalmente conhecido.

<sup>2</sup>William Timothy Gowers, matemático britânico.

## Capítulo 2

# O Princípio das Gavetas de Dirichlet

### 2.1 Apresentação

É bastante comum que estudantes de matemática associem a Combinatória a problemas que tratam exclusivamente da contagem do número de objetos de um dado conjunto. Tal fato não é surpreendente, pois os primeiros problemas que tratam da matéria são da forma “Quantas são as maneiras...”, “De quanto modos...” ou “Determine o número de objetos...”. Como consequência da solução de tais problemas, aprende-se o Princípio da Inclusão-Exclusão, O Princípio Fundamental de Contagem e suas aplicações, tais como o cálculo de permutações, agrupamentos ou combinações, dentre outros resultados. Contudo, há questões que tratam da *existência* de conjuntos que cumpram certas condições, e não do seu *número* de objetos. O *Princípio das Gavetas de Dirichlet*, nome dado em homenagem ao matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet, apresenta-se como um método simples para a resolução de um farto número de problemas referentes à existência - e não à contagem - de um dado conjunto.

### 2.2 Primeiras Aplicações

**Teorema 2.1** (Princípio das Gavetas de Dirichlet). *Se  $n$  objetos forem alocados aleatoriamente em, no máximo,  $n - 1$  gavetas, então em pelo menos uma dessas gavetas haverá, no mínimo, dois objetos.*

*Demonstração.* Supondo que em cada gaveta foi colocado 1 objeto, no máximo, então o total de objetos será  $n - 1$ , no máximo, o que contradiz a hipótese.  $\square$

**Exemplo 2.1.** Dados 5 inteiros consecutivos, mostre que sempre existe um múltiplo de 5 dentre eles.

*Solução.* Os restos possíveis numa divisão por 5 pertencem ao conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Imaginando esses restos como gavetas e os números como objetos, como esses são consecutivos, cada objeto será colocado numa gaveta. Como a gaveta rotulada por “0” foi usada, logo há um múltiplo de 5 dentre os números.  $\square$

**Exemplo 2.2.** Mostrar que, dentre quaisquer sete inteiros positivos distintos não maiores do que 126, sempre é possível encontrar dois deles,  $x$  e  $y$ , tais que  $1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$ .

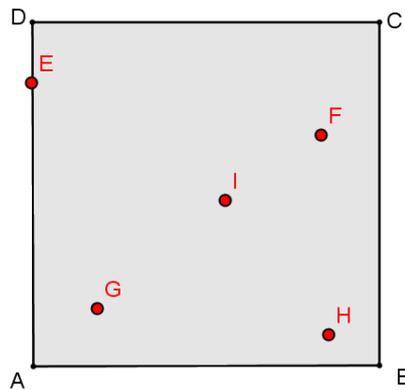
*Solução.* Como serão escolhidos 7 inteiros iguais ou menores do que 126, dividiremos estes em 6 conjuntos, de modo que o último elemento de cada conjunto seja igual ao dobro do primeiro. Isso nos garante que dois números de um mesmo conjunto terão razão máxima igual a 2. Os conjuntos são:

$$\{1, 2\}; \{3, 4, 5, 6\}; \{7, 8, \dots, 14\}; \{15, 16, \dots, 30\}; \{31, 32, \dots, 62\}; \{63, 64, \dots, 126\}$$

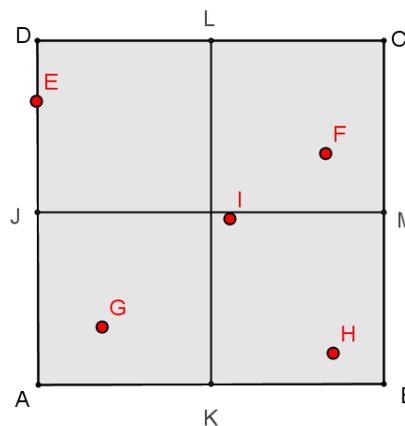
Tomando esses conjuntos como as gavetas e os inteiros como objetos, temos que pelo menos dois desses números serão escolhidos de um mesmo conjunto, encerrando a demonstração.  $\square$

**Exemplo 2.3.** Mostre que se 5 pontos pertencem a um quadrado de lado 1, então algum par desses pontos determinará um segmento de comprimento igual ou menor do que  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Observação: um ponto pertencer a um quadrado significa estar no seu interior ou no seu contorno.

*Solução.* Seja  $ABCD$  um quadrado de lado 1 e  $E, F, G, H$  e  $I$  cinco pontos quaisquer pertencentes a ele. Uma possível figura é:



Dividindo esse quadrado em quatro quadrados menores, todos de lado  $\frac{1}{2}$ , temos:



Tomando-se esses quatro quadrados menores como as gavetas e os cinco pontos como os objetos, é fácil ver que pelo menos dois desses pontos pertencerão a um desses

quadrados. Como o lado vale  $\frac{1}{2}$ , a maior distância entre dois pontos será uma diagonal, cuja medida é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $\square$

## 2.3 Formalização

O Princípio das Gavetas pode ser descrito numa notação mais formal. Para tal, serão introduzidas as seguintes definições:

**Definição 2.1** (Função Chão). Dado um número real  $x$ , define-se como Função Chão de  $x$  o maior número inteiro menor do que  $x$ . A notação é:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

**Definição 2.2** (Função Teto). Dado um número real  $x$ , define-se como Função Teto de  $x$  o menor número inteiro maior do que  $x$ . A notação é:

$$\lceil x \rceil = \min\{t \in \mathbb{Z} \mid t \geq x\}$$

**Teorema 2.2.** Sendo  $A$  e  $B$  conjuntos finitos com  $|A| > |B|$ , não pode existir uma função  $F : A \rightarrow B$  que seja injetiva.

*Demonstração.* Vamos supor que exista uma função de  $A$  em  $B$  que seja injetiva. Chamemos de  $B'$  o conjunto imagem dessa função. É claro que  $|B'| = |A|$ . Como  $B' \subset B$ , segue que  $|B'| \leq |B| \Rightarrow |A| \leq |B|$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Corolário 2.1.** Se  $|A| = a$  objetos são distribuídos em  $|B| = b$  gavetas, então em ao menos uma gaveta haverá pelo menos  $\left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor + 1$  objetos.

*Demonstração.* Suponha que cada gaveta contenha, no máximo,  $\left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor$  objetos. Logo, o número de objetos será, no máximo  $b \cdot \left\lfloor \frac{a-1}{b} \right\rfloor \leq b \cdot \frac{a-1}{b} = a-1 < a$ , o que é um absurdo.  $\square$

**Corolário 2.2.** Se  $|A| = a$  objetos são distribuídos em  $|B| = b$  gavetas, então em ao menos uma gaveta haverá pelo menos  $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$  objetos.

*Demonstração.* A demonstração é trivial, dado que  $\left\lceil \frac{a-1}{b} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$ .  $\square$

**Exemplo 2.4.** Mostre que, em um grupo de 100 pessoas, pelo menos 9 fazem aniversário no mesmo mês.

*Solução.* Considerando as pessoas como os objetos e os meses como as gavetas, temos que:

$$\left\lfloor \frac{100-1}{12} \right\rfloor + 1 = 9$$

Alternativamente, poderíamos ter feito:

$$\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$$

□

**Exemplo 2.5.** Mostre que se pintarmos todas as arestas e diagonais de um eneágono utilizando duas cores, será formado pelo menos um quadrilátero monocromático (incluindo-se suas diagonais) ou pelo menos um triângulo monocromático.

*Solução.* Procederemos tentando evitar a construção de um quadrilátero ou um triângulo que cumpram as condições acima. As cores em questão serão *azul* e *vermelha*. Faremos a análise tomando um vértice qualquer do eneágono, que chamaremos de *Vértice*, e o ligaremos aos 8 vértices restantes. Temos então 8 segmentos a serem pintados com as cores azul ou vermelha. Pelo Princípio das Gavetas, se temos 8 segmentos e 2 cores, então pelo menos  $\left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil = 4$  segmentos serão pintados da mesma cor. O caso mais distribuído pode ser representado pela Figura 2.1 abaixo:

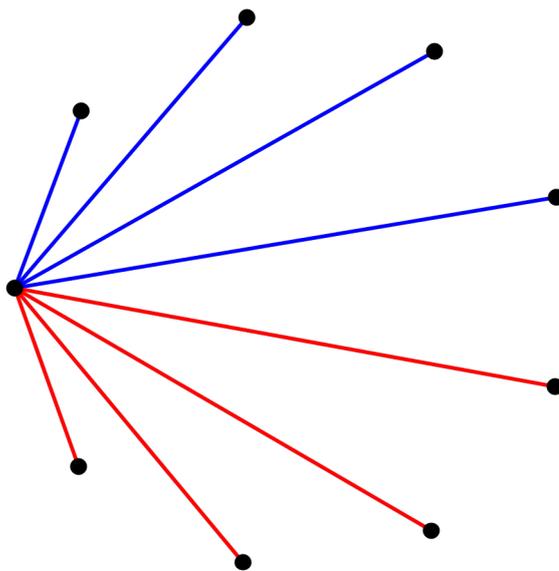


Figura 2.1: eneágono

Agora que temos uma figura para trabalhar, evitaremos a construção de triângulos monocromáticos. Onde há dois segmentos azuis partindo do Vértice, completaremos o triângulo com um segmento vermelho. Analogamente, onde há dois segmentos vermelhos partindo do Vértice, completaremos o triângulo com um segmento azul. Observe que até o momento não houve a possibilidade da construção de quadriláteros. A Figura 2.2 ilustra o procedimento.

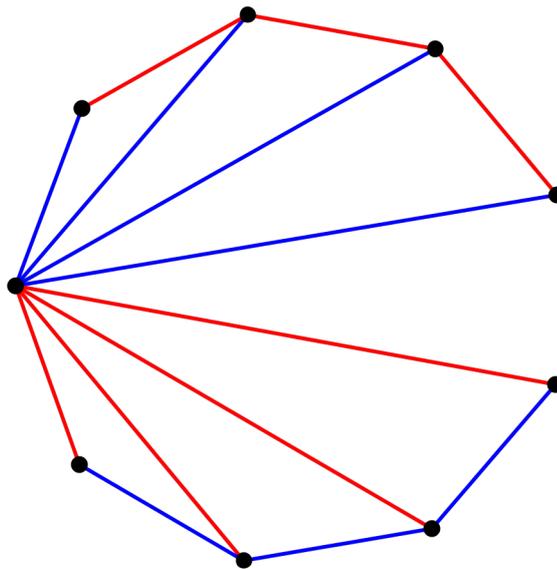


Figura 2.2: triângulos bi-cores

Continuaremos evitando a construção de triângulos monocromáticos. Dessa vez, afim de simplificar a análise, nos preocuparemos apenas em não formar triângulos azuis, ou seja, nos concentraremos na parte superior da figura. Novamente, se há duas arestas azuis partindo do Vértice, completaremos o triângulo com uma aresta vermelha. Observe que a análise seria simétrica caso nos preocupássemos em não formar triângulos vermelhos. Observe a Figura 2.3

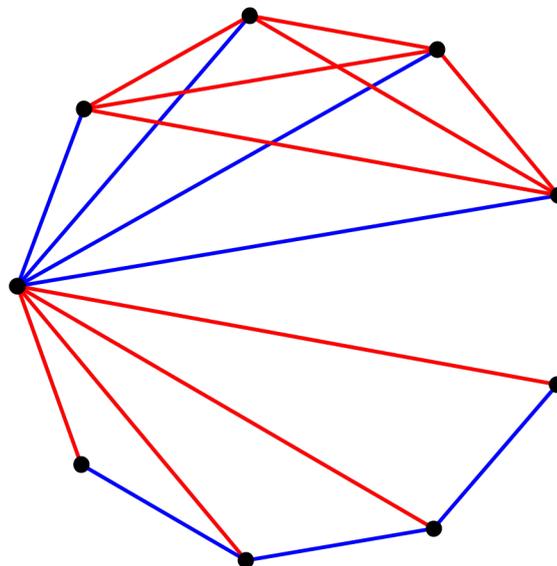


Figura 2.3: quadrilátero e diagonais na cor vermelha

Como consequência por ter evitado triângulos azuis, acabamos por criar um quadrilátero cujos lados e diagonais são todos vermelhos.  $\square$

## 2.4 Noções sobre Grafos

Objetivando uma notação mais precisa sobre problemas que podem ser modelados por meio de pontos ligados por arestas, introduzimos aqui a ideia de *grafo*. Tais problemas são comuns em diversas áreas que vão além da matemática combinatória, como engenharia elétrica, biologia e química. No presente texto, utilizaremos grafos para representar geometricamente o Teorema de Ramsey, cuja exposição será feita posteriormente.

**Definição 2.3.** Dados  $N$  e  $A$  conjuntos finitos não-vazios, define-se como *grafo*  $G = (N, A)$  a figura determinada por um conjunto  $N$  de pontos, denominados *nós* e um conjunto  $A$  de linhas, denominadas *arcos*, de maneira que cada arco seja determinado por um par não-ordenado de nós distintos. Dois nós são *adjacentes* caso se conectem por um arco. Caso contrário, os nós são *não-adjacentes*. Caso um nó não tenha arcos a ele associados, esse nó será chamado *isolado*. Convencionaremos que a interseção entre dois arcos, caso ocorra, não determina um nó do grafo.

**Exemplo 2.6.** As figuras abaixo ilustram um grafo composto por 10 nós e 9 arcos e um grafo composto por 6 nós e 7 arcos.



Figura 2.4: exemplo de grafo

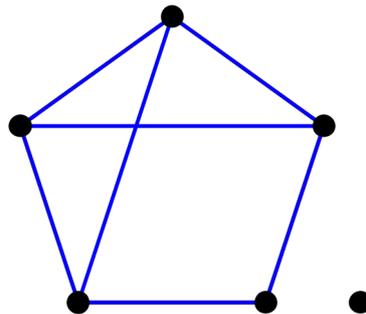


Figura 2.5: exemplo de grafo

**Definição 2.4.** Um *multigrafo* é definido de modo análogo a um grafo, com a diferença de que agora mais de um arco pode estar associado a um mesmo par de nós. O *grau de um nó* é igual ao número de arcos incidentes no nó.

**Exemplo 2.7.** A figura a seguir mostra um multigrafo com três nós de grau 2 e um nó de grau 4.

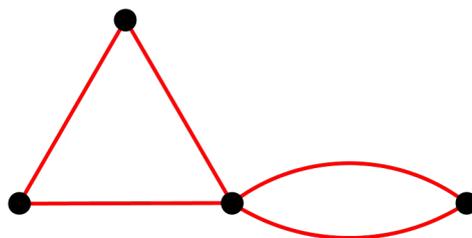


Figura 2.6: um multigrafo

Grafos ou Multigrafos também podem ser representados por meio de matrizes, ou seja, algebricamente. Há duas formas matriciais para essa representação, como definiremos a seguir.

**Definição 2.5.** Chama-se *Matriz de Incidência* aquela cujas linhas são representadas pelos nós e cujas colunas são representadas pelos arcos. O elemento  $a_{ij}$  da matriz é igual a 1 se o nó  $i$  é extremidade do arco  $j$  e igual a 0 caso o nó  $i$  não seja extremidade do arco  $j$ .

**Definição 2.6.** Chama-se *Matriz de Adjacência* a matriz cujas linhas e colunas sejam representadas pelos nós e que o elemento  $a_{ij}$  da matriz corresponda ao número de arcos que têm  $i$  e  $j$  como extremidades.

Naturalmente, para que as representações matriciais sejam possíveis, é necessário que os nós e arcos sejam nomeados de alguma forma. A notação mais comum consiste em associar os nós a números e os arcos a letras.

**Exemplo 2.8.** O multigrafo da figura 2.6 pode ter seus nós e arestas nomeados. Uma possível nomeação é dada pela figura abaixo.

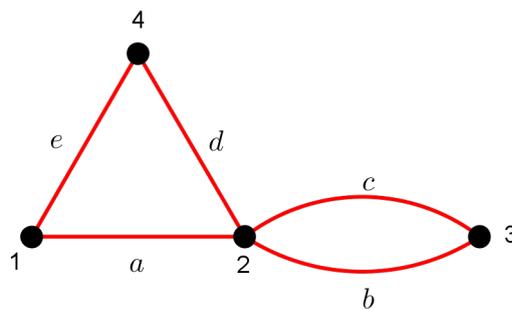


Figura 2.7: nós e arcos rotulados

A matriz de incidência referente ao grafo é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de adjacência do mesmo grafo é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Definição 2.7.** Um grafo é dito *completo* se cada par de nós é adjacente, conectados por somente um arco. A notação<sup>1</sup> utilizada para um grafo completo com  $n$  vértices é  $K_n$ , em homenagem ao matemático polonês Kazimierz Kuratowski, autor de importantes

<sup>1</sup> $K_n$  representa a classe de isomorfismo dos grafos completos com  $n$  arestas.

trabalhos na teoria dos grafos. O total de arcos de um  $K_n$  é  $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$  e o grau de cada nó é  $n-1$ . Analogamente, podemos definir um  $p$ -grafo completo como um multigrafo onde cada par de nós é conectado por  $p$  arestas.

Sem perda de generalidade, um  $K_n$  pode ser representado por um polígono regular com  $n$  vértices e seus arcos como os lados e as diagonais do polígono.

**Exemplo 2.9.** Um  $K_6$  e um  $K_8$  abaixo representados pelos respectivos polígonos regulares com 6 e 8 vértices.

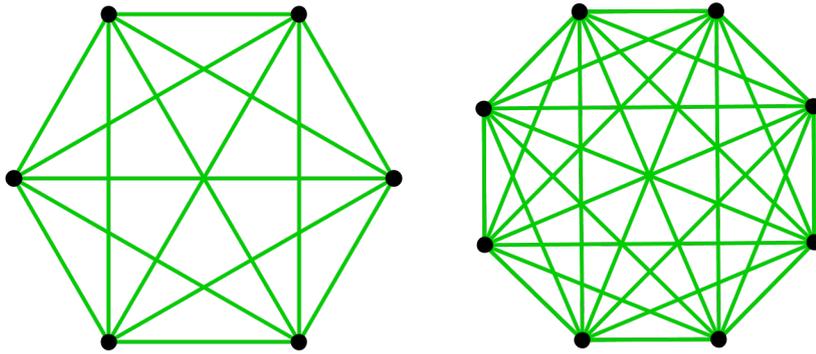


Figura 2.8: um  $K_6$  e um  $K_8$

# Capítulo 3

## O Teorema de Ramsey para Grafos

### 3.1 O Teorema de Ramsey para Grafos Bi-cores

O teorema a seguir, objeto principal desse texto, foi proposto pelo matemático Frank Ramsey em 1928. Ramsey buscava responder se era possível extrair de um conjunto desordenado alguma ordem, e em caso afirmativo, a *quantidade* dessa ordem. Durante a exposição do teorema e dos exemplos, traduziremos por *ordem* um grafo completo monocromático.

**Teorema 3.1.** *Dados dois números naturais  $a$  e  $b \geq 2$ , existe um número natural tal que qualquer grafo completo bicolor (digamos, azul e vermelho) de ordem  $n$  ou maior contém um subgrafo completo monocromático azul ou vermelho. Chamaremos o menor número natural que cumpra essa condição de  $R(a, b) = n$ .*

Antes de demonstrarmos o teorema, analisaremos alguns exemplos simples.

**Exemplo 3.1.** Qual é o valor de  $R(2, 2)$ ? Em outras palavras, qual seria o menor número de pontos tais que, caso pintássemos os segmentos que unem quaisquer dois desses pontos de azul ou vermelho, necessariamente dois desses pontos seriam ligados por um segmento azul ou vermelho? Vamos verificar se o caso mais simples, ou seja, somente dois pontos, é suficiente.



Figura 3.1: Dois pontos e um segmento



Figura 3.2: Dois pontos e um segmento

Com efeito, dois pontos são suficientes para que o segmento que os une seja azul ou vermelho.

**Exemplo 3.2.** Façamos agora a análise do número  $R(3, 2)$ . Dessa vez, em vez de cores, usaremos uma ideia equivalente. Pensaremos nos pontos do grafo em questão como

peças. Cada aresta azul ou vermelha ligando dois pontos significam que essas pessoas se *conhecem* ou se *desconhecem*, respectivamente. Desse modo, buscar o número  $R(3, 2)$  é equivalente à pergunta: Qual deve ser o menor número de pessoas numa reunião tal que três delas se conheçam mutuamente ou duas delas se desconheçam mutuamente? É claro que devemos ter ao menos três pessoas. As possibilidades são:

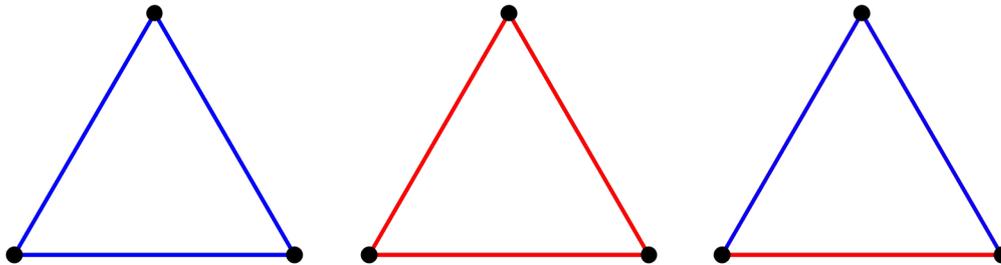


Figura 3.3:  $R(3, 2)$

De fato, numa reunião com três pessoas, ou todas se conhecem (ou se desconhecem) mutuamente ou há duas pessoas que se desconhecem (ou se conhecem) mutuamente. Naturalmente, *conhecer* ou *desconhecer* desempenham um papel simétrico no problema.

Baseado nesse exemplo, podemos instituir os seguintes lemas:

**Lema 3.1.**  $R(a, 2) = a, \forall a \geq 2$ .

*Demonstração.* Com efeito, dado um grafo completo com  $a$  arestas, ou todas são azuis ou duas são vermelhas. Em outras palavras, em qualquer reunião com  $a$  pessoas, ou todas se conhecem ou existem duas que se desconhecem.  $\square$

**Lema 3.2.**  $R(a, b) = R(b, a)$ .

*Demonstração.* É imediato o resultado acima, dado que *conhecer* ou *desconhecer* (colorir de azul ou vermelho) desempenham um papel simétrico no problema.  $\square$

**Exemplo 3.3.** Finalizaremos os exemplos com a análise do número  $R(3, 3)$ . A primeira dificuldade é estabelecer um valor mínimo para  $R(3, 3)$ . Não é difícil ver que  $n = 4$  ou  $n = 5$  são insuficientes. É possível colorir as arestas de azul ou vermelho de modo que triângulos monocromáticos não sejam formados. Observe as figuras.

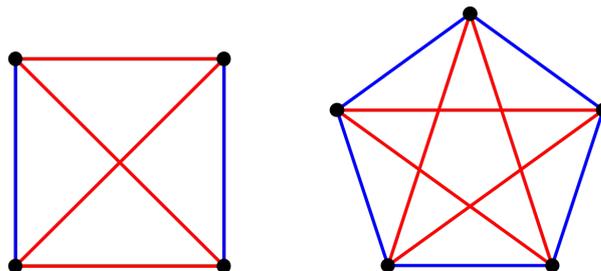


Figura 3.4: valores insuficientes para  $R(3, 3)$

Analisaremos o caso  $n = 6$ , dado que  $R(3, 3) > 5$ . Diferentemente do que vem sendo feito, não analisaremos esse caso exaustivamente. Utilizaremos o Princípio das Gavetas para mostrar que dado um  $K_6$ , sempre haverá triângulos monocromáticos formados ou, dada uma reunião com 6 pessoas, sempre haverá 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que se desconhecem mutuamente.

Separemos um dos vértices,  $A$ , por exemplo. Sabemos que  $A$  se conecta a 5 outros vértices. Pelo Princípio das Gavetas, considerando as arestas que partem de  $A$  como os objetos e as cores azul e vermelha como as gavetas, teremos pelo menos  $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 3$  arestas azuis ou vermelhas.

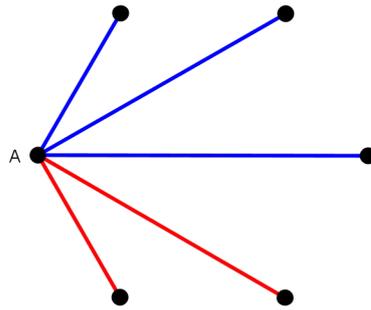


Figura 3.5: análise de  $R(3, 3)$

Tentaremos, a partir da figura 3.5, evitar a construção de triângulos monocromáticos.

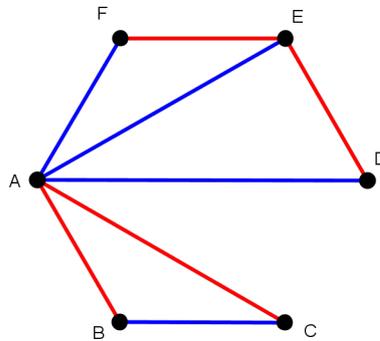


Figura 3.6: análise de  $R(3, 3)$

Para evitar um triângulo azul, traçaremos de vermelho o segmento  $FD$ . Desse modo, criou-se o triângulo vermelho  $DEF$ . Se quiséssemos evitar o triângulo vermelho  $DEF$ , seria inevitável a construção do triângulo azul  $ADF$ . É importante reiterar que esse raciocínio nada mais é do que uma aplicação do Princípio das Gavetas.

Uma vez familiarizados com alguns números de Ramsey, podemos provar o teorema. É importante ter em mente que a demonstração a seguir garante a existência de infinitos números de Ramsey, mas não nos dá uma fórmula ou algoritmo para calculá-los.

*Demonstração.* Provaremos que  $R(a, b)$  existe mostrando que esse número é limitado pela soma de dois outros números de Ramsey. O Lema 3.1 nos permite presumir a

existência de  $R(a-1, b)$  e  $R(a, b-1)$ . Mostraremos então que  $R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$  para  $a, b \geq 3$ .

Tomemos um grafo completo bicolor (azul e vermelho) com  $n$  vértices, denominado  $K_n$ , tal que  $n = R(a-1, b) + R(a, b-1)$ . Tomando  $P$  como um desses vértices, são formados os seguintes conjuntos:  $A_P$ , determinado pelos vértices adjacentes a  $P$  cujas arestas que os ligam a  $P$  são azuis e  $V_P$ , determinado pelos vértices adjacentes a  $P$  cujas arestas que os ligam a  $P$  são vermelhas. Como  $K_n$  é um grafo completo e  $A_P \cap V_P = \emptyset$ , temos  $|A_P| + |V_P| = n - 1$ .

Se  $|A_P| < R(a-1, b)$  e  $|V_P| < R(a, b-1)$  então, como  $n = R(a-1, b) + R(a, b-1)$ , teremos  $|A_P| + |V_P| \leq n - 2$ , que é uma contradição. Então  $|A_P| \geq R(a-1, b)$  ou  $|V_P| \geq R(a, b-1)$ .

Se  $|A_P| \geq R(a-1, b)$  e  $A_P$  induz um sub-grafo completo  $K_b$  vermelho, não há mais o que provar. Por outro lado, se  $A_P$  induz um sub-grafo completo  $K_{a-1}$ , adicionando  $P$  aos  $a-1$  vértices, teremos um  $K_a$ .

A análise de  $V_P$  é análoga ao que acabamos de ver pois, pelo o Lema 3.2 nos dá que  $R(a, b) = R(b, a)$ .

Acabamos de mostrar que  $n = R(a-1, b) + R(a, b-1)$  implica a existência de um  $K_a$  ou um  $K_b$ , ou seja, existe o número  $R(a, b)$  tal que  $R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$ .  $\square$

### 3.2 O Teorema de Ramsey para Grafos $k$ -colores

O Teorema 3.1 pode ser generalizado para grafos completos cujas arestas podem ser coloridas com mais de 2 cores.

**Teorema 3.2.** *Dados  $k$  números naturais  $a_i \geq 2$  com  $i = 1, 2, \dots, k$ , existe um número natural tal que, dado um  $K_n$ , se pintarmos suas arestas com as cores 1 ou 2 ou ... ou  $k$ , existirá um  $K_{a_1}$  monocromático da cor 1 ou um  $K_{a_2}$  monocromático da cor 2 ou ... ou um  $K_{a_k}$  monocromático da cor  $k$ . O menor natural que cumpra essa propriedade será chamado de  $R(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .*

*Demonstração.* Seguindo os passos utilizados na demonstração do Teorema 1, temos:

- (i)  $R(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2) = R(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ . Vamos supor que as arestas de  $K_n$ , sendo  $n = R(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2)$ , serão pintadas utilizando-se  $k-1$  cores diferentes mais a cor branca. Há duas possibilidades: nenhuma das arestas será pintada com a cor branca ou haverá dois vértices cuja aresta que os conecta é branca.
- (ii)  $R(a_1, a_2, \dots, a_k) = R(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(k)})$ , sendo  $\sigma$  uma permutação qualquer do conjunto  $\{1, 2, \dots, k\}$ . As permutações mudariam somente a cor dos subgrafos, não a sua estrutura. A escolha das cores é arbitrária e, portanto, não altera o resultado.
- (iii)  $R(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k) + \dots + R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1) - k + 2$ .

Tal como fizemos anteriormente, tomemos um grafo completo  $k$ -color com  $n$  vértices, denominado  $K_n$ , tal que:

$$n = R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k) + \dots + R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1) - k + 2$$

Tomando o vértice  $P$ , são formados os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  dos vértices que se conectam a  $P$  e são pintados com as cores diferentes 1, 2, ...,  $k$ . Como

$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , então  $\sum_{i=1}^k |A_i| = n - 1$ .

Se  $|A_1| < R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k)$ ,  $|A_2| < R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k)$ , ... ,  $|A_k| < R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1)$  então, como  $n = R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k) + \dots + R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1) - k + 2$ ,

teremos  $\sum_{i=1}^k |A_i| < n - 1$ , que é uma contradição. Então  $|A_1| \geq R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k)$  ou  $|A_2| \geq R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k)$  ou ... ou  $|A_k| \geq R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1)$ .

Se  $|A_1| \geq R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k)$  e  $A_1$  induz qualquer grafo completo  $K_{a_2}$  ou  $K_{a_3}$  ou ... ou  $K_{a_k}$  com as cores 2, 3, ... , k, respectivamente, não há mais o que provar. Caso isso não ocorra e  $A_1$  induza um subgrafo completo  $K_{n-1}$ , adicionando  $P$  aos  $n - 1$  vértices, teremos um  $K_{a_1}$ .

A análise dos demais conjuntos é análoga ao que acabamos de fazer, tendo como conclusão a existência dos sub-grafos  $K_{a_i}$ , com  $1 \leq i \leq k$ .

Demonstramos, portanto, que dado

$$n = R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k) + \dots + R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1) - k + 2,$$

teremos garantidas as existências dos subgrafos completos monocromáticos  $K_{a_i}$ , com  $1 \leq i \leq k$ , ou seja, existe o número  $R(a_1, a_2, \dots, a_k)$  tal que

$$R(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k) + R(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k) + \dots + R(a_1, a_2, \dots, a_k - 1) - k + 2$$

□

### 3.3 Estimativas para números de Ramsey

Conforme vimos, o Teorema de Ramsey garante a existência de números da forma  $R(a, b)$ , mas até o momento não foi criado um algoritmo para calculá-los. Para valores pequenos de  $a$  e  $b$ , o método normalmente utilizado é o da exaustão. No caso de  $R(3, 3)$ , por exemplo, verificamos que 4 e 5 são valores insuficientes. Somente após a análise do valor 6 foi verificada a existência de triângulos monocromáticos, nos dando  $R(3, 3) = 6$ . Contudo, para valores pouco maiores de  $a$  e  $b$ , a dificuldade aumenta consideravelmente, tornando inviável uma análise exaustiva. O problema torna-se ainda maior quando deseja-se conhecer números da forma  $R(a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Os métodos a seguir permitem reduzir as possibilidades para um dado número de Ramsey, fornecendo limites superiores e inferiores para os mesmos.

#### 3.3.1 Estimativas Superiores para $R(a, b)$

Os resultados provados anteriormente permitem determinar estimativas superiores para números da forma  $R(a, b)$ .

**Lema 3.3** (Relação de Stifel).  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ , para  $n, p \in \mathbb{N}$  e  $p \leq n$ .

**Teorema 3.3.** Dados  $a, b \geq 2$ , então  $R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$ .

*Demonstração.* Provaremos o resultado por indução. Para  $b = 2$  o resultado é imediato, pois  $R(a, 2) = a \leq \binom{a+2-2}{a-1} = \binom{a}{a-1}$ .

Sabemos que  $R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1)$ . Então:

$$\begin{aligned} R(a, b) &\leq R(a-1, b) + R(a, b-1) \\ &\leq \binom{a-1+b-2}{a-1-1} + \binom{a+b-1-2}{a-1} \\ &= \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1} \\ &= \binom{a+b-2}{a-1}. \end{aligned}$$

□

### 3.3.2 Estimativas Inferiores para $R(a, b)$

Determinar estimativas inferiores para  $R(a, b)$  não é simples. Por exemplo, para mostrar que  $R(3, 3) > 5$ , foi necessário verificar que dado um  $K_4$  ou um  $K_5$ , existe uma bi-coloração para o qual não são formados triângulos monocromáticos. Entretanto, para o caso  $a = b$ , é possível encontrar uma fronteira inferior para  $R(a, a)$ . O método a seguir, desenvolvido pelo matemático Pál Erdős<sup>1</sup>, vale-se da probabilidade para estimar a referida fronteira.

**Teorema 3.4.**  $R(a, a) > 2^{a/2}$ ,  $\forall a > 2$

*Demonstração.* Dado um  $K_n$ , pintaremos cada uma de suas arestas de azul ou vermelho com probabilidade  $1/2$  para cada cor. Tomemos agora o subgrafo completo  $K_a$ . Sabemos que  $K_a$  tem  $\frac{a(a-1)}{2}$  arestas. A probabilidade de que todas tenham sido pintadas da mesma cor é  $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a(a-1)}{2}}$ . Como há exatamente  $\binom{n}{a}$  subgrafos completos  $K_a$  em  $K_n$ , a probabilidade de haver um subgrafo monocromático  $K_a$  é, no máximo, igual a  $2 \cdot \binom{n}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a(a-1)}{2}}$ . Então:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \binom{n}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a(a-1)}{2}} &= 2 \cdot \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a(a-1)}{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-a+1)}{a!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a(a-1)}{2}} \\ &\leq 2 \cdot \frac{n^a}{a!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a(a-1)}{2}} \\ &\leq \frac{2^{(a/2)+1}}{a!}, \text{ sendo } n \leq 2^{a/2}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Pál Erdős (1913–1996), matemático húngaro.

Sabemos que  $2^{\binom{a}{2}+1} \leq a!$  para  $a \geq 4$ , o que nos assegura que há probabilidade positiva de não haver subgrafos  $K_a$  monocromáticos. Para  $a = 3$ , temos  $R(3, 3) = 6 > 2^{3/2}$ , o que encerra a demonstração.  $\square$

**Exemplo 3.4.** Determinar  $R(4, 3)$ .

*Solução.* Sabemos que  $R(4, 3) \leq \binom{4+3-2}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$ . O Exemplo 2.5 nos garante que 9 é uma cota superior para  $R(4, 3)$ . Sabemos que  $R(3, 3) = 6$ , então  $7 \leq R(4, 3) \leq 9$ . Analisando um  $K_8$ , vemos que é possível colorir suas arestas de vermelho ou azul de modo que nenhum  $K_4$  vermelho ou  $K_3$  azul sejam formados. Novamente, podemos considerar os nós como *peçoas* e pintar de vermelho as arestas caso essas pessoas se *conheçam* e pintar de azul caso se *desconheçam*. Observe a figura:

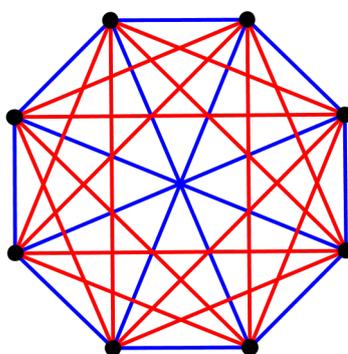


Figura 3.7:  $R(4, 3) > 8$

Temos, portanto, que  $8 < R(4, 3) \leq 9$ . Logo  $R(4, 3) = 9$ .  $\square$

## 3.4 Números de Ramsey conhecidos

O matemático Pál Erdős, responsável por várias contribuições nas áreas de Combinatória e Teoria dos Grafos, comentou sobre a dificuldade em se determinar números de Ramsey:

“Imagine que uma raça de alienígenas desse o seguinte ultimato à humanidade: ‘Ou vocês nos dão o número  $R(5, 5)$  ou sua espécie será destruída.’ Seria melhor, nesse caso, tentar computar  $R(5, 5)$  numa parceria entre matemáticos e computadores. Porém, se os alienígenas exigissem o número  $R(6, 6)$ , seria melhor enfrentar os alienígenas, pois não teríamos como calculá-lo.”

A tabela a seguir mostra os números  $R(a, b)$  já encontrados e as fronteiras daqueles ainda não determinados. Devido à extrema dificuldade computacional para se determinar números de Ramsey com mais de duas cores, até hoje somente um foi determinado:  $R(3, 3, 3) = 17$ .

$a, b$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-42
4	9	18	25	36-41	49-61	58-84	73-115	92-149
5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216	126-316	144-442
6	18	36-41	58-87	102-165	113-298	132-495	169-780	179-1171
7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	217-1031	241-1713	289-2826
8	28	58-84	101-216	132-495	217-1031	282-1870	317-3583	317-6090
9	36	73-115	126-316	169-780	241-1713	317-3583	565-6588	581-12677
10	40-42	92-149	144-442	179-1171	289-2826	317-6090	581-12677	798-23556

Tabela 3.1: números  $R(a, b)$  e fronteiras

## Capítulo 4

# O Teorema de Ramsey para Hipergrafos

Apresentaremos nesse capítulo o Teorema de Ramsey sob uma ótica mais geral. Até o momento, a cada par de pontos atribuímos uma cor. Agora procederemos de modo análogo, porém não atribuiremos cores somente a pares de pontos mas sim a conjuntos de pontos. Para melhor compreensão do texto, é necessário introduzirmos algumas definições, proposições e lemas.

**Definição 4.1.** Um *Hipergrafo*  $H = (N, A)$  é definido como um conjunto  $N$  de nós e  $A$  e *hiperarestas* de modo que  $A \subseteq \{2^N / \emptyset\}$ , ou seja, cada hiperaresta é associada a um subconjunto não-vazio do conjunto de nós. Analogamente, dado um inteiro  $m \geq 2$ , define-se um  $m$ -hipergrafo (ou hipergrafo  $m$ -uniforme) quando cada hiperaresta é associada a um  $m$ -subconjunto do conjunto de nós.

**Proposição 4.1.** Dados  $k$  números inteiros positivos  $a_j$ , com  $1 \leq j \leq k$ , existe um inteiro positivo  $n$  tal que em qualquer  $k$ -coloração de  $n$  pontos haverá  $a_1$  pontos da cor 1 ou  $a_2$  pontos da cor 2 ou ... ou  $a_k$  pontos da cor  $k$ . Definiremos como  $R_1(a_1, a_2, \dots, a_k)$  o menor número de pontos que cumpra essa propriedade.

*Demonstração.* Com efeito, o menor número de pontos que cumpre essa propriedade é  $R_1(a_1, a_2, \dots, a_k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k - k + 1$ . O resultado é uma versão geral do Princípio das Gavetas. Supondo a conclusão do enunciado falsa para  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k - k + 1$ , haveria no máximo  $a_1 - 1$  pontos da cor 1, no máximo  $a_2 - 1$  pontos da cor 2, ..., e no máximo  $a_k - 1$  pontos da cor  $k$ , ou seja, haveria no máximo  $a_1 + a_2 + \dots + a_k - k < n$  pontos no total, o que é absurdo. Por outro lado, existe um exemplo em que a conclusão do enunciado é falsa para  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_k - k$ : podemos ter  $a_1 - 1$  pontos da cor 1,  $a_2 - 1$  pontos da cor 2, ..., e  $a_k - 1$  pontos da cor  $k$ , totalizando  $a_1 + a_2 + \dots + a_k - k$  pontos.  $\square$

**Exemplo 4.1.** Qual é o número mínimo de pessoas que devem comparecer a uma reunião de modo que se tenha ao menos 4 jovens (idade inferior a 21 anos) ou ao menos 3 adultos (idade entre 21 e 59 anos) ou ao menos 2 idosos (idade igual ou superior a 60 anos)?

*Solução.* O problema é equivalente a encontrar  $R_1(4, 3, 2)$ . A resposta é  $4 + 3 + 2 - 3 + 1 = 7$  pessoas.  $\square$

**Lema 4.1.** Se algum  $a_j = 1$ , então  $R(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$ , para  $a_1, a_2, \dots, a_k$  inteiros positivos e  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

*Demonstração.* O referido lema é um caso trivial para números de Ramsey para grafos  $k$ -cores. Pela definição, temos que  $n = R(a_1, a_2, \dots, a_k)$  é o menor número tal que dado um  $K_n$ , teremos sempre um  $K_{a_1}$  monocromático ou um  $K_{a_2}$  monocromático ou ... ou um  $K_{a_k}$  monocromático. Se algum  $a_j = 1$ , então existe um  $K_1$  monocromático, o que encerra a demonstração.  $\square$

**Definição 4.2.** Dados  $m$  e  $k$  inteiros positivos, definiremos como  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$  o menor número de nós de um  $m$ -hipergrafo que contenha  $a_1$  nós determinando um  $m$ -hipergrafo monocromático da cor 1 ou  $a_2$  nós determinando um  $m$ -hipergrafo monocromático da cor 2 ou ... ou  $a_k$  nós determinando um  $m$ -hipergrafo monocromático da cor  $k$ .

**Lema 4.2.** Se algum  $a_j < m$ , então  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

*Demonstração.* O Lema 4.1 trata do caso  $m = 2$ . Para os demais casos, a conclusão é igualmente trivial. Se algum  $a_j = p < m$  então, pela própria definição de  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , teremos um conjunto com  $p$  pontos que não são suficientes para a formação de um  $m$ -hipergrafo. Segue, por vacuidade, que  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .  $\square$

**Definição 4.3.** Dado um conjunto  $A$  e um inteiro positivo  $m$ , definiremos como  $[A]^m$  o conjunto formado pelos subconjuntos de  $A$  com  $m$  elementos, ou seja,  $[A]^m = \{B \subset A ; |B| = m\}$ . Dado um inteiro positivo  $j$ , definiremos  $I_j = \{1, 2, \dots, j\}$ .

O teorema a seguir é a generalização dos números de Ramsey. É importante ressaltar que a definição 4.2 *supõe* a existência de algum  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$  enquanto o teorema abaixo *garante* a existência de qualquer  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

**Teorema 4.1.** Sejam  $m$  e  $k$  inteiros positivos. Dados  $a_1, a_2, \dots, a_k$  inteiros positivos, existe o número  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

*Demonstração.* Provar o teorema equivale a mostrar que, para todo  $n \geq R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$  e para qualquer função  $f : [I_n]^m \rightarrow I_k$ , existem  $j \in I_k$  e  $A \subset I_n$  com  $|A| = a_j$  tal que  $f([A]^m) := \{f(x), x \in [A]^m\} \subseteq \{j\}$ . Em outras palavras, queremos mostrar que para todo  $n$  igual ou maior do que  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k)$  e para todas as funções que associem os  $m$ -subconjuntos de  $n$  às cores  $1, 2, \dots, k$ , existirá  $j, 1 \leq j \leq k$ , e um conjunto  $B$ , com  $a_j$  elementos, tal que  $f(B) = j, \forall B \subset A, |B| = m$ .

Procederemos por indução em  $m$ . O caso  $m = 1$  já foi estudado na proposição 4.1. Para  $m > 1$ , provaremos que:

$$R_m(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq 1 + R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k), R_m(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k), \dots, R_m(a_1, a_2, \dots, a_k - 1)).$$

Se algum  $a_i < m$ , o Lema 4.2 nos dá  $R_m(a_1, a_2, \dots, a_k) = \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Sendo  $n \geq 1 + R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k), R_m(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k), \dots, R_m(a_1, a_2, \dots, a_k - 1))$ , dada uma função  $f : [I_n]^m \rightarrow I_k$ , definiremos a função  $\phi : [I_{n-1}]^{m-1} \rightarrow I_k$  de modo que, dado  $A \subset [I_{n-1}]^{m-1}$ ,  $\phi(A) := f(A \cup \{n\})$ . Dado que  $n - 1 \geq R_{m-1}(R_m(a_1 - 1, a_2, \dots, a_k), R_m(a_1, a_2 - 1, \dots, a_k), \dots, R_m(a_1, a_2, \dots, a_k - 1))$ , existem  $j \in I_k$  e  $B \subset I_{n-1}$  com  $|B| = R_m(a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_k)$  tais que  $f([B]^{m-1}) = \{j\}$ .

Pela definição de  $R_m(a_1, \dots, a_j - 1, \dots, a_k)$ , ou existe algum  $i \in I_k$ , com  $i \neq j$  e com  $A \subset B$ ,  $|A| = a_i$ , tal que  $f([A]^m) \in \{i\}$ , ou existe  $A \subset B$  com  $|A| = a_j - 1$  e  $f([A]^m) = j$ . Desse modo, temos que  $|f([A \cup \{n\}]^m)| = a_j$ , o que nos dá  $f([A \cup \{n\}]^m) = j$ , encerrando a demonstração.  $\square$

Dada a extrema dificuldade em determinar números de Ramsey com  $m > 2$  e  $a_j > m, \forall j$ , até hoje somente um foi determinado:  $R_3(4, 4) = 13$ .

**Exemplo 4.2.** Uma aplicação interessante do caso  $R_4(a, b)$ , aliada a um resultado curioso de geometria, é a seguinte: Dado um inteiro positivo  $n \geq 4$ , existe um inteiro positivo  $m$ , de maneira que dados  $m$  pontos no plano em posição geral, há  $n$  desses pontos que são vértices de um  $n$ -ângono convexo.

*Demonstração.* Para provar a afirmação acima, primeiramente vamos mostrar que, dados 5 pontos no plano em posição geral, há 4 deles que formam um quadrilátero convexo. Com efeito, temos que o fecho convexo<sup>1</sup> para 5 pontos em posição geral no plano tem no mínimo 3 e no máximo 5 pontos. É fácil ver que em cada um desses casos é inevitável a formação de quadriláteros convexos.

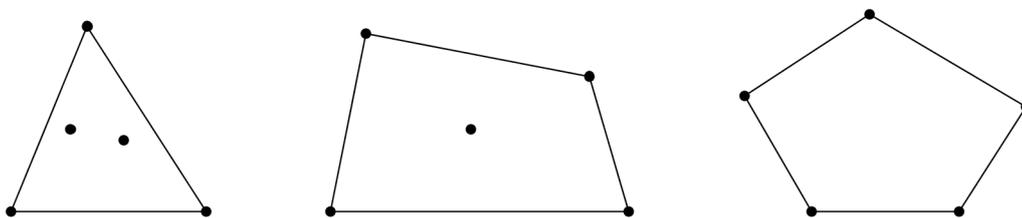


Figura 4.1: Fecho Convexo para 5 pontos

Para contornar a extrema dificuldade de provarmos a afirmação por meios puramente geométricos (como seria para  $n = 1000?$ ), utilizaremos a Teoria de Ramsey. Veremos agora que podemos tomar  $m = f(n) = R_4(n, 5)$ . Procederemos do seguinte modo: Dados  $R_4(n, 5)$  pontos no plano em posição geral, a cada subconjunto de 4 desses pontos associaremos a cor azul se eles formarem um quadrilátero convexo e a cor vermelha caso contrário. Sabemos que dados 5 pontos em posição geral, não é possível que todos os quadriláteros formados sejam vermelhos. Portanto, pela definição de  $R_4(n, 5)$ , existem  $n$  pontos tais que quaisquer 4 deles formam um quadrilátero azul, o que implica que esses  $n$  pontos são vértices de um  $n$ -ângono convexo.  $\square$

<sup>1</sup>Menor número de pontos do plano que determinam um polígono convexo que contenha todos os pontos em questão, seja no seu interior ou na sua borda.



# Capítulo 5

## Experiência em Sala

O experimento descrito a seguir foi realizado com uma turma de 3ª série do ensino médio cujos alunos, concomitantemente, preparam-se para concursos militares. O objetivo foi verificar a capacidade destes alunos em compreender o Teorema de Ramsey, com destaque aos números da forma  $R_1(a_1, a_2, \dots, a_k)$  e  $R(a, b)$ . O experimento ocorreu após o estudo de Combinatória e Probabilidade, tendo a turma apresentado ótimo rendimento nessas disciplinas.

### 5.1 Aula 1

A primeira aula teve como tema central o Princípio das Gavetas de Dirichlet, tema superficialmente já trabalhado com a turma. O propósito foi aprofundar o tópico, trazendo uma apresentação mais formal e mais geral do assunto. Foram apresentadas a *Função Chão* e a *Função Teto*, seguidas pelo teorema 2.2. O referido teorema causou algum desconforto nos alunos, em especial pela referência às funções. Alguns alegaram que o Princípio das Gavetas, por ser “óbvio”, não necessita de demonstração. Originou-se daí um debate, sendo alguns contra a formalização e outros a favor. A conclusão chegada é que é necessário sim uma notação mais formal, dado que isso simplifica a comunicação e generaliza o problema. Outra dificuldade foi a demonstração do referido teorema, dada a pouca experiência dos alunos com demonstrações. Após as apresentações e demonstrações, foram propostos os exercícios do Capítulo 2 como exemplos de como o Princípio das Gavetas pode ser aplicado. As dúvidas mais frequentes foram:

- Quando deve-se usar o Princípio das Gavetas?
- Como ter certeza de que o Princípio das Gavetas funciona sempre?
- O Princípio das Gavetas é uma “espécie” de probabilidade?
- Quando e como deve-se usar uma demonstração por contraposição?

Por fim, concluiu-se que há problemas de combinatória diferentes, que não tratam de contagem, mas da existência de conjuntos que cumprem condições previamente estabelecidas. A primeira aula foi proveitosa e os alunos foram capacitados para o próximo encontro.

## 5.2 Aula 2

O princípio da segunda aula foi sobre Grafos. As notações e exemplos do Capítulo 2 foram introduzidos, excetuando-se as matrizes de incidência e adjacência. A ideia de um *grafo completo* foi bem recebida pelos alunos, dada a correspondência do assunto com o estudo das diagonais de um polígono convexo. Em seguida, foi proposto o exercício *Amigos e Estranhos*, com nível progressivo de dificuldade. Os níveis propostos foram:

Nível 1: Dois amigos ou dois estranhos.

Nível 2: Três amigos ou dois estranhos.

Nível 3: Três amigos ou três estranhos.

Para a resolução dos exercícios foi proposta a modelagem por meio de grafos. Naturalmente, os dois primeiros itens foram facilmente resolvidos. Contudo, os alunos apresentaram extrema dificuldade para resolver o último item. Antes da resolução, foi apresentado o Teorema de Ramsey para grafos bi-cores, seguida da respectiva demonstração. O método indutivo utilizado na demonstração gerou alguma dificuldade, sendo esta superada após uma pausa, onde novamente foram explorados os exemplos iniciais, o caso-base  $R(2, 2)$ , o caso  $R(a, 2)$  e a igualdade  $R(a, b) = R(b, a)$ .

Seguindo os passos apresentados no Capítulo 3, o resultado  $R(3, 3) = 6$  finalmente foi provado. Logo após houve uma breve apresentação sobre os números da forma  $R(a_1, a_2, \dots, a_k)$  e sobre o número  $R_1(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , sendo nada mais que uma reformulação do Princípio das Gavetas. As dúvidas mais frequentes foram:

- Pode-se dizer que  $R(a, b) = a + b$ ?
- Por que um  $K_n$  azul significa “pessoas que se conhecem mutuamente”?
- Existe uma “fórmula geral” para esse problema?
- Qual outra contextualização além de *Amigos e Estranhos* pode ser feita para  $R(a, b)$ ?
- E se houver mais cores?
- A indução foi uma demonstração “honestá”?
- Por que é tão difícil determinar números de Ramsey?

Os momentos finais da aula foram pautados por um debate sobre os números de Ramsey, com destaque à grande dificuldade em determiná-los. A tabela no final do Capítulo 3 foi fixada no mural da turma e as fórmulas sobre os limites superiores e inferiores para números da forma  $R(a, b)$  foi distribuída para uma análise mais aprofundada do assunto.

## 5.3 Conclusão

O experimento com os alunos mostrou-se proveitoso, tendo como destaque a apresentação de um tema inédito que pode ser abordado de modo elementar. Foi mostrado que o Princípio das Gavetas é uma ferramenta extremamente útil, tendo em vista os vários resultados, em diversos campos da matemática, que só foram possíveis devido à sua aplicação. Os Grafos e o Teorema de Ramsey, temas praticamente desconhecidos pelos alunos do ensino médio, mostraram-se como tópicos relativamente simples de serem abordados, ao menos de forma introdutória. Isso não só despertou o interesse do aluno em saber mais, como também ampliou sua visão de como áreas aparentemente desconexas da matemática podem se relacionar.



# Referências Bibliográficas

- [1] GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science, 1994.
- [2] BARBEAU, Edward J., KLAMKIN, Murray S., MOSER, Willian O. J. Five Hundred Mathematical Challenges. The Mathematical Association of America, 1995.
- [3] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araújo. O Teorema de Ramsey. Revista Eureka Nº 6. SBM, Rio de Janeiro, 1999.
- [4] MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade 9ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [5] TAYLOR, Gregory E. W. Ramsey Theory, 2006.
- [6] SANTOS, José Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARU, Idani T.C. Introdução à Análise Combinatória 4ª Edição. Editora Ciência Moderna, 2008.
- [7] BUSCHUR, Kristina. Introduction to Ramsey Theory, 2011.
- [8] RADZISZOWSKI, Stanislaw P. Small Ramsey Numbers. Rochester Institute of Technology. NY, 2014.
- [9] LEADER, Imre. Friends and Strangers. Revista digital Plus Magazine, visitada em maio de 2014.