IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática

O Teorema de Ramsey e outros resultados de combinatória que não são de contagem

Aluno: Gustavo Adolfo Martins Jotta Soares

Orientador: Carlos Gustavo Moreira (Gugu)

Rio de Janeiro
2014

Sumário

Capítulo 1

Introdução

"A desordem completa é impossível."(T.S. Motzkin, falando sobre a Teoria de Ramsey)

Em 1928, o matemático inglês Frank Plumpton Ramsey (foto abaixo) publicou um artigo intitulado *"On a problem of formal logic"*, cuja tradução é "Em um problema de Lógica formal", em que ele provou o que é conhecido hoje como **Teorema de Ramsey**. A partir deste artigo, construiu-se a **Teoria de Ramsey**, cujos ramos alcançaram a Álgebra, Análise Combinatória, Teoria dos Conjuntos, Lógica, Análise e Geometria.

Esta teoria tem desempenhado um papel importante em uma infinidade de desenvolvimentos matemáticos ao longo do último século. Seu ponto principal é mostrar que é sempre possível encontrar um grau de ordem em um conjunto desordenado.

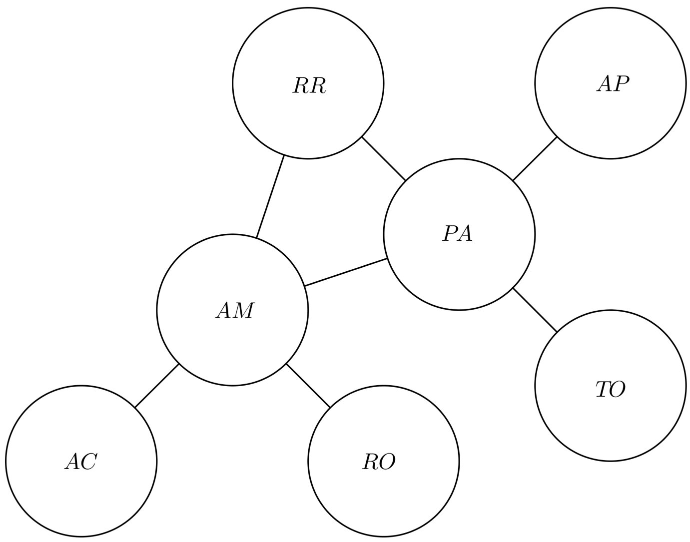
Neste trabalho, estudaremos **Teorema de Ramsey para grafos** que tem uma relação direta com o **Princípio das Gavetas de Dirichlet**. Este teorema permite encontrar soluções interessantes para alguns problemas que iremos abordar ao longo do trabalho.

Capítulo 2

Noções sobre Grafos

Um *grafo* é uma ferramenta visual, matemática e algorítmica que é muito útil para resolver um grande número de problemas. Mais especificamente, um grafo ilustra as ligações ou as relações entre objetos.

Por exemplo, nós podemos usar um grafo para mostrar os sete estados da região Norte do Brasil, e quais deles fazem fronteira entre si.



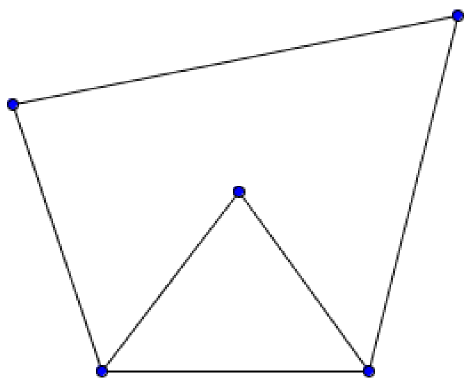
Sempre que temos um conjunto, e também temos relações entre alguns pares de itens no conjunto, podemos representar o conjunto e suas relações como um grafo. Desenhar um grafo geralmente é a melhor maneira para nós imaginarmos e trabalharmos com os relacionamentos do que simplesmente enumerá-las. Por exemplo, o que é mais fácil: trabalhar com o grafo dos estados da região Norte acima, ou a lista de estados que fazem fronteira mostrados abaixo?

$$\{(AP, PA); (PA, RR); (PA, TO); (PA, AM); (AM, RO); (AM, AC)\}$$

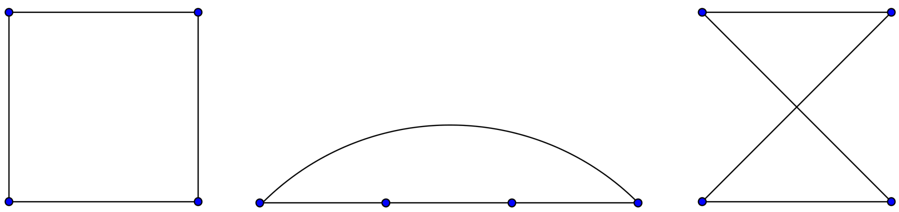
O grafo nos faz enxergar relações complexas muito mais facilmente do que um simples conjunto de pares. Para continuar com o nosso exemplo, podemos ver instantaneamente pelo grafo que para ir do Amapá (AP) para o Acre (AC), é preciso passar pelo Pará (PA) e pelo Amazonas (AM), e que não há nenhuma outra rota que passe por menos estados. Obtendo esta informação a partir da lista de estados que fazem fronteira com o outro é muito mais difícil, mesmo que a lista contenha as mesmas informações.

Embora a teoria de grafos seja vasta o suficiente para encher um livro inteiro (e muitos livros têm sido escritos), vamos cobrir apenas o básico da teoria dos grafos. O objetivo é obtermos nova ferramenta que nos auxilie na resolução de problemas. Muitos problemas podem ser resolvidos sem ela, mas como podemos ver no nosso "mapa" da Região Norte acima, grafos geralmente fornecem uma ferramenta conveniente para organizar informações.

Definição 2.1. Um *grafo* $G = (V, A)$ é constituído por um conjunto (finito e não-vazio) V de *vértices* e um conjunto A de *arestas*. Cada *aresta* é um *par não-ordenado de vértices distintos* (conjunto de cardinalidade 2). Se uma aresta corresponde ao par de vértices $\{i, j\}$, dizemos que i e j são as *extremidades* da aresta.



O que define um grafo é o número de vértices que ele tem e quais arestas estão presentes. A maneira que dispomos as arestas e vértices de um diagrama do grafo não é importante. Em especial, ao desenhar um grafo, podemos colocá-los onde for conveniente. Assim, por exemplo, os três diagramas seguintes representam todos o mesmo grafo.

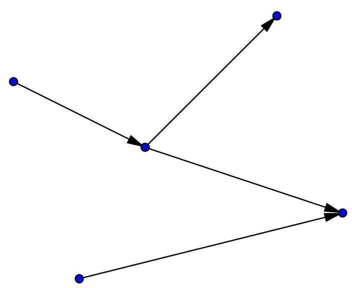


É importante observar que ao desenhar um grafo, não importa se arestas parecem se cruzar na nossa figura (como no exemplo à direita da figura acima). Nós só consideramos arestas para conectar pares de vértices, de modo que os "pontos de interseção"de arestas (exceto vértices) são irrelevantes.

O número de vértices em um grafo é chamado de **ordem** do grafo. Geralmente, trabalha-se com grafos de um número finito de vértices, então o termo "ordem"faz sentido, neste caso. Porém, há uma teoria mais geral para grafos infinitos. O número de arestas conectados a um dado vértice é chamado de grau desse vértice. O grau de um vértice V é denotado por gr(V).

Geralmente, só é permitido uma aresta entre um par de vértices. Porém, existem alguns tipos de grafos que quebram essa regra. Se em um grafo é permitido duas ou mais arestas associadas a um mesmo par de vértices, este é chamado de **multigrafo**.

Em alguns momentos, pensaremos nas arestas como "um caminho", significando que cada aresta tem um vértice inicial e um vértice final. Neste caso, chamamos o grafo de **grafo direcionado**, e traçamos segmentos orientados nas arestas para indicar o caminho que as arestas apontam.



Podemos usar este tipo de grafo para representar as relações entre os pares ordenados de elementos de um conjunto. Por exemplo, se temos um conjunto de equipes em um campeonato de futebol, podemos desenhar um grafo em que cada equipe é um vértice, e uma aresta direcionada da equipe A à equipe B representa A derrotando B em uma partida. Em grafos direcionados é permitido ter até 2 arestas entre qualquer par de vértices, ambas em sentidos opostos.

Uma das mais básicas e usuais propriedades de grafos é a relação entre o número de vértices e o número de arestas. A relação chave, claro, é a de que cada aresta conecta apenas dois vértices.

Vejamos alguns problemas cujas soluções podem ser modeladas através de grafos.

Problema 1. A ilha de Grafolândia tem 10 cidades e uma rede de estradas ligando-as. Essas estradas só se cruzam nas cidades.

(a) Se cada cidade tem quatro estradas que levam para fora dela, então quantas estradas existem?

(b) Suponha que seis das cidades possuem seis estradas que levam para fora delas, e as outras quatro tenham cinco estradas. Quantas estradas ao total existem?

(c) É possível que cinco dessas cidades tenham 5 estradas e as outras cinco tenham quatro?

***Resolução*:**

Para todos os itens, nós vamos pensar em Grafolandia como um grafo, onde as cidades são vértices e as estradas são as arestas. Geralmente, quando nos deparamos com um problema em que há um número finito de objetos que estão conectados em pares de alguma maneira, a ideia de representar o problema através de grafos é bastante natural. Em particular, a palavra "rede"no problema sugere fortemente o uso de grafos.

(a) "Cada cidade tem quatro estradas que levam para fora dela"significa que cada um dos 10 vértices do nosso grafo tem grau 4, ou seja, cada vértice possui 4 arestas conectados a ele. Como isso vale para cada um dos 10 vértices, isso sugere que tenhamos $10 \times 4 = 40$ arestas neste grafo. Porém, desta forma, estamos contando cada aresta duas vezes. Então, o total de arestas é igual a $\dfrac{40}{2} = 20$.
Este resultado pode ser facilmente generalizado da seguinte forma:

Propriedade 1. *Se um grafo tem n vértices e cada vértice possui grau g, então, neste grafo, há $\dfrac{n \times g}{2}$ arestas. Ou ainda, se a soma dos graus de cada vértice é igual a s, então o grafo possui $\dfrac{s}{2}$ arestas.*

(b) Este problema é análogo ao item (a). Os vértices de grau 6 contribuem com $6 \times 6 = 36$ arestas e os quatro vértices de grau 5 contribuem com $4 \times 5 = 20$ arestas. Então, nós temos inicialmente $36 + 20 = 56$ arestas, porém estamos contando cada uma delas duas vezes. Logo, o total de arestas neste grafo é igual $\dfrac{56}{2} = 28$.

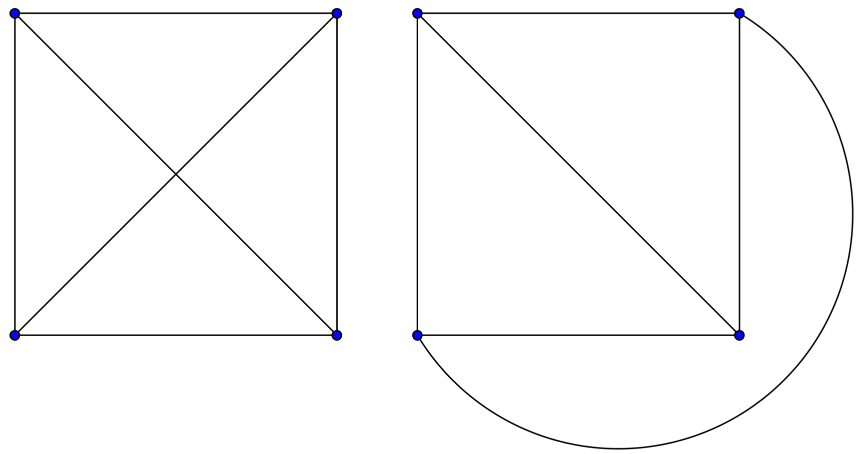
(c) Se 5 vértices têm grau 5 e os outros 5 vértices têm grau 4, então contaríamos inicialmente $(5 \times 5) + (4 \times 5) = 25 + 20 = 45$ arestas. Mas, assim como nos itens anteriores, essa contagem nos dá o dobro de arestas e, portanto, o número de arestas seria $\frac{45}{2} = 22,5$. Porém, o número de arestas deve ser inteiro, então este grafo não existe.

Problema 2. Suponha que um grafo tem n vértices e cada par de vértices distintos é conectado por uma aresta. Quantas arestas há nesse grafo?

***Resolução*:**

Se um grafo com n vértices possui arestas que ligam qualquer par de vértices distintos, então cada vértice tem grau $n - 1$. Portanto, há um total de $\dfrac{n(n-1)}{2}$, usando o mesmo raciocínio do exercício anterior.

Um grafo em que há uma aresta conectando cada par de vértices distintos é chamado de grafo **completo**. Um grafo completo com n vértices é geralmente denotado por K_n. Abaixo, temos duas representações de K_4:



Problema 3. A linha aérea Aleatória voa para 21 cidades e, de cada cidade, pretende viajar para outras 7 sem escalas, mutuamente. Ou seja, se um avião voa sem escalas de A para B, então ele também voa sem escalas de B para A. Mostre que este plano de voo é impossível.

Resolução. Como esperado, vamos modelar este problema utilizando um grafo, onde as cidades serão vértices e as rotas sem escala serão arestas. Então, temos um grafo com 21 vértices, em que cada um deles tem grau 7. Mas isto significa que há $\dfrac{21 \times 7}{2} = 73,5$ arestas, o que é impossível uma vez que o número de arestas deve ser um número inteiro. ■

Enunciaremos agora um teorema que nos auxiliará nos problemas seguintes.

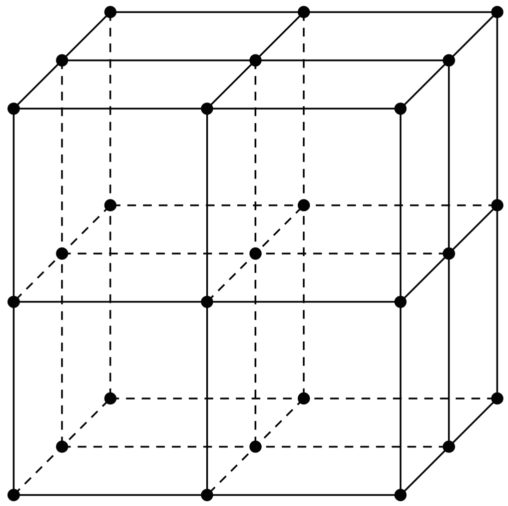
Teorema 2.1 (Princípio das gavetas de Dirichlet)**.** *Se n objetos forem colocados em no máximo $n-1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

Demonstração. Se cada uma das gavetas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos nela colocados será, no máximo, $n-1$, o que é uma contradição. ■

Exemplo 2.1. Numa festa com mais de 12 crianças, existirão, necessariamente, pelo menos duas que nasceram no mesmo mês. Basta olharmos para as crianças como objetos e para os meses do ano como gavetas.

Exemplo 2.2. Consideremos agora um concurso cuja prova possui 10 questões de múltipla escolha com cinco alternativas cada. Como a prova pode ser preenchida de $5 \times 5 \times 5 \times \ldots \times 5 = 5^{10} = 9.765.625$ modos, para que necessariamente pelo menos dois candidatos tenham dado exatamente as mesmas respostas para todas as questões, o número de candidatos deverá ser de, pelo menos, 9.765.626. Basta olharmos os candidatos como objetos e para as possíveis sequências de respostas como gavetas.

Exemplo 2.3. Se selecionarmos 9 pontos quaisquer de um um cubo de aresta 2, existem pelo menos dois deles cuja distância entre eles é menor do que ou igual a $\sqrt{3}$. Neste exemplo, dividamos este cubo em oito cubos menores seccionando cada aresta ao meio, conforme ilustrado abaixo.



Desta forma, cada um dos cubos menores terá diagonal igual a $\sqrt{3}$, que é a maior distância entre dois pontos de um cubo. Como são nove pontos, pelo menos dois deles pertencerão a um mesmo cubo menor.

O princípio das gavetas pode ser, de maneira mais geral, enunciado como:

Teorema 2.2. *Se n gavetas são ocupadas por $nk+1$ objetos, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k+1$ objetos.*

Demonstração. De maneira análoga à demonstração anterior, se cada gaveta contiver no máximo k, como são n gavetas, no máximo nk terão sido distribuídos, o que é uma contradição. □

Exemplo 2.4. Se uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 bolas azuis e 6 bolas amarelas, o menor número de bolas que devem ser retiradas (sem olhar) para que se possa ter certeza de que se tenha tirado pelo menos 3 de uma mesma cor é igual a 9. Para chegar a este resultado, basta considerar como gavetas as cores ($n = 4$). Como queremos obter pelo menos 3 bolas de uma mesma cor, temos então $k = 2$. Portanto, pelo teorema 2.2, conclui-se que $4 \times 2 + 1 = 9$.

Além dessas duas formas, ainda podemos enunciar o princípio das gavetas da seguinte maneira:

Teorema 2.3. *Se colocarmos k objetos em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos* $\left\lfloor \frac{(k-1)}{n} \right\rfloor + 1$.

(Obs.: A notação $\lfloor x \rfloor$ é utilizada para designar o maior inteiro menor do que ou igual a x)

Demonstração. Como

$$\left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor \leq \frac{k-1}{n},$$

se cada gaveta contiver no máximo $\left\lfloor \frac{(k-1)}{n} \right\rfloor$ objetos, teremos no máximo $n\left\lfloor \frac{(k-1)}{n} \right\rfloor$ objetos no total. Mas

$$n\left\lfloor \frac{(k-1)}{n} \right\rfloor \leq n\left(\frac{k-1}{n}\right) = k-1 < k,$$

o que é uma contradição. ■

Exemplo 2.5. Em qualquer grupo de 20 pessoas, pelo menos 3 nasceram no mesmo dia da semana. De fato, pelo teorema 2.3., tomamos $n = 7$ e $k = 20$. Logo, como

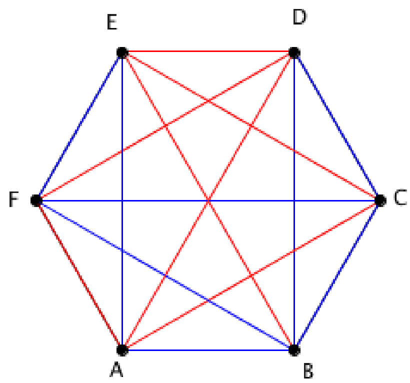
$$\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{19}{7} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3,$$

pelo menos 3 terão nascido no mesmo dia da semana.

Exemplo 2.6. Em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo. Com efeito, colocando cada pessoa (objeto) na gaveta do seu signo, temos $k = 40$ e $n = 12$. Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left\lfloor \frac{40-1}{12} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{39}{7} \right\rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$

Problema 4. Em uma reunião, há seis pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (Admita que, se a conhece b, então b conhece a)

Resolução. Usaremos o grafo abaixo para ilustrar a situação. Cada pessoa é representada por um vértice do hexágono. Quando duas pessoas se conhecem, ligamos os vértices correspondentes por uma aresta azul; se não, usamos uma aresta vermelha. O que devemos mostrar é que, nesta figura, necessariamente existe um triângulo formado por linhas azuis ou um triângulo formado por linhas vermelhas.



Consideremos as arestas que incidem em um vértice qualquer V. Como são cinco, há pelo menos 3 delas que são azuis ou pelo menos 3 delas que são vermelhas. Admitamos, então, os seguintes casos:

- Três arestas azuis e duas vermelhas:
  Denotemos por V_1, V_2 e V_3 vértices ligados a V por arestas azuis. Se alguma das arestas $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}$ ou $\overline{V_3V_4}$ for azul, esta aresta, juntamente com as que ligam seus extremos a V, formam um triângulo azul. Por outro lado, se nenhuma delas é azul, elas formam um triângulo vermelho.
- Três arestas vermelhas e duas azuis:
  A análise deste caso é análoga à do anterior, trocando os papéis das arestas azuis e vermelhas.

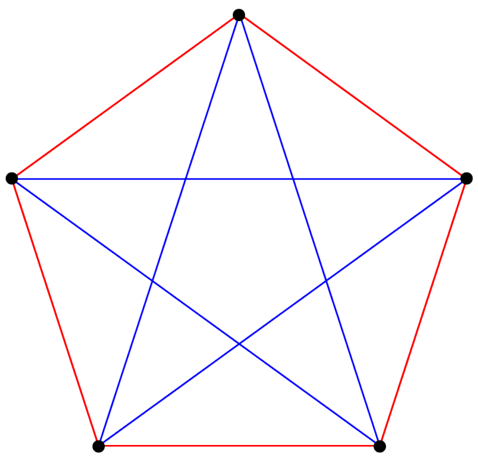
Portanto, em uma reunião de seis pessoas, necessariamente existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente. ■

Será que com cinco pessoas, isso também é possível?

Nós provamos acima que, com seis pontos ou mais, sempre haverá um triângulo monocromático (com todos os lados de uma mesma cor). Em outras palavras, com seis pessoas ou mais, necessariamente 3 se conhecem mutuamente ou 3 não se conhecem mutuamente.

Isso sugere a seguinte questão: Quantas pessoas, no mínimo, são necessárias para que tenhamos certeza de que 3 se conhecem mutuamente ou de que 3 não se conhecem mutuamente?

Observe o grafo abaixo:



Isso mostra que com cinco vértices, um grafo não possui um triângulo monocromático. Ou ainda, com cinco pessoas não necessariamente 3 se conhecem mutuamente ou 3 não se conhecem mutuamente.

Com este resultado juntamente com o resultado anterior, concluímos que o número mínimo de pessoas necessárias para que se tenha 3 delas conhecendo-se mutuamente ou 3 delas não conhecendo-se mutuamente é 6.

Problema 5. (USAMO 1989) Os 20 membros de um clube de tênis agendaram 14 partidas entre eles (cada partida é entre dois jogadores apenas), com cada jogador participando de pelo menos uma partida. Mostre que podemos encontrar 6 partidas envolvendo 12 jogadores distintos.

Resolução. Vamos representar a agenda com um grafo de 20 vértices (jogadores) e 14 arestas (partidas). Segundo o problema, o grau de cada vértice é pelo menos 1. Isto significa que não há nenhuma vértice isolado, ou seja, que não esteja conectado com o resto do grafo. Nosso objetivo é encontrar 6 arestas que não tenham vértices em comum.

Podemos notar que 14 arestas não parecem ser arestas suficientes para um grafo de 20 vértices. De fato, 14 arestas significa que a soma dos graus dos vértices é apenas 28 (uma vez que cada aresta é contada duas vezes). Além disso, isto significa que no máximo 8 vértices têm grau maior do que 1; reciprocamente, no mínimo 12 vértices têm grau exatamente igual a 1. Podemos então dizer que há 8 graus "extras", uma vez que cada um dos 20 vértices deve ter grau no mínimo 1.

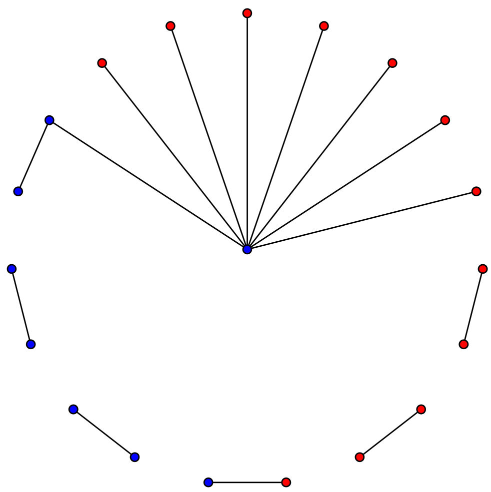
Vamos supor que nós removamos qualquer aresta de qualquer vértice que tenha grau maior do que 1. Repetimos este processo até que cada vértice tenha grau menor do que ou igual a 1. Como havia no início no máximo 8 graus "extras", nós precisamos remover no máximo 8 arestas, nos restando um grafo com 6 arestas e em que cada vértice tem grau no máximo 1. Desta forma, o problema está resolvido, uma vez que ao selecionar qualquer uma das 6 arestas restantes, nenhum par delas pode ter um vértice em comum, já que cada vértice não tem grau maior do que 1. Isto significa que estas 6 arestas representam partidas com nenhum jogador em comum. Em outras palavras, eles envolvem 12 jogadores distintos, dois para cada partida.

∎

Observação: Uma outra maneira que poderia se pensar nesse problema é a seguinte:

Como há pelo menos 12 vértices com grau exatamente igual a 1, então há $\frac{12}{2} = 6$ arestas conectando eles. Ao escolher as 6 arestas conectando estes vértices, elas não podem ter nenhum vértice em comum. Caso contrário, um desses vértices teria grau maior do que ou igual a 2.

Infelizmente, este raciocínio está errado porque não há como saber se estes 12 vértices estão necessariamente conectados um ao outro. Um contra-exemplo está no diagrama abaixo.



Note que todos os vértices exceto 2 têm grau 1. Se nós selecionarmos ”de maneira errada”12 destes vértices, como os indicados em vermelho, então nós não temos os 6 vértices de que precisamos, assim como os vértices em vermelho não estão conectados em pares um ao outro.

Problema 6. Voltemos à linha aérea Aleatória visto no problema 6. Desta vez, ela prestará serviço para apenas 10 aeroportos. Quantos voos, no mínimo, devem ter entre quaisquer 5 aeroportos tal que haja pelo menos dois pares de aeroportos com voos sem escala?

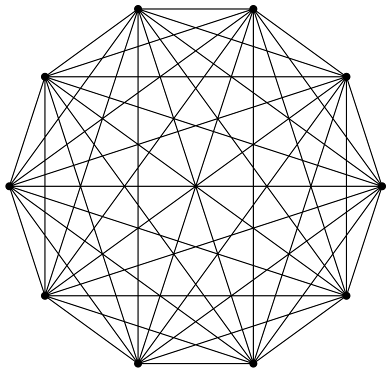
***Resolução*:**

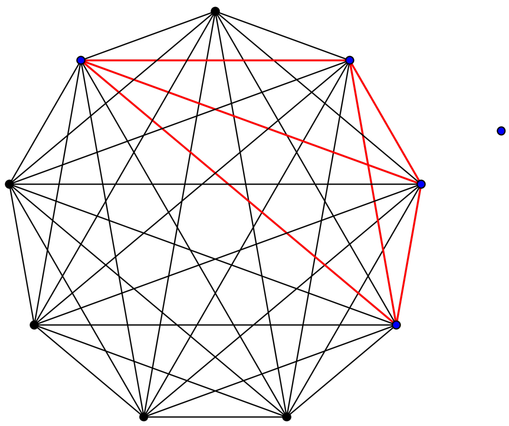
Começaremos com um grafo de 10 vértices. Queremos preenche-lo com o menor número de arestas possível tal que para qualquer subconjunto de 5 vértices, este subgrafo possua pelo menos duas arestas.
Se considerarmos o grafo K_{10}, ele certamente satisfaz o problema. Porém, este grafo possui $C_{10}^2 = 45$ arestas, que é o máximo de arestas que um grafo de 10 vértices pode ter.

Podemos remover muitas de arestas, desconsiderando apenas um dos vértices. Neste caso, ficamos com um grafo K_9 e um vértice desconectado de todos os outros. Se escolhermos quaisquer 5 vértices, pelo menos 4 deles estão no K_9, então nós teremos pelo menos $C_4^2 = 6$ arestas entre eles, dentre um total de $C_9^2 = 36$. Uma possível situação está ilustrada abaixo. Os vértices selecionados são os azuis e as arestas que os conectam são as vermelhas.

Se em vez de ter desconectado um, tivéssemos desconectado dois vértices, ficaríamos com um grafo K_8 e dois vértices livres. Agora, se escolhermos quaisquer 5 vértices deste grafo, pelo menos 3 estão no K_8, o que implica em pelo menos $C_2^3 = 3$ arestas entre eles, dentre um total de $C_8^2 = 28$. Abaixo, temos um dos possíveis grafos.

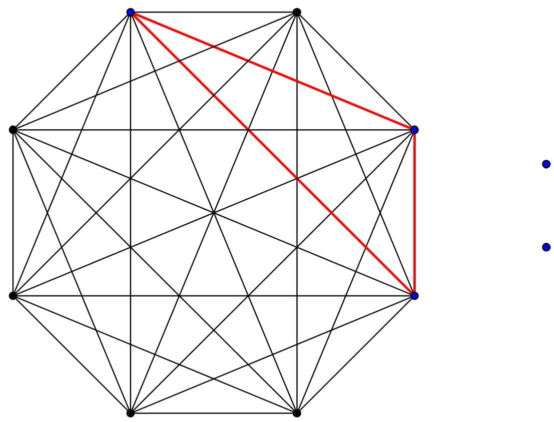
Será que podemos diminuir ainda mais o número de vértices?

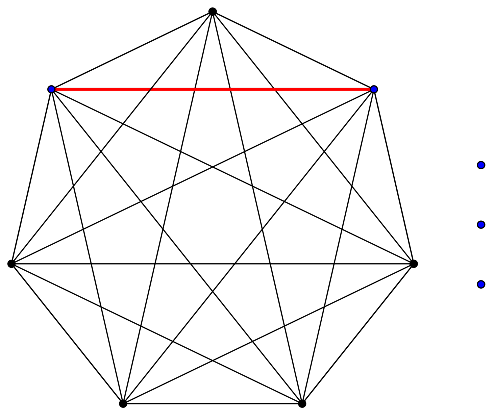




Seguindo a linha de raciocínio, desconectando três vértices, nos deparamos com um problema. Neste caso, ao escolher 5 vértices quaisquer do novo grafo constituído de um subgrafo K_7 mais três vértices desconectados, não conseguimos garantir pelo menos duas arestas. Para isso, basta que escolhamos dois vértices do K_7 e os três desconectados como podemos observar abaixo.

Entretanto, se conectarmos dois dos três vértices desconectados ao K_7 com uma aresta, passamos a ter um grafo constituído de dois subgrafos completos, um K_7 e um K_2 mais um vértice desconectado. Nesta situação, ao escolher cinco vértices quaisquer, das duas uma: pelo menos 3 vértices pertencem ao K_7, que estão conectados por três arestas entre eles; ou dois desses vértices pertencem ao K_7, que estão ligados por uma aresta entre eles, e três vértices não pertencentes ao K_7, onde, por construção, há uma aresta conectando dois deles. De uma maneira ou de outra, ao escolher 5 vértices quaisquer, conseguimos garantir a existência de duas arestas. Este grafo possui $C_7^2 + 1 = 22$ arestas.

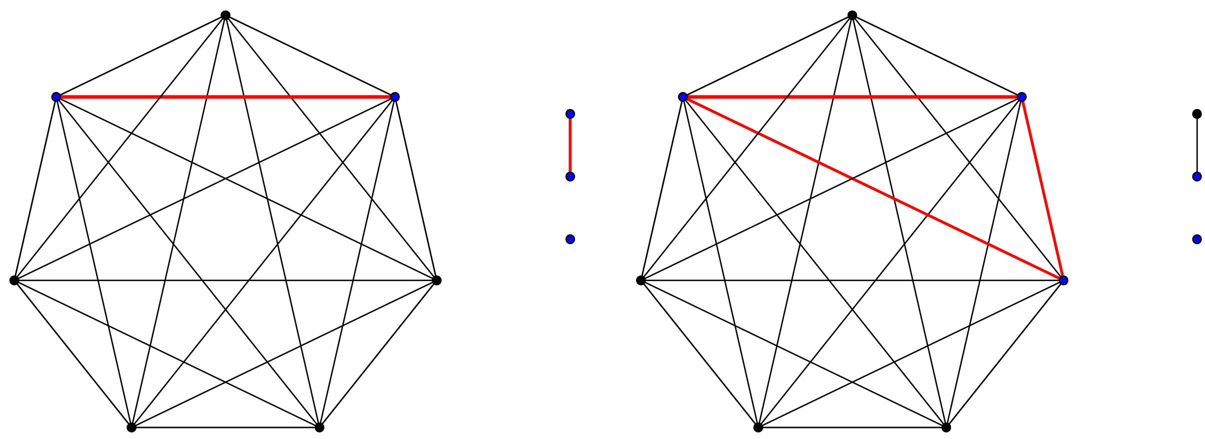


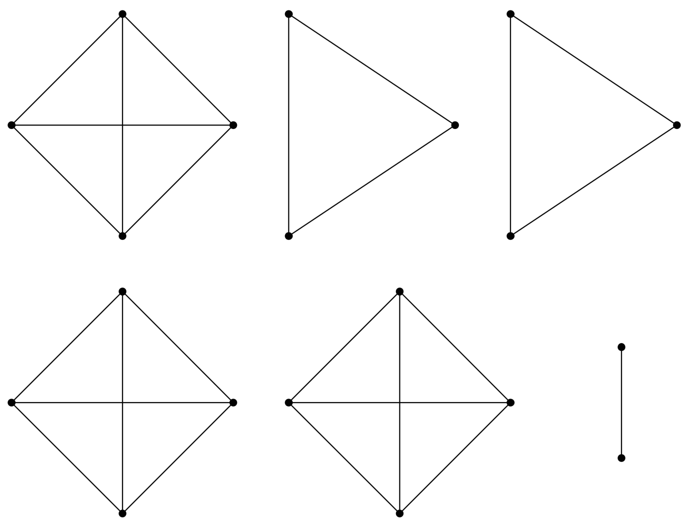


Esta última situação nos dá uma ideia de como melhorar ainda mais este resultado. Se dividirmos os 10 vértices originais em três grupos e traçarmos todas as arestas possíveis em cada grupo, então, pelo princípio das gavetas, ou vamos ter 3 vértices em um grupo e, assim, todas as arestas conectando cada par distinto de vértices entre eles, ou teremos 2 vértices em cada um dos dois grupos e, assim, uma aresta entre cada par de vértices dentro do grupo.

Abaixo, temos duas possíveis configurações de divisão dos 10 vértices. Uma em grupos de 4-3-3 e outra em grupos de 4-4-2.

Entre os dois, o que possui menos arestas é o grafo 4-3-3, onde o total são $6 + 3 + 3 = 12$. Este é o menor número de arestas que conseguimos encontrar até agora. E, de fato, esta é a resposta do problema. Para provarmos isso, iremos proceder da seguinte forma: desconectaremos, vértice a vértice, aqueles que têm maior grau até que nos restem apenas cinco vértices. Se ao final, neste subconjunto de cinco vértices, tivermos apenas uma aresta, a demonstração estará concluída.

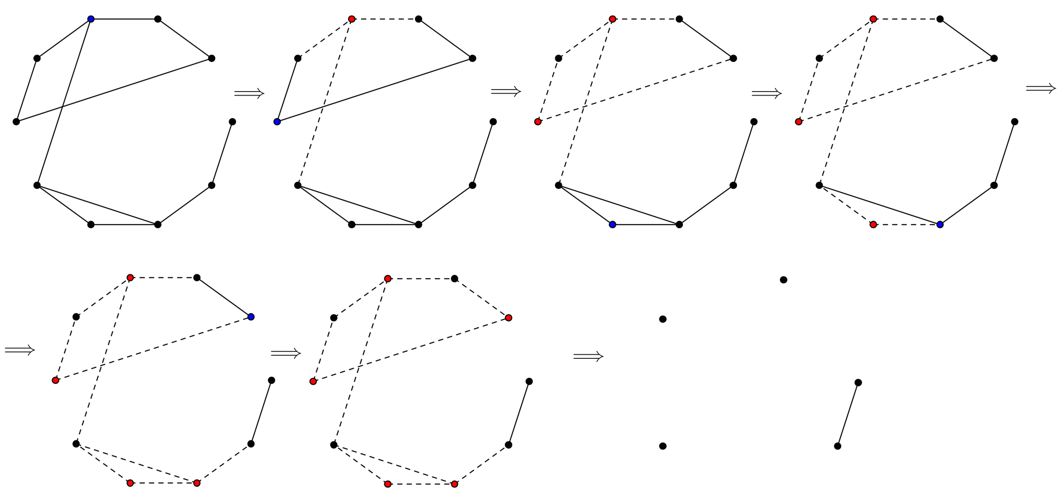




Consideremos um grafo de 10 vértices e 11 arestas. Queremos provar que existe um subconjunto de 5 desses vértices com no máximo 1 aresta. Se ao final, nestes cinco vértices, tivermos apenas uma aresta, teremos provado. Se o total de arestas é 11, então a soma dos graus dos vértices é 22. Logo, pelo princípio das gavetas, existe pelo menos um vértice com grau maior do que ou igual a 3. Consideremos o caso extremo em que este vértice é único. Então, pelo algoritmo que definimos no parágrafo anterior, desconectaremos este vértice e junto com ele, suas três arestas. Continuando este processo, temos que:

- Sobraram 9 vértices e 8 arestas. Analogamente, pelo menos um desses vértices tem grau 2. Ao removê-lo, restarão 8 vértices e 6 arestas;
- Removendo mais um vértice de grau 2, restam 7 vértices e 4 arestas;
- Retirando, novamente, mais um vértice de grau 2, restam 6 vértices e 2 arestas;
- Por fim, basta retirar algum dos vértices que tem grau 1. Dessa forma, restam apenas 5 vértices e uma aresta.

Podemos observar o procedimento descrito acima na figura abaixo.

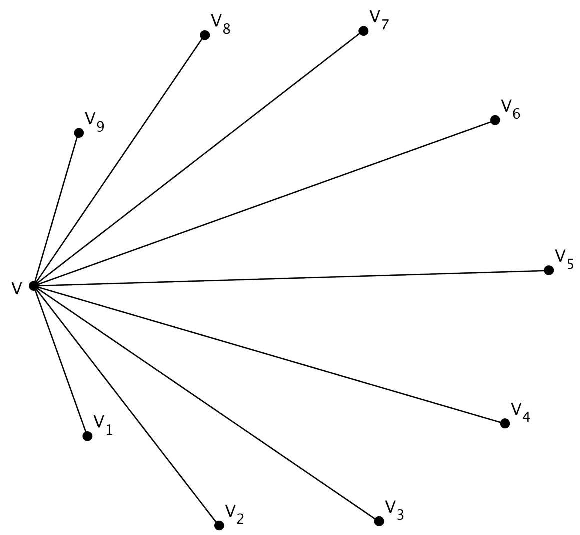


Em suma, conseguimos exibir um grafo com 10 vértices e 12 arestas tal que para quaisquer subconjunto de 5 vértices, há pelo menos 2 arestas e, além disso, provamos que este grafo com 11 arestas ou menos, terá necessariamente um subconjunto de 5 vértices com no máximo 1 aresta. Portanto, o menor número de arestas que um grafo de 10 vértices deve ter para que qualquer subconjunto de 5 vértices tenha pelo menos duas arestas é 12.

Problema 7. Mostre que em toda reunião com 10 pessoas existem 3 que se conhecem mutuamente ou 4 que se desconhecem mutuamente. Mostre que, na realidade, o resultado vale mesmo que na reunião só existam 9 pessoas.

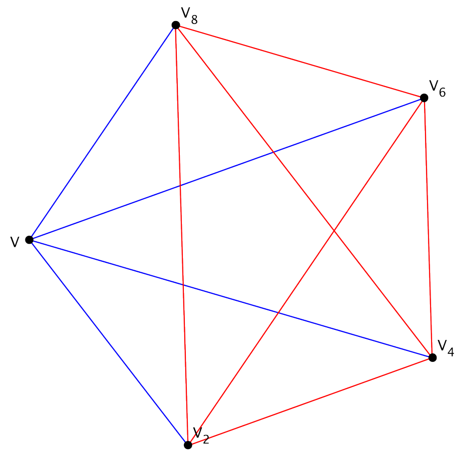
(a) Uma reunião com 10 pessoas:

Resolução. Pensemos de maneira análoga ao **problema 4**.
Consideremos as arestas que incidem em um vértice qualquer V.



Neste caso, tem que haver pelo menos 6 arestas vermelhas, ou pelo menos, 4 azuis (caso contrário, não haverá 9 ao todo!). Ou seja, destacando-se uma dessas pessoas, ou ela desconhece 6 outras ou ela conhece 4 outras. Analisemos essas duas possibilidades:

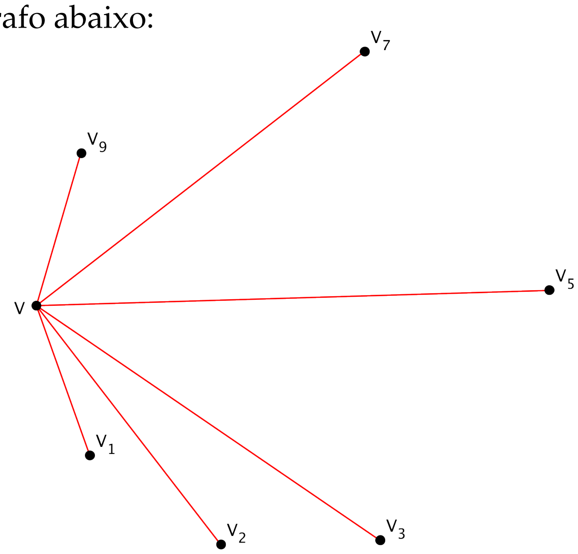
- 4 arestas azuis:
  Observe o grafo abaixo:



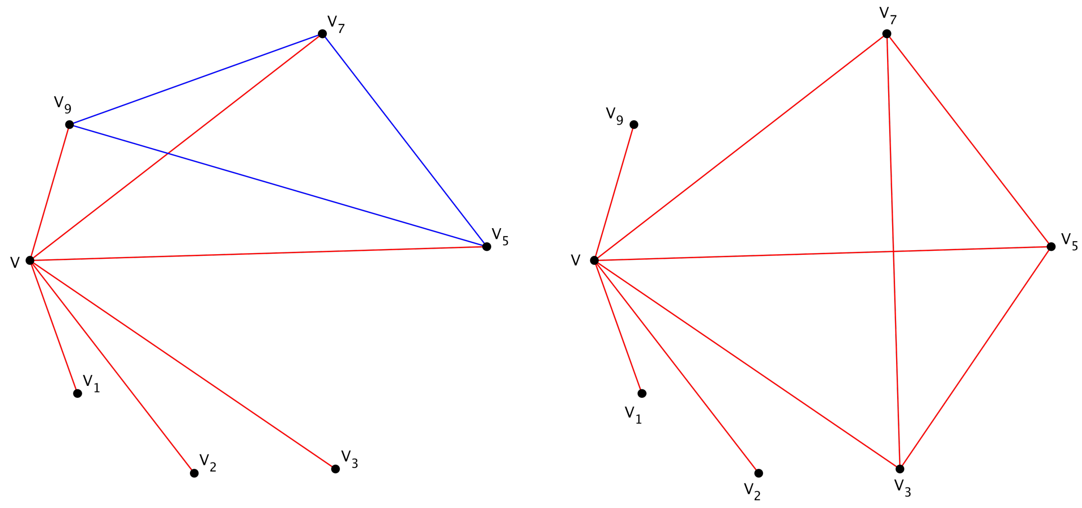
  Denotemos por V_2, V_4, V_6 e V_8 vértices ligados a V por arestas azuis. Se alguma das arestas $\overline{V_2V_4}$, $\overline{V_2V_6}$, $\overline{V_2V_8}$, $\overline{V_4V_6}$, $\overline{V_4V_8}$ ou $\overline{V_6V_8}$ for azul, esta aresta, juntamente com as que ligam seus extremos a V, formam um triângulo azul. Por outro lado, se nenhuma delas for azul, isso significa que todas são vermelhas. Logo, nós temos um quadrilátero monocromático (todos os lados e diagonais em uma só cor).

- 6 arestas vermelhas:

  Observe o grafo abaixo:



No **problema 4**, nós vimos que, em um grupo de seis pessoas, necessariamente 3 se conhecem mutuamente (e não temos mais o que provar) ou 3 não se conhecem mutuamente, e, juntando com a pessoa que destacamos inicialmente na resolução, obtemos 4 pessoas que se desconhecem mutuamente, conforme ilustrado abaixo:



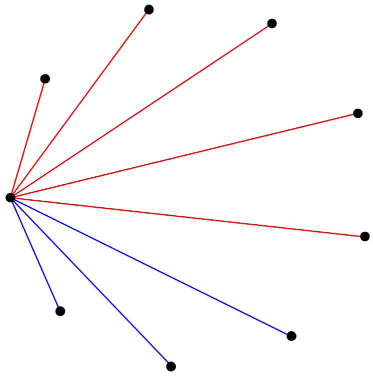
Portanto, numa reunião com dez pessoas, necessariamente três conhecem-se mutuamente ou quatro desconhecem-se mutuamente. ■

(b) Uma reunião com 9 pessoas:

Resolução. Para mostrar que, mesmo com apenas nove vértices, deve haver um triângulo azul monocromático ou um K_4 vermelho, precisamos de uma melhora sutil no raciocínio que usamos para 10 pontos.

Com 10 vértices, a prova contou em encontrar um vértice de conexão com, pelo menos, seis arestas vermelhas, ou, pelo menos, quatro azuis. Uma vez que tivemos tal vértice, pudemos ter a certeza de que encontramos os nossos três amigos ou quatro estranhos.

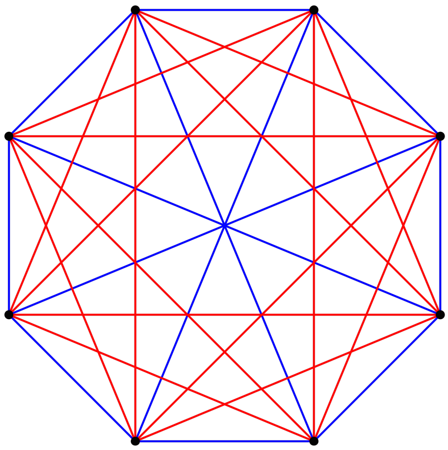
Se o grafo tem apenas 9 vértices, cada um tem apenas 8 vizinhos. Nosso resultado só irá falhar se cada vértice tiver exatamente cinco arestas vermelhas e três azuis. Ou seja, cada vértice deve ficar assim:



Isto deve ocorrer para cada um dos vértices. Ou seja, de cada vértice devem partir três arestas azuis. Como o total de vértices é 9 e cada aresta conecta dois vértices, temos então que o total de arestas azuis é $\dfrac{9 \times 3}{2} = 13,5$. Sendo que isto é impossível, pois o número de arestas azuis no grafo deve ser inteiro.

Portanto, numa reunião com nove pessoas, necessariamente três conhecem-se mutuamente ou quatro desconhecem-se mutuamente. ■

O mesmo não ocorre para 8 pessoas. Observe o grafo abaixo:



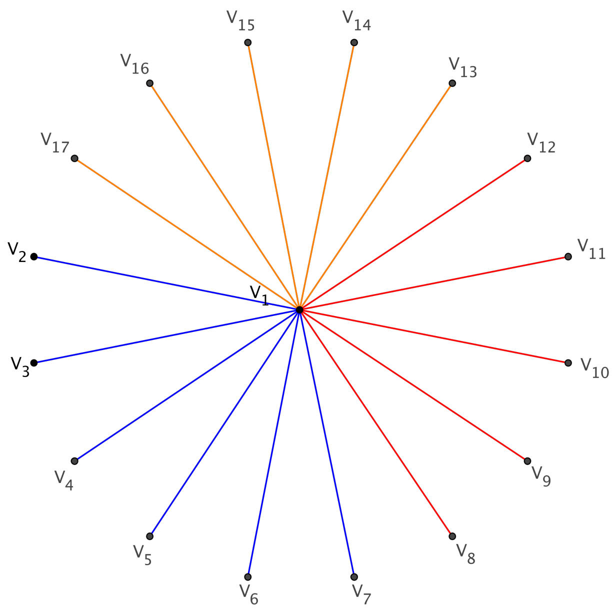
Portanto, o menor número de pessoas tal que três se conheçam mutuamente e quatro não se conheçam mutuamente é 9.

Problema 8. (IMO 1964) Dezessete pessoas comunicam-se por cartas uma com a outra (cada pessoa comunica-se com todas as outras). Em cada carta, apenas um de três assuntos distintos são tratados. Se A manda uma carta falando sobre um determinado assunto x a B, B responde esta carta falando sobre o mesmo assunto. Prove que pelo menos três pessoas escreveram uma para outra uma carta tratando do mesmo assunto.

Resolução. Digamos que os assuntos sejam Análise Combinatória, Probabilidade e Grafos.

Consideremos um grafo em que cada vértice representa uma pessoa. Quando duas pessoas conversarem sobre Análise Combinatória, os conectaremos por uma aresta azul. Caso seja Probabilidade, os conectaremos por uma aresta vermelha e caso seja Grafos, uma aresta laranja.

Separemos uma dessas pessoas, digamos V_1. Como V_1 escreveu para cada uma das outras 16 pessoas, então, pelo Princípio das Gavetas, há pelo menos 6 pessoas com quem ela tenha conversado sobre um mesmo assunto, digamos Análise Combinatória.



Se duas dessas 6 pessoas conversaram sobre Análise Combinatória, a prova está concluída.

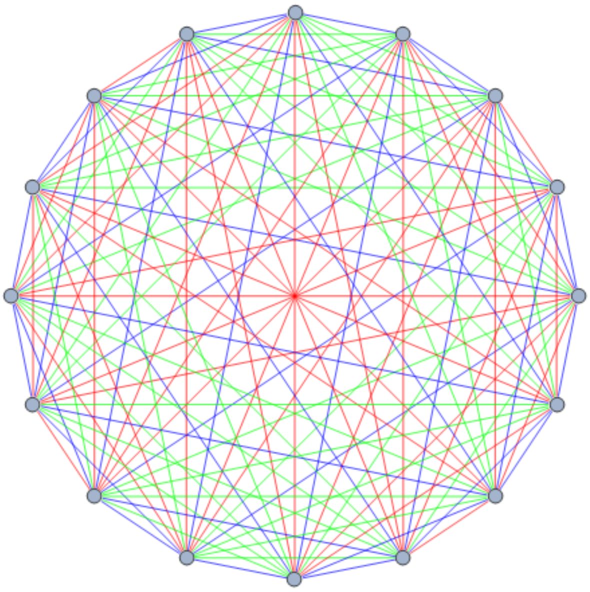
Vamos supor isto não tenha acontecido. Então, temos que provar que existe um grupo de três pessoas tais que elas tenham conversado ou sobre Probabilidade ou sobre Grafos. Isto já foi provado no **problema 4**, se trocarmos a relação ″se conhecerem mutuamente″por ″conversaram sobre Probabilidade″e ″se desconhecem mutuamente″por ″conversaram sobre Grafos″ou vice-versa.
Portanto, concluímos que em um grupo de 17 pessoas existe necessariamente três pessoas tais que elas tenham conversado sobre um mesmo assunto dentre três distintos.

■

O que acabamos de provar no exercício anterior é que dado um grafo de 17 vértices em que cada aresta é colorida com as cores azul, vermelha ou laranja, existe necessariamente um triângulo em que todos os lados têm a mesma cor.

Cabe a pergunta: isso é possível em um grafo completo de 16 vértices?

De fato, **não**. Para mostrar que isto não é necessariamente verdade, basta construir um contra-exemplo. Ou seja, um grafo completo K_{16} que não contenha nenhum subgrafo K_3 monocromático. Um possível grafo deste tipo está exposto na figura abaixo.



No grafo acima, se tomarmos quaisquer três vértices, não teremos um triângulo em que todos os lados tenham a mesma cor.

Portanto, a menor ordem para um um grafo completo com suas arestas coloridas de três cores distintas tal que ele contenha um K_3 em que todas as arestas tenham a mesma cor é 17.

Capítulo 3

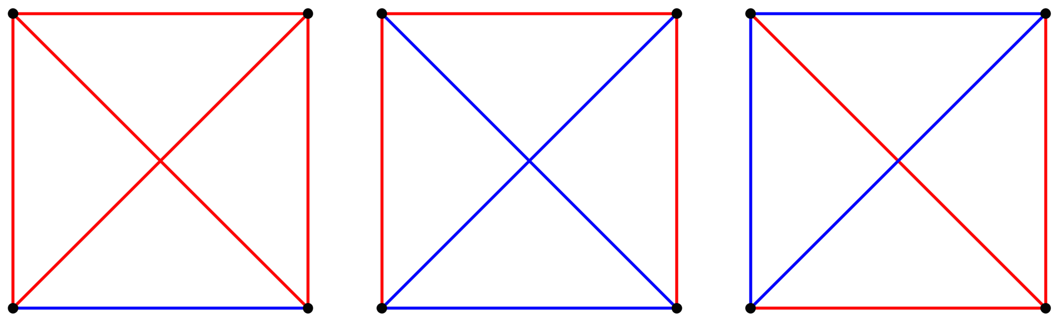
O Teorema de Ramsey para grafos

Para entendermos os números de Ramsey e o Teorema de Ramsey, devemos primeiro definir o que é um *grafo colorido*.

Definição 3.1. Um grafo *bicolorido* é um grafo em que as arestas são coloridas com apenas duas cores distintas.

Sem definir, utilizamos grafos bicoloridos na resolução de exercícios no capítulo anterior.

Exemplo 3.1. Três maneiras de se colorir um grafo K_4 com duas cores distintas estão na figura abaixo.



Utilizamos as cores azul e vermelha, mas poderíamos ter escolhido outras duas cores quaisquer.

O Teorema de Ramsey garante que existe um número $R(s)$ tal que qualquer grafo completo de ordem $n \geq R(s)$ tem que conter um subgrafo completo monocromático de ordem s. Ou seja, em qualquer grafo bicolorido K_n com cores azul e vermelha, deve existir um azul ou um vermelho K_s. De maneira equivalente, todo grafo de ordem $n \geq R(s)$ possui um subgrafo completo ou um subgrafo vazio de ordem s. Estas duas sentenças são equivalentes porque qualquer grafo G de ordem n dá origem a um bicolorido K_n, uma vez que podemos pintá-lo com uma cor e seu complemento de outra cor. Colorir um grafo é simplesmente uma maneira conveniente de dividir as arestas em subgrafos separados.

Definição 3.2. O *número de Ramsey* $R(s, t)$ é a ordem do menor grafo completo que, quando bicolorido, deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho.

Vejamos algumas consequências imediatas da definição:

i) $R(s,t) = R(t,s)$, uma vez que as cores de cada aresta podem ser trocadas;

ii) $R(s,1) = 1$.

Isto é trivial, já que K_1 não possui arestas e, portanto, nenhuma aresta para colorir. Assim, qualquer K_1 colorido sempre conterá um K_1 vermelho;

iii) $R(s,2) = s$.

De fato, se todas as arestas de K_s forem coloridas de azul, então o grafo conterá um K_s azul. Entretanto, se uma aresta for colorida de vermelho, então o grafo irá conter um K_2 vermelho. As arestas de qualquer grafo de ordem menor do que s poderiam ser coloridas todas de azul. Em qualquer um dos casos, o grafo conteria ou um K_s azul ou um K_2 vermelho.

Exemplo 3.2. Lembrando do **problema 4** do **capítulo 2**, nós provamos que o menor número de pessoas necessário para que três delas se conheçam mutuamente ou três delas se desconheçam mutuamente é 6. Ao modelar o problema através de grafos, o que provamos foi que 6 é a menor ordem de um grafo para que este tenha, necessariamente, um subgrafo de 3 arestas coloridas de azul ou um subgrafo de 3 arestas coloridas de vermelho. Em outras palavras, o que encontramos na ocasião foi o número de Ramsey $R(3,3) = 6$.

Exemplo 3.3. Ainda fazendo referência ao **capítulo 2**, no **problema 7**, provamos que em um grupo de 9 pessoas, necessariamente três conhecem-se mutuamente ou quatro desconhecem-se mutuamente. Ou seja, em um grafo de ordem 9, necessariamente há um subgrafo de três arestas todas coloridas de azul ou um K_4 com todas as arestas coloridas de vermelho. Em outras palavras, o que encontramos na ocasião foi o número de Ramsey $R(3,4) = 9$.

Analisando as resoluções dos dois problemas citados anteriormente, não é surpresa perceber que determinar um número de Ramsey é uma tarefa nem um pouco trivial. De fato, são poucos o números de Ramsey conhecidos. Por exemplo, $R(5,5)$ ainda não o é. Abaixo, temos uma tabela com os números de Ramsey para grafos bicoloridos.

$R(s,t)$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

Teorema 3.1 (Teorema de Ramsey para grafos bicoloridos)**.** *Para quaisquer dois números naturais, s e t, existe um número natural, $R(s,t) = n$, tal que qualquer grafo completo bicolorido de ordem pelo menos n, colorido de azul ou vermelho, deve conter um monocromático K_s azul e ou um K_t vermelho.*

Demonstração. Vamos agora provar que existe $R(s,t)$ por indução assumindo que $R(s-1,t)$ e $R(s,t-1)$ existem, partindo das consequências da definição já justificadas neste capítulo.

i) $R(s,t) = R(t,s)$;

ii) $R(s,1) = 1$;

iii) $R(s,2) = s$;

Queremos mostrar que $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$

Tome um grafo completo bicolorido com $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ vértices. Separemos um dos vértices de K_n, digamos v. Dessa forma, nós construímos dois conjuntos: V_v, cujos elementos são os vértices conectados a v por uma aresta vermelha, e A_v, cujos elementos são os vértices de K_n conectados a v por arestas azuis.

Se temos $R(s-1,t) + R(s,t-1)$ ou mais vértices neste grafo, há pelo menos $R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$ outros vértices, e um dos seguintes casos se verificará:

1. De v partem pelo menos $R(s-1,t)$ arestas azuis.
   Neste caso, por definição de $R(s-1,t)$, dentre esses $R(s-1,t)$ vértices há t que estão conectados entre si por arestas vermelhas, ou $s-1$ que estão conectados entre si por arestas azuis, e juntando v a estes $s-1$ vértices, obtemos s vértices que estão conectados entre si por arestas azuis.

2. De v partem pelo menos $R(s,t-1)$ arestas vermelhas.
   Neste caso, por definição de $R(s,t-1)$, dentre esses $R(s,t-1)$ vértices há s vértices conectados entre si por arestas azuis, ou $t-1$ que estão conectados entre si por arestas vermelhas. Juntando estes $t-1$ vértices com v, obtemos t vértices conectados entre si por arestas vermelhas.

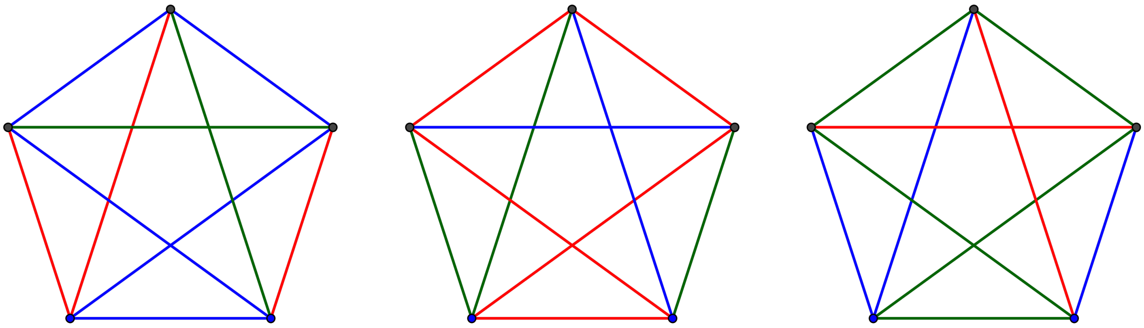
Nós acabamos de mostrar que um grafo completo bicolorido de ordem $R(s-1,t) + R(s,t-1)$ deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho, provando que $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

■

Da mesma forma que podemos colorir as arestas de um grafo com apenas duas cores, também podemos colorí-lo com três cores ou mais. Chamaremos este tipo de grafo de multicolorido.

Definição 3.3. Um grafo *multicolorido* é um grafo em que as arestas são coloridas com pelo menos duas cores distintas.

Exemplo 3.4. Abaixo, temos três maneiras de se colorir um grafo K_5 com três cores distintas.



Vamos agora definir o número de Ramsey para os grafos completos coloridos com exatamente três cores.

Definição 3.4. O *número de Ramsey* $R(s,t,u)$ é a ordem do menor grafo completo que, quando multicolorido com exatamente três cores, deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho ou um K_u laranja.

A partir desta definição, obtemos consequências análogas as da **definição3.2.** . Vejamos:

i) $R(s,t,u) = R(s,u,t) = R(u,s,t) = R(u,t,s) = R(t,s,u) = R(t,u,s)$, uma vez que as cores de cada aresta podem ser trocadas;

ii) $R(s,t,1) = 1$

Isto é trivial, uma vez que K_1 não possui arestas e, portanto, nenhuma aresta para colorir. Assim, qualquer K_1 colorido sempre conterá um K_1 laranja;

iii) $R(s,t,2) = R(s,t)$

De fato, $n = R(s,t)$, por definição, é a menor ordem do grafo completo que contém ou um K_s azul ou um K_t vermelho. Entretanto, podemos escolher aleatoriamente qualquer uma das n arestas e colorí-la de laranja, obtendo assim, um K_2 laranja. As arestas restantes permanecem todas coloridas de azul ou vermelho. De uma maneira ou de outra, sempre teremos ou um K_s azul ou um K_t vermelho ou um K_2 laranja.

Exemplo 3.5. Voltando a fazer referência ao **capítulo 2**, provamos no **problema 8** que, em um grupo de 17 pessoas que comunicavam-se por meio de cartas (cada pessoa enviava uma carta para todas as outras) em que era conversado sobre três assuntos, havia, necessariamente, um grupo de três pessoas tais que elas tivessem conversado sobre um mesmo assunto. Além disso, mostramos que este era o menor número de pessoas necessário para que isto acontecesse. Ou seja, um grafo de ordem 17 necessariamente contém ou um K_3 monocromático azul ou um K_3 monocromático vermelho ou um K_3 monocromático laranja e esta é a menor ordem para que isso ocorra. Em outras palavras, o que encontramos na ocasião foi o número de Ramsey $R(3,3,3) = 17$.

Vale ressaltar que este é o **único** número de Ramsey do tipo $R(s,t,u)$ conhecido. Se recordarmos do contra-exemplo utilizado para verificar que em um K_{16} não há necessariamente um monocromático K_3 nem azul nem vermelho nem laranja, não é difícil entender o porquê de apenas este ser conhecido. Há uma outra maneira de mostrar que um grafo K_{16} não possui um triângulo monocromático por meios algébricos em que reduz-se drasticamente a quantidade de triângulos a serem analisados (lembremos que eram 560!!!!), mas nós não iremos abordá-la aqui. Você pode encontrá-la na referência [6]. De uma maneira ou de outra, sempre que quisermos confirmar se, de fato, $R(s,t)$ ou $R(s,t,u)$ é exatamente igual a n, devemos mostrar que $n-1$ não o é, sendo esta tarefa tão ou mais difícil que a anterior.

Proposição 3.1. *Para quaisquer três números naturais, s, t e u, existe um número natural, $R(s,t,u) = n$, tal que qualquer grafo completo multicolorido de ordem pelo menos n, colorido apenas de azul, vermelho ou laranja, deve conter um monocromático K_s azul ou um monocromático K_t vermelho ou um monocromático K_u laranja.*

Demonstração. Assim como na demonstração do **Teorema 3.1**, vamos provar que existe $R(s,t,u)$ por indução assumindo que $R(s-1,t,u)$, $R(s,t-1,u)$ e $R(s,t,u-1)$ existem, partindo das consequências da definição justificadas acima.

i) $R(s,t,u) = R(s,u,t) = R(u,s,t) = R(u,t,s) = R(t,s,u) = R(t,u,s)$;

ii) $R(s,t,1) = 1$;

iii) $R(s,t,2) = R(s,t)$.

Queremos mostrar que $R(s,t,u) \leq R(s-1,t,u) + R(s,t-1,u) + R(s,t,u-1) - 3 + 2$.

Consideremos um grafo K_n tal que $n = R(s-1,t,u) + R(s,t-1,u) + R(s,t,u-1) - 3 + 2$. Selecionando um vértice qualquer de K_n, digamos v, obtemos r conjuntos: A_v cujos elementos são todos os vértices de K_n conectados a v por uma aresta azul, V_v cujos elementos são todos os vértices de K_n conectados a v por uma aresta vermelha e L_v cujos elementos são todos os vértices de K_n conectados a v por uma aresta laranja.
Como K_n é um grafo completo, podemos afirmar que $\#A_v + \#V_v + \#L_v = n-1$ e, portanto,

$$\#A_v + \#V_v + \#L_v = R(s-1,t,u) + R(s,t-1,u) + R(s,t,u-1) - 3 + 1.$$

Se $\#A_v < R(s-1,t,u)$ **e** $\#V_v < R(s,t-1,u)$ **e** $\#L_v < R(s,t,u-1)$, então $\#A_v \leq R(s-1,t,u) - 1$ **e** $\#V_v \leq R(s,t-1,u) - 1$ **e** $\#L_v \leq R(s,t,u-1) - 1$. Logo,

$$\#A_v + \#V_v + \#L_v \leq R(s-1,t,u) + R(s,t-1,u) + R(s,t,u-1) - 3$$

que é uma contradição. Sendo assim, devemos ter $\#A_v \geq R(s-1,t,u)$ **ou** $\#V_v \geq R(s,t-1,u)$ **ou** $\#L_v \geq R(s,t,u-1)$.

Consideremos o caso em que de v partem pelo menos $R(s-1,t,u)$ arestas azuis. Por definição, dentre esses $R(s-1,t,u)$ vértices há t que estão conectados entre si por arestas vermelhas (não há mais o que provar) ou u que estão conectados entre si por arestas laranjas ou $s-1$ que estão conectados entre si por arestas azuis que, juntando a v, obtemos s vértices que estão conectados entre si por arestas azuis.

Os outros dois casos são simétricos a este invertendo o papel das cores azul, vermelha e laranja.

Portanto, em um grafo multicolorido de ordem $R(s-1,t,u)+R(s,t-1,u)+R(s,t,u-1)-3+2$ deve conter um K_s azul ou um K_t vermelho ou um K_u laranja, uma vez que $R(s,t,u) \leq (s-1,t,u)+R(s,t-1,u)+R(s,t,u-1)-3+2$.

■

Proposição 3.2. *Para quaisquer r números naturais, $a_1, a_2, \ldots, a_r$, existe um número natural, $R(a_1,a_2,\ldots,a_r) = n$, tal que qualquer grafo completo multicolorido de ordem pelo menos n, colorido com r cores distintas, deve conter um monocromático K_{a_1} da cor 1 ou um monocromático K_{a_2} da cor 2 ou um monocromático K_{a_3} da cor 3, e assim sucessivamente.*

Prova:

i) $R(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\ldots,a_{\sigma(r)}) = R(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ para $a_1,a_2\ldots,a_{r-1},a_r \geq 2$ e qualquer permutação σ de $\{1,2,\ldots,r\}$, uma vez que as cores de cada aresta podem ser trocadas;

ii) $R(a_1,a_2,\ldots,a_{r-1},1) = 1$ para $a_1,a_2\ldots,a_{r-1} \geq 2$;

Isto é trivial, uma vez que K_1 não possui arestas e, portanto, nenhuma aresta para colorir. Assim, qualquer K_1 colorido sempre conterá um K_1 da cor r;

iii) $R(a_1,a_2,\ldots,a_{r-1},2) = R(a_1,a_2,\ldots,a_{r-1})$ para $a_1,a_2,\ldots,a_{r-1} \geq 2$;

De fato, $n = R(a_1,a_2,\ldots,a_{r-1})$, por definição, é a menor ordem do grafo completo que contém ou um K_{a_1} da cor 1 ou um K_{a_2} da cor 2 ou ... ou um $K_{a_{r-1}}$ da cor $r-1$. Entretanto, podemos escolher aleatoriamente qualquer uma das n arestas e pintá-la da cor r, obtendo assim, um K_2 da cor r. As arestas restantes permanecem todas coloridas ou da cor 1 ou da cor 2 ou ... ou da cor $r-1$. De uma maneira ou de outra, sempre teremos ou um K_{a_1} da cor 1 ou um K_{a_2} da cor 2 ou ... ou um $K_{a_{r-1}}$ da cor $r-1$ ou um K_2 da cor r.

iv) $R(a_1,a_2,\ldots,a_r) \leq R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)+R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)+\ldots+R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-r+2$.

Vamos provar, por indução, admitindo que $R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)$, $R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)$, ..., $R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)$ existam.

Consideremos um grafo K_n tal que $n = R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)+R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)+\ldots+R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-r+2$. Selecionando um vértice qualquer de K_n, digamos v, obtemos r conjuntos: A_1 cujos elementos são todos os vértices de K_n conectados a v por uma aresta da cor 1, A_2 cujos elementos são todos os vértices de K_n conectados a v por uma aresta da cor 2, ..., A_r cujos elementos são todos os vértices de K_n conectados a v por uma aresta da cor r.

Como K_n é um grafo completo, podemos afirmar que $\#A_1+\#A_2+\ldots+\#A_r = n-1$ e, portanto,

$$\#A_1+\#A_2+\ldots+\#A_r = R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)+R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)+\ldots+R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-r+1.$$

Se $\#A_1 < R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)$ **e** $\#A_2 < R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)$ **e** ... **e** $\#A_r < R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)$, então $\#A_1 \leq R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)-1$ **e** $\#A_2 \leq R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)-1$ **e** ... **e** $\#A_r \leq R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-1$. Logo,

$$\#A_1+\#A_2+\ldots+\#A_r \leq R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)+R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)+\ldots+R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-r$$

que é uma contradição. Sendo assim, devemos ter $\#A_1 \geq R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)$ **ou** $\#A_2 \geq R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)$ **ou** ... **ou** $\#A_r \geq R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)$.

Consideremos o caso em que de v partem pelo menos $R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)$ arestas da cor 1. Por definição, dentre esses $R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)$ vértices há a_2 que estão conectados entre si por arestas da cor 2 **ou** ... **ou** a_r que estão conectados entre si por arestas da cor r ou a_1-1 que estão conectados entre si por arestas da cor 1 que, juntando a v, obtemos a_1 vértices que estão conectados entre si por arestas da cor 1.

Os outros $r-1$ casos são simétricos a este invertendo o papel das cores. Portanto, em um grafo multicolorido de ordem $R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)+R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)+\ldots+R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-r+2$ deve conter ou um K_{a_1} da cor 1 ou um K_{a_2} da cor 2 ou ... ou um K_{a_r} da cor r, uma vez que $R(a_1,a_2,\ldots,a_r) \leq R(a_1-1,a_2,\ldots,a_r)+R(a_1,a_2-1,\ldots,a_r)+\ldots+R(a_1,a_2,\ldots,a_r-1)-r+2$.

■

Capítulo 4

Estimativas de números de Ramsey

Na falta de algoritmos práticos que permitam calcular valores exatos de números de Ramsey, procura-se encontrar estimativas superiores e inferiores desses números. Uma dessas estimativas é a seguinte.

Teorema 4.1. *Sejam s e t números naturais tais que* $s, t \geq 2$. *Então,*

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1} = \frac{(s+t-2)!}{(s-1)!(t-1)!}$$

Demonstração. Para $t = 2$, temos que $R(s,2) = s \leq \binom{s}{s-1} = s$.
Provamos no capítulo 3 que $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.
Logo, por indução,

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq \binom{s-1+t-2}{s-1-1} + \binom{s+t-1-2}{s-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow R(s,t) &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow R(s,t) &\leq \binom{s+t-2}{s-1} \end{aligned}$$

■

Corolário 4.1. *Seja s um número natural tal que* $s \geq 2$. *Então,* $R(s,s) \leq 4^s$.

Demonstração. Para provarmos este corolário, basta igualarmos s a t no **Teorema 4.1**:

$$R(s,s) \leq \binom{s+s-2}{s-1} \Rightarrow R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1} \Rightarrow R(s,s) \leq \binom{2(s-1)}{s-1}$$

Observe que:

$$2^{2k} = (1+1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{2k-i} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} = \binom{2k}{0} + \ldots + \binom{2k}{k} + \ldots + \binom{2k}{2k}$$

Logo, $\binom{2k}{k} \leq 2^{2k}$.

Assim, podemos concluir que $\binom{2(s-1)}{s-1} \leq 2^{2(s-1)} = 2^{2s-2} = \dfrac{2^{2s}}{2^2} = \dfrac{4^s}{4} \leq 4^s$.

Portanto, $R(s,s) \leq 4^s$. ■

Vejamos agora uma estimativa inferior introduzida pelo matemático húngaro Pál Erdös em 1947.

Teorema 4.2. *Sejam s e n dois números naturais tais que* $\binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$. *Então,* $R(s,s) > n$.

Demonstração. A fim de mostrar que $R(s,s) > n$, é suficiente mostrar que existe uma coloração de arestas de K_n tal que este grafo contenha um grafo não monocromático K_s.

Considere um grafo K_n em que A é o conjunto formado por todas as suas arestas e que cada aresta $a_i, i \in \{1, \ldots, n\}$, foi colorida aleatoriamente de azul ou vermelho. Sendo assim, se escolhermos aleatoriamente uma aresta de A, a probabilidade dela ser azul ou vermelha é a mesma. Ou seja, para cada a_i, temos que:

$$p(a_i \text{ ser colorida de vermelho}) = p(a_i \text{ ser colorida de azul}) = \frac{1}{2}.$$

Em K_n, existem $\binom{n}{s}$ grafos K_s. Seja E_j o evento em que o j-ésimo K_s é monocromático. Estas arestas de K_s podem estar todas coloridas de azul ou vermelho. Sendo assim, temos que:

$$p(E_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} = 2 \cdot (2)^{-\binom{s}{2}} = 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Então,

$$p(\exists \text{ um monocromático } K_s) = p(\cup_j E_j) \leq \sum_j p(E_j) = \binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Entretanto, por hipótese, $\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$. Como os eventos $\exists$ um monocromático K_s e nenhum K_s é monocromático são disjuntos e são todos os eventos possíveis ao se colorir aleatoriamente um grafo de azul e vermelho, temos que

$$p(\exists \text{ um monocromático } K_s) + p(\text{nenhum } K_s \text{ é monocromático}) = 1$$

Podemos concluir que

$$p(\text{nenhum } K_s \text{ é monocromático} > 0$$

Logo, a probabilidade de que nenhum K_s seja monocromático não é nula. Portanto, existe uma maneira de colorir um grafo completo K_n tal que todos os K_s sejam não monocromáticos.

■

Corolário 4.2. *Para* $s \geq 3$, $R(s,s) > 2^{\frac{s}{2}}$

Demonstração. Temos que:

$$\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-s+1)}{s!} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} \leq \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Seja $n = \lfloor 2^{\frac{s}{2}} \rfloor$. Então, $n \leq 2^{\frac{s}{2}}$. Logo,

$$\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} \leq \frac{\left(2^{\frac{s}{2}}\right)^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s(s-1)}{2}} = \frac{2^{\frac{s^2}{2}}}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}} = \frac{2^{1+\frac{s}{2}}}{s!}$$

Vamos provar, por indução, que $\frac{2^{1+\frac{s}{2}}}{s!} < 1$, para todo $s \geq 3$.

i) $s = 3 \Rightarrow \dfrac{2^{1+\frac{3}{2}}}{3!} = \dfrac{4\sqrt{2}}{6} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} < 1$

ii) Suponhamos que $\frac{2^{1+\frac{s}{2}}}{s!} < 1 \Leftrightarrow \frac{2^{\frac{s}{2}}}{s!} < \frac{1}{2}$, para todo $s \geq 3$. Então,

$$\frac{2^{\frac{s+1}{2}}}{(s+1)!} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{s}{2}}}{(s+1) \cdot s!} < \frac{2^{\frac{1}{2}}}{s+1} \cdot \frac{1}{2}$$

Como $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{s+1} < 1$, para todo $s \geq 3$, então $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{s+1} \cdot \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}$. Logo,

$$\frac{2^{\frac{s+1}{2}}}{(s+1)!} < \frac{1}{2}$$

Portanto, concluímos que $\dfrac{2^{1+\frac{s}{2}}}{s!} < 1$.

Sendo assim, aplicando o **teorema 4.2**, temos que $R(s,s) > 2^{\frac{s}{2}}$.

■

Existem também estimativas para números de Ramsey do tipo $R(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Antes de estudarmos estas estivamtivas, precisamos aprender o conceito de **número multinomial**, cuja definição é dada a seguir:

Definição 4.1. Sejam $k_1, k_2, \ldots, k_r$ números naturais tais que $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Então,

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} := \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!}$$

Este número é chamado de **multinomial**.

Vejamos três consequências da definição que nos auxiliarão nas demonstrações das estimativas seguintes.

i) $\binom{n}{k_r} = \binom{n}{k_r, n-k_r} = \dfrac{n!}{k_r! \cdot (n-k_r)!}$;

ii) $\binom{n-1}{k_1-1, k_2, \ldots, k_r} + \binom{n-1}{k_1, k_2-1, \ldots, k_r} + \ldots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_r-1} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$;

De fato,

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k_1-1, k_2, \ldots, k_r} + \binom{n-1}{k_1, k_2-1, \ldots, k_r} + \ldots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_r-1} &= \\
= \frac{(n-1)!}{(k_1-1)! \cdot k_2! \ldots k_r!} + \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot (k_2-1)! \ldots k_r!} + \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot k_2! \ldots (k_r-1)!} &= \\
= \frac{k_1(n-1)!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} + \frac{k_2(n-1)!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} + \frac{k_r(n-1)!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} &= \\
= \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} \cdot (k_1 + k_2 + \ldots + k_r) &= \\
= \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} \cdot n &= \\
= \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} &= \\
= \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}
\end{aligned}$$

iii) $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \binom{n-k_r}{k_1, \ldots, k_{r-1}} \cdot \binom{n}{k_r}$.

De fato,

$$\binom{n-k_r}{k_1, \ldots, k_{r-1}} \cdot \binom{n}{k_r} = \frac{(n-k_r)!}{k_1! \ldots (k_{r-1})!} \cdot \frac{n!}{(n-k_r)! k_r!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$$

Consideremos o seguinte problema: Dados 10 objetos distintos e três caixas, uma azul, uma vermelha e uma verde, de quantos modos é possível guardar 4 desses objetos na caixa azul, 3 desses objetos na caixa vermelha e 3 desses objetos na caixa verde?

A solução deste problema é

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{10!}{4!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{3!0!} = \frac{10!}{4!3!3!} = \binom{10}{4, 3, 3}$$

Generalizando, o número multinomial $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$ representa, dados n objetos distintos, o número de maneiras de se guardar k_1 objetos na caixa 1, k_2 objetos na caixa 2, ..., k_r objetos na caixa r.

Dessa forma, as demonstrações das consequências acima se tornam bem menos trabalhosas.

i) $\binom{n}{k_r} = \binom{n}{k_r, n-k_r}$;

De fato, dadas duas caixas, ao guardar k_r objetos em uma caixa, automaticamente estamos guardando $n - k_r$ objetos na outra caixa;

ii) $\binom{n-1}{k_1 - 1, k_2, \ldots, k_r} + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, \ldots, k_r} + \ldots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_r - 1} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$;

De fato, se nós guardarmos 1 objeto na caixa i, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, restarão $n-1$ objetos e $k_i - 1$ vagas na caixa i. Sendo assim, para guardar n objetos em r caixas, tais que a caixa 1 tenha k_1 objetos, a caixa 2 tenha k_2 objetos e assim sucessivamente, é o equivalente a guardar primeiro 1 objeto na caixa 1 e guardar os restantes em seguida **ou** guardar primeiro um objeto na caixa 2 e guardar os restantes em seguida **ou** ... **ou** guardar primeiro 1 objeto na caixa r e e guardar os restantes em seguida.

iii) $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \binom{n-k_r}{k_1, \ldots, k_{r-1}} \cdot \binom{n}{k_r}$.

De fato, ao guardar k_r objetos na caixa r, restam $n - k_r$ objetos a serem guardados nas $r - 1$ caixas restantes.

Utilizando a definição de número multinomial e suas consequências, provemos a seguinte proposição.

Teorema 4.3. *Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_r$ números inteiros tais que $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 1$. Então,*

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_r) \leq \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r}{n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_r - 1}$$

Demonstração. Se existe j, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, tal que $n_j = 1$, então $R(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, 1, n_{j+1}, \ldots, n_r) = 1$, como vimos no **capítulo 3**.
Vamos provar por indução em $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Podemos supor que $n_j \geq 2$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Sabemos da **proposição 3.2** que

$$\begin{aligned}
R(n_1, n_2, \ldots, n_r) &\leq R(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r) + \ldots + R(n_1, n_2, \ldots, n_r - 1) - r + 2 \Rightarrow \\
\Rightarrow R(n_1, n_2, \ldots, n_r) &\leq R(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r) + \ldots + R(n_1, n_2, \ldots, n_r - 1) \Rightarrow \\
\Rightarrow R(n_1, n_2, \ldots, n_r) &\leq \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r - 1}{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r} + \ldots + \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r - 1}{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r}
\end{aligned}$$

Donde, da consequência **ii** da definição de número multinomial, podemos concluir que

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_r) \leq \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r}{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r}$$

■

Esta estimativa é análoga a da **teorema 4.1**, porém há uma estimativa um pouco melhor que provaremos a seguir.

Proposição 4.1. *Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_r$ números inteiros tais que $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 2$. Então,*

$$R(a_1, a_2, ..., a_r) \leq \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_r - 2r + 2}{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 2, \ldots, n_r - 2}$$

Demonstração. Vamos provar esta desigualdade por indução. Primeiro em r e depois em $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Se $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 2$, temos, para $r = 2$, que:

$$R(n_1, n_2) \leq \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1, n_2 - 1} = \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}$$

Se existe j, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, tal que $n_j = 2$, temos dois casos:

1º) $j > 2$:

$$R(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, 2, n_{j+1}, \ldots, n_r) = R(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_r)$$

Por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
R(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_r) &\leq \binom{n_1 + \ldots + n_{j-1} + n_{j+1} + \ldots + n_r - 2(r-1) + 2}{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 2, \ldots, n_{j-1} - 2, n_{j+1} - 2, \ldots, n_r - 2} \Rightarrow \\
\Rightarrow R(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_r) &\leq \binom{n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1} + 2 + n_{j+1} + \ldots + n_r - 2r + 2}{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 2, \ldots, n_{j-1} - 2, 2 - 2, n_{j+1} - 2, \ldots, n_r - 2}
\end{aligned}$$

2º) $j \in \{1, 2\}$:

Sem perda de generalidade, consideremos $j = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
R(2, n_2, \ldots, n_r) &= R(n_2, \ldots, n_r) \Rightarrow \\
\Rightarrow R(2, n_2, \ldots, n_r) &\leq \binom{n_2 + \ldots + n_r - 2(r-1) + 2}{n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 2, \ldots, n_r - 2} \Rightarrow \\
\Rightarrow R(2, n_2, \ldots, n_r) &\leq \binom{2 + n_2 + \ldots + n_r - 2r + 2}{2 - 2, n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 2, \ldots, n_r - 2} \Rightarrow \\
\Rightarrow R(2, n_2, \ldots, n_r) &\leq \frac{(2 + n_2 + \ldots + n_r - 2r + 2)!}{(2-2)!(n_2 - 1)!(n_3 - 1)! \ldots (n_r - 2)!} \Rightarrow \\
\Rightarrow R(2, n_2, \ldots, n_r) &\leq \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_r - 2r + 2)!}{(n_1 - 2)!(n_2 - 1)!(n_3 - 1)! \ldots (n_r - 2)!}
\end{aligned}$$

Caso exista j, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, tal que $n_j > 2$, então

$$\begin{aligned}
R(n_1, \ldots, n_r) &\leq R(n_1 - 1, \ldots, n_r) + \ldots + R(n_1, \ldots, n_r - 1) \Rightarrow \\
\Rightarrow R(n_1, \ldots, n_r) &\leq \binom{n_1 + \ldots + n_r - 2r + 1}{n_1 - 2, n_2 - 1, n_3 - 2, \ldots, n_r - 2} + \ldots + \binom{n_1 + \ldots + n_r - 2r + 1}{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 2, \ldots, n_r - 3} \Rightarrow \\
\Rightarrow R(n_1, \ldots, n_r) &\leq \binom{n_1 + \ldots + n_r - 2r + 2}{n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 2, \ldots, n_r - 2}
\end{aligned}$$

■

Problema 1. Prove que $R(\overbrace{3, 3, \ldots, 3}^{n \text{ três}}) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1$.
Sugestão: Faça uma indução sobre n utilizando o fato de que

$$\lfloor n!e \rfloor = n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right)$$

Demonstração. Em primeiro lugar, vamos provar que $\lfloor n!e \rfloor = n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right)$.

Por definição, $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$
Então,

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e \tag{4.1}$$

Além disso, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
e &< \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!(n+1)} + \frac{1}{n!(n+1)^2} + \frac{1}{n!(n+1)^3} + \ldots \Rightarrow \\
\Rightarrow e &< \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow e &< \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow e &< \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1-1}{n+1}} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow e &< \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Logo, de (4.1) e (4.2), podemos afirmar que:

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} \tag{4.3}$$

Multiplicando (4.3) por $n!$, obtemos:

$$n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < e < n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{1}{n}$$

Como $\frac{1}{n} < 1$ para todo $n \geq 2$, podemos concluir que $\lfloor n!e \rfloor = n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

Seja $f(n) = R(\overbrace{3,3,\ldots,3}^{n \text{ três}})$. Obtivemos na **proposição 3.2** que $R(a_1, a_2, \ldots, a_r) \leq R(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_r) + R(a_1, a_2 - 1, \ldots, a_r) + \ldots + R(a_1, a_2, \ldots, a_r - 1) - r + 2$. Considerando $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 3$, temos que:

$$\begin{aligned}
f(n) &\leq R(2, \overbrace{3,3,\ldots,3}^{(n-1) \text{ três}}) + \ldots + R(\overbrace{3,3,\ldots,3}^{(n-1) \text{ três}}, 2) - n + 2 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n) &\leq n \cdot R(2, \overbrace{3,3,\ldots,3}^{(n-1) \text{ três}}) - n + 2 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n) &\leq n \cdot R(\overbrace{3,3,\ldots,3}^{(n-1) \text{ três}}) - n + 2 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n) &\leq n \cdot f(n-1) - n + 2 \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Vamos utilizar (4.4) para provar que $R(\overbrace{3,3,\ldots,3}^{n \text{ três}}) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1$ por indução sobre n.

Se $n = 2$, então

$$f(2) = R(3,3) = 6 \leq \lfloor 2!e \rfloor + 1 = 2! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = 5 + 1 = 6$$

Temos que

$$f(n+1) \leq (n+1)f(n) - (n+1) + 2$$

Por hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
f(n+1) &\leq (n+1)(\lfloor n!e \rfloor + 1) - n + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n+1) &\leq (n+1)\left[n! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + 1\right] - n + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n+1) &\leq (n+1)! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + n + 1 - n + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n+1) &\leq (n+1)! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow f(n+1) &\leq \lfloor (n+1)!e \rfloor + 1
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, concluímos que $R(\overbrace{3,3,\ldots,3}^{n \text{ três}}) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1$. Ou seja, um grafo com $\lfloor n!e \rfloor + 1$ vértices cujas arestas são pintadas com n cores distintas tem um triângulo monocromático.

■

Problema 2. (IMO 1978) Uma sociedade internacional tem membros de 6 países diferentes. A lista de membros contém 1978 nomes, numerados 1, 2, ..., 1978. Prove que existe pelo menos um membro cujo número é a soma dos números de dois membros de seu próprio país, ou é igual ao dobro do número de um membro de seu próprio país.

Demonstração. Vamos modelar este problema através de um grafo completo com 1979 vértices, digamos V_0, V_1, V_2, ..., V_{1978}.

Consideremos que o número de cada pessoa seja $|i - j|$ em que i e j são os índices dos vértices V_i e V_j conectados pela aresta a_{ij}. Então, considerando três vértices distintos V_i, V_j e V_k, a aresta a_{ij} está associado a pessoa $|i - j|$, a aresta a_{jk} está associado a pessoa $|j - k|$ e a aresta a_{ik} está associado a pessoa $|i - k|$. Observe que:

i) $i < j < k \Rightarrow |i - j| + |j - k| = -i + j + (-j) + k = -i + k = |i - k|$
ii) $i < k < j \Rightarrow |j - k| + |i - k| = j - k + (-i) + k = -i + k = |k - i|$
iii) $j < i < k \Rightarrow |i - j| + |i - k| = i - j + (-i) + k = k - j = |k - j|$
iv) $j < k < i \Rightarrow |j - k| + |i - k| = -j + k + i - k = i - j = |i - j|$
v) $k < i < j \Rightarrow |i - j| + |i - k| = -i + j + i - k = j - k = |j - k|$
vi) $k < j < i \Rightarrow |i - j| + |j - k| = i - j + j - kk = i - k = |i - k|$

Dessa forma, nós garantimos que existem três pessoas tais que o número de uma delas é igual a soma das outras duas. Porém, não garantimos ainda que elas são do mesmo país. Façamos isso agora.
Vamos atribuir uma única cor a cada país e pintemos cada aresta a_{ij} com a cor do país da pessoa $|i - j|$. O que queremos provar é que neste grafo existe ou um triângulo monocromático da cor 1 ou um triângulo monocromático da cor 2 ou ... ou um triângulo monocromático da cor 6. Ou seja, queremos mostrar que $R(3, 3, 3, 3, 3, 3) \leq 1979$.

No problema anterior, mostramos que $R(\overbrace{3, 3, \ldots, 3}^{n \text{ três}}) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
R(3,3,3,3,3,3) &\leq \lfloor 6!e \rfloor + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow R(3,3,3,3,3,3) &\leq 6! \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \right) + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow R(3,3,3,3,3,3) &\leq 720 \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \right) + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow R(3,3,3,3,3,3) &\leq (720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1) + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow R(3,3,3,3,3,3) &\leq 1958 < 1979
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos assim a demonstração.

■

Referências Bibliográficas

[1] Paulo Cezar Pinto Carvalho, Princípio das Gavetas - Eureka! 5 PP.27-33

[2] Carlos Gustavo Moreira, O Teorema de Ramsey - Eureka! 6 PP. 23-29

[3] Martin Gould, Ramsey Theory - http://people.maths.ox.ac.uk/ gouldm/ramsey.pdf

[4] Gregory Taylor, Ramsey Theory - http://web.mat.bham.ac.uk/D.Kuehn/RamseyGreg.pdf

[5] David Patrick, the Art of Problem Solving - Intermediate Counting and Probability PP. 331-341

[6] R.E. Greenwood, A.M. Gleason, Combinatorial Relations and Chromatic Graphs - Canadian Journal of Mathematics, 1955

[7] Law Ka Ho, Ramsey Numbers and Generalizations - Mathematical Excalibur, vol.14, nº5, 2010

[8] Stanislaw P. Radziszowski, Small Ramsey Numbers - Dinamic Surveys - Eletronic Journal of Combinatorics. http://www.combinatorics.org

[9] Carlos Shine, Teoria dos Grafos: Casa dos Pombos e Teoria de Ramsey - Programa Olímpico de Treinamento, Curso de Combinatória - Nível 3, Aula 10

[10] Po-Shen Lo, Graph Theory - http://www.math.cmu.edu/ ploh/docs/math/mop2008/graph-theory-soln.pdf, 2008

[11] Augusto César Morgado; João Bosco Pitombeira Carvalho; Paulo Cezar Pinto Carvalho; Pedro Fernadez, Análise Combinatória e Probabilidade - Editora SBM

[12] José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, Idani T.C. Muraru, Introdução à Análise Combinatória - Editora Ciência Moderna