Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Ricardo Cesar Massad

A Construção dos Números Reais

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Sinésio Pesco

Rio de Janeiro
Abril de 2014.

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Ricardo Cesar Massad

A Construção dos Números Reais

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Sinésio Pesco
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Co-Orientador
Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Renato José da Costa Valladares
Universidade Estácio de Sá – UNESA

Prof^{a}. Débora Freire Mondaini
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico-científico
PUC-Rio

Rio de Janeiro, 01 de abril de 2014.

Ricardo Cesar Massad

Graduado em Licenciatura em Matemática na Universidade Estácio de Sá – Professor concursado da Rede Pública Estadual do Rio de Janeiro – Professor concursado da rede Pública Municipal do Rio de Janeiro – Professor do Ensino Fundamental e Médio da Escola Parque no Rio de Janeiro.

Ficha catalográfica

Massad, Ricardo Cesar.

A Construção dos Números Reais / Ricardo Cesar Massad; orientador: Sinésio Pesco. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Direito, 2014.

ix.; 61 f. : 29,7 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática - Dissertação. 2. Monografia de matemática. 3. Construção de números reais. 4. Metodologia de matemática.. I. Pesco, Sinésio Carvalho. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico este trabalho a minha esposa Adriana que com tanto amor, não me deixou desistir e aos meus pais Michel e Aidéa por sempre acreditarem em mim.

Agradecimentos

Agradeço aos professores que me acompanharam durante o curso; e em especial ao Professor Doutor João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho e ao Professor Doutor Renato José da Costa Valladares pela colaboração e inspiração neste trabalho.

Ao Capes e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Massad, Ricardo Cesar; Pesco, Sinésio. **A Construção dos Números Reais**, 2014. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Constata-se que, de modo geral, autores de livros didáticos tratam certos temas com algum descaso, talvez se justificando pela capacidade, e, ou maturidade do público a quem os livros se destinam. Mas como estes livros tendem a serem seguidos à risca por professores, esses descuidos podem vir a ter consequências não desejadas. O objetivo deste trabalho é apresentar ao leitor a construção dos números reais, utilizando os cortes de Dedekind, que pode servir de fundamentação de estratégias metodológicas para o trabalho docente. Foi feita uma retrospectiva histórica da formação dos números, apresentando os números racionais e suas propriedades, para possibilitar que se faça um paralelo entre os campos numéricos, ou seja, os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Palavras-chave

Monografia de matemática; Construção dos números Reais; Metodologia de matemática

Abstract

Massad, Ricardo Cesar; Pesco, Sinésio (Advisor). **The construction of the real numbers**, 2014. 61p. Msc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

It appears that, in general, textbook authors treat certain issues with some indifference, perhaps justifying the capability and maturity of the audience or to whom the books are intended. But as these books tend to be followed to the letter by teachers, these oversights are likely to have unintended consequences. The objective of this paper is to present the reader the Construction of Real Numbers, using Dedekind cuts which may ultimately serve as a foundation for methodological strategy for teaching. A historical retrospective of numbers was taken, with rational numbers and their properties, to enable you to do a parallel between numeric fields.

Keywords

Monograph math; Construction of Real Numbers; Math Methodology.

Sumário

1 Introdução 9

2 A Evolução Dos Sistemas De Numeração 12
2.1 Início da Contagem 12
2.2 Os Sistemas de Bases 13
2.3 Valor Posicional 15
2.4 A Matemática Babilônia e Egípcia 15
2.5 A Matemática Grega 18
2.6 A Matemática no Oriente 21
2.7 A Matemática na Idade Média e Moderna 25

3 Os Números Racionais 29
3.1 O Que são os Números Racionais? 29
3.2 Propriedades dos Números Racionais 30
3.3 Cotas 33
3.4 Conjuntos Limitados 35
3.5 Supremo e Ínfimo 35
3.6 Máximo e Mínimo 36
3.7 Racionais e a reta numérica 37

4 Construção dos Números Reais 38
4.1. Definição dos Números Reais 38
4.2. Definição dos Números Auxiliares 41
4.3. Relação entre os Números Reais e os Números Auxiliares. 42
4.4. Relação de Ordem dos Reais 43
4.5 Adição em $\Re$ 45
4.6 Propriedades da Adição 47
4.7 Multiplicação em $\Re$ 50
4.8 Propriedades da Multiplicação 52
4.9 Teorema do Supremo 55
4.10 Identificação de *Q* com *Q’* 57

5 Considerações Finais 59

6 Referências Bibliográficas 60

Lista de Tabelas e Figuras

Tabela 1 - Sistema sexagesimal 14

Tabela 2 – Propriedade dos números racionais 30

1
Introdução

A escolha do tema construção dos números reais foi feita após a percepção que a apresentação desses números em alguns livros didáticos, e consequentemente a forma que professores introduzem e aprofundam tal tema, é feita em alguns casos de maneira superficial. Assim, estudantes do ciclo básico acabam por construir esse campo numérico de forma equivocada.

Tal tema no ciclo básico escolar representa a passagem de uma matemática concreta para uma matemática abstrata. Em geral, os alunos desse ciclo têm dificuldade em perceber os números irracionais como conjuntos, bem como a sua incomensurabilidade. Outra dificuldade que encontram é a localização na reta numérica, a percepção que a reta numérica não pode ser toda preenchida pelos números racionais causa certa estranheza a estes estudantes. Uma das formas mais comuns de se introduzir esse assunto nessa fase é pedir que o aluno localize na reta entre quais inteiros está localizada a raiz quadrada de 2. Em geral a resposta é imediata, está localizada entre 1 e 2, pois $1^2=1$ e $2^2=4$. A pergunta seguinte formulada pelo professor é: “É possível com exatidão localizar esse valor entre 1e 2?” E a essa pergunta não é dada uma resposta satisfatória por parte do educando.

Mas a responsabilidade não é unilateral, o tema é colocado de forma pouco esclarecedora em alguns livros didáticos e em algumas vezes de forma incorreta, o que traz dificuldades para o real entendimento do assunto, quando o domínio dessa construção é pré-requisito para a compreensão de outros conceitos no campo da matemática e até mesmo de outras ciências.

O objetivo desse trabalho é fornecer subsídios para aqueles que desejam trabalhar tal tema, servindo de auxílio ao professor do ensino fundamental e médio, para que seja possível transmitir o assunto de forma mais esclarecedora e aprofundada.

Esta pesquisa propõe que o assunto seja abordado em três partes, que se complementam para que se possa ter um panorama da construção dos números reais, o objetivo desse trabalho.

Na primeira parte, é apresentado o processo evolutivo dos números desde o início da contagem até o desenvolvimento de técnicas que proporcionaram ao homem ao longo do tempo estabelecer um sistema de numeração em cada civilização.

A segunda parte trata dos números naturais e números racionais bem como de suas propriedades, além das ideias de *supremo* e *ínfimo* de um conjunto numérico, que servirão de auxílio na construção dos números reais.

Já na terceira, é feita a construção dos números reais. Para tal, estudou-se o trabalho do matemático Richard Dedekind (1831-1916), em especial seu método de cortes. Assim, a fundamentação teórica respaldou-se no trabalho de Dedekind (1872).

As considerações finais respondem às colocações mencionadas na introdução desta pesquisa quanto à dificuldade de um entendimento da construção dos números pelos alunos, fundamentando os conhecimentos matemáticos dos mesmos de forma consistente.

2
A Evolução Dos Sistemas De Numeração

Neste capítulo, será apresentada a evolução dos sistemas de numeração com origem no princípio de contagem.

2.1
Início da Contagem

Do mesmo modo que nos dias atuais necessitamos fazer uso da contagem para relacionarmos objetos e quantidades, tal necessidade já fazia parte da vida do homem primitivo.

Exemplos práticos não faltam: o pastor que contava seu rebanho; o comerciante, o número de produtos vendidos em um dia de trabalho; a dona de casa, os sacos de arroz que possui em sua dispensa. Em todas estas circunstâncias, portanto, percebemos a realização da contagem.

A contagem parece retroceder mesmo à época dos caçadores nômades, como atestam alguns documentos, por exemplo, o osso de Ishango. Existem discussões a respeito da teoria relacionada ao início da contagem a partir do osso de Ishango, encontrado na África em 1960, datado entre vinte mil e dez mil anos a. C. e que apresenta traços talhados divididos em colunas, o que demonstra, para alguns cientistas, o uso da contagem e uma compreensão da matemática. É importante que, mesmo não tendo ideia de número, a necessidade de contagem levou o homem a relacionar pedras ou ossos ao seu rebanho. Desta forma, para cada animal pescado ou caçado atribuía-se uma pedra ou um osso, e assim era possível saber se algum animal teria sido perdido ou comido. (*ROQUE, tópicos de história da matemática, pág.2)*

Certamente existe uma relação entre a escrita e a contagem. Na antiga Mesopotâmia os sumérios deixavam registros em placas de barro, desenvolvendo a escrita cuneiforme. Esses rabiscos foram reconhecidos como a primeira aparição da escrita ideográfica, que progrediu até a escrita alfabética usada hoje.

Porém, a contagem não veio apenas desta necessidade de controle de produtos para a subsistência, mas também para organizar uma sociedade que crescia.Dessa forma, surgem, ao longo do tempo, variados sistemas de numeração em várias civilizações como a mesopotâmica, a egípcia, a babilônica, a grega, a romana e a moderna.

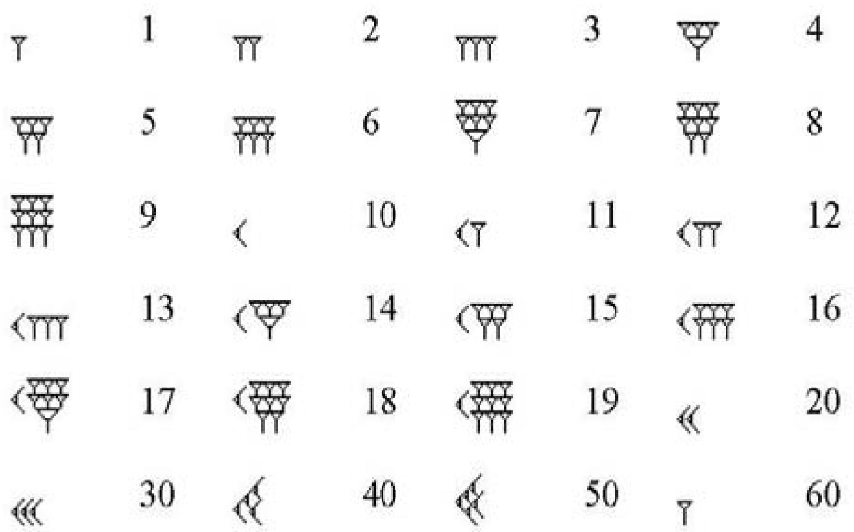
2.2
Os Sistemas de Bases

Vamos analisar como a contagem pode ser feita:Tomemos os 10 primeiros números naturais, por exemplo. É habitual contarmos com os dedos até 10. O que fazemos é estabelecer uma correspondência entre cada dedo e seu número correspondente. Ora, como possuímos 10 dedos estabelece-se assim um grupo. Então, a cada dez números reinicia-se a contagem. Essa contagem baseia-se em dez, a base utilizada é a base dez, o que gerou o nosso sistema decimal de numeração.

Não é de se surpreender que essa tenha sido uma das primeiras bases a ser utilizada pelo homem. O nome dígito, que designa os números naturais tem sua origem do latim "digitus" que significa dedo. Embora a base 10 seja usual em nossa cultura, existem outras bases, que podem ter também grande importância. Assim, por exemplo, podemos escrever o número 3012 como um número expresso na base 4 com os símbolos 0, 1, 2 e 3. e escrevemos $(3012)_4$. Para escrever um número dado numa determinada base para a base 10, procedemos da seguinte maneira:

$(3012)_4 = 3 . 4^3 + 0. 4^2 + 1. 4 + 2 = 198$ (*CARAÇA,1942b*)

Durante o período *Babilônio Antigo,* por volta de 2000 a 1600 a.C, os escribas babilônios responsáveis pelos registros das antigas civilizações, utilizavam um sistema de base sessenta, que consiste em um processo aditivo de símbolos que se inicia no número um até dez, sendo o dez representado por um símbolo diferente. O processo aditivo prosseguia dessa forma até o número sessenta, quando se volta a utilizar o símbolo do número um como pode ser visto na figura abaixo. (*ROQUE, tópicos de história da matemática, pág.8)*



Esse sistema usa um agrupamento de base sessenta, conhecido como *sistema sexagesimal.*

Ao observarmos tal sistema, percebemos a combinação de base sessenta com a base dez, pois os símbolos até cinquenta e nove mudam de dez em dez.

Ainda hoje, o sistema sexagesimal é utilizado em nosso dia a dia para representar horas, minutos e segundos.

Acredita-se que um grande motivador desse sistema de numeração deve-se ao fato de que o número sessenta é divisível por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 que são os menores naturais.

2.3
Valor Posicional

Quando falamos de base 10, estamos simplesmente pensando em grupos de 10, sem falar em “valor posicional”; isto é, dada uma coleção de 38 objetos, podemos perguntar: Quantos grupos de 10 iremos formar?

Só formaremos 3 grupos de 10. E os 8 objetos restantes?

A importância do valor posicional é evidente quando tentamos escrever um numeral para expressar essa quantidade de objetos. Em vez de escrever “três grupos de 10 e mais oito”, simplesmente escrevemos 38 e concordamos que o numeral na “segunda posição”, “3”, neste caso, deve representar o grupo de 10. (*BRUMFIEL, 1972, p. 23*). O mesmo é válido para um número que possui parte inteira e parte fracionária.Por exemplo, o número 234,67 pode ser decomposto como

$2 . 10^2 + 3. 10^1 + 4. 10^0 + 6. 10^{-1} + 7. 10^{-2}$

Generalizando, podemos escrever um número racional *r* na base *b*, com *b* sendo número natural diferente de um da seguinte maneira:

$r = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-t} b^{-t}$, n, t ЄN

Isso significa que $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0$ representa a parte inteira e

$a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-t} b^{-t}$ representa a parte fracionária.

2.4
A Matemática Babilônia e Egípcia

Arqueólogos pesquisam a antiga Mesopotâmia (desde meados do século XIX) na busca de tabletes de argila que contenham fontes fundamentais para se estudar a civilização babilônia. (*Eves, introdução à história da matemática, pág.57*)

De cerca de meio milhão de tabletes, quase 400 foram identificados como estritamente matemáticos, sendo metade desses utilizados para operações de multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados, cubos e exponenciais. A outra parte eram listas de problemas matemáticos que envolviam juros simples, juros compostos, créditos, débitos, problemas de cálculos de áreas e volumes, entre outros. *(Eves,introdução à história da matemática,pag.58)*

Perto de 2000 a.C. os babilônios possuíam uma aritmética bastante sofisticada que lhe permitia resolver problemas que hoje chamaríamos de problemas de segundo grau. *(Eves,introdução à história da matemática,pag.58).* As equações de segundo grau eram resolvidas pelo método de completar e aproximar geometricamente quadrados. Tábuas de quadrados e cubos dos inteiros de 1 a 30 faziam parte dos registros de tais tabletes, bem como a sequência de valores de $n^2 + n^3$. (Eves, *Introdução à história da matemática,pag.62)*

Os babilônios formularam algumas aproximações interessantes de raízes quadradas não exatas, como 17/12 para √2 e 17/24 para 1/√2. Acredita-se que eles utilizavam um método geométrico que em nossa linguagem algébrica atual pode ser escrito como

$$(a^2 + b)^{1/2} = a + b/2a^a$$

Uma aproximação de √2 pode ser encontrada no tablete Y7289, da Universidade de Yale, de cerca de 1600 a.C: *(Eves,introdução à história da matemática,pag.63)*

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1,4142155$$

A geometria babilônia está diretamente interligada com mensurações. Os babilônios estavam familiarizados com as áreas do retângulo, do triângulo retângulo, triângulo isósceles, possivelmente de um triângulo qualquer, do trapézio, volume do paralelepípedo retângulo, volume do prisma reto. Consideravam o comprimento de uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado igual à circunferência respectiva, utilizavam $\pi = 3$ e com isso se obtinha o volume de um cilindro reto fazendo o produto da base pela altura. Quanto ao volume da pirâmide de base quadrangular cometia-se um erro conceitual: era feito o produto da altura pela semi soma da base. Os babilônios também trabalhavam com triângulos semelhantes e sabiam que a perpendicular traçada do vértice de um triângulo isósceles divide a base em dois segmentos congruentes. *(Eves,introdução à história da matemática,pag.60)*

Sem dúvida a divisão da circunferência em 360 partes iguais é uma herança da civilização babilônia. Registros mostram que uma espécie de *milha babilônica*, que corresponde a sete milhas atuais, era utilizada para medir grandes distâncias e naturalmente o tempo para se percorrer essa distância foi adotada para se estabelecer a relação de espaço com o tempo.Como se determinou que um dia era formado de 12 milhas tempo e um dia completo equivale a uma revolução do céu, dividiu-se um ciclo completo em 12 partes iguais. Mas, por convenção, a milhas tempo babilônica foi dividida em 30 partes iguais. Dessa forma chegamos a 360 partes iguais num ciclo completo.

Na antiga matemática egípcia os papiros Rhind e de Moscou descrevem os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso de frações unitárias, seu emprego na regra de falsa posição, sua solução para o problema da área de um círculo e muitos problemas práticos.Vinte e seis dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind são geométricos.

Uma das consequências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo. A multiplicação e a divisão podem ser efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser escrito como uma soma de potências de 2. Por exemplo, tomemos o produto de 26 por 33. Como 26 é representado por 16 + 8 + 2, basta somarmos os múltiplos de 33 referentes a 2, 8 e 16.*(Eves,introdução à história da matemática,pag.70)*

As frações unitárias eram indicadas, na notação hieroglífica egípcia, por um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Um símbolo especial era usado para a fração 2/3 e outro para 1/2.

Assim como para os babilônios, o grande motivador para medir perímetros, áreas e volumes era agricultura. Os egípcios supunham que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro e que o volume é o produto da área do círculo pela altura. Estudos mostram que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é a metade do produto da medida da base pela altura.

2.5
A Matemática Grega

A revolução agrícola teve início por volta de 10000 a.C., com a expansão do cultivo de novos cereais, fazendo com que o homem não ficasse apenas dependente da caça e da pesca, o que levou a uma nova estrutura na civilização, com uma crescente urbanização.

Sem dúvida, os grandes cientistas do mundo antigo viveram na pequena Grécia, uma reunião de cidades-estado localizada numa região de ilhas e penínsulas rochosas no extremo leste do mar Mediterrâneo, fronteira com as civilizações orientais. Esse fato propiciou entre 1200 e 1150 a.C. seguidas invasões bárbaras que causaram à Grécia uma época de pouco desenvolvimento intelectual. No período seguinte da história grega, por volta de 800 a.C., teve inicio o chamado *Período Helênico* pelos historiadores, como foi citado no parágrafo anterior, com um progresso intelectual e científico que é considerado por muitos, uma das épocas mais notáveis da história. *(Eves,introdução à história da matemática,pag.99)*

Embora existissem dezenas de cidades estado na antiga Grécia, algumas tiveram papel predominante no desenvolvimento da civilização. Mileto e Esmirna, situadas nas costas da Jônia, hoje Turquia, eram cidades-empório. Rodes, Delos e Samos se dedicavam à pesca e comércio. Olímpia promovia os famosos Jogos Olímpicos. Porém, as cidades mais importantes da Grécia eram a comercial e intelectual Atenas e a militarista Esparta.

Pela primeira vez na matemática o homem começou a formular questões como “Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “ Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?” Algumas experiências com métodos demonstrativos e deduções matemáticas dão origem à nossa matemática. Para o filósofo e matemático Platão, este novo tipo de pensamento, deveria ser fundamentado em demonstrações claras. Mais tarde, Aristóteles desenvolverá cientificamente a lógica, em que os critérios de comprovação de uma ideia estarão ligados à pura coerência e ao rigor de tais demonstrações.

A geometria demonstrativa foi iniciada por Tales de Mileto, um dos sábios da antiga Grécia. Atribui-se a Tales os seguintes resultados:

- Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
- Dois triângulos são congruentes quando possuem dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais.

Outro grande matemático da antiga Grécia citado por historiadores é Pitágoras. Ao que parece nasceu por volta de 572 a.C. na ilha de Santos. É possível que tenha sido discípulo de Tales, pois era alguns anos mais jovem e morava perto de Mileto, onde vivia Tales.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números naturais. A procura das propriedades dos números (a *aritmética,* no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. *(Eves,introdução à história da matemática,pag.98)*

Atribui-se a Pitágoras a descoberta dos *números amigáveis*. Dois números são amigáveis quando a soma dos divisores próprios de um deles resulta no outro e vice-versa. Por exemplo, 284 e 220 são amigáveis porque os divisores de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 cuja soma é 284, ao passo que os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142 cuja soma é 220.

Atribui-se ainda a Pitágoras os *números perfeitos*. Um número se diz perfeito se é igual a soma de seus divisores próprios. Por exemplo, os divisores próprios do número 6 são 1, 2, 3 cuja soma resulta em 6.*(Eves,introdução à história da matemática,pag.99)*

Pitágoras, além do famoso resultado conhecido como *teorema de Pitágoras*, atribuído tradicionalmente a ele, sem nenhuma comprovação histórica,"(*Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*)", utilizava razões entre números naturais, pois, acreditava que tudo pode ser expresso e compreendido desta forma. Entende-se assim, o choque da descoberta dos números irracionais.

Os números racionais possuem uma interpretação geométrica simples: Marque dois pontos distintos O e I numa reta horizontal (I à direita de O) e tome o segmento OI como unidade de comprimento. Admitindo-se que os pontos O e I representam os números 0 e 1, respectivamente, então os inteiros positivos e negativos podem ser representados por um conjunto de pontos da reta convenientemente espaçados a intervalos unitários, os positivos à direita de O e os negativos à esquerda de O. As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos gerados em q partes. Então, para cada número racional, há um ponto na reta. A princípio parecia evidente que todos os pontos da reta seriam usados dessa maneira. Os pitagóricos provaram que não há nenhum número racional que corresponda a um ponto P da reta no caso em que OP é a diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade. Tais números vieram a se chamar *irracionais.*

Para provar que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser representado por um número racional, basta provar que $\sqrt{2}$ é irracional, como faremos no último capítulo desse trabalho.

Com essa ideia apresentada, surge a questão das grandezas incomensuráveis. Como medir significa essencialmente comparar, ao dispor de duas grandezas do mesmo tipo (comprimentos, áreas, volumes, tempo, entre outras), precisamos subdividir uma delas em partes unitárias de tal forma que essa unidade caiba um número inteiro de vezes em cada grandeza estabelecida. Suponhamos por exemplo dois segmentos A e B. Como B não cabe um número de vezes em A, podemos dividir B em três partes iguais e tomar uma das partes como sendo um terço de B. Como esta unidade cabe 4 vezes em A, dizemos que a razão de A para B é 4/3 e assim estabelecemos os números racionais. A grande dúvida é se seria sempre possível subdividir uma grandeza de tal forma que a sua parte unitária coubesse em outra grandeza. A resposta é que nem sempre isso é possível. Apesar de nossa intuição nos levar a acreditar que isso seja possível, nosso trabalho vai mostrar que esse pensamento é equivocado e nem sempre essa unidade poderá ser obtida.

2.6
A Matemática no Oriente

Um relato da história da matemática da China antiga começa no período Shang, com algumas inscrições em ossos e carapaças de tartarugas que revelam um sistema de numeração decimal bem próximo ao que é utilizado atualmente. (*Eves, introdução à história da matemática, pág.242*)

Em um dos trabalhos chineses mais antigos, o *I-King*, ou "*Livro das permutações*" que data do período Shang (1182-1135 a.C.) encontra-se o *Liang I*, ou "os dois princípios" (o masculino *yang*, - ,e o feminino *ying*, --). A partir dele formam-se oito símbolos colocados em colunas de figuras chamadas de *Pa-kua*:

—   – –   —   – –   —   – –   —   – –

—   —   – –   – –   —   —   – –   – –

—   —   —   —   – –   – –   – –   – –

Esses oito símbolos, aos quais estão ligados vários atributos, entre eles adivinhações, também podem ser pensados como um sistema de numeração binário. Tomando-se o traço (-) como um e dois traços (- -) como zero, sucessivas colunas de traços mostrados acima, começando da direita para a esquerda e de baixo para cima representam os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.(*Eves, introdução à história da matemática,pág.242*)

O mais importante dos textos chineses é o *K'ui-ch'angSuan-shu*, ou *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, do matemático Liu Hiu,que data do período Han (206 a.C.- 221 d.C.) e que é muito provavelmente a síntese da matemática chinesa antiga. Nele, podem ser encontrados cálculos em situações-problemas como agricultura, porcentagem e proporções, resolução de equações.(*Eves, introdução à história da matemática,pág.243*)

No período pós-Han, encontramos muitos matemáticos dedicados à tarefa de calcular uma aproximação para π, a razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Credita-se a um general do século III, chamado Wang Fan, a aproximação racional 142/45 de π, ou seja, $\pi = 3{,}155$. (*Eves, introdução à história da matemática, pág.243*)

Cerca de dois séculos mais tarde, Tsu Ch'ung-Chih(430-501) e seu filho, chegaram 'a conclusão de que $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1427$ e a notável aproximação racional 355/113, que fornece π corretamente até a sexta casa decimal. Essa aproximação racional só foi percebida na Europa em 1585. (*Eves, introdução à história da matemática, pág.245*)

O grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa, ainda é uma questão pouco conhecida, mas há evidências de que isso ocorreu de fato, apesar de se conhecer pouco a parte desempenhada pelos hindus no nosso sistema de numeração. (*Eves, introdução à história da matemática,pág.249*)

O desenvolvimento de algoritmos para nossas operações aritméticas elementares começou na Índia, talvez por volta do século X ou XI. Esses algoritmos foram adotados pelos árabes e mais tarde levados à Europa Ocidental, onde se modificaram até a forma atual. (*Eves, introdução à história da matemática,pág.251*)

A adição hindu antiga talvez fosse efetuada da esquerda para a direita, e não da direita para esquerda, como utilizamos hoje. Como exemplo, vamos considerar a adição de 345 e 488. Provavelmente se escreviam os números um sob o outro. O cálculo era feito da seguinte maneira 3 + 4 = 7 e escrevia o 7 no topo da coluna da esquerda. A seguir apagava-se o 7 e escrevia-se 82. Por fim 5 + 8 = 13, o que mudava o 2 por 3, seguido de outro 3 e a resposta final , 833, aparecia no topo da tábua.

8 3

~~7~~ ~~2~~ 3

3 4 5

4 8 8

Vários métodos de multiplicação eram usados. O processo para a multiplicação simples, digamos de 569 por 5, era como a segue, quando novamente se trabalha da esquerda para a direita. Na tábua, escreve-se 569 seguido, na mesma linha, pelo multiplicador 5. Então, como 5 x 5 = 25, escreve-se 25 sobre o 569. A seguir, faz-se 5 x 6 = 30, o que muda o 5 de 25 num 8 seguido de um 0. Então 5 x 9 = 45, o que muda o 0 por um 4, seguido de um 5. O produto final, 2845, aparece então no topo da tábua.*(Eves,introdução à história da matemática,pag.253)*

8 4

2 ~~5~~ ~~0~~ 5

5 6 9 5

Os hindus não eram especialistas em geometria. Eram pouco comuns as demonstrações e era inexistente a presença de postulados e axiomas. Sua grande contribuição à história da matemática talvez tenha sido de fato os cálculos aritméticos, principalmente no que diz respeito a medidas. Há soluções do problema de quadrar um círculo que equivalem *a tomar* $d = (2 + \sqrt{2})\, s / 3$ *e* $s = 13d/5$*, em que d é o diâmetro do círculo e s é o lado do quadrado igual. Também* *aparece a expressão* $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3)(4)} - \frac{1}{(3)(4)(34)}$, *aproximação* correta até cinco casas decimais.*(Eves, introdução à história da matemática,pag.257)*

Por volta de 300 a.C., em Alexandria, o matemático grego Euclides escreveu o que é considerado um clássico da literatura matemática, os *Elementos* de Euclides. Os *Elementos* estão organizados em treze livros, mas pesquisas mostram que não são organizados cronologicamente. Por exemplo, os resultados dos primeiros livros nem sempre são os mais antigos. O fato de a obra utilizar régua e compasso nas construções matemáticas valoriza a matemática teórica de Platão que tinha desprezo pelas construções mecânicas feitas com ferramentas. Para Platão, a régua e o compasso, apesar de serem objetos físicos, têm representações abstratas, puras, respectivamente a linha reta e o círculo.*(Eves,introdução à história da matemática,pag.166)*

Nos *Elementos*, o tratamento dos números é separado do tratamento das grandezas. Contudo, tanto as grandezas quanto os números são simbolizados por segmentos de reta. Enquanto os números são agrupamentos de unidades que não são divisíveis; as grandezas geométricas são divisíveis em partes da mesma natureza (uma linha é dividida em linhas, uma superfície, em superfícies etc.) A medida está presente nos dois casos, mas mesmo quando uma proposição sobre medida possui enunciados semelhantes para números e grandezas, ela é demonstrada de modos diferentes. As primeiras definições do livro VII apresentam a noção de número e o papel de medida: *(Eves,introdução à história da matemática,pag.169)*

Definição VII-1

Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.

Definição VII-2

E número é a quantidade composta de unidades.

Definição VII-3

Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.

Essa última definição postula que um número menor é uma parte de outro número maior quando pode medi-lo, ou seja, os números são considerados segmentos de reta com medidas inteiras. Por exemplo, um segmento de tamanho 2 não seria parte de um segmento de tamanho 3, mas sim de um segmento de tamanho 6. Os números servem para contar, mas antes de contar é necessário estabelecer uma unidade de contagem. A "unidade", na definição de Euclides, é o que possibilita a medida, mas não é um número. Sendo assim, é inconcebível a subdivisão da unidade.

A definição 5 do livro V, é utilizada na resolução de problemas relativos ao cálculo de comprimentos e áreas de figuras curvas. Com essa definição, a comparação de razões adquire um caráter geométrico. Os objetos matemáticos, na época, podiam ser números, grandezas, razões entre números e razões entre grandezas. A homogeneidade desses objetos só existirá quando a razão entre duas grandezas quaisquer puder ser identificada como um número que até então não representava uma situação geral. Isso só será possível, muitos séculos mais tarde, com definição de números reais.

2.7
A Matemática na Idade Média e Moderna

O desenvolvimento da ciência na Europa foi impulsionado pela criação, a partir do século XII, das primeiras universidades, como as de Paris, Oxford e Bolonha. Os currículos de ensino matemático baseavam-se na aritmética, geometria, lógica, astronomia.

O período conhecido como Renascimento foi marcado pelo desenvolvimento das práticas algébricas e uma geometria baseada nos *Elementos* de Euclides. Datam desse período, por exemplo, os trabalhos de Viète sobre a arte analítica, que deram origem a um novo modelo de resolver problemas geométricos por meio de álgebra.

Durante o século XVI, os números irracionais apareciam frequentemente como raízes de equações e eram, muitas vezes, aproximados por somas infinitas. No entanto, não se sabia se esses números deviam ser realmente tratados como números.

Em 1544, o matemático alemão Michael Stifel, ao investigar proposições sobre figuras geométricas substituindo linhas por suas medidas, observa que a "nuvem de infinidade" na qual está imerso um número irracional pode ser compreendida pelo fato de esse número não possuir uma representação decimal.

Em 1585, o holandês Simon Stevin defendeu uma representação decimal para os números fracionários e mostrou como estender os princípios da aritmética com algarismos indo arábicos para representar tais números. Apesar de escrever as casas decimais de um número racional sem o uso de vírgula, a expansão de casas decimais proposta em seu trabalho seria de grande valia para a aproximação de um número irracional por um número racional.

> A introdução da representação decimal com vírgulas foi um passo importante para se reconhecer um número irracional, uma vez que se confirmava a ideia de que entre dois números quaisquer é sempre possível encontrar um terceiro, aumentando-se a quantidade de casas decimais. Não por acaso, Stevin foi um dos primeiros matemáticos do século XVI a dizer que o irracional deve ser admitido como um número, uma vez que pode ser aproximado por racionais. (*ROQUE, história da matemática,pág.425)*

Durante o século XVII diversos trabalhos mostraram exemplos de curvas que eram dadas por uma sucessão infinita de operações algébricas. Os números irracionais eram utilizados sem que sua natureza matemática precisasse ser investigada. Pascal afirmava que os números irracionais deviam ser entendidos somente como símbolos, não possuindo existência independente de grandezas geométricas contínuas. Um número como $\sqrt{2}$, por exemplo, deveria ser entendido como uma grandeza geométrica.

> Com Leibniz e Newton, o cálculo infinitesimal passou a usar sistematicamente as séries infinitas. A noção de que um ponto qualquer da reta está associado a um número ficava implícita (*ROQUE, história da matemática, pág.434)*

Nesse período, o cálculo de áreas já estava distante da tradição euclidiana e buscava associar a área a um número. O método utilizado era a manipulação de séries infinitas, o caso da técnica utilizada por Pascal e Fermat. A solução de problemas envolvendo quadraturas e equações diferenciais fez proliferar o uso de séries.

A questão de determinar a área do círculo, por exemplo, que Leibniz desejava exprimir por um número, promovia a união entre o contexto de curvas e o universo dos números, introduzindo o número irracional π .

Esse movimento levou à afirmação de que a soma da série dada por $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ que designa a área limitada por um círculo de diâmetro 1, é um número. A soma total da área era entendida como um valor exato que podia ser designado pelo número transcendente $\frac{\pi}{4}$. A questão não era apenas lidar com números irracionais que apareciam como raízes de equações algébricas; havia outros números que não podiam ser associados a raízes de equações.Euler abordou esse problema, procurando identificar as diferenças entre números algébricos e transcendentes, os primeiros podendo ser obtidos como raízes de uma equação e os segundos não. Os irracionais algébricos eram raízes de equações com coeficientes inteiros, os outros dos quais se conheciam apenas π e *e*, eram transcendentes.

A associação de curvas a equações, desde Descartes, assumia implicitamente a equivalência entre a reta e o conjunto dos reais com base na evidência geométrica, sem preocupação com o problema dos irracionais. No entanto, essa equivalência deixou de ser natural a partir do final do século XVII e no século XIX, quando definições para noções de limite, continuidade e convergência dependiam das propriedades dos números reais.

> A partir de 1870, Cantor ao pesquisar as séries trigonométricas de Fourier, afirma que a série associada a uma função é única, quando convergente e isso é válido para todos os valores *x*. Cantor concluiu que a unicidade também pode ser verificada quando a série trigonométrica deixa de ser convergente, ou deixa de representar a função, em um número finito de pontos excepcionais. Logo depois, Cantor vai além, ao perceber que sua conclusão ainda era válida mesmo que o número desses pontos excepcionais fosse infinito, desde que estivessem distribuídos na reta de um modo específico. Para estudar essa distribuição dos pontos, era necessário descrever os números reais de um modo mais meticuloso e detalhado, sem supor, implicitamente e de forma vaga, que esses números fossem dados pelos pontos da reta.(*ROQUE, História da Matemática, pág.434)*

O trabalho de Cantor sobre esse assunto foi publicada em 1872, mas Richard Dedekind já vinha refletindo sobre um estudo mais específico dos números reais. Em trabalho publicado no ano de 201, fazendo referência a reflexões anteriores, de acordo com Dedekind:

> Discutindo a noção de aproximação de uma quantidade variável em direção a um valor limite fixo...recorri a evidências geométricas...É tão frequente a afirmação de que o cálculo diferencial lida com quantidades continuas, mas uma explicação dessa continuidade ainda não é dada.[1]

A fim de caracterizar a continuidade, Dedekind julgava necessário o estudo da continuidade, o que o levou à criação dos chamados "cortes de Dedekind".

Até esse momento, a continuidade dos números reais era tratada apenas como um dado e não um problema. Para obter um conjunto numérico que traduza fielmente a continuidade da reta, Dedekind usou um procedimento que se tornaria frequente na matemática. Sempre que encontrarmos um número não racional ao se produzir um corte na reta esse número será unido aos racionais gerando um conjunto, que gozará da propriedade de continuidade da reta, chamado de "conjunto dos números reais".

[1] ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

3
Os Números Racionais

O objetivo neste capítulo é definir os números racionais e apresentar suas principais propriedades. Admitiremos a familiaridade do leitor com as propriedades dos números naturais e inteiros. Vamos também elucidar ao leitor conceitos de cotas, supremos, ínfimos, conjuntos limitados, máximos e mínimos de intervalos. Esses conceitos serão úteis no próximo capítulo.

3.1
O Que são os Números Racionais?

Chamaremos de números racionais aos números da forma $\frac{a}{b}$, com a e b números inteiros e $b \neq 0$; o conjunto dos números racionais é indicado por Q , assim:

$$Q = \{ \frac{a}{b};\ a,b \in Z \text{ e } b \neq 0 \}$$

em que Z indica o conjunto dos números inteiros: Z = {...,-3 ,-2, -1, 0, 1 2 3 ...}.Indicaremos, ainda, por N o conjunto dos números naturais: N = { 0 , 1 ,

2 , ... }.

Notamos também que N é subconjunto de Z, que, por sua vez, é subconjunto de Q; isto é, todo natural é inteiro e todo inteiro é racional, logo todo natural é racional.

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois racionais quaisquer. A *soma* e o *produto* destes racionais são obtidos da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

A operação que a cada par de números *racionais* associa sua soma denomina-se *adição*, e a que associa o produto denomina-se *multiplicação*.

O número racional $\frac{a}{b}$ se diz positivo se $a, b \in$ N com a≠0 e b≠0.

Sejam r e s dois racionais; dizemos que *r é estritamente menor* que s (ou que s é estritamente menor que r) e escrevemos $r < s$ (respectivamente $s > r$) se existe um racional t estritamente positivo tal que $s = r + t$. A notação $r \leq s$ (leia: r menor ou igual s) é usada para indicar a afirmação "$r < s$ ou $r = s$".

A notação $r \geq s$ (leia: r maior ou igual s) é equivalente a $s \leq r$.

Observe que r positivo equivale a $r \geq 0$. Se $r \leq 0$, dizemos que r é negativo.

3.2
Propriedades dos Números Racionais

Os números racionais x, y, z satisfazem as seguintes propriedades:

Adição	**Multiplicação**
Associativa	*Associativa*
$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)\, z = x\, (yz)$
Comutativa	*Comutativa*
$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Existência de Elemento Neutro	*Existência de Elemento Neutro*
$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$

Existência de Oposto	*Existência de Inverso*
Para todo racional x existe um único racional y tal que $x + y = 0$. Tal y denomina-se *oposto* de x e indica-se por $-x$. Assim, $x + (- x) = 0$.	Para todo racional $x \neq 0$ existe um único racional y tal que $x \cdot y = 1$. Tal y denomina -se inverso de x e indica-se por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Assim, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Pode-se demonstrar que valem, também, os seguintes resultados

Distributividade da Multiplicação em relação à Adição

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Reflexividade

$x \leq x$

Anti-simétrica

Se $x \leq y$ e $y \leq x$, *então,* $x = y$

(leia-se: se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ ou $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$)

Transitividade

Se $x \leq y$ e $y \leq z$ *então* $x \leq z$

(Sendo x menor que y e y menor que z então x é menor que z)

Quaisquer que sejam os racionais ***x*** *e* ***y***

$x \leq y$ ou $y \leq x$ (Relação de ordem entre dois racionais)

Compatibilidade da Ordem com Adição

Se $x \leq y$ *então* $x + z \leq y + z$(Somando-se a ambos os membros de uma desigualdade um mesmo número, o sentido da desigualdade se mantém).

Compatibilidade da Ordem com a Multiplicação

Se $x \leq y$ e $0 \leq z$ *então* $x \cdot z \leq y \cdot z$ (Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sentido da desigualdade se mantém).

Os números racionais podem ser representados geometricamente por pontos de uma reta.

Se o ponto P representa um número racional r sobre a reta, então, diremos que r é *abscissa* de P.

Todo número racional r é abscissa de um ponto da reta; entretanto, nem todo ponto de reta tem abscissa racional. Antes de construir um ponto da reta que não tem abscissa racional, vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1: Seja a um número inteiro.

Prove que:

(i) se a for ímpar, então a^2 também será ímpar;

(ii) se a^2 for par, então a também será par.

Solução:

(i) Como a é ímpar, a é da forma $a = 2k + 1$, k inteiro. Então:

$a^2 = (2\,k + 1)^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 = 2\,(2\,k^2 + 2\,k) + 1$; como $2k^2 + 2k$ é inteiro, resulta a^2 ímpar.

(ii) Por hipótese a^2 é par, por (i) teríamos a^2 ímpar, o que contraria a hipótese. Assim, Se a^2 é par então a é par

Exemplo 2: A equação $x^2 = 2$ não admite solução em Q.

Solução:

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista um racional $\frac{a}{b}$ tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ então:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ par} \Rightarrow a \text{ par;}$$

Sendo a par, será da forma $a = 2p$, p inteiro:

$$a^2 = 2b^2 \text{ e } a = 2p \Rightarrow 4p^2 = 2b^2 \Rightarrow 2p^2 = b^2.$$

Assim, b^2 é par e, portanto b também. Sendo a e b pares, a fração $\frac{a}{b}$ é redutível o que é uma contradição. *(GUIDORIZZI, 2005, p. 1)*

3.3 Cotas

Seja X um subconjunto da reta racional Q e seja k um número racional. Diz-se que *k é cota superior* para X se todo $x \in X$ satisfizer $x \leq k$. Por exemplo, *4* ; *5* e *17* são cotas superiores para (*1*,*4*]. Por outro lado *2* não é cota superior para (*1*,*4*], pois $3 \in (1,4]$ e $3>2$.

Analogamente, diz-se que um número *sé cota inferior* para X se todo $x \in X$ satisfazer $x \geq s$. Por exemplo, *0*; *-1*; e -2 são cotas inferiores de (*1,4*], enquanto *5* não é cota inferior, pois $4 \in (1,4]$ e $4<5$.

Exemplos :

1. Se $X = \{-2, -1, 0, 4, 27\}$ segue que -8, -10 e -3 são cotas inferiores de X e 27, 33 e 427 são cotas superiores.

Observe que -1 não é cota superior nem inferior, pois -2 e 0 são elementos de X e $-2< -1<0$.

2. Se $X = \{1/n$; n é número natural$\}$ é fácil ver que 1, 8 e 10 são cotas superiores para X e que 0 e -10 são cotas inferiores.

Por outro lado, $1/2$ não é cota superior de X, pois $1 \in X$ e $1/2<1$.

3. É fácil ver que 2 é, simultaneamente, cota superior e inferior do conjunto $\{2\}$.
4. A semi-reta $(-\infty, 1)$ não tem cota inferior. Para ver isto basta mostrar que se k for um número real, então k não é cota inferior de $(-\infty, 1)$. Para isto basta observar que k satisfaz a desigualdade $k> -|k| - 1$. Como $-|k| - 1 \in (-\infty, 1)$ segue-se que k não é cota inferior de $(-\infty, 1)$. É imediato que 1, 33 e 29 são cotas superiores de $(-\infty, 1)$.
5. O conjunto N dos números naturais não tem cota superior, pois se k for um número real, existe um número natural $n>k$. Entretanto 0, -1 e $-\pi$ são cotas inferiores para N. O conjunto Z dos números inteiros, Q dos números racionais, não admitem cota inferior.
6. Fato: *Qualquer número racional k é cota superior e inferior do conjunto vazio Ø.*

De fato, se k for um numero real, não existe nenhum número x em Ø tal que $x<k$. Consequentemente, k é cota superior de Ø. O mesmo tipo de raciocínio mostra que k é cota inferior de Ø.

3.4
Conjuntos Limitados

Seja *X* um subconjunto racional. Diz-se que *X* é *limitado superiormente* se *X* admite cota superior; *limitado inferiormente* se admite cota inferior e *X* é *limitado* se for limitado *inferiormente* e *superiormente*.

Exemplo: O conjunto *A* = {-2, -1, 0, 4, 27} é limitado superiormente pois27 é uma cota superior. Como -2 é cota inferior, segue-se que *A* também é limitado inferiormente, logo é *limitado*.

A semi-reta -∞ até 1 é limitada superiormente mas não é limitada inferiormente; o conjunto dos inteiros positivos $\mathbf{Z}_+$ é limitado inferiormente mas não é limitado superiormente.

3.5
Supremo e Ínfimo

Seja *X* um subconjunto não vazio de *Q* e seja *k* uma cota superior de *X*. Diz-se que *k* é um *supremo* de *X* se *k* for a menor das cotas superiores, isto é, a desigualdade $k>h$ implica que *h* não é cota superior de X.

Se *s* for cota inferior de *X*, diz-se que *s* é um ínfimo de *X* se a desigualdade $s<h$ implica que *h* não é cota inferior de *X*.

Exemplo:

1. Se *X* for o intervalo de números racionais [-1, 5), segue-se que *supX* = 5.

Para ver isto, suponhamos que $h < 5$.

Se h< 5, então $h<\frac{h+5}{2}<5$, logo $\frac{h+5}{2}\in$ X, o que mostra que h não é cota superior de [1,5).

Vimos assim que h não é cota superior de [1,5), como 5 é cota superior segue-se que *supX* = 5.

Analogamente, prova-se que *inf* X = -1.

Tem-se ainda que:

2. *Sup* $\{\frac{1}{n}$; n é número natural } = 1 e *inf* { $\frac{1}{n}$; n é número natural } = 0.

Pode-se demonstrar facilmente que o supremo e o ínfimo de um subconjunto X não vazio de Q são respectivamente únicos.

Nota: O *conjunto vazio não tem supremo nem ínfimo*. De fato, seja K um número real. Como que $k- 1$é cota superior de ø, segue que k não é supremo de ø.

Similarmente, k não é ínfimo de ø.

3.6
Máximo e Mínimo

Seja X um subconjunto não vazio de Q e $k = supX$. *Se* $k\in X$, *diz-se que k é o máximo de X* . Se $s = inf$ X e $s\in X$, diz-se que s é *mínimo* de X.

Exemplo:

Seja X = [-1, 5), se o *inf* X= -1, então, -1 é mínimo de X. Embora *supX* = 5, este conjunto não tem máximo, pois $5\notin X$.

3.7 Racionais e a reta numérica

Como os racionais podem ser representados na reta numérica, o ponto que divide os racionais em duas classes, A_1 e A_2, será dito um "corte" dos racionais. Todo número racional a determina um corte desse tipo, tal que a é o maior número em A_1, ou o menor em A_2. Mas não há somente cortes racionais.

Exemplo 1 (*corte racional*): Definimos o conjunto A_2 , contendo os racionais que 1: $A_2 = \{ q \epsilon Q \mid q < 1\}$. E A_1 contendo os outros racionais, ou seja, $A_1 = Q - A_2$. O número que produz o corte é o racional 1, nesse caso temos o exemplo de um corte racional.

Exemplo 2 (*corte irracional*): Definimos A_2 contendo os racionais positivos cujo quadrado é maior que 2, e A_1 contendo os outros racionais, ou seja:

$A_2 = \{ q \ \epsilon Q \mid q^2 > 2\} \cup \{ q \ \epsilon Q \mid q > 0\}$ e $A_1 = Q - A_2$.

O número que produz o corte não é racional, pois deve ser um número cujo quadrado é 2, ou seja, √2. Reside justamente nessa propriedade a incompletude, ou a descontinuidade dos racionais.

4
Construção dos Números Reais

Em meados do século XIX, diversos problemas matemáticos conduziam a um questionamento sobre o que é um número real e sobre como os racionais e irracionais se distribuem na reta. O estudo da convergência de séries e o uso dos limites motivaram a análise dos números e como esses números se distribuem na reta, como uma sequência de números tende para números de outro tipo; que números podem ser encontrados no meio do caminho, etc.

A fim de caracterizar a continuidade, Dedekind julgava necessário investigar suas origens aritméticas. Foi o estudo aritmético da continuidade que levou à proposição dos chamados "cortes de Dedekind". Ele começou por estudar as relações de ordem no conjunto dos números racionais, explicitando verdades tidas como óbvias, por exemplo:

se $a>b$ e $b>c$, então $a>c$. A partir daí, deduziu propriedades menos evidentes, como a de que há infinitos números racionais entre dois racionais distintos a e c. Dedekind notou que um racional a qualquer divide os números racionais em duas classes, A1 e A2, a primeira contendo os números menores que a; a segunda contendo número em A1, é menor do que um número em A2.

4.1
Definição dos Números Reais

Seja Q o conjunto dos números racionais e α um subconjunto de Q. Diz-se que α é um número real, quando satisfaz as seguintes condições:

I) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq Q$;

II) *Se* $a \in Q$, $a \in \alpha$ e $b<a$, *então*, $b \in \alpha$;

III) α *não admite máximo*.

Nota 1: Com o desenvolvimento dos estudos, o leitor verá que o número real α é na verdade uma semi-reta racional com uma "extremidade" em - ∞.

Exemplos:

a) Seja a semi-reta racional α_3 = $\{a \in Q \,/\, a < 3\}$, mostraremos que α_3 ; é um número real:

I)α_3 ;$\neq \emptyset$, pois $2 \in Q$ e $2 \in \alpha_3$

• $\alpha_3 \neq Q$, pois $4 \in Q$ e $4 \notin \alpha_3$

II) Se a , $b \in Q$, $a \in \alpha_3$. e $b<a$, então, $b < a < 3$, logo $b \in \alpha_3$

III) Se $t \in \alpha_3$., então $t < 3$ e daí : $t < \dfrac{t+3}{2} < 3$. Logo $\dfrac{t+3}{2} \in \alpha_3$

O que mostra que t não é máximo de α_3. Como t é genérico, então, α_3 não possui máximo.

Segue-se de I, II e III que α_3 é um número real.

a) Seja r um número racional. Vamos verificar que $\alpha_r = \{a \in Q / a < r\}$ é um número real:

I) • $\alpha_r \neq \emptyset$, pois $(r-1) \in Q$ e $(r-1) \in \alpha_r$;

• $\alpha_r \neq Q$, pois $(r+1) \in Q$ e $(r+1) \in \alpha_r$;

II) Se a , $b \in Q$, $a \in \alpha_r$ e $b<a$ então $b<a<r$, logo $b \in \alpha_r$;

III) Se $t \in \alpha_r$, então $t < r$ e daí : $t < \dfrac{t+r}{2} < r$.Logo $\dfrac{t+r}{2} \in \alpha_r$.

O que mostra que t não é máximo de α_r. Como t é genérico, então, α_r não possui máximo.

Segue-se de I, II e III que α_r é um número real.

Nota2: O exemplo anterior mostra que cada número $r \in Q$ dá origem ao número real α_r.

No próximo exemplo veremos um número real que não está associado a nenhum número racional. Para isto, precisamos dos seguintes subconjuntos de Q:

$Q_+ = \{a \in Q;\ a \geq 0\}$ e $Q = \{a \in Q\ ;\ a < 0\}$.

Seja $\alpha = Q_- \cup \{a \in Q_+ \,/\, a^2 < 2\}$. Mostraremos que α é um número real.

Para isto, precisamos mostrar que α satisfaz a definição 1.1

I) $\alpha \neq \varnothing$, pois $Q_- \subset \gamma$;

$\alpha \neq Q$, pois $6 \in Q_+$ e $6^2=36 > 2$, logo, $6 \notin \alpha$.

II) Sejam $a, b \in Q$, $a \in \alpha$ e $b<a$. Podemos ter os seguintes casos:

II. 1) Se $a \in Q_-$ então $b \in Q_-$, logo $b \in \alpha$;

II. 2) Se $a > 0$ e $b < 0$ então $b \in Q_-$, logo $b \in \alpha$;

II. 3) Se $a > 0$, $b > 0$. Como b $<a$, então $b^2 < a^2 < 2$, logo $b \in \alpha$.

Seja $t \in \alpha$:

Se $t \leq 0$, como $1 \in \alpha$, vemos que t não é máximo de α.

Se $t > 0$, para mostrar que t não é máximo de α, vamos calcular um número natural n, tal que, $t + \frac{1}{n} \in \alpha$, isto é, $(t + \frac{1}{n})^2 < 2$.

Desenvolvendo $(t + \frac{1}{n})^2 < 2$, temos :

$(t + \frac{1}{n})^2 = t^2 + \frac{2t}{n} + \frac{1}{n^2} < t^2 + \frac{2t}{n} + \frac{1}{n} = t^2 + \frac{1}{n}\,(2t + 1)$, como

$(t + \frac{1}{n})^2 < 2$, segue-se que $t^2 + \frac{1}{n}\,(2t + 1) < 2$, se e somente se $n > \frac{2t+1}{2-t^2}$.

Se $n > \frac{2t+1}{2-n^2}$, então, $(t + \frac{1}{n})^2 < 2$. Vemos assim que t não é máximo de α para $t > 0$.

Como $t \leq 0$ também não é máximo de α, logo α não admite máximo.

Segue-se de I , II e III que γ é um número real..

Nota 3: Como o leitor pode observar o número real α do exemplo (c) é formado por todos os números racionais menores que $\sqrt{2}$ e, por isto, α representa $\sqrt{2}$.

4.2
Definição dos Números Auxiliares

Vimos que um número real α é uma semi-reta com "extremo" em - ∞.

Agora vamos usar as semi-retas com "extremidades" em $+\infty$ que chamaremos de números auxiliares e denotaremos pelo símbolo β.

Diremos que $\beta \subset Q$ é um número auxiliar se:

I) $\beta \neq \emptyset$ e $\beta \neq Q$;

II) *Se* $a, b \in Q$, $a \in \beta$ e $b > a$, *então*, $b \in \beta$;

III) β *não admite mínimo.*

Exemplos:

a) Seja a semi reta racional $\beta_3 = \{ a \in Q \ / \ a > 3 \}$.Mostraremos que β_3 é um número auxiliar:

I) $\beta_3 \neq \emptyset$, pois $4 \in Q$ e $4 \in \beta_3$;

$\beta_3 \neq Q$, pois $2 \in Q$ e $2 \notin \beta_3$.

II) Se a , $b \in Q$, $a \in \beta_3$ e $b > a$, então $b > a > 3$, logo $b \in \beta_3$;

III)Se $t \in \beta_3$,então $t > 3$ e daí : $t > \dfrac{t+3}{2} > 3$. Logo $\dfrac{t+3}{2} \in \beta_3$.

O que mostra que t não é mínimo de β_3 . Como t é genérico, então, β_3 não possui mínimo.

Segue-se de I, II e III que β_3 é um número auxiliar.

b) Seja r um número racional. Vamos verificar que:

$\beta_r = \{ a \in Q \ / \ a > r \}$ é um número real

I) $\beta_r \neq \emptyset$, pois $(r + 1) \in Q$ e $(r + 1) \in \beta_r$;

$\beta_r \neq Q$, pois $(r - 1) \in Q$ e $(r - 1) \notin \beta_r$.

II)Se a, $b \in Q$, $a \in \beta_r$ e $b > a$, então $b > a > r$, logo $b \in \beta_r$.

III) Se $t \in \beta_r$, então $t > r$ e daí : $t > \frac{t+r}{2} > r$. Logo $\frac{t+r}{2} \in \beta_r$.

O que mostra que t não é mínimo de β_r. Como t é genérico, então, β_r não possui mínimo.

Segue-se de I, II e III que β_r é um número real.

4.3
Relação entre os Números Reais e os Números Auxiliares.

Se $X \subset R$ é comum definir $-X = \{-x;\ x \in X\}$.

Vamos exemplificar:

a) Se $X = \{2, 4, 6\}$ então $-X = \{-6, -4, -2\}$

b) Se $X \subset (-\infty, 1)$, então $-X \subset (1, +\infty)$.

Lema 1: *Se* α for um número real, então, $-\alpha$ é um número auxiliar e se β for um número auxiliar, então, $-\beta$ é um número real.

Demonstração: Seja α um número real, vamos mostrar que $-\alpha$ é um número auxiliar. Pela definição de número auxiliar:

I) • $-\alpha \neq \emptyset$, como $\alpha \neq \emptyset$ logo existe $a \in \alpha$ então, $-a \in -\alpha$, logo $-\alpha \neq \emptyset$;

• $-\alpha \neq Q$, pois, existe $a \in Q$ tal que $a \notin \alpha$, então , $-a \notin -\alpha$,logo, $-\alpha \neq Q$.

II) Seja a, $b \in Q$ tal que $a \in -\alpha$ e $b > a$, logo $b \in -\alpha$.

Para $a \in -\alpha$, então, $-a \in \alpha$. Como $b>a$ temos $-a<-b$, logo, $-b \in \alpha$, portanto, $b \in -\alpha$.

III) Seja $a \in -\alpha$, então, $-a \in \alpha$, como α é um número real, $-a$ não é cota superior de α, logo existe $b \in \alpha$ tal que $b> -a$, então, $a> -b$, como $-b \in -\alpha$, a não é cota inferior de $-\alpha$, logo $-\alpha$ não admite mínimo.

Concluímos que $-\alpha$ é um número auxiliar.

Prova-se de forma análoga que se β for um número auxiliar, então $-\beta$ é um número real.

4.4
Relação de Ordem dos Reais

O símbolo $\Re$ será usado para indicar o conjunto dos números reais:

$\Re = \{ \alpha; \alpha \text{ é número real} \}$

Definição: Sejam α e β dois números reais. Definimos:

I) $\alpha \leq \beta$ *se* $\alpha \subset \beta$;

II) $\alpha < \beta$ *se* $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$.

A relação de ordem entre dois números reais deve satisfazer as seguintes propriedades:

1) $\alpha \in R, \alpha \leq \alpha$;

2) Para todo $\alpha, \beta \in R$ se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ então $\alpha = \beta$;

3) Para todo α, β e $\gamma \in R$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ então $\alpha \leq \gamma$;

4) "Quaisquer que sejam α e $\beta \in R$, $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$".

Prova:

1) Como $\alpha \subset \alpha$ segue-se da definição que $\alpha \leq \alpha$;

2) Pela definição : Se $\alpha \leq \beta$, então, $\alpha \subset \beta$.

Se $\beta \leq \alpha$, então, $\beta \subset \alpha$. Como $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$, então $\alpha = \beta$.

3) Para todo α, β e $\gamma \in R$, se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então, $\alpha \leq \gamma$;

Se $\alpha \leq \beta$, então, $\alpha \subset \beta$.

Se $\beta \leq \gamma$, então, $\beta \subset \gamma$, logo,

Se $\alpha \subset \gamma$, então, $\alpha \leq \gamma$.

4)Para provar esta propriedade, necessitamos do seguinte lema:

*Lema 2***:** Se α é um número real e se $a \in Q$, com $a \notin \alpha$, então, para todo $b \in \alpha$ temos $b < a$.

Esse lema diz que se $a \notin \alpha$ então a será cota superior de α.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que exista $a \in \alpha$ com $b \leq a$.

Neste caso $b \in \alpha$ o que é uma contradição. Logo, $b \notin \alpha$ então b é cota superior de α.

De volta à propriedade, temos:

Sejam α e β números reais. Neste caso, $\alpha \subset \beta$ ou $\alpha \not\subset \beta$.

Se $\alpha \subset \beta$, então, $\alpha \leq \beta$;

Se $\alpha \not\subset \beta$, então existe um número racional a, com $a \in \alpha$ e $a \notin \beta$.

Como $a \notin \beta$, segue-se do lema que $b < a$, para todo $b \in \beta$.

Se $a \in \alpha$ e $b < a$ segue-se do item II da definição de número real que $b \in \alpha$.

Logo, para todo $b \in \beta$, então, $b \in \alpha$, isto é , $\beta \subset \alpha$, ou seja, $\beta \leq \alpha$.

Exemplo: Tomemos dois números reais $\alpha_7 = \{ a \in Q ; a < 7 \}$ e $\alpha_3 = \{ a \in Q;$ $a < 3 \}$.

Se $a = 5$, então, $a \in \alpha_7$ e $a \notin \alpha_3$, segue-se da propriedade 4 que $\alpha_3 \subset \alpha_7$.

Logo $\alpha_3 \leq \alpha_7$.

Nota3: A relação $\leq$ é conhecida como *relação de ordem*. Geralmente, usa-se esta denominação para as relações que satisfazem as propriedades acima.

4.5
Adição em $\Re$

Teorema 1. Se α e β são números reais, então $\gamma = \{a + b;\ a \in \alpha \text{ e } b \in \beta\}$ é também um número real .

Demonstração: Precisamos provar que γ satisfaz as condições de número real.

Pela definição 1.1 temos:

I) **.**Se α e β são números reais , então existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$.

Como, $a + b \in \alpha$ temos que $\alpha \neq \varnothing$.

. Por outro lado, como $\alpha \neq Q$ e $\beta \neq Q$, existem x e $y \in Q$, tais que, $x \notin \alpha$ e $y \notin \beta$.

Pelo lema 2 :

Para todo $a \in \alpha$ temos $a < x$ e para todo $b \in \beta$, $b < y$:

Se para todo $a \in \alpha$ e para todo $b \in \beta$ temos $a + b < x + y$, então, $x + y \notin \gamma$, logo, $\gamma \neq Q$.

II) Precisamos provar que se $x \in \gamma$ e $y < x$, então, $y \in \gamma$. Para isto, precisamos ter um $s \in \alpha$ e um $t \in \beta$, de modo que $y = s + t$. Temos :

Se $x \in \gamma$, então, $x = a + b$ para algum $a \in \alpha$ e algum $b \in \beta$.

Se $s < a$, então, $s \in \alpha$.

Se $t < b$, então, $t \in \beta$.

De $y < x$ segue-se que $s + t < a + b$, logo $y \in \gamma$.

III)Para provarmos que γ não tem máximo, precisamos provar que para todo $x \in \gamma$, existe $y \in \gamma$, tal que $x < y$.

Temos que se $x \in \gamma$, então, $x = a + b$ para algum $a \in \alpha$ e algum $b \in \beta$.

Como α e β não possuem máximo, então existem $s \in \alpha$ e $t \in \beta$, em que $a < s$ e $b < t$, logo $a + b < s + t$, então como queríamos provar $x < y$.

O que mostra que x não é máximo de γ. Como x é genérico, então γ não possui máximo.

Segue-se de I, II e III que γ é um número real.

Definição: Sejam α e β dois números reais quaisquer; o número

$$\gamma = \{a + b; a \in \gamma, b \in \beta\} \text{ denomina-se soma de } \alpha + \beta.$$

$$\text{Assim: } \alpha + \beta = \{a + b;\ a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

A operação que a cada par (α, β) de números reais, associa sua soma $\alpha + \beta$ denomina-se *adição*, indicada pelo símbolo +.

Exemplo: Sejam r e s dois números racionais, e os conjuntos:

$\alpha_r = \{x \in Q \,/\, x < r\}$, $\alpha_s = \{x \in Q \,/\, x < s\}$ e $\alpha_{r+s} = \{x \in Q \,/\, x < r + s\}$

Provaremos que: $\alpha_{r+s} = \alpha_r + \alpha_s$.

Para isto precisamos provar que: $\alpha_r + \alpha_s \subset \alpha_{r+s}$ e $\alpha_{r+s} \subset \alpha_r + \alpha_s$.

1º caso: $\alpha_r + \alpha_s \subset \alpha_{r+s}$:

Se $x \in \alpha_r + \alpha_s$, então, $x = a + b$, para algum $a <$ r e algum $b <$ s, em que a, b são dois números racionais.

Se $x = a + b$, $a < r$ e $b < s$, então, $a + b < r + s$, portanto, $x < r + s$, logo $x \in \alpha_{r+s}$.

Provamos,portanto que se $x \in \alpha_r + \alpha_s$, então, $x \in \alpha_{r+s}$, logo, $\alpha_r + \alpha_s \subset \alpha_{r+s}$.

2º caso: $\alpha_{r+s} \subset \alpha_r + \beta_s$:

Se $x \in \alpha_{r+s}$, então, $x < r + s$.

Se $x < r + s$, então, $x - r < s$, logo , $x - r \in \alpha_s$.

Tomemos um racional $u \in \alpha_s$ ondeem que $x - r < u < s$.

Se $x - r < u$, então, $x - u < r$, logo, $x - u \in \alpha_r$.

Como $x = (x-u) + u$ e $x - u \in \alpha_r$, $u \in \alpha_s$, segue-se que, $x \in \alpha_r + \alpha_s$. Provamos assim que se $x \in \gamma$,então, $x \in \alpha_r + \alpha_s$, logo, $\alpha_{r+s} \subset \alpha_r + \alpha_s$.

4.6
Propriedades da Adição

Nosso objetivo nessa seção é provar que a *adição* entre números reais satisfaz as propriedades:

1ª) *Comutatividade* :Para todo α e $\beta \in \Re$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

2ª) *Associatividade* : Para todo α , β e $\gamma \in \Re$, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\beta + \alpha) + \gamma$;

3ª) *Existência do Elemento Neutro*: $\alpha \in \Re$, $\alpha + 0 = \alpha$;

4ª)*Existência do Oposto:*Para todo $\alpha \in \Re$, existe $\beta \in \Re$ com $\alpha + \beta = 0$;

5ª)*Compatibilidade da adição com a Ordem*: Para todo α , β e $\gamma \in \Re$,

Se $\alpha \leq \beta$,então $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Demonstração:

Sejam: r, s e t números racionais,

$\alpha = \{a \in Q \,/\, a < r\}$;

$\beta = \{b \in Q \,/\, b < s\}$;

$\alpha = \{c \in Q \,/\, c < s\}$;

1ª) Seja $x \in \alpha + \beta$,então, existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$,tal que $x = a + b$.

Como a *adição* em Q é *comutativa*, segue-se, que $x = b + a$.

Se $x = b + a$ então $x \in \beta + \alpha$,logo $\alpha + \beta \subset \beta + \alpha$.

2ª)Se $x \in \alpha + (\beta + \gamma)$,então, existem $a \in \alpha$, $b \in \beta$ e $c \in \alpha$, tal que

$x = a + (b + c)$.

Como a *adição* em Q é *associativa*, segue-se que

$x = (a + b) + c$, com $a \in \alpha$, $b \in \beta$ e $c \in \alpha$, então, $x \in (\alpha + \beta) + \gamma$. Logo,

$$\alpha + (\beta + \gamma) \subset (\alpha + \beta) + \gamma.$$

3ª) Sejam r e u racionais, $\alpha = \{a \in Q \ / \ a < r\}$ e $\alpha_0 = \{u \in Q \ / \ u < 0\}$. Vamos provar que $\alpha + \alpha_0 \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha + \alpha_0$.

. $\alpha + \alpha_0 \subset \alpha$

Seja, $x \in \alpha + \alpha_0$, então, existem $a \in \alpha$ e $u \in \alpha_0$ tal que $x = a + u$.

Se $u < 0$, então, $a + u < a$.

Se $x = a + u$ e $a + u < a$, então, $x < a$, logo $x \in \alpha$.

Segue-se que $\alpha + \alpha_0 \subset \alpha$.

$$\alpha \subset \alpha + \alpha_0$$

Precisamos provar que, se $x \in \alpha$, então é possível obter um $a \in \alpha$ e um $u \in \alpha_0$, tal que, $x = a + u$.

Se $x \in \alpha$,então, existe $a \in \alpha$, com $x < a$, pois α não tem máximo.

Se $x < a$, então, $x - a < 0$, logo, $x - a \in \alpha_0$, assim :

$x = a + (x - a)$ com $a \in \alpha$ e $x - a \in \alpha_0$, logo $x \in \alpha + \alpha_0$.

Segue-se que $\alpha \subset \alpha + \alpha_0$.

4ª)Para provarmos esta propriedade necessitamos do seguinte lema:

Lema3: Sejam α um número real, $u < 0$ um número racional e M_α o conjuntodascotas superiores de α. Nestas condições, existem $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$, em que q não é mínimo de M_α (caso exista mínimo em M_α), tais que $p - q = u$.

Demonstração:

Estamos interessados em determinar $p \in \alpha$ e $q \in M_\alpha$, com $q \neq \min M_\alpha$, $p - q = u$.

Para isto tomemos um racional $s \notin \alpha$, com $s \neq \min M_\alpha$, e, para cada $n \in$ N, consideremos o racional $q_n = nu + s$.

Seja, agora, $\bar{n}$ o máximo dos naturais n para os quais $q_n \in M_\alpha$ e $q_n \neq \min M_\alpha$.

Dois casos podem ocorrer:

1º caso **:** $q_{\bar{n}} \in M\alpha$ e $q_{\bar{n}+1} \in \alpha$.

Tomando-se $q = q_{\bar{n}}$ e $p = q_{\bar{n}+1}$, $p - q = u$.

2º caso**:** $q_{\bar{n}} \in M_\alpha$ e $q_{\bar{n}+1} = \min M_\alpha$ (que só poderá ocorrer se $\min M_\alpha$ existir).

Tomando-se $q = q_{\bar{n}} + \frac{1}{2}u$ e $p = q_{\bar{n}+1} + \frac{1}{2}u$, $p - q = u$, com $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$ e $q \neq \min M_\alpha$.

De volta à propriedade, seja α um número real e β um número auxiliar.

Vamos provar que $\alpha + \beta = \alpha_0$. Para isto, precisamos provar que $\alpha + \beta \subset \alpha_0$ e

que $\alpha_0 \subset \alpha + \beta$.

$\alpha + \beta \subset \alpha 0$

Se $x \in \alpha + \beta$, então, $x =$ a $+ b$ para $a \in \alpha$ e b $\in \beta$.

Se b $\in \beta$, então, -b > a, logo, $a + b < 0$.

Assim, se $x \in \alpha + \beta$, então, $x \in \alpha_0$, ou seja, $\alpha + \beta \subset \alpha_0$.

$\alpha_0 \subset \alpha + \beta$

Precisamos provar que se $x \in \alpha_0$, então, $x = a + b$, para $a \in \alpha$ e b $\in \beta$.

Se $x \in \alpha 0$, então, $x < 0$, segue-se do lema 5 que existem $a \in \alpha$ e -b $\in M_\alpha$, com -b $\neq$ mín M_α, tais que $x = a$ - $(-b)$ para $a \in \alpha$ e b $\in \beta$.

Nota :Provamos, assim, que, dado um número real α, existe um número auxiliar β, tal que, $\alpha + \beta = \alpha_0$. Provaremos mais adiante que β é único e será então denominado *oposto* de α e indicado por $-\alpha$.

5ª) Sejam α , β e $\gamma \in \Re$, com $\alpha \leq \beta$, vamos provar que $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Temos:

Se $x \in \alpha + \gamma$,então, $x = a + c$, para $a \in \alpha$ e $c \in \gamma$.

Da hipótese, segue-se que se $a \in \gamma$, então $a \in \beta$.(Lembre-se: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$).

Assim $x = a + c$, para $a \in \beta$ e $c \in \gamma$. Logo, $x \in \beta + \alpha$.

Provamos, assim, que se $\alpha \leq \beta$, então $\alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$ e se $\alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$, então, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Teorema. (*unicidade do oposto*)

Se $\alpha + \beta = \alpha_0$ e $\alpha + \gamma = \alpha_0$, então $\beta = \gamma$.

Demonstração:

$\beta = \alpha_0 + \beta = (\gamma + \alpha) + \beta = \gamma + (\alpha + \beta) = \gamma + \alpha_0 = \gamma$.

Teorema.(*unicidade do elemento neutro*)

Se $\alpha + \gamma = \alpha$ para todo $\alpha \in \Re$, então, $\gamma = \alpha_0$.

Demonstração:

Da hipótese, segue que $\alpha_0 + \gamma = \alpha_0$; daí $\gamma = \alpha_0$.

4.7
Multiplicação em $\Re$

Teorema 1. Se α e β são números reais, então

$\gamma = Q_- \cup \{a \cdot b;\ a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a > 0 \text{ e } b > 0\}$ é também um número real.

Demonstração:

Precisamos provar que γ satisfaz as condições de número real. Pela definição temos:

I) $.\gamma \neq \emptyset$, pois $Q_- \subset \gamma$;

Por outro lado, como $\alpha \neq Q$ e $\beta \neq Q$, existem, x e $y \in Q$, tais que, $x \notin \alpha$ e $y \notin \beta$ e, pelo lema da relação de ordem, tem-se:

Para todo $a \in \alpha$, $a<x$ com $a > 0$ e para todo $b \in \beta$, $b<y$ com $b> 0$, logo, $a \cdot b<x \cdot y$, portanto, $x \cdot y \notin \gamma$.

Assim, como queríamos provar $\alpha \neq Q$.

II)Precisamos agora provar que se $x \in \gamma$ e $y<x$, então, $y \in \gamma$.

(a) Se $x \leq 0$, então, $y < 0$, logo $y \in \gamma$;

(b) Se $x> 0$ e $y< 0$,então, $y \in \gamma$;

(c) Se $x> 0$ e $y> 0$, temos:

Se $x \in \gamma$ e $x> 0$, então, $x = a \cdot b$ para $a \in \alpha$, $b \in \beta$, $a> 0$ e $b> 0$.

De $0 <y<x = a \cdot b$ vem $\frac{y}{a}<b$, assim $\frac{y}{a} \in \beta$, e $\frac{y}{a}> 0$.

Logo $y = a \cdot \frac{y}{a}$ para $a \in \alpha$, $\frac{y}{a} \in \beta$, $a> 0$ e $\frac{y}{a}> 0$ temos $y \in \gamma$.

III) Para provarmos que γ não tem máximo, basta provarmos que, se $x \in \gamma$ e $x> 0$, então existe $y \in \gamma$ com $x<y$. Temos:

Se $x \in \gamma$ e $x> 0$, então, $x = a \cdot b$ para $a \in \alpha$, $b \in \beta$, $a> 0$ e $b> 0$.

Como α e β são números reais, existem $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, tal que, $a<r$ e $b<s$; daí $a \cdot b<r \cdot s$, com $r \cdot s \in \gamma$,o que mostra que $a \cdot b$ não é máximo de γ.

Como $r \cdot s$ é genérico, então, γ não possui máximo.

Segue-se de I, II e III que γ é um número real.

Definição. Sejam α e β dois números reais quaisquer; o número $\gamma = \{a \cdot b;$

$a \in \gamma$,$b \in \beta$ } denomina-se *produto* de $\alpha \cdot \beta$.

Assim:

$\alpha . \beta = Q_- \cup \{a \cdot b\ ;\ a \in \gamma\ ,\ b \in \beta\ ,\ a > 0 \text{ e } b > 0\}$ se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$;

$\alpha \cdot \beta = 0$ se $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$;

$\alpha \cdot \beta = -\{(-\alpha) \cdot \beta\}$ se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$;

$\alpha \cdot \beta = -\{\alpha \cdot (-\beta)\}$ se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$;

$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$ se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$;

4.8 Propriedades da Multiplicação

Nosso objetivo nessa seção é provar que a *multiplicação* entre números reais satisfaz as propriedades:

1ª) *Comutatividade*:Para todo α e $\beta \in \Re$, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

2ª) Associatividade : Para todo α , β e $\gamma \in \Re$, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\beta \cdot \alpha) \cdot \gamma$;

3ª) Existência do Elemento Neutro: $\alpha \in \Re$, $\alpha \cdot 0 = \alpha$;

4ª) Existência do Inverso :Para todo $\alpha \in \Re$, existe $\beta \in \Re$ com $\alpha \cdot \beta = \alpha_1$;

5ª) Distributividade em Relação a Adição : $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

6ª) Se $\alpha \leq \beta$ e $\alpha_0 \leq \gamma$, então, $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Demonstração:

Sejam: r, s e t números racionais. Temos:

$\alpha_r = \{a \in Q\ /\ a < r\}$;

$\alpha_s = \{b \in Q\ /\ b < s\}$;

$\alpha_t = \{c \in Q\ /\ c < t\}$;

1ª) Para provarmos esta propriedade, precisamos provar que:

$\alpha_r \;.\; \alpha_s \subset \alpha_s \,.\, \alpha_r$.

Seja $x \in \alpha_r \cdot \alpha_s$,então, existem $a \in \alpha_r$ e$b \in \alpha_s$,tal que$x = a \cdot b$.

Como a *multiplicação* em Q é *comutativa*, segue-se, que $x = b \cdot a$.

Se $x = b \cdot a$ então $x \in \alpha_s \,.\, \alpha_r$, logo $\alpha_r \cdot \alpha_s \subset \alpha_s \,.\, \alpha_r$.

2ª) Para provarmos esta propriedade, precisamos provar que:

$\alpha_r \cdot (\alpha_s \cdot \alpha_t) \subset (\alpha_r \cdot \alpha_s) \cdot \alpha_t$.

Se $x \in \alpha_r \cdot (\alpha_s \cdot \alpha_t)$,então, existem $a \in \alpha_r$, $b \in \alpha_s$ e $c \in \alpha_t$, tal que

$x = a \cdot (b \cdot c)$.

Como a *multiplicação* em Q é *associativa*, segue-se que:

$x = (a \cdot b) \cdot c$, com $a \in \alpha_r$, $b \in \alpha_s$ e $c \in \alpha$, então, $x \in (\alpha_r \cdot \alpha_s) \cdot \alpha_t$.

Logo, $\alpha_r \,.\, (\alpha_s \,.\, \alpha_t) \subset (\alpha_r \,.\, \alpha_s) \,.\, \alpha_t$.

3ª) Suponhamos, inicialmente que $\alpha > 0$ precisamos provar que $\alpha \cdot \alpha_1 \subset \alpha$ e

$\alpha \subset \alpha \cdot \alpha_1$.

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha \cdot \alpha_1 \subset \alpha}}$$

Lembramos inicialmente que $\alpha \cdot \alpha_1 = Q_- \cup \{ ab \,/\, a \in \alpha, a > 0$ e $b \in \alpha_1$,

$0 < b < 1 \}$.

Se $x \in \alpha \cdot \alpha_1$ e $x \leq 0$, então, $x \in \alpha$.

Se $x \in \alpha \cdot \alpha_1$ e $x > 0$, então, $x = ab$, com $a \in \alpha$, $a > 0$ e $b \in \alpha_1$, $0 < b < 1$.

De $a > 0$ e $b < 1$, segue-se $a \cdot b < a$ e, portanto, $x = a \cdot b$, logo, $x \in \alpha$.

Provamos assim que $\alpha \cdot \alpha_1 \subset \alpha$.

$\boldsymbol{\alpha \subset \alpha \cdot \alpha_1}$

Se $x \in \alpha$ e $x \leq 0$, então, $x \in \alpha \cdot \alpha_1$.

Se $x \in \alpha$ e $x > 0$, então existe $a \in \alpha$, com $x < a$.

Assim, x = a $\cdot \frac{x}{a} \in \alpha \cdot \alpha_1$, pois, $a \in \alpha$, $a > 0$ e $\frac{x}{a} < 1$, com $\frac{x}{a} > 0$.

Portanto, provamos que $\alpha \subset \alpha \cdot \alpha_1$.

Provamos, assim, que se $\alpha > 0$, então $\alpha \cdot \alpha_1 = \alpha$.

Se $\alpha = 0$, pela definição de produto, $\alpha_1 \cdot 0 = 0 \cdot \alpha_1 = 0 = \alpha$.

Se $\alpha < 0$, pela definição de produto, $\alpha \cdot \alpha_1 = -[(-\alpha) \cdot \alpha_1] = -[-\alpha]$ $= \alpha$.

Segue-se que, para todo $\alpha \in \Re$, $\alpha \cdot \alpha_1 = \alpha$.

4ª) Fica a cargo do leitor. (*sugestão*: Suponha, inicialmente, $\alpha > \alpha_0$) e considere o número real $\beta = Q_- \cup \{ p \in Q \,/\, p > 0 , \frac{1}{p} \in M_\alpha$ e $\frac{1}{p} \neq \text{mín} M_\alpha \}$.

Proceda, então, como na demonstração da propriedade 4 da *adição* e conclua que $\alpha \cdot \beta = \alpha_1$.

Se $\alpha < 0$, então, $-\alpha > 0$, logo, existe β tal que $(-\alpha) \cdot \beta = \alpha 1$, mas, $(-\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta)$,logo, $\alpha \cdot (-\beta) = \alpha_1$.

5ª) Precisamos provar que $\alpha \cdot (\beta + \gamma) \subset (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$ e

$(\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) \subset \alpha \cdot (\beta + \gamma)$.

1º caso : Tomemos $\alpha > 0$ $\beta > 0$ e $\gamma > 0$.

$(\beta + \gamma) \subset \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Se $x \in \alpha \cdot (\beta + \gamma)$ e $x \leq 0$, então, $x \in (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$.

Se $x \in \alpha \cdot (\beta + \gamma)$ e $x < 0$, então, $x = a \cdot d$ para algum $a > 0$ com $a \in \alpha$, e para algum $d > 0$, com $d \in (\beta + \gamma)$.

Assim, $x = a \cdot b + a \cdot c \in \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, pois, $a \cdot b \in \alpha \cdot \beta$ e $a \cdot c \in \alpha \cdot \gamma$. Portanto,

$\alpha\cdot(\beta+\gamma) \subset (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)$.

$(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma) \subset \alpha\cdot(\beta+\gamma)$

Se $x \in (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)$ e $x \leq 0$, então $x \in \alpha\cdot(\beta+\gamma)$.

Suponhamos, então $x > 0$ e $x \in (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)$. Como $\alpha\cdot\beta > 0$e $\alpha\cdot\gamma > 0$, existem $u \in \alpha\cdot\beta$, com $u > 0$, e $v \in \alpha\cdot\gamma$, com $v > 0$, tais que $x = u + v$.

Segue-se que existem a, $a' \in \alpha$, com $a > 0$ e $a' > 0$ e $b \in \beta$, com $b > 0$, $c \in \gamma$, com $c > 0$, tais que, $x = a\cdot b + a'\cdot c$.

Supondo $a' \leq a$, resulta

$x = a\cdot b + a'\cdot c \leq a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c) \in \alpha\cdot(\beta+\gamma)$, logo pela definição II de número real, $x \in \alpha\cdot(\beta+\gamma)$.

Assim fica provado que: $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \subset \alpha\cdot(\beta+\gamma)$.

2º caso: $\alpha > 0$ e $\beta+\gamma > 0$.

Suponhamos $\beta > 0$. Temos:

$\alpha\,.\,\gamma = \alpha\,[(\beta+\gamma)+(-\beta)] = \alpha\,.(\beta+\gamma)+\alpha\,.\,(-\beta)$ o que nos leva ao 1º caso: $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\,.\,\beta+\alpha.\,\gamma$.

3ºcaso: $\alpha > 0$ e $\beta+\gamma < 0$.

$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = -[\alpha\cdot(-\beta-\gamma)] = -[\alpha\cdot(-\beta)+\alpha\cdot(-\gamma)]$

ou seja,

$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

Deixamos os demais a cargo do leitor.

4.9
Teorema do Supremo

Um subconjunto A de $\Re$ se diz limitado superiormente se existe um número real m tal que, para todo $\alpha \in A$, $\alpha \leq m$.

Para demonstrar o teorema do supremo, vamos precisar do seguinte lema:

Lema4. Seja A um subconjunto de $\Re$, não vazio e limitado superiormente. Então,

$\gamma = \alpha \in A = \{ x \in \frac{Q}{x} \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ } é um número real.

(γ é a reunião de todos α pertencentes a A).

Demonstração:

Para provar que γ é número real, temos que verificar que ele satisfaz a definição 1.1:

. Sendo $A \neq \varnothing$, pois existe $\alpha \in A$ e, como $\alpha \neq \varnothing$, resulta $\gamma \neq \varnothing$.

. Sendo A limitado superiormente, existe um número real m tal que $\alpha \leq m$, para todo $\alpha \in A$. Como m é um número real, existe um número racional x, com $x \notin m$; daí, para todo $\alpha \in A$ existira $x \notin \alpha$, logo, $x \notin \gamma$, portanto, $\gamma \neq Q$.

I)Sejam p e q dois números racionais quaisquer , com $p \in \gamma$ e $q < p$. Temos:

Se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$.

Se $q < p$ e $p \in \alpha$, então $q \in \alpha$, logo $q \in \gamma$.

II)Se $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Como α não possui máximo, existe $t \in \alpha$,com $p < x$. Se $t \in \alpha$, então $t \in \gamma$. Como p e t são genéricos, para todo $p \in \gamma$ existe $t \in \gamma$, logo γ não possui máximo.

Segue-se de I, II e III que γ é um número real.

Teorema(*do supremo*). Se A for um subconjunto de $\Re$, não vazio e limitado superiormente, então A admite um supremo.

Demonstração:

Seja $\cup \alpha_{\in A}$. Pelo lema, γ é número real. Vamos mostrar que γ é o supremo de A, isto é, $\gamma = sup\ A$.

De fato, como γ é a reunião dos α pertencentes a A, segue que, para todo $\alpha \in A$,

$\gamma \supset \alpha$, ou seja, $\gamma \geq \alpha$.

Logo, γ é cota superior de A.

Por outro lado, se γ' é uma cota superior de A, então $\gamma' \geq \alpha$,

para todo $\alpha \in A$, logo $\gamma' \supset \alpha$.

Se $\gamma' \supset \alpha$, então $\gamma' \supset \cup \alpha_{\in A} = \gamma$, ou seja, $\gamma' \geq \gamma$.

Assim γ é a menor das cotas superiores de A, isto é,

$\gamma = \sup A$.

Como já dissemos, é fácil provar que o supremo é único. Portanto, podemos escrever "o supremo", em vez de " um supremo".

4.10
Identificação de *Q* com *Q'*

Inicialmente, vamos definir uma *aplicação bijetora* ou *função bijetora*.

Sejam ***A*** e ***B*** dois conjuntos não-vazios e φ uma aplicação de ***A*** e ***B***.

Dizemos que φ é *bijetora* se

(i) Im $\varphi = \boldsymbol{B}$

(ii) Para todo $s, t \in \boldsymbol{A}$, $s \neq t$, temos, $\varphi(s) \neq \varphi(t)$.

A condição (i) nos diz que φ é *sobrejetora* e a (ii) que φ é *injetora*.

Deste modo, φ é *bijetora* se, e somente se, φ for *sobrejetora* e *injetora*.

Seja α um número real. Dizemos que α é um *número real racional* se existe um racional r, tal que $\alpha = \{ a \in Q / a \leq r \}$.

O conjunto dos números reais racionais será indicado por ***Q'***, logo

$Q' = \alpha = \{ a \in Q / a \leq r \}$.

Seja α um número real. Se $\alpha \notin Q'$, diremos que α é um *número real irracional* se $\alpha = Q_- \cup \{ a \in Q_+ / a^2 \leq r \}$.

Olhemos agora, para a aplicação φ: $Q \rightarrow Q'$ dada por $\varphi(r) = \alpha_r$, que a cada racional r associa o real racional α_r .Tal aplicação é bijetora (verifiqueisso). Além disso, temos:

(i) $\varphi(r+s) = \alpha_{r+s} = \alpha_r + \alpha_s = \varphi(r) + \varphi(s)$.

(ii) $\varphi(r \cdot s) = \alpha_{r \cdot s} = \alpha_r \,.\, \alpha_s = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$.

(iii) Se $r \leq s$, então, $\alpha_r \leq \alpha_s$.

Tal aplicação φ nos permite, então, *identificar* o número racional r com o real α_r.

Neste sentido, podemos considerar Q como subconjunto de $\Re$.

5
Considerações Finais

A proposta deste trabalho é efetuar, de modo cuidadoso, a construção dos números reais e apontar questões para serem discutidas em relação ao ensino e aprendizagem. Algumas delas referentes a estratégias metodológicas, outras quanto ao conteúdo específico e acreditamos que metodologia e conteúdo caminham na mesma direção e possibilitam uma compreensão mais adequada em Matemática.

O tema em questão sugere um aprofundamento de questões relativas aos números reais, tópico de grande importância para professores de Matemática do ensino básico, além da metodologia utilizada nas salas de aula para abordar tal tema.

Em resumo, por meio dessa construção, professores do ensino fundamental podem expor de uma maneira mais clara a existência dos números irracionais e fazer com que seus alunos percebam a completude da reta real, mesmo que não seja possível efetuar, em sala de aula, os detalhes técnicos que expusemos,. No entanto, conhecê-los dará segurança ao professor no momento de ensinar os números reais, que são extremamente importantes em matemática e em suas aplicações.

6
Referências Bibliográficas

BRUMFIEL, Charles F.; EICHOLZ, Robert E.; SHANKS Merril E. **Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar**,1ª. ed.Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1972.

CARAÇA Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**, 1ª. ed. Lisboa: Tipografia Matemática, Ltda, 1951.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática,** 1ª ed., Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5ª. ed., vol. 1, Rio de Janeiro: Ltc, 2005.

KARLSON, Paul. **A Magia dos Números**. 2ª. ed., Rio de Janeiro, Porto Alegre e São Paulo: Globo, 1961.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real. Funções de uma Variável**, 8ª. ed. vol.1, Rio de Janeiro: Impa, 2006.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática,** 1ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**, 1ª ed., Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SIMMONS. George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** 1ª. ed., vol. 1, São Paulo: Mc Graw-Hill, 1987.

VALLADARES, RENATO J. COSTA. **Cálculo das Funções Reais**. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, em processo editorial.

Meio Eletrônico

DEDEKIND Richard–Wikipédia http://pt.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind>.Acesso em: 08 de jan. de 2014.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ. **Departamento de Matemática. Cálculo Diferencial e Integral: um Kit de Sobrevivência**. Publicação eletrônica do KIT. http://www.dma.uem.br/kit/>. Acesso em: 22 de jan. de 2014.