

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais

por

Leonardo Miranda de Castro

Brasília

2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de
Brasília. Acervo 1016457.

C355c Castro, Leonardo Miranda de.
O cálculo variacional e as curvas cicloidais / Leonardo
Miranda de Castro. -- 2014.
68 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília,
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática,
2014.

Orientação: Ricardo Ruviano.

Inclui bibliografia.

1. Cálculo das variações. 2. Ciclóides. I. Ruviano,
Ricardo. II. Título.

CDU 517.97

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais

por

Leonardo Miranda de Castro *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,
como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de junho de 2014

Comissão Examinadora:



Dr. Ricardo Ruviano - UnB - Orientador



Dr. Kellcio Oliveira Araújo - UnB - Examinador



Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - UFPA - Examinador

*O autor foi bolsista do Capes durante a elaboração deste trabalho.

"Tota Pulchra es, Maria!

Tota Pulchra es, Maria!

Et macula originalis non est in te!

Et macula originalis non est in te!

Tu, Gloria Ierusalem!

Tu, Laetitia Israel!

Tu, honorificentia populi nostril!

Tu, advocata peccatorum!

O Maria! O Maria!

Virgo Prudentissima,

Mater Clementissima,

*Ora pro nobis. Intercede pro
nobis*

ad Dominum Iesum Christum!

Antigo cântico Católico

Agradecimentos

Primeiramente a Deus todo poderoso, por ter me abençoado a alcançar esta grande vitória e a Santíssima Mãe, a Virgem Maria, pela sua proteção e intercessão

Aos meus familiares, minhã mãe que é minha grande intercessora, minhas irmãs, Andréia e Vanessa, pelo carinho sempre mostrado, minha sogra Aida que é verdadeiramente uma segunda mãe, mas de uma forma toda especial a minha esposa tão amada e tão querida, Gabriela, que suportou minhas ausências, necessária para completar meus estudos e por realizar um de meus maiores sonhos: o de ser pai. Te amo princesa!

Ao meu orientador, Ricardo Ruviano, por ter se tornado mais que meu orientador, mas um parceiro nesta etapa final de meu trabalho. A ele minha eterna gratidão. Ele será sempre para mim o modelo de professor que desejo ser.

Obrigado aos professores do Departamento de Matemática da UnB, com os quais convivi. Especialmente ao coordenador do curso prof. Dr. Rui Seimetz e ao motivador desse trabalho o prof. Dr. Roberto Gandulfo.

Agradeço ao *CAPES* pelo apoio financeiro à este trabalho.

Aos amigos que fiz nesta etapa e que nunca esquecerei, de uma forma especial meus companheiros Edson e Edmundo que não deixaram que eu desistisse do sonho de tornar-me mestre.

Enfim, agradeço a todos que rezaram por mim e peço desculpas a todos que faltam, mas não dar para agradecer a cada um, pois são tantas as pessoas especiais que meus agradecimentos seria a maior parte de minha dissertação.

Resumo

Apresentamos neste trabalho as curvas cicloidalis: ciclóide, epiciclóide e hipociclóide. No entanto, para sustentar as afirmações que serão feitas neste trabalho, principalmente sobre a ciclóide, inicialmente trataremos sobre o cálculo variacional, a sua história e sobre matemáticos famosos que contribuíram para o seu desenvolvimento, após discorreremos sobre o problema colocado por Johann Bernoulli: o problema da Braquistócrona que contribuiu grandemente para as descobertas sobre o cálculo variacional no porvir. Sobre a ciclóide especificamente discutiremos suas interessantes propriedades, a saber: o fato desta ser tautocrona e isócrona. Já para a segunda curva cicloidal, epiciclóide, será abordado como por séculos este foi o modelo planetário, que descrevia o movimento dos planetas em epiciclos. Por fim analisaremos como a ciclóide, epiciclóide e hipociclóide podem ser estudadas no ensino médio, correlacionando assuntos como astronomia e arquitetura e como a utilização de recursos computacionais pode ser utilizada para visualizar as formas dessas curvas mediante a mudança de variáveis pré estabelecidas.

Palavras-Chaves: Cálculo Variacional; Ciclóide; Braquistórona; Tautócrona; Pêndulo Isócrono; Epiciclóide; Hipociclóide.

Abstract

We present study in this work the the cycloidal curves: cycloid and hypocycloid epicycloids. However, to support the claims that will be made in this work, mainly on the cycloid, initially deal on variational calculus, its history and about famous mathematicians who contributed to its development, following we will discuss the problem posed by Johann Bernoulli: the problem of Brachistochrone which corroborated and much to the findings on the variational calculus. About the cycloid specifically discuss their interesting properties, namely the fact that this is tautocrona and isochronous. As for the second cycloidal, epicycloids curve, as will be discussed for centuries this was the planetary model, describing the motion of the planets on epicycles. Finally we will analyze how the cycloid and hypocycloid epicycloids can be studied in high school, correlating subjects like astronomy and architecture and how the use of computational resources can be used to visualize the shapes of these curves by changing the pre- set variables.

Key-Words: Variational Calculus; Cycloid; Brachistochrone; Tautochrone; Isochronous Pendulum; Epicycloids; Hypocycloid.

Sumário

Introdução	1
1 Equação de Euler: Uma Variável Independente e uma Dependente	3
1.1 O Problema do Cálculo Variacional	5
1.1.1 A Identidade de Beltrami	8
1.2 Aplicação da Equação de Euler: Menor Distância Entre Dois Pontos	10
2 A História da Curva de Menor Tempo	12
3 Ciclóide: A Helena da Geometria	14
3.1 Equações Paramétricas da Ciclóide	15
4 As Propriedades da Ciclóide	17
4.1 A Braquistócrona	17
4.2 A Tautócrona	20
4.2.1 Prova Matemática de que a Ciclóide é Tautócrona	20
4.2.2 Prova da Tautocronicidade da Ciclóide: Solução de Lagrange	23
4.2.3 Prova da Tautocronicidade da Ciclóide: Um Caminho Alternativo	25
4.2.4 O Pêndulo Isócrono	27
4.2.5 Primeira Parte da Demonstração	28
4.2.6 Segunda Parte da Demonstração: A Evoluta da Ciclóide é a Própria Ciclóide	30
5 Trabalhando com a Ciclóide, Epiciclóide e Hipociclóide no Ensino Médio	32
5.1 A Pesquisa e Construção da Braquistócrona	32
5.2 Outras Propriedades Interessantes da Ciclóide	35
5.3 A Pesquisa Sobre a Epiciclóide na Astronomia	37

5.3.1	A Epiciclóide	37
5.3.2	Os Epiciclos	39
5.4	A Pesquisa sobre a Hipociclóide	40
5.4.1	Evoluta da Hipociclóide	41
5.4.2	Involuta da Hipociclóide	42
5.4.3	Hipociclóide Encurtada	42
5.4.4	Hipociclóide Alongada	42
5.4.5	Exemplos de Hipociclóides onde se varia $K = \frac{R}{r}$	43
A Modelando as Curvas Cicloidais no Geogebra e no Maple		44
A.1	Usando o GeoGebra para Modelar a Ciclóide	44
A.2	Usando o Maple para Modelar a Ciclóide, Epiciclóide e a Hipociclóide . . .	45
A.2.1	Modelando a Ciclóide	45
A.2.2	Modelando a Epiciclóide	45
A.2.3	Modelando a Hipociclóide	46
Bibliografia		50

Introdução

Estudaremos nesse trabalho as curvas cicloidais: cicloíde, epicicloíde e hipocicloíde. Todavia para dar sustentação nas afirmações que serão feitas nesse trabalho, principalmente sobre a cicloíde, inicialmente trataremos do Cálculo Variacional, passando pela sua história e sobre os célebres matemáticos que contribuíram para seu desenvolvimento, nos atentaremos no problema proposto por Johann Bernoulli, que no século XVII desafiou as mentes mais fantásticas do seu tempo nesses termos, conforme [1]:

Eu, Johann Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., Eu espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, Eu o declararei publicamente merecedor de elogio.

Eis o problema da Braquistócrona que contribuiu significativamente para os posteriores avanços na pesquisa do Cálculo Variacional sobre tudo pelos trabalhos de Euler-Lagrange. Ainda sobre a cicloíde abordaremos também suas interessantes propriedades: a de ser tautócrona (curva de mesmo tempo) onde apresentaremos algumas demonstrações interessantes, como por exemplo a de Lagrange, que prova que um corpo sob ação somente da gravidade que deslize pela cicloíde sempre chega ao mesmo tempo independente da posição de sua descida e por fim sua propriedade de ser isócrona, propriedade essa provada por Christian Huygens, após ter sido convidado por Blaise Pascal a participar de uma competição sobre a curva cicloíde, sua participação nessa competição foi tão brilhante que Huygens se tornou uma autoridade nas propriedades da curva cicloíde e decidiu verificar se ela solucionava o problema do pêndulo isócrona fato esse que deu fama e grande prestígio

a esse gigante da matemática.

Já sobre a segunda curva cicloidal, epiciclóide, abordar-se-á como por muito séculos o modelo planetário foi sustentado pelo movimento em epiciclos dos planetas e como ela a hipociclóide e a ciclóide podem ser estudadas no ensino médio onde o aluno pode encontrar essa curva na astronomia, na arquitetura ou pela utilização de recursos computacionais para visualizar seu formato após a mudanças de variáveis pré estabelecidas.

Equação de Euler: Uma Variável Independente e uma Dependente

Neste capítulo abordaremos a história e a ideia por trás do cálculo variacional, pois este tem sido uma ferramenta básica no estudo de vários problemas matemáticos e das mais variadas áreas do conhecimento como: Física-Matemática, Engenharia, Física Moderna, Matemática, entre outras. As ideias precursoras do cálculo variacional são antigas. Hoje com o uso de formulações variacionais para as leis da Física, torna-se possível concentrar em um único funcional todos os aspectos intrínsecos do problema em questão. Formulações variacionais podem servir não apenas para unificar diversos campos, mas também para sugerir novas teorias e fornecer maneiras poderosas de estudar a existência e solução de diversas equações diferenciais parciais. A diferença entre os cálculos diferencial e variacional é a natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados (otimizados). Enquanto o cálculo diferencial procura números com propriedades otimizadoras, o cálculo variacional procura encontrar funções com propriedades otimizadoras.

Historicamente, a ideia central do cálculo variacional remonta à Grécia antiga. Desde a Antiguidade foram formulados problemas envolvendo otimização. As ideias mais primitivas do cálculo variacional foram apresentadas por Aristóteles (384 – 322) a.C, onde constam pela primeira vez referências a velocidades virtuais, conceito usado em algumas abordagens de problemas de máximos e mínimos. Porém, a primeira aplicação de um princípio de minimização foi feita por Herão de Alexandria (20 – 62) a.C. Herão postulou que na reflexão por um espelho plano, a luz seguiria o caminho mais curto entre dois pontos. Outro vestígio do primitivo cálculo variacional encontra-se na obra Eneida, de

Virgílio, que viveu em 70 a.C. Em sua obra encontra-se a seguinte citação: Dido, uma fenícia, persuadiu um chefe africano a dar-lhe tanta terra quanto ela pudesse cercar com o couro de um touro. Primeiro ela cortou o couro em centenas de tiras bem finas. Depois uniu-as, e traçou um semicírculo no chão, a beira do mar Mediterrâneo. Era a máxima área costeira que ela poderia envolver. Neste lugar ela construiu a cidade de Cartago. Mesmo sendo literário, o relato demonstra que os povos da antiguidade possuíam conhecimentos a respeito de áreas e comprimentos otimizados. Sabiam que, dentre as figuras de igual perímetro, o círculo é aquela com maior área. Acredita-se que chegaram a estas conclusões a partir de cálculos de tentativa e erro.

As indagações sobre soluções ótimas ficam como que esquecidas voltando com novo vigor no século *XVII*, onde Pierre de Fermat resolveu um problema, em ótica, que acabou levando o seu nome, ficando conhecido como: Princípio de Fermat, que dizia - *a trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é um mínimo.*

Ainda sob a descoberta de Fermat, Snel e Descartes, em 1630, concluíram experimentalmente que quando a luz reflete em um espelho, o ângulo de reflexão (que denotaremos por r) é igual ao ângulo de incidência (que denotaremos por i) e que na refração da luz, proveniente do meio 1 (velocidade V_1) para um meio 2 (velocidade V_2), o seno do ângulo de incidência dividido pelo seno do ângulo de refração é uma constante igual a:

$$\frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Muitos matemáticos daquela época queriam saber o que levavam a essas leis, então, Fermat sugeriu se não seria, essas manifestações da natureza, resultados de uma busca de mínimos e máximos. Isaac Newton, também se ocupava com problemas envolvendo princípios de otimização. Ele queria saber qual era a forma de um túnel que liga dois pontos na superfície da Terra, de modo que permita a um corpo de massa m deslocar-se entre os dois pontos no menor tempo, como resposta Isaac Newton obteve como resposta a hipociclóide.

Apesar de Fermat, Newton e outros terem se destacado no estudo do cálculo variacional, são os irmãos Jacques (1654 – 1705) e Johann Bernoulli (1667 – 1748), os considerados *pais do Cálculo de Variações*. Johann Bernoulli por ter proposto em 1696 o problema da braquistócrona (encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo, entre dois pontos num plano vertical, liberado de um ponto inicial e sujeito apenas à força da gravidade) e Jacques por propor e discutir o problema das figuras isoperimétricas (caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área

máxima). O problema de Dido, acima citado, é um problema isoperimétrico.

Vários matemáticos se interessaram por estudar e desenvolver o cálculo de variações, mas a de se destacar o matemático Italiano, Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813). Lagrange é em geral o mais notável matemático do século XVIII, sendo somente Euler (1701 – 1783) um sério rival, alias vale ressaltar que o nome Cálculo das Variações foi dado por Euler no trabalho intitulado *Elementa Calculi Variationum* (Elemento do Cálculo das Variações), apresentado à Academia de Berlim, em 1756, e publicado em 1766. A primeira e talvez maior contribuição de Lagrange para a Matemática foi em Cálculo de Variações. Esse era um ramo novo da Matemática, cujo nome se originou das notações usadas por Lagrange aproximadamente a partir de 1760. Em 1755 Lagrange havia escrito a Euler sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para tratar de problemas de isoperimetria e de mais rápida queda, e Euler generosamente retardou a publicação de um trabalho seu sobre tema semelhante, a fim de que o autor mais jovem recebesse todo o crédito pelos novos métodos que Euler considerava superiores .

Outros matemáticos tais como: Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851) e David Hilbert (1862 – 1943), Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 – 1897), Carl Freendrich Gauss (1777 – 1855) e William Rowan Hamilton (1805 – 1865) também contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo de Variações. Outros problemas específicos foram resolvidos e uma teoria geral desenvolvida ao longo dos anos.

As primeiras aplicações de Cálculo de Variações em Economia surgiram no final de 1920 e início de 1930 por Roos, Evans, Hotelling e Ramsey, com outras aplicações publicadas mais tarde. Uma nova era começou no início de 1960 com grupos de economistas e cientistas do gerenciamento interessados em certos problemas dinâmicos. A Teoria do Controle Ótimo, desenvolvida na Rússia por Pontryagin e seus colaboradores no final de 1950 e publicada na língua inglesa em 1962, é uma generalização do Cálculo de Variações, que amplia a aplicabilidade matemática. Com um pouco da história do cálculo variacional, passamos agora a nos atentar no objeto de pesquisa desta área da matemática.

1.1 O Problema do Cálculo Variacional

O problema central do cálculo variacional, como em [3], pode ser expresso na seguinte forma: desejamos encontrar uma função $y(x)$ que possui valores fixos nos pontos $x = x_1$ e $x = x_2$, tal que a integral de linha (integral calculada ao longo da curva) de uma dada função $f\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right)$, é tal que, $J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx$, seja um extremo (máximo, mínimo ou ponto de inflexão) ou seja, um ponto estacionário ou simplesmente ponto

crítico, que é um ponto no domínio de uma função onde a primeira derivada é nula, assim queremos encontrar $y(x)$ com valores fixos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ tal que a integral J seja estacionária.

Há, naturalmente, infinitas funções com valores fixos em (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , conseqüentemente a integral J assume valores diferentes para cada um. No plano cartesiano, isso equivale a dizer que existem infinitos caminhos ligando os pontos fixos, mas para somente um deles J é um extremo. Podemos rotular todos os caminhos possíveis entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) por meio de um parâmetro variacional α , de modo que cada caminho seja caracterizado por $y(x, \alpha)$ para um dado valor de α , como $\alpha = 0$ o caminho ótimo correspondente, denotado por $y(x, 0)$ torna J estacionária.

Para confirmar nossa hipótese, suponhamos que cada caminho seja uma deformação contínua do caminho ótimo no sentido de que podemos escrever $y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$, onde $\eta(x)$ representa a deformação, portanto deve ser uma função continuamente diferenciável em todos os pontos do intervalo de $x_1 < x < x_2$, anulando-se nos seus extremos: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Como um exemplo de parametrização consideremos os pontos fixos no plano $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e $(x_2, y_2) = (1, 0)$, onde o caminho ótimo seja o segmento de reta que os une: $y(x, 0) = \{(x, y) \mid y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$. Uma família de curvas suaves parametrizadas por α que conectam os pontos fixos é ($\alpha \in \mathbb{R}$) tal que:

$$y(x, \alpha) = \alpha x(1 - x),$$

onde $\alpha = 0$ fornece o caminho ótimo: $y(x, 0) = 0$. Logo $\eta(x) = x(1 - x)$, satisfaz $\eta(0) = \eta(1) = 0$.

Com toda essa motivação temos que a equação $J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx$ pode ser escrita com o auxílio do parâmetro funcional α , assim:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y(x, \alpha), \frac{dy}{dx}(x, \alpha), x\right) dx.$$

A condição imposta ao caminho ótimo $y(x, 0)$ de que torne o funcional acima estacionário implica em $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$.

Diferenciando J em função e α ficamos com:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} \right] dx.$$

Integrando por partes e chamando de

$$u = \frac{\partial f}{\partial y_x}$$

e de

$$dv = \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} dx$$

temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y_x}{\partial \alpha} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) dx.$$

Como todas as curvas parametrizadas por α devem passar pelos pontos fixos, como explicitado no início deste tópico, temos:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{x_1} = 0$$

e

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{x_2} = 0$$

tal que a primeira parcela resultante da integração por partes é identicamente nula, resultando,então

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

Olhando para a diferencial $d\alpha$ e calculando as derivadas em relação a α para o caminho ótimo $\alpha = 0$ teremos

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx.$$

Vamos denominar por variação da integral J a seguinte expressão:

$$\delta J \equiv \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$$

assim como analogamente a variação de y será

$$\delta y \equiv \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha.$$

Agora escrevemos

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx$$

como

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \delta y dx.$$

Assim a condição $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$ para que a integral J seja estacionária é, portanto, simplesmente $\delta J = 0$. Impondo essa condição em

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} \right] \delta y dx$$

como δy é arbitrário, concluímos que, necessariamente, o termo entre colchetes deve anular-se, o que fornece a equação chamada *Equação de Euler*.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0.$$

Leonard Euler chegou a equação acima em 1744, no seu trabalho Método para achar curvas planas que mostram algumas propriedades de máximos e mínimos. Posteriormente, em 1760, Joseph Louis Lagrange aprofundou a análise prévia de Euler no seu trabalho Ensaio sobre um novo método para determinar os máximos e mínimos de fórmulas integrais indefinidas. Por esse motivo, dentro do contexto da mecânica, a expressão acima é também chamada de equação de Euler-Lagrange. A equação de Euler é uma condição necessária, porém não suficiente, para que a integral J seja estacionária. Além disso, na dedução acima mostrada foi feita a suposição implícita de que a solução procurada $y(x)$ seja ao menos duas vezes diferenciável. Há situações em que soluções não diferenciáveis do problema variacional podem ser encontradas, e que não são soluções da equação de Euler.

1.1.1 A Identidade de Beltrami

Quando a função f no funcional integral J não depende explicitamente da variável independente x , é possível reduzir a equação de Euler-Lagrange à seguinte identidade, como apresentada em [10]:

$$f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} = C,$$

com C constante. Para deduzir essa identidade, consideremos primeiramente a derivada total da função, que nada mais é que uma combinação linear de diferenciais cujos componentes (coeficientes) são a inclinação da função $f(y, y_x, x)$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_x} \frac{dy_x}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

isto é,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y_x + \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

onde podemos isolar

$$\frac{\partial f}{\partial y} y_x = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} - \frac{\partial f}{\partial x}$$

multiplicando a equação de Euler, como dada abaixo

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0$$

por y_x , obtemos

$$y_x \frac{\partial f}{\partial y} - y_x \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Substituindo

$$\frac{\partial f}{\partial y} y_x = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} - \frac{\partial f}{\partial x}$$

na equação diferencial em (1.1) ficamos:

$$\frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y_x} y_{xx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y_x \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0.$$

Como

$$\frac{d}{dx} \left(y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = y_{xx} \frac{\partial f}{\partial y_x} + y_x \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right),$$

que nada mais é que a derivada de um produto, temos com um pequeno rearranjo, uma forma alternativa da equação de Euler:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left(f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0.$$

Como observado acima, caso f não dependa explicitamente de x , então $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, assim a equação acima reduz-se a:

$$\frac{d}{dx} \left(f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0,$$

que por integração nos leva à identidade de Beltrami.

1.2 Aplicação da Equação de Euler: Menor Distância Entre Dois Pontos

O elemento de comprimento de arco no plano é dado por $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, colocando dx^2 em evidência temos que $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, o comprimento total da curva no plano ligando os pontos de coordenadas $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ é $L = \int_P^Q ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, queremos que a curva que une os pontos P e Q tenha comprimento mínimo, para tal $y(x)$ tem que ser mínimo, então, chamando de $f = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Como f não depende explicitamente de y , temos que:

$$\frac{d}{dx} \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0,$$

assim, tem-se:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = C,$$

elevando ambos os membros da equação ao quadrado ficamos com:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = C^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

então

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 - C^2 \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = C^2$$

assim colocando $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$ em evidência e o isolando na equação ficamos com:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{r}{1-r}} = a,$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $r = C^2$ e $0 < r < 1$.

A equação diferencial: $\frac{dy}{dx} = a$ fornece a solução geral para $y(x) = ax + b$, onde b é uma constante de integração. Como a curva $y(x)$ deve passar pelos pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) onde as constantes a e b são determinadas pela resolução do seguinte sistema de equações lineares:

$$ax_1 + b = y_1 \quad \text{e} \quad ax_2 + b = y_2,$$

utilizando o método da adição para encontrarmos os coeficientes a e b temos que:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}$$

e

$$y(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}$$

assim provamos que na geometria euclidiana a menor distância entre dois pontos é uma reta.

Em geral, curvas que fornecem a menor distância entre dois pontos sobre uma superfície são chamadas geodésicas dessa superfície. Numa superfície esférica, por exemplo, a geodésica entre dois pontos é o menor arco de círculo máximo (o centro coincide com o centro da esfera) que conecta estes pontos. Na relatividade geral, o espaço-tempo quadridimensional é curvo, e a geodésica generaliza a noção de linha reta para este espaço. Uma partícula livre, na relatividade geral, sempre move-se ao longo de uma geodésica do espaço-tempo curvo.

A História da Curva de Menor Tempo

Johann Bernoulli teve grande influência no desenvolvimento do Cálculo Variacional. Ele nasceu em Basileia em 1667, filho de Nicolaus Bernoulli, um boticário, e sua esposa, Margaretha Schönauer, onde começou a estudar medicina na Universidade de Basel. Seu pai desejava que seus estudos o tornasse apto para que ele assumisse o comércio de especiarias da família, mas Johann Bernoulli não gostava de negócios e convenceu o pai a deixá-lo estudar medicina. No entanto, Johann Bernoulli, também não se interessou pelos estudos de medicina e começou a estudar matemática com seu irmão mais velho Jacques. Ao longo da educação de Johann Bernoulli na Universidade de Basel, os irmãos Bernoulli trabalharam juntos e gastaram muito do seu tempo a estudar o recém-descoberto cálculo infinitesimal. Eles estavam entre os primeiros matemáticos, não só por estudar e compreender o cálculo, mas por aplicá-lo a vários problemas. Um destes problemas, que o fez ser conhecido como pai do Cálculo Variacional, foi o problema da Braquistócrona.

Em junho de 1696, Bernoulli desafiou as mentes mais brilhantes de sua época a resolver um problema que ele apresentou na revista científica *Acta Eruditorum* (revista dos eruditos), que foi uma revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz, um problema que ele já havia resolvido. Eis a motivação de Bernoulli aos gênios de seu tempo, dada em [1]:

Eu, Johann Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., Eu espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me

comunique a solução do problema proposto, Eu o declararei publicamente merecedor de elogio.

O desafio proposto por Bernoulli tratava-se de encontrar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória. O conteúdo da publicação na língua latina era, com em [1].

Datis in plano verticali duobus punctis A et B assignare mobili M, viam AMB per quam gravitate sua descends et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. (Sejam A e B dois pontos de um plano vertical. Encontre a curva na qual uma partícula M sujeita somente à ação da gravidade, descreve a trajetória mais rápida entre os pontos A e B).

Esse desafio foi encaminhado por carta às mentes mais brilhantes do mundo da época dando-lhes um prazo de seis meses, depois prorrogados por mais quatro meses para que o problema fosse solucionado. Além do próprio Johann Bernoulli, outros cinco matemáticos apresentaram soluções originais para o problema: Johann Bernoulli (1667 – 1748); Sir Isaac Newton (1643 – 1727); Jacques Bernoulli (1654 – 1705); Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716); Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708) e Guillaume de L'Hôpital (1661 – 1704).



Figura 2.1: Imagens.

Todos esses matemáticos, por meios diferentes chegaram à mesma resposta a curva de menor tempo ou Braquistócrona (do grego brakhisto, isto é: mais ligeiro, chronos, isto é: tempo), deveria ser uma cicloide.

Ciclóide: A Helena da Geometria

A ciclóide foi percebida pela primeira vez pelo francês, Charles Bovelles (1479 – 1566), que num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501, se refere a essa curva ligando-a com o problema da quadratura do círculo. Os primeiros estudos rigorosos que se tem conhecimento são devidos a Giles Person de Roberval (1602 – 1675) que a chamou de trochóide (roda em grego) e a Evangelista Toricelli (1608 – 1647), um discípulo de Galileu Galilei (1564 – 1642). O próprio Galileu Galilei também estudou a curva tendo inclusive a chamado de ciclóide e referiu-se a sua forma graciosa, apontando-a como sugestão para o perfil dos arcos de construções em arquitetura e a Blaise Pascal (1623 – 1662) que a chamou de roulette afirmando sobre ela em [2]:

“A ciclóide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos”.

Na época, havia a necessidade de novas curvas, para testar a eficiência de novos métodos, as curvas ciclóidais, então, que são aquelas geradas por um ponto de um círculo que roda sem resvalar sobre uma circunferência, chamada ciclóide quando o círculo gerador roda sobre uma circunferência de raio infinito, isto é um reta, epiciclóide, quando o círculo gerador roda sobre uma circunferência de raio finito, exterior a ela e hipociclóide, quando o círculo gerador roda sobre uma circunferência de raio finito, interior a ela.

As curvas cicloidais, então, logo se tornaram popular entre os matemáticos, sendo imensamente estudada por célebre matemáticos como: Mersenne, Christopher Wren, Pascal, Huygens, os irmãos Bernoulli, Newton, Leibniz, dentre outros além dos a cima citados.

Desafios foram feitos às grandes mentes do século *XVII* sobre as curvas cicloidais, desafios estes que buscavam as soluções mais originais e elegantes sobre suas propriedades

físicas e geométricas, foi em decorrência destas disputas, que as curvas cicloidas e em especial a curva cicloide foi chamada de a: *Helena da geometria*.

3.1 Equações Paramétricas da Ciclóide

A cicloide é formada pela curva traçada por um ponto qualquer da borda de uma roda que rola sem deslizar por um plano horizontal.

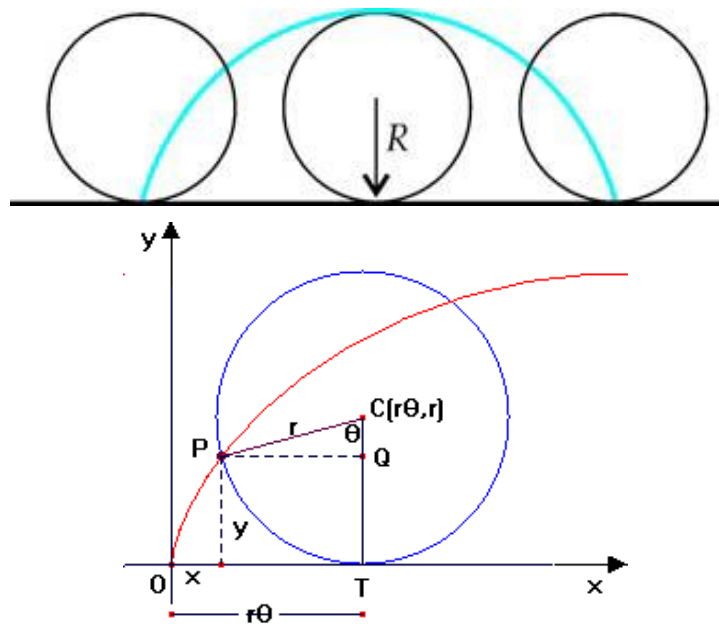


Figura 3.1: Ciclóide.

Observando a figura acima, percebemos que o segmento $\overline{OT} \equiv r\theta$ é o comprimento do arco PT . Desejamos agora determinar uma equação que descreva corretamente a posição do ponto P , como em [5], para isso vamos determinar as equações paramétricas deste ponto em relação a x e em relação a y , ambas em função de r e de θ .

Pela figura temos que:

$$r\theta = x + r\text{sen}(\theta),$$

assim,

$$x = r\theta - r\text{sen}(\theta),$$

logo

$$x = r(\theta - \text{sen}(\theta)),$$

assim determinamos a equação paramétrica da equação desejada em relação a x . Agora para y temos:

$$r = \overline{CQ} + y,$$

onde $\overline{CQ} = r\cos(\theta)$, logo

$$r = r\cos(\theta) + y,$$

isto é,

$$y = r - r\cos(\theta),$$

portanto,

$$y = r(1 - \cos(\theta)).$$

Assim determinamos as equações paramétricas que determinam o ponto P , desta forma a curva que detem todos os pontos de P que tem as equações paramétricas acima mostradas é a curva cicloide.

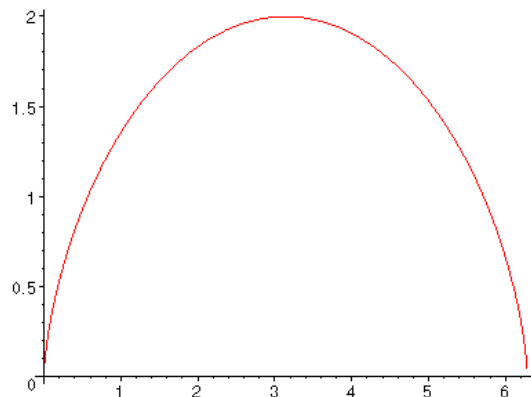


Figura 3.2: Ciclóide.

As Propriedades da Ciclóide

São impressionantes algumas propriedades físicas que essa curva apresenta, dentre elas destacamos: a Braquistócrona e a Tautócrona que resolveu o problema do pêndulo isócrono.

4.1 A Braquistócrona

O problema da braquistócrona gira em torno de se encontrar uma curva que faça com que um objeto de massa m sujeito apenas à aceleração gravitacional percorra a distância entre dois pontos distintos no menor tempo possível partindo do repouso. Seja a função $y(x)$ que define a curva desejada e sejam os pontos $P = (0, 0)$ e $Q = (a, b)$ distintos pertencentes a essa curva. Pelo fato de ser um sistema conservativo (sem nenhuma perda de energia) temos que a energia mecânica é conservada, assim:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

assim, $v(x) = \sqrt{2gy}$, pois a velocidade da partícula depende da coordenada x .

Sabemos também que o tempo de queda da partícula é dada por:

$$T[y(x)] = \int \frac{ds}{v}, \quad \text{onde } ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

logo, temos

$$T[y(x)] = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy(x)}},$$

assim, colocando dx^2 em evidência no integrando ficamos com

$$T[y(x)] = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{2gy(x)}} dx.$$

Chamemos de $w = \sqrt{\frac{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{2gy(x)}}$ que é a função a ser variada.

Utilizaremos para resolver esse funcional a identidade de Beltrami e faremos a seguinte simplificação de notação $\frac{dy}{dx}$ chamaremos de y' assim temos:

$$\frac{\partial w}{\partial y'} = \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} 2y' (2gy)^{-\frac{1}{2}},$$

assim aplicando na identidade de Beltrami para $\frac{\partial w}{\partial y'}$ ficamos com

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{1}{\sqrt{2gy}} = C,$$

o primeiro membro da equação tem como mínimo múltiplo comum (*M.M.C*) o termo

$$\sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2gy}$$

logo a equação fica:

$$\frac{1 + y'^2 - y'^2}{\sqrt{(1 + y'^2)(2gy)}} = C,$$

isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + y'^2)(2gy)}} = C$$

elevando ambos os membros da equação ao quadrado ficamos:

$$y(1 + y'^2) = \frac{1}{2gC^2}$$

chamando de $k = \frac{1}{2gC^2}$ ficamos com

$$y(1 + y'^2) = k,$$

isto é,

$$y'^2 = \frac{k - y}{y},$$

assim,

$$y' = \sqrt{\frac{k-y}{y}},$$

voltando a escrever $y' = \frac{dy}{dx}$ e isolando dx temos

$$dx = \sqrt{\frac{y}{k-y}} dy$$

façamos uma mudança de variável e chamemos $y = k\text{sen}^2(\theta)$ com derivada $dy = 2k\text{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta$

$$dx = \sqrt{\frac{k\text{sen}^2(\theta)}{k - k\text{sen}^2(\theta)}} 2k\text{sen}(\theta)\cos(\theta)d\theta$$

colocando no denominador da fração k em evidência e utilizando a relação fundamental da trigonometria, a saber: $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ a equação fica escrita como

$$dx = 2k\text{sen}^2(\theta)d\theta$$

assim,

$$x = \int 2k\text{sen}^2(\theta)d\theta.$$

Usaremos agora para resolver esta integral a seguinte identidade trigonométrica

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

então

$$x = 2k \int \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

e assim obtemos

$$x = 2k \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}(2\theta) \right) + C.$$

Se chamarmos de

$$2\theta = \phi,$$

então

$$x = 2k \left(\frac{\phi}{4} - \frac{1}{4}\text{sen}(\phi) \right) + C.$$

Assim concluímos que

$$x = \frac{k}{2} (\phi - \text{sen}(\phi)) + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$, se fizermos $C = 0$, então:

$$x = \frac{k}{2} (\phi - \text{sen}(\phi)).$$

Para determinarmos o valor de y basta calcular a integral do integrando $\sqrt{\frac{k-y}{y}}$ utilizando a mesma mudança de variável $y = k\text{sen}^2(\theta)$ e $dx = 2k\text{sen}^2(\theta)d\theta$ assim

$$y = \int \sqrt{\frac{k - k\text{sen}^2(\theta)}{k\text{sen}^2(\theta)}} 2k\text{sen}^2(\theta)d\theta,$$

logo

$$y = k \int \text{sen}(2\theta)d\theta$$

assim,

$$y = -\frac{k}{2}\text{cos}(2\theta) + C,$$

se fizermos $C = \frac{k}{2}$ e $2\theta = \phi$, então:

$$y = \frac{k}{2} (1 - \text{cos}(\phi)),$$

que são as equações paramétricas da cicloide e como queríamos demonstrar a cicloide é braquistócrona.

4.2 A Tautócrona

Uma outra propriedade impressionante da cicloide é o fato do tempo para que um corpo desça por ela (cicloide invertida), independa da altura que foi lançada, mas apenas do raio da mesma, que é duas vezes o raio do disco que deu origem à cicloide, por apresentar essa propriedade a cicloide invertida é chamada de tautocrona (curva de mesmo tempo).

4.2.1 Prova Matemática de que a Cicloide é Tautócrona

Uma demonstração de que a curva cicloide tem como propriedade física ser tautócrona foi dado pelo matemático noruegues Niels Henrik Abel (1802 – 1829). Abel, pesquisou

com afimco uma versão geral do problema da tautocrônica (Problema Mecânico de Abel), nominalmente, dado à função $T(y)$ que especifica o tempo total de descida para uma dada altura inicial, encontrando-se uma equação que nos fornece a solução. O problema da Tautocrônica é um caso especial do problema mecânico de Abel, quando $T(y)$ é uma constante. A solução de Abel começa com o Princípio da Conservação de Energia.

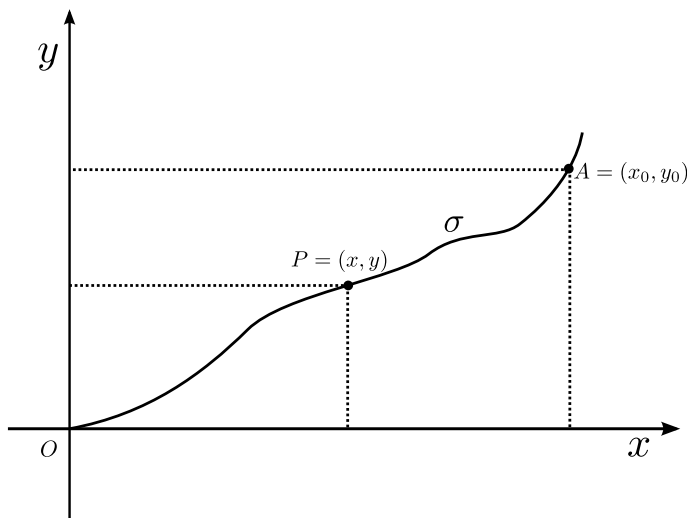


Figura 4.1: Trajetória.

Na dada curva adotaremos a posição mais baixo da mesma como sendo O , σ o arco AP e P um ponto arbitrário entre AO . Considerando um corpo de massa m onde atue apenas a aceleração da gravidade na trajetória PO , como em qualquer outra teremos a conservação da energia mecânica, já que o sistema é conservativo. Então a energia mecânica no ponto P é igual à energia mecânica no ponto O , assim

$$mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}m \left[\frac{d\sigma}{dt} \right]^2,$$

visto que, $v = \frac{d\sigma}{dt}$. Assim

$$\left[\frac{d\sigma}{dt} \right]^2 = 2(gy_0 - gy)$$

logo, segue que

$$\left[\frac{d\sigma}{dt} \right] = \frac{d\sigma}{dy} \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(y_0 - y)},$$

o sinal negativo deve-se ao fato de σ diminuir a medida que t cresce. Agora integramos

de $y = y_0$ até $y = 0$ para obtermos o tempo total necessário para a partícula cair.

$$T(y_0) = \int_{y=y_0}^{y=0} dt = \int_{y_0}^0 \frac{\frac{d\sigma}{dy}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dy.$$

Usando as transformadas de Laplace, que é um método simples que serve para transformar uma equação diferencial com condições iniciais (PVI: Problema com Valores Iniciais) em uma equação algébrica, de modo a obter uma solução deste PVI de uma forma indireta sem calcular a solução geral da equação diferencial através de integrais e derivadas, portanto, para resolver essa integral temos:

$$T(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[y^{-\frac{1}{2}} * \frac{d\sigma}{dy} \right]$$

onde o símbolo $*$ significa produto convolutivo, que é uma ferramenta bastante útil para se calcular a transformada Laplace, analisando-a como o produto de duas transformadas. Considerando a transformada de Laplace na equação acima, temos

$$\mathcal{L}[T(y_0)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathcal{L} \left[\frac{1}{\sqrt{y}} \right] \mathcal{L} \left[\frac{d\sigma}{dy} \right].$$

Visto que a transformada de uma constante é está sobre uma variável s e $T(y_0) = T_0$ é constante (tautocrônico), como $\mathcal{L} \left[y^{-\frac{1}{2}} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, temos:

$$\frac{T_0 \sqrt{2g}}{s} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \mathcal{L} \left(\frac{d\sigma}{dy} \right),$$

assim,

$$\mathcal{L} \left(\frac{d\sigma}{dy} \right) = T_0 \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{s}} T_0 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} T_0 \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

aplicando a transformada de Laplace inversa em ambos os membros da equação ficamos com:

$$\frac{d\sigma}{dy} = T_0 \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \mathcal{L}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{s}} \right),$$

desta forma, temos:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{T \sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}},$$

elevando os dois lados da igualdade ao quadrado temos:

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)^2 = \frac{2gT^2}{\pi^2} \frac{1}{y}.$$

Para simplificarmos a equação diferencial faremos $k = \frac{2gT^2}{\pi^2}$. Usaremos também o seguinte artifício: como $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$, pelo fato de $d\sigma$ ser um elemento diferencial de arco se dividirmos todos os membros por dy^2 ficamos:

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1.$$

A equação com essas mudanças fica

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = k \frac{1}{y}.$$

Como já demonstrado para o caso de uma cicloide ser uma braquistócrona a equação diferencial acima tem como solução:

$$x(\theta) = \frac{2gT^2}{\pi^2} \left(\theta + \frac{1}{2}\text{sen}(2\theta)\right)$$

e

$$y(\theta) = \frac{2gT^2}{\pi^2} (1 - \text{cos}(2\theta))$$

que são as equações paramétricas da cicloide. Assim como queríamos provar, uma cicloide é também uma tautócrona.

4.2.2 Prova da Tautocronicidade da Cicloide: Solução de Lagrange

Uma outra solução interessante foi dada por Lagrange que postulou: Se a posição de uma partícula é parametrizada pelo arcotangente $s(t)$ do ponto de mínimo, a energia cinética é proporcional a s^2 . A energia potencial é proporcional à altura $y(s)$. E para que seja considerada uma curva isocrônica, o Lagrangiano deve ser como um oscilador harmônico simples : a altura da curva deve ser proporcional ao comprimento de arco ao quadrado, isto é,

$$y(s) = ks^2.$$

Onde k é a constante de proporcionalidade, para a qual Lagrange fixou o valor igual a 1 através da substituição das unidades de comprimento. A forma diferencial desta relação é

$$dy = 2sds$$

e

$$dy^2 = 4s^2 ds^2 = 4y(dx^2 + dy^2).$$

Assim eliminamos a variável s , e obtemos uma equação diferencial em termos de dx e dy . Dividindo toda a equação por dy^2 ficamos com:

$$1 = 4y \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 4y,$$

isto é,

$$\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 = \frac{1 - 4y}{4y}.$$

Para encontrar a solução, integramos para x em função de y :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1 - 4y}}{2\sqrt{y}},$$

assim, fazendo $u = \sqrt{y}$ e $du = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$, temos

$$x = \int \sqrt{1 - 4u^2} du.$$

Seja $u = \frac{1}{2} \text{sen}(\theta)$, assim $du = \frac{1}{2} \cos(\theta) d\theta$, logo temos:

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{1 - 4u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \int \cos^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(\theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{8} (2\theta + \text{sen}(2\theta)) + C \\ &= \frac{1}{8} (\text{sen}(\varphi) + \varphi) + C, \end{aligned}$$

onde fazendo $\varphi = 2\theta$ e $C = 0$, temos que

$$x = \frac{1}{8}(\text{sen}(\varphi) + \varphi).$$

Por outro lado, como $y = u^2$, pois $u = \sqrt{y}$, então

$$y = \left(\frac{1}{2}\text{sen}(\theta)\right)^2 = \frac{1}{4}\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{8}(1 - \cos(2\theta)) = \frac{1}{8}(1 - \cos(\varphi)),$$

que são as equações da ciclóide.

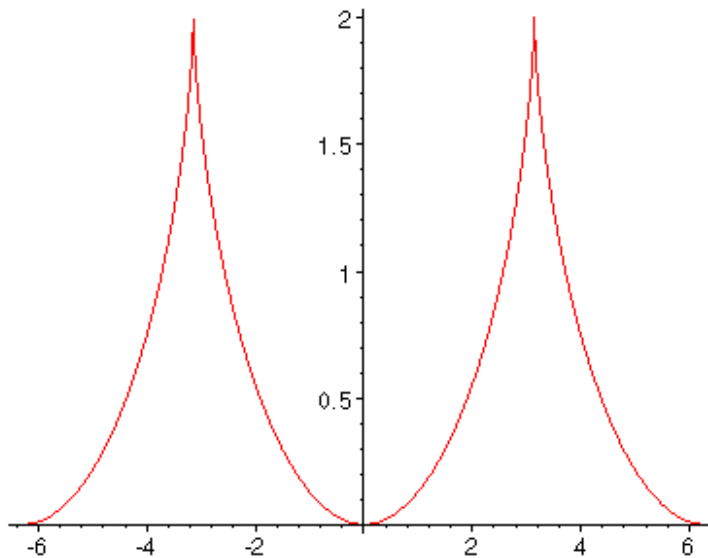


Figura 4.2: Ciclóide.

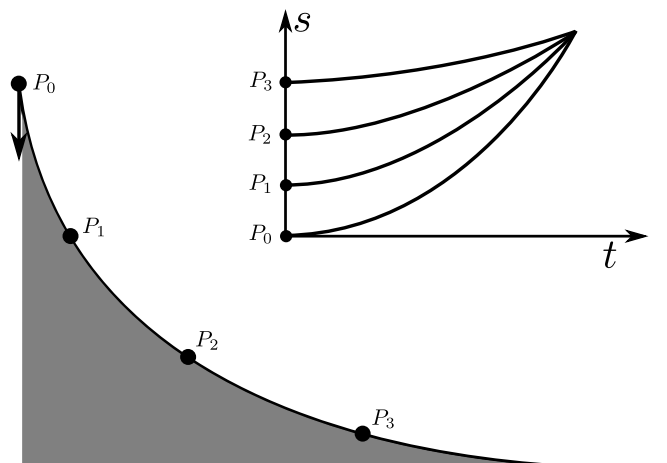


Figura 4.3: Curva Tautocrona

4.2.3 Prova da Tautocronicidade da Ciclóide: Um Caminho Alternativo

Talvez a solução mais simples para o problema tautocrônico é observar uma relação direta entre o ângulo de inclinação e da gravidade sentida por uma partícula sobre a inclinação. Uma partícula em um ângulo com 90° de inclinação vertical sente o efeito total da gravidade, enquanto uma partícula sobre um plano horizontal, sente-se sem gravidade. Em ângulos intermediários, a gravidade *virtual* sentida pela partícula é $g\text{sen}\theta$. O primeiro passo é encontrar uma gravidade virtual que produz o comportamento desejado. A gravidade virtual necessária para a curva tautocrônica é simplesmente proporcional à distância restante a ser percorrida, que admite uma solução simples:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s$$

e

$$s = A \cos(kt).$$

Ele pode ser facilmente verificado tanto que esta solução resolve a equação diferencial e que uma partícula atingirá $s = 0$, a um tempo $\frac{\pi}{2k}$ de qualquer altura a partir de A . O problema agora é a construção de uma curva que vai produzir uma gravidade virtual proporcional à distância restante para viajar, ou seja, uma curva que satisfaz:

$$g\text{sen}(\theta) = -k^2s.$$

A aparência explícita da distância remanescente é problemática, mas podemos aplicar a derivada e obter uma forma mais manuseável:

$$g \cos(\theta)d\theta = -k^2 ds$$

ou

$$ds = \frac{-g}{k^2} \cos(\theta)d\theta.$$

Essa equação mostra a mudança do ângulo da curva de acordo com a distância percorrida ao longo dela mesma. Aplicamos agora o Teorema de Pitágoras, pelo fato da descida da curva ser igual a tangente de seu ângulo, e algumas identidades trigonométricas para obtermos ds em função de dx , isto é

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left(1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right) dx^2 \\ &= (1 + \operatorname{tag}^2(\theta)) dx^2 \\ &= \sec^2(\theta) dx^2, \end{aligned}$$

assim

$$ds = \sec(\theta) dx.$$

Substituindo isso na primeira equação diferencial nos permite solucionar para x em função de θ :

$$ds = \frac{-g}{k^2} \cos(\theta) d\theta,$$

logo

$$\sec(\theta) dx = \frac{-g}{k^2} \cos(\theta) d\theta,$$

desta forma

$$dx = \frac{-g}{k^2} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{-g}{k^2} \left(\frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \right),$$

e assim

$$x = \frac{-g}{k^2} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right) + C_x.$$

Por outro lado

$$dy = \frac{-g}{k^2} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) d\theta,$$

isto é

$$dy = \frac{-g}{2k^2} \operatorname{sen}(2\theta) d\theta,$$

portanto

$$y = \frac{g}{4k^2} \cos(2\theta) + C_y.$$

Substituindo:

$$\phi = -2\theta ,$$

e

$$r = \frac{g}{4k^2}$$

vemos que essas equações para x e y são aquelas que correspondem a um círculo rolando sobre uma linha horizontal: uma cicloide:

$$x = r(\text{sen}(\phi) + \phi) + C_x,$$

e

$$y = r\cos(\phi) + C_y.$$

Aplicando-se para k e recordando que $t = \frac{\pi}{2k}$ é o tempo necessário para a descida, descobrimos o tempo de descida em função do raio r :

$$r = \frac{g}{4k^2},$$

assim,

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{r}},$$

portanto

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

e com isso concluímos que t é constante.

4.2.4 O Pêndulo Isócrono

Com a modernização dos Estados Europeus e do crescente desenvolvimento do comércio marítimo, favorecido principalmente pelas grandes navegações, tornaram-se necessários que os instrumentos de navegação fossem mais precisos. Por volta dos séculos *XVII* e *XVIII* era de extrema importância para a navegação utilizar meios precisos para a marcação do tempo. As medidas feitas por pêndulos eram precisas quando se variava a latitude, um bom navegador podia verificar a latitude por meio da duração do dia, a altura do sol ou observações das estrelas, o mesmo não ocorria quando se variava a longitude. A diferença entre a hora a bordo (ajustada, por exemplo quando o sol atingisse o zênite) e

a hora do porto de saída poderia ser convertida em graus de longitude, assim cada hora de discrepância equivale a 15° de longitude, que por sua vez podem ser traduzidas em distâncias, assim próximo à linha do Equador 1° equivale a aproximadamente $110Km$, com isso concluímos que 4 minutos de erro na marcação do relógio marítimo acarretava um desvio de rota de $110Km$.

Países como Espanha e Holanda ofereciam somas volumosas de dinheiro para quem conseguisse resolver o entrave de medição de longitudes. Galileu Galilei, estudando o comportamento de pêndulos, já havia dito que o período de oscilação do pendulo não dependia da amplitude da mesma. Já Christiaan Huygens, físico, matemático e astrônomo holandês, percebeu que isso só era verdade para pequenas amplitudes de oscilação.

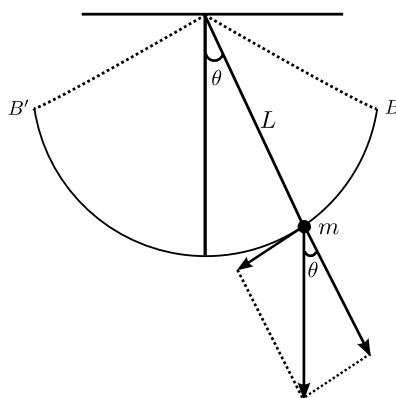


Figura 4.4: Oscilação.

Huygens passou décadas de sua vida tentando resolver esse problema com a construção de cronômetros marinhos que não fossem afetados pelo movimento das ondas do mar, em especial ele estava tentando construir um pêndulo que fosse isócrono. Huygens tentou contornar o fato de a amplitude mudar o período de oscilação do pêndulo colocando obstáculos ao seu lado, todas suas tentativas de encontrar um obstáculo que fizesse a oscilação do pêndulo ser independente da amplitude de oscilação não deram certo. Coincidentemente, Huygens foi convidado por Blaise Pascal a participar de uma competição sobre a *Helena da Geometria*: a curva cicloide. Foi tão brilhante sua participação neste concurso que Huygens se tornou uma autoridade nas propriedades da curva cicloide e decidiu verificar se ela solucionava o problema do pêndulo isócrono. Vejamos qual foi a ideia de Huygens:

Primeiramente Huygens considerou um corpo deslizando sobre uma superfície cicloidal lisa e mostrou inicialmente que tal corpo oscila de modo que seu período não dependa da altura de onde é abandonado, como representado na figura a seguir:

Figura 4.5: Superfície Cicloidal.

4.2.5 Primeira Parte da Demonstração

Conforme em [8] e [2], consideraremos um corpo que parte do repouso de uma altura H . Em t , o corpo se encontra em h . Como desceu $H - h$,

$$v^2 = 2g(H - h) \implies v = \sqrt{2g}\sqrt{H - h} \quad (4.1)$$

Figura 4.6: Superfície Cicloidal.

Da figura (4.6) temos $v_{vert} = v \cos(\alpha)$, daí chegamos que:

$$2R \cos(\alpha) \cos(\alpha) = h \implies \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{h}{2R}} \quad (4.2)$$

substituindo (4.1) e (4.2) na equação $v_{vert} = v \cos(\alpha)$, obtemos:

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{h(H - h)}. \quad (4.3)$$

Huygens introduz um movimento curvilíneo uniforme MCU auxiliar de raio $\frac{H}{2}$ e velocidade u (que deveria ser ajustado convenientemente):

Figura 4.7: Superfície Cicloidal.

Da figura (4.7) temos:

$$u_{vert} = u \cos(\beta), \text{ onde } \cos(\beta) = \frac{d}{H/2} \implies u_{vert} = \frac{ud}{H/2}. \quad (4.4)$$

Das propriedades de triângulos retângulos, podemos escrever:

$$\frac{d}{H-h} = \frac{h}{d} \implies d = \sqrt{h(H-h)}. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), obtemos:

$$u_{vert} = \frac{u}{H/2} \sqrt{h(H-h)}. \quad (4.6)$$

Comparando com a equação para v_{vert} dada em (4.3), vemos que, se escolhermos:

$$\frac{u}{H/2} = \sqrt{\frac{g}{R}}, \text{ ou seja } u = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad (4.7)$$

as projeções verticais dos dois movimentos coincidirão. Portanto, o intervalo de tempo desde que o corpo é abandonado até atingir o ponto mais baixo da superfície cicloidal é o mesmo que no movimento auxiliar o corpo gasta para dar meia volta:

$$\frac{1}{4}\tau = \frac{\pi H/2}{u} = \frac{\pi H/2}{H/2 \sqrt{g/R}} \implies \tau = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Conclusão de Huygens: O período não depende de H .

4.2.6 Segunda Parte da Demonstração: A Evoluta da Ciclóide é a Própria Ciclóide

Chamamos de evoluta da curva M ao lugar geométrico dos centros de curvatura da curva M . Assim dado uma curva M só existe uma evoluta para ela; entretanto, dado

uma curva L , existem várias involutas possíveis. Huygens fez algumas conjecturas sobre a curva M para provar sua hipótese de que a evoluta da cicloide é a própria cicloide, a saber: a reta perpendicular à curva M em B (perpendicular à reta tangente em B) é tangente à curva L em A , isto é, as perpendiculares à curva M são tangentes à curva L . Dado uma curva C qualquer, só há uma evoluta, pois uma curva pode ser traçada a partir de suas tangentes.

Figura 4.8: Involuta de L .

A evoluta da cicloide é a própria cicloide, deslocada e defasada de πrad . Huygens foi muito feliz em sua suposição, pois nem sempre a evoluta de uma curva é a própria curva, exemplo disso é que a evolvente de uma catenária, que é uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade, pelo seu vértice é uma tractriz, que é uma curva ao longo da qual um objeto se movendo sob a influência de fricção, quando empurrado em um plano horizontal por um segmento de linha, sendo, portanto, uma curva de perseguição.

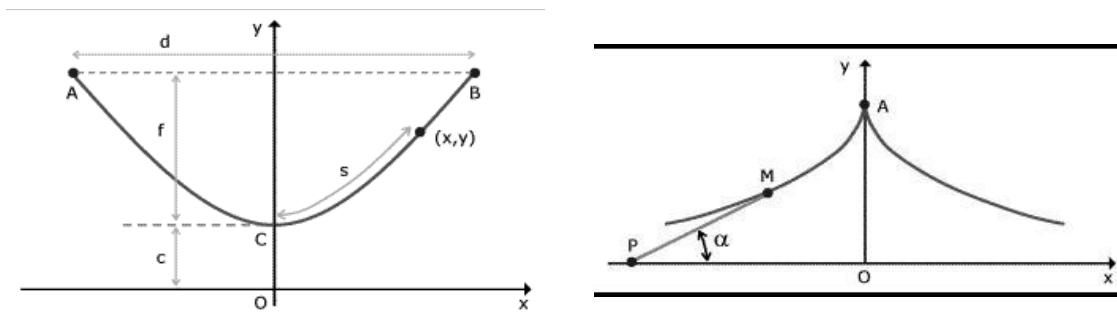


Figura 4.9: Catenária e Tractriz.

Imaginemos que as duas geratrizes girem juntas:

Figura 4.10: Evoluta da Ciclóide

A tangente em A passa por C'' e, portanto, a perpendicular em A passa por C ; a tangente em A' passa por C ; basta mostrar, então, que $\widehat{C''CA} = \widehat{C'CA'}$ ou seja, que os comprimentos de arco $\widetilde{AC''}$ e $\widetilde{A'C'}$ são iguais. Inicialmente, notemos que $\widetilde{A'C'} = \widetilde{O'C'}$; temos também que:

$$\widetilde{CC''A} = \overline{OC} \implies \widetilde{CC''} + \widetilde{C''A} = \overline{OO''} + \overline{O''C} \implies \widetilde{C''A} = \overline{O''C}$$

Conclusão, a evoluta da cicloide é a própria cicloide defasada e deslocada.

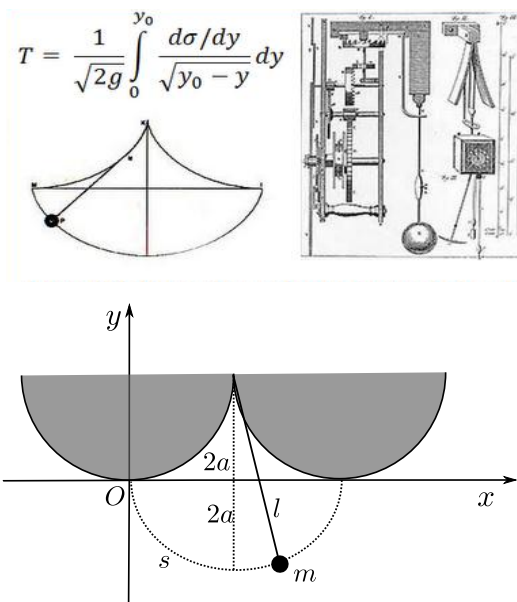


Figura 4.11: Pêndulo entre duas Ciclóides.

Enormes foram as contribuições de Huygens na física, na astronomia e na matemática, mas com certeza, a determinação da curva tautócrona e com ela a construção do pêndulo

isócrono, que resolveu um grande entrave para as navegações marítimas o colocam ao lado dos maiores pensadores que já existiram.

Trabalhando com a Ciclóide, Epiciclóide e Hipociclóide no Ensino Médio

Do que foi apresentado anteriormente, vimos quão fantástica e curiosa é a curva ciclóide, que quase passou ao esquecimento dos antigos geometras e que agussou enorme a curiosidade de grandes matemáticos do século *XVII*. Se tirarmos o foco da demonstração matemática que prova que a ciclóide é mesmo braquistócona e tautócrona, podemos trabalhar com alunos de ensino médio, de uma forma especial com alunos do 3º ano unindo conceitos de física e matemática, objetivando agusar a curiosidade no que tange a descoberta das fantásticas propriedades desta curva e expandindo para outras curvas interessantes construídas de forma similar a da curva ciclóide, a saber: a epiciclóide e a hipociclóide. No ano de 2013, tive a felicidade de trabalhar com minhas três turmas de 3º ano do Centro de Ensino Médio 01 do Gama, localizado em Brasília, local este que já leciono a mais de dois anos lançando para eles, como trabalho de conclusão do ano letivo uma pesquisa sobre a curva ciclóide dividida em três etapas:

- * Pesquisa histórica sobre a braquistócrona e a isócrona, bem como a construção da curva;
- * Pesquisa sobre o uso da epiciclóide na astronomia;
- * Pesquisa sobre a hipociclóide;

O resultado deste trabalho e um resumo dos dados coletados serão mostrados a seguir:

5.1 A Pesquisa e Construção da Braquistócrona

Das pesquisas que foram feitas sobre a braquistócrona, chamou-me mais a atenção o trabalho escrito dos alunos do 3º ano *B*, eles trouxeram a demonstração de Bernoulli para

a braquistócrona, onde Bernoulli parte do princípio da conservação da energia $v = \sqrt{2hg}$, onde h representa a perda de altitude em relação ao ponto de partida. Reviram em seu trabalho a lei da refração na qual um raio luminoso ao longo da sua trajetória obedece à regra: $\frac{\text{sen}(\theta)}{v} = k$, onde θ representa o ângulo em relação à vertical e k é uma constante.

Inserindo nesta fórmula a expressão da velocidade acima, obtem-se de imediato duas conclusões: no ponto de partida, visto que a velocidade é nula, o ângulo também é nulo. Logo a curva braquistócrona é tangente à vertical na origem. A velocidade é limitada, pois o seno não pode ser superior a 1. Esta velocidade máxima é atingida quando a partícula (ou o raio) passa pela horizontal. Sem prejudicar a generalidade do problema, supõe-se que a partícula parta do ponto de coordenadas $(0, 0)$ e que a velocidade máxima seja atingida à altitude $-D$, pois estamos considerando que a partícula está caindo. A lei da refração exprime-se então por:

$$\frac{\text{sen}(\theta)}{\sqrt{-2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gD}}.$$

E utilizando em sua pesquisa uma matemática que fugia do nível dos mesmos mostraram que em qualquer ponto da trajetória é possível aplicar a relação oriunda do deslocamento da partícula ds , onde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ que pode ser decomposta em uma componente em x dx e em uma componente em y dy onde θ é o ângulo formado com a componente vertical dy , desse modo podemos escrever :

$$\text{sen}(\theta) = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Elevando ao quadrado a equação:

$$\frac{\text{sen}^2(\theta)}{\sqrt{-2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gD}}$$

fazendo as simplificações necessárias ficamos com:

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{y}{-D} \tag{5.1}$$

do mesmo modo elevamos ao quadrado a equação:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

ficamos com:

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}. \quad (5.2)$$

Igualando as duas equações (5.1) e (5.2) ficamos com:

$$\frac{y}{-D} = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2},$$

então,

$$ydx^2 + ydy^2 = -Ddx^2 \Rightarrow y + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -D$$

e assim,

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = -\frac{D + y}{y}$$

que corresponde à equação diferencial do oposto de uma cicloide gerado pelo diâmetro D como já foi demonstrado. Já a construção da curva não ficou muito boa.



Figura 5.1: Cicloide Produzida pelos alunos do 3º B.

Além do trabalho pedido esse grupo de alunos trouxe a possibilidade de com a braquistócrona elaborarmos pistas de skate, montanhas-russas, pistas de bicross e togobãs utilizando a curva cicloide, mostrando suas inúmeras aplicações, como veremos algumas delas a seguir:



Figura 5.2: Rampas no formato cicloidal.

A cicloide ainda pode ser utilizada na arquitetura formando cúpulas com boa reflexão da luz natural quando associada a uma plataforma de luz na forma adequada, exemplo dessa aplicação é a cúpula da Kimbell Art Gallery de Luis I. Khn.

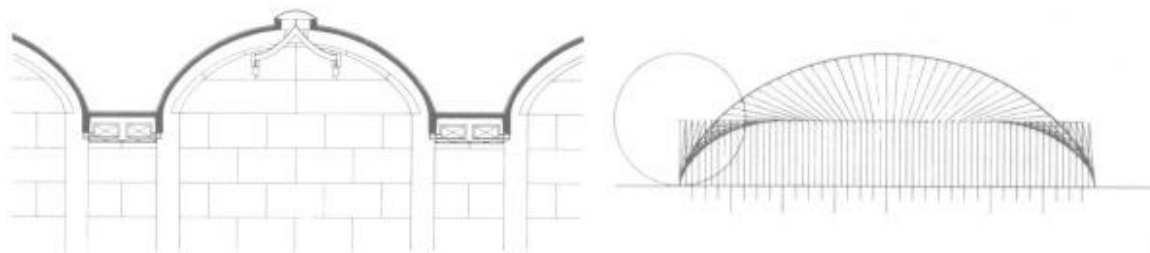


Figura 5.3: Cúpula.

O 3º ano C já não foi tão além nas pesquisas sobre a matemática sobre a curva cicloide mas na parte prática foi o que teve o melhor resultado. Este grupo trouxe em seu trabalho o modo de se construir a curva cicloide e mostrou na prática que a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória é a cicloide.

5.2 Outras Propriedades Interessantes da Ciclóide

Na pesquisa sobre a cicloide descobriu-se que a área, o comprimento e o volume da mesma estão relacionados com o círculo geratriz do seguinte modo:

A área sob um arco de cicloide é três vezes a área do círculo rolante. De fato, a área é igual:

$$A = \int_0^{2\pi} y dx$$

lembrando que $x = r(\theta - \text{sen}(\theta))$ e $y = r(1 - \text{cos}(\theta))$ são as equações paramétricas da cicloide, e que $dx = r - r\text{cos}(\theta)$, então

$$\int_0^{2\pi} r(1 - \text{cos}(\theta))r(1 - \text{cos}(\theta))d\theta,$$

logo

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} y dx \\ &= \int_0^{2\pi} r(1 - \text{cos}(\theta))r(1 - \text{cos}(\theta))d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \text{cos}(\theta))^2 d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\text{cos}(\theta) + \text{cos}^2(\theta))d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\text{cos}(\theta) + \frac{1 + \text{cos}(2\theta)}{2}\right) d\theta \\ &= r^2 \left[\theta \Big|_0^{2\pi} - 2\text{sen}(\theta) \Big|_0^{2\pi} + \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right] \\ &= 3\pi r^2. \end{aligned}$$

A prova de que a área da região limitada pela cicloide é exatamente o triplo da área do círculo gerador foi dada pela primeira vez em 1634 pelo matemático francês Gilles Personne de Roberval (9 de agosto de 1602, Paris, 27 de outubro de 1675). Roberval foi um dos matemáticos que, pouco antes da invenção do cálculo infinitesimal, ocuparam a atenção dos problemas que só são solucionáveis, ou podem ser resolvidos mais facilmente, por algum método que envolve limites ou infinitesimais, que hoje seria resolvido pelo cálculo. Ele trabalhou na quadratura das superfícies e da cubagem de sólidos, que ele realizou, em alguns dos casos mais simples, através de um método original que ele chamou de *Método*

dos Indivísíveis. Roberval, entretanto não publicou a demonstração da área da região limitada pela cicloide, o mérito dessa da publicação deste resultado é dado a Torricelli, discípulo de Galileu, que em 1644 em sua obra *Opera Geometrica*, publicou o primeiro trabalho sobre a cicloide, apresentando sua quadratura, bem como o volume do sólido de revolução. Essa publicação, porém, enfureceu Roberval, que levantou uma acusação de plágio contra o Italiano, iniciando uma disputa que só terminaria com a morte de Torricelli em 1647, provavelmente de tifo, antes que ele pudesse publicar sua correspondência com Mersenne como prova de que chegara independentemente aos seus resultados.

Roberval só veio a publicar seu trabalho sobre a quadratura da cicloide anos depois. Essa demora na publicação, constante em suas publicações matemáticas, devia-se à natureza do seu cargo como ocupante da cadeira de Ramus da Collège Royale. O cargo era ocupado por três anos, após os quais havia um concurso para o preenchimento do cargo, baseado num problema apresentado pelo titular anterior. Roberval, então, escondia seus trabalhos para vencer os concursos e manter seu posto. Essa prática, porém, levou como certeza a um atraso no desenvolvimento matemático e ofuscou a genialidade de Gilles Personne de Roberval.

Outro resultado interessante é o do comprimento de um arco de cicloide que é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante. De fato, primeiramente temos que:

$$dx = r(1 - \cos(\theta))d\theta \quad \text{e} \quad dy = r(\sin(\theta))d\theta,$$

assim o elemento de comprimento dl é dado por: $dl^2 = dx^2 + dy^2$ logo

$$dl^2 = r^2 (1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\theta^2$$

colocando r^2 em evidência temos:

$$dl^2 = r^2 (1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta^2$$

utilizando $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, ficamos com:

$$dl^2 = r^2(2 - 2\cos(\theta))d\theta^2$$

aplicando a identidade trigonométrica $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$ ficamos com

$$dl^2 = 4r^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta^2,$$

logo

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
 &= 2r \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u) 2du, \quad \text{onde } u = \frac{\theta}{2} \\
 &= 4r \cos(u) \Big|_0^{\pi} = 8r.
 \end{aligned}$$

Esse resultado, de que o comprimento de um arco de ciclóide é 8 vezes o raio do círculo gerador, foi demonstrado em 1658, pelo astrônomo, matemático e arquiteto inglês Christopher Wren (construtor da catedral de St. Paul em 1666).

Já o volume do sólido de revolução formado pela rotação de um arco de ciclóide em torno do eixo x é dado por: $V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx$ logo,

$$V = r^3 \int_0^{2\pi} \pi (1 - \cos(\theta))^3 d\theta = 2\pi^2 r^3.$$

Geometricamente, tem-se:

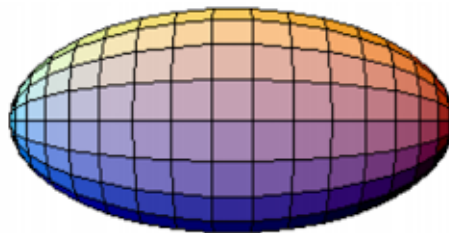


Figura 5.4: Volume da Ciclóide.

5.3 A Pesquisa Sobre a Epiciclóide na Astronomia

Nesta parte do trabalho proposta para os alunos foi lançado o desafio de fazer uma ampla pesquisa sobre os primórdios da astronomia e de como esta curva sustentou por muito séculos a ideia do movimento dos astros. Aqui trago um resumo da pesquisa feita pelos alunos.

5.3.1 A Epiciclóide

A epiciclóide é uma curva cíclica definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre um círculo diretor.

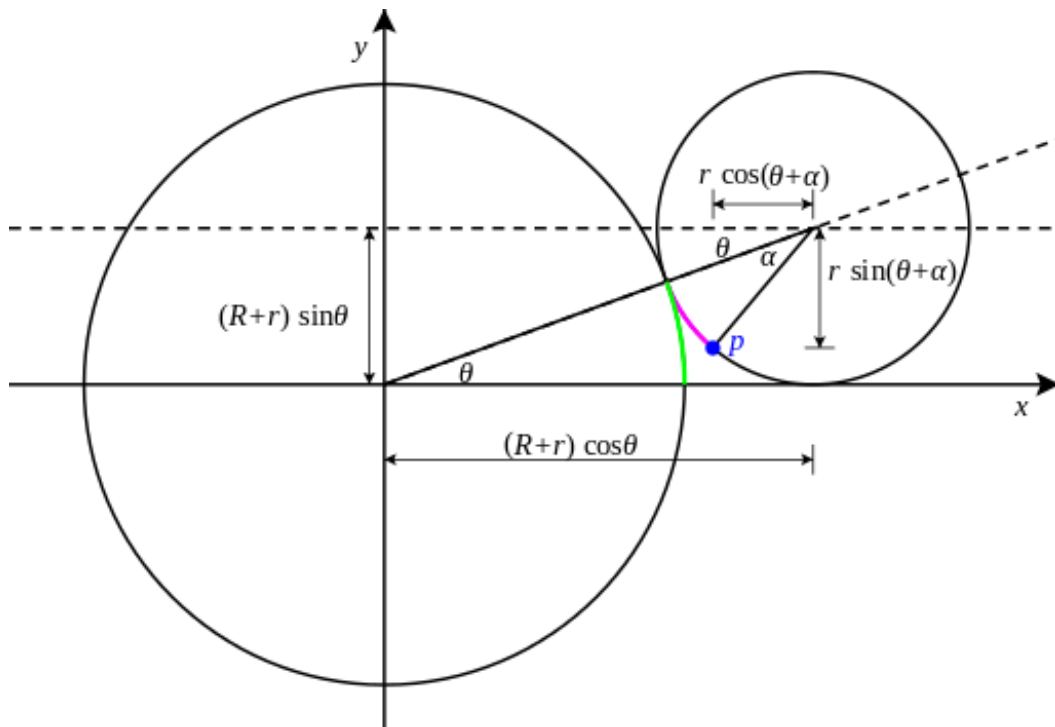


Figura 5.5: Epiciclóide.

Como não há deslizeamento entre os dois círculos, o tamanho do arco sobre os respectivos raios são iguais, isto é, $l_R = l_r$. A partir da definição de radiano (tamanho do arco sobre o raio), temos que: $l_R = \theta R$, e $l_r = \alpha r$. A partir dessas duas condições, temos a seguinte identidade: $\theta R = \alpha r$. Portanto temos que: $\alpha = \frac{R}{r}\theta$. Analisando a figura a cima, temos que a posição do ponto P é dada em coordenadas por:

$$x = (R + r)\cos(\theta) - r\cos(\theta + \alpha) = (R + r)\cos(\theta) - r\cos\left(\frac{R + r}{r}\theta\right)$$

e

$$y = (R + r)\sin(\theta) - r\sin(\theta + \alpha) = (R + r)\sin(\theta) - r\sin\left(\frac{R + r}{r}\theta\right)$$

Um fato interessante da epiciclóide: consideremos R fixo e igual a 1, então se r for igual a 1 a circunferência rolante teria o mesmo comprimento do círculo base, logo o ponto P descreve uma curva fechada com uma única cúspide:

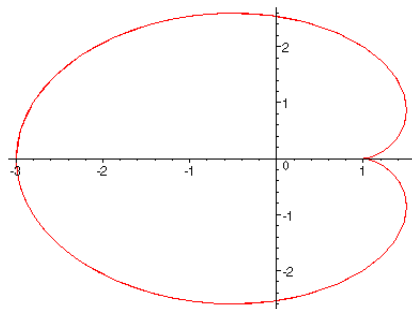


Figura 5.6: Epiciclóide de 1 Cúspide.

Para $r = \frac{1}{2}$, a circunferência rolante teria comprimento igual uma metade do círculo base, logo o ponto P descreve uma curva fechada com duas cúspides, que se convencionou chamar de curva de duas pétalas.

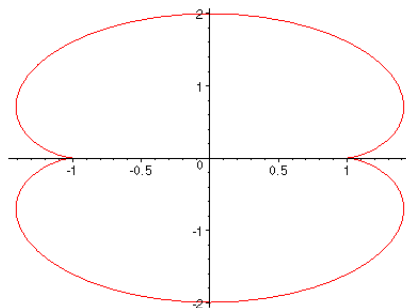


Figura 5.7: Epiciclóide de 2 Cúspides.

Da mesma forma, se $r = \frac{1}{n}$, n número natural fixo, então n vezes o comprimento do círculo rolante corresponde ao comprimento do círculo base, logo o ponto P descreve uma curva fechada com n cúspides, isto de, n pétalas.

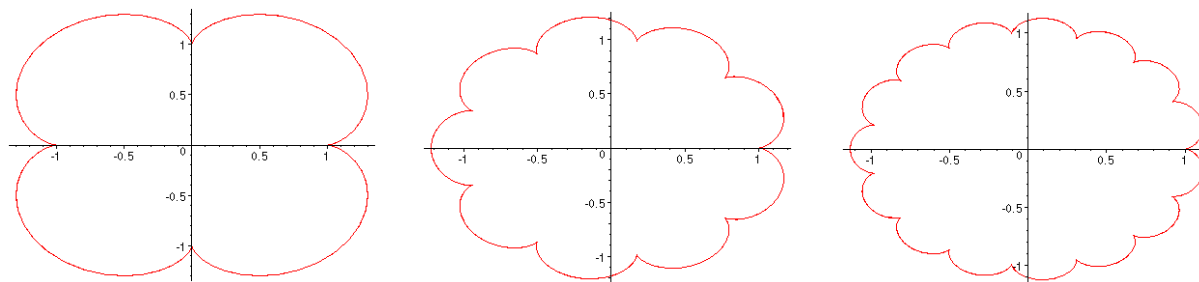


Figura 5.8: Epiciclóides de 4, 9 e 15 Cúspides.

Se $r = \frac{m}{n}$ com n, m pertencentes ao conjunto dos números naturais, como o comprimento do círculo rolante é $2\pi\frac{m}{n}$ temos que: $n\left(2\pi\frac{m}{n}\right) = m(2\pi)$. Dessa igualdade: n

vezes o comprimento do círculo rolante corresponde a m vezes o comprimento do círculo base, logo o ponto P descreve uma curva fechada com n pétalas, em m voltas do círculo base. Se r não é racional, isto é, r é um número irracional, então a curva descrita pelo ponto P nunca se fecha, caso contrário se, $n(2\pi r) = k(2\pi)$, para alguns n e k naturais, então, $r = \frac{k}{n}$ pertencente aos números racionais, o que é um absurdo, pois r é irracional, logo o número de cúspides é infinito.

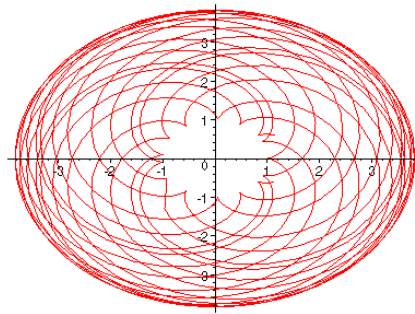


Figura 5.9: Epiciclóide com $n = \sqrt{2}$.

5.3.2 Os Epiciclos

Para os antigos gregos a Terra era concebida como sendo o centro geométrico do Universo. Em torno da Terra giravam os astros então conhecidos, a saber: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e as chamadas estrelas fixas, nesta ordem.

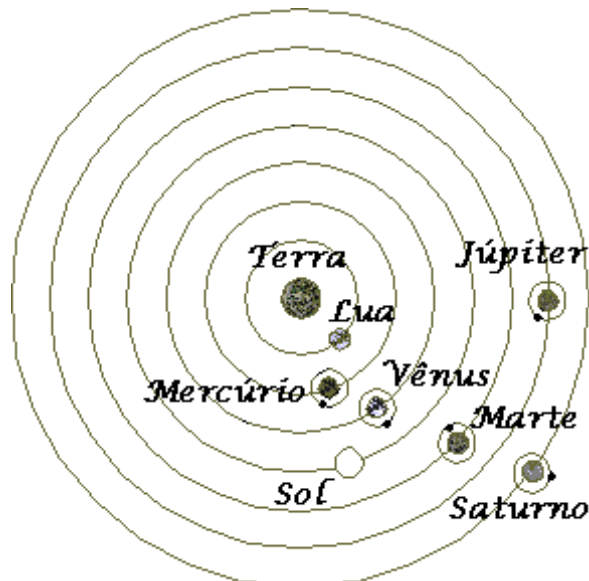


Figura 5.10: Modelo Geocêntrico.

Cada um desses astros deveria estar fixo numa esfera de mesmo centro com a Terra, estando as estrelas fixas na esfera mais externa. As esferas giravam ao redor da Terra com um período de revolução característico de cada astro, sendo o período da esfera que continha as estrelas fixas igual a 24 horas, exatamente o período que hoje sabemos é o período de revolução da Terra. Este era o modelo conhecido como epiciclo, ou *círculo superior*, e círculos excêntricos, que preservava o geocentrismo e os movimentos circulares.

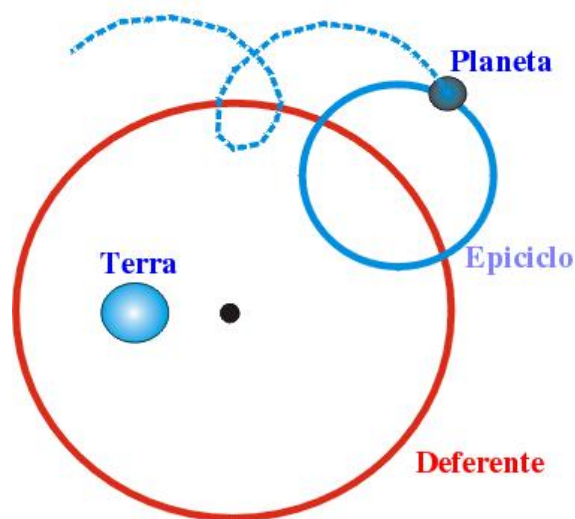


Figura 5.11: Epiciclo.

Foi Apolônio em aproximadamente 200 a.C que propôs dois modelos alternativos de representação dos planetas, um feito de epiciclos, outro envolvendo movimentos excêntricos. O modelo de Apolônio foi aperfeiçoado pelo maior astrônomo da Antiguidade, Hiparco de Nicéia (190 – 126 a.C.), que ajustou os valores numéricos que melhor descreviam as observações. Hiparco também atacou o problema mais difícil da Lua, tendo tido acesso aos dados babilônicos de eclipses, fato que só foi possível no Helenismo, em consequência da maior integração das diferentes nações. Contudo a medida que as observações astronômicas se desenvolviam a hipótese de que o movimento planetário era constituída de epiciclos ou movimentos excêntricos ficaram cada vez mais difíceis de se sustentar. As numerosas modificações e correções desse modelo, acabaram constituindo as bases da teoria dos Epiciclos proposta por Ptolomeu, o astrônomo de Alexandria. Ptolomeu explicava o movimento planetário considerando que: 1) cada planeta descrevia um movimento circular uniforme percorrendo trajetória de pequeno raio, denominada Epiciclo; 2) por sua vez o centro desse círculo percorria outra circunferência de raio maior, concêntrica com a Terra. Como resultado final, a órbita descrita por cada planeta era uma

curva contínua denominada Epiciclóide. Com estas considerações, Ptolomeu conseguiu explicar não só qualitativamente, mas também quantitativamente os movimentos dos planetas.

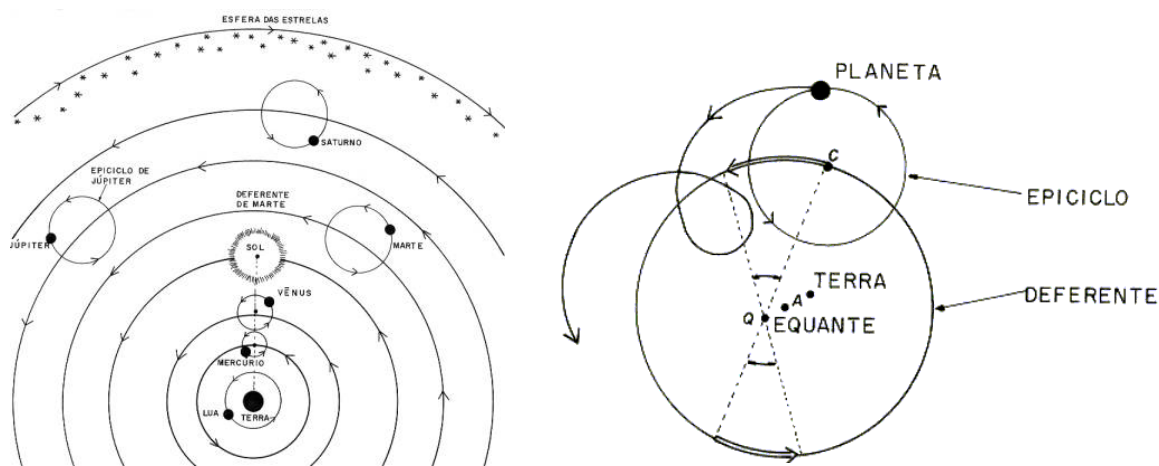


Figura 5.12: Modelo Ptolomáico em Epiciclos.

Ptolomeu construiu seu modelo planetário baseando-se no sistema de mundo de Aristóteles, fundamentado num sistema geométrico-numérico, de acordo com as tabelas de observações babilônicas, para descrever os movimentos do céu.

O sistema de Ptolomeu não só funcionava como se integrava perfeitamente no sistema da física de Aristóteles. Às estrelas, aos planetas, ao Sol e à Lua eram atribuídos movimentos naturais. A Terra não partilhava desse movimento, ocupando o seu lugar natural, em repouso, no centro do universo.

A teoria proposta por Ptolomeu prevaleceu por cerca de XV séculos até ser contestada pelo monge polonês Nicolau Copérnico, no século XVI. Nicolau Copérnico simplificou significativamente a descrição do sistema Ptolomáico ao colocar o Sol no centro do movimento planetário e não mais a Terra. Essa mudança corroborada pela observação de que os epiciclos para os planetas interiores era diferente os planetas exteriores, fato esse que não poderia acontecer, pois os epiciclos eram idênticos. Esta constatação apontava para uma oportunidade de simplificar o sistema do Almagesto e da Hipótese dos Planetas, de Ptolomeu, que contava com 43 esferas em movimento simultâneo. A mudança do modelo Geocêntrico para o modelo Heliocêntrico terminou por diminuir o número de círculos em movimento necessários para descrever as trajetórias dos planetas no céu, mas ainda considerava o movimento dos planetas com orbitas circulares. Somente com Kepler provou-se que além de ser verdadeiro o modelo Heliocêntrico as orbitas dos planetas deveriam ser elípticas.



Figura 5.13: Modelo Geocêntrico e Modelo Heliocêntrico.

5.4 A Pesquisa sobre a Hipociclóide

A epiciclóide e a hipociclóide são curvas que estão estreitamente relacionadas. Elas são definidas como o lugar geométrico de um ponto P sobre uma circunferência de raio b que rola sobre um círculo fixo de raio a . Estas curvas foram estudadas por grandes matemáticos da idade moderna como Dürer (1525), Desargues (1640), Huygens (1679), Leibniz, Newton (1686), de L'Hôpital (1690), Jacob Bernoulli (1690), La Hire (1694), Johann Bernoulli (1695), Daniel Bernoulli (1725) e Euler (1745, 1781). O estudo das curvas cicloidais estão relacionados a procura pela melhor forma e acoplamento de rodas dentadas. A Hipociclóide é curva plana descrita por um ponto fixo de uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre outra circunferência fixa no mesmo plano, e internamente a ela.

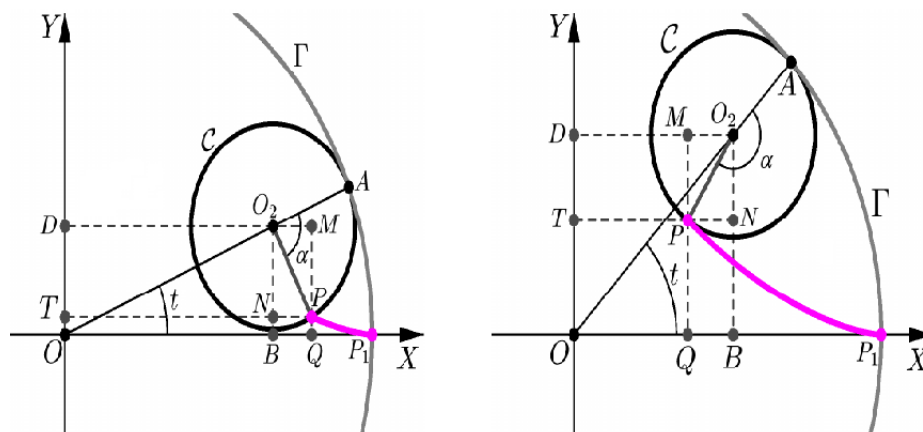


Figura 5.14: Hipociclóide com $t = \theta$.

Uma Hipociclóide pode ser definida pelas seguintes equações paramétricas:

$$f(\theta) = (R - r)\cos(\theta) + r\cos\left(\frac{R - r}{r}\theta\right) \quad \text{e} \quad g(\theta) = (R - r)\sin(\theta) - r\sin\left(\frac{R - r}{r}\theta\right)$$

em que R é o raio do círculo base e r é o raio do círculo rolante. Com $K = \frac{R}{r}$, este sistema também pode ser escrito:

$$f(\theta) = r(k - 1)\cos(\theta) + r\cos((k - 1)\theta)$$

e

$$g(\theta) = r(k - 1)\sin(\theta) - r\sin((k - 1)\theta).$$

A razão entre os raios, quando for um número inteiro, nos informa a quantidade de pétalas dessa figura. No caso especial em que a razão é igual 4, a hipociclóide (tetracúspides) é também conhecida como Astróide.

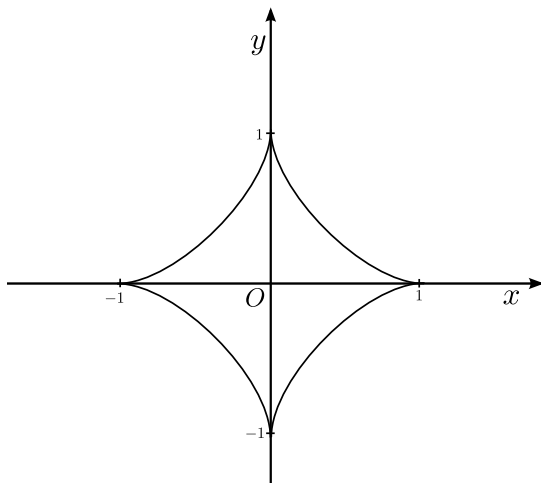


Figura 5.15: Astróide.

5.4.1 Evoluta da Hipociclóide

Na geometria diferencial de curvas, a evoluta da curva é o local de todos os seus centros de curvatura. A evoluta de uma hipociclóide é outra hipociclóide. A evoluta de uma hipociclóide pode ser descrita pelas seguintes equações paramétricas:

$$X_e(\theta) = f(\theta) - \frac{(f'^2(\theta) + g'^2(\theta))g'(\theta)}{f'(\theta)g''(\theta) - f''(\theta)g'(\theta)}$$

e

$$Y_e(\theta) = g(\theta) - \frac{(f'^2(\theta) + g'^2(\theta))f'(\theta)}{f'(\theta)g''(\theta) - f''(\theta)g'(\theta)}$$

5.4.2 Involuta da Hipociclóide

A involuta de uma hipociclóide é outra hipociclóide, como pode-se observar na figura a baixo. A involuta de uma hipociclóide pode ser descrita pelas seguintes equações paramétricas:

$$X_i(\theta) = f(\theta) - \frac{sf'(\theta)}{\sqrt{f'^2(\theta) + g'^2(\theta)}}$$

e

$$Y_i(\theta) = g(\theta) - \frac{sg'(\theta)}{\sqrt{f'^2(\theta) + g'^2(\theta)}}$$

em que s pode ser calculado da seguinte forma:

$$s = \int_0^\theta \sqrt{f'^2(\theta) + g'^2(\theta)}.$$

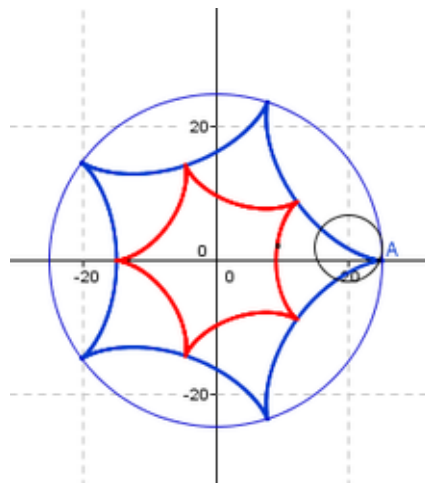


Figura 5.16: Involuta da Hipociclóide.

5.4.3 Hipociclóide Encurtada

Se o ponto da curva estiver dentro da circunferência geratriz, a curva descrita será uma hipociclóide encurtada, como na figura a seguir:

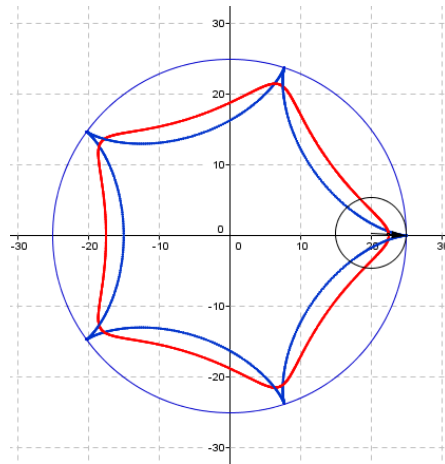


Figura 5.17: Hipociclóide Encurtada.

5.4.4 Hipociclóide Alongada

Se o ponto da curva estiver fora da circunferência geratriz, a curva descrita será uma hipociclóide alongada, como na figura a seguir:

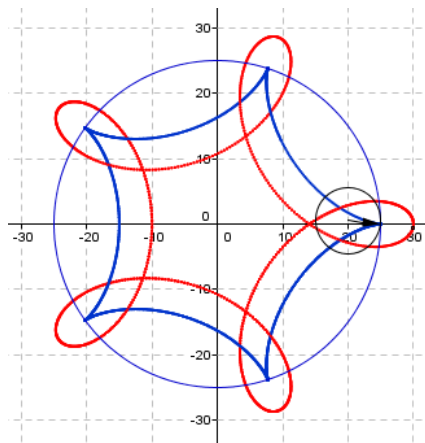


Figura 5.18: Hipociclóide Encurtada..

5.4.5 Exemplos de Hipociclóides onde se varia $K = \frac{R}{r}$

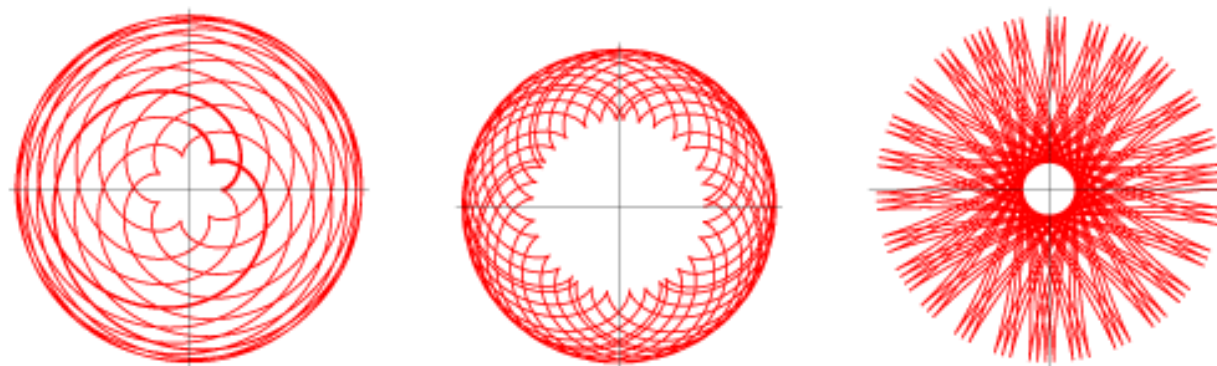


Figura 5.19: Hipociclóides com: $K = \pi$, $K = \sqrt{2}$ e $K = \gamma$.

Com essa pesquisa, meus aluno de 3^o ano puderam entra em contato com um interessante mundo das curvas cicloidais, onde varia apenas a diretriz da curva, para a ciclóide uma reta, para a epicyclóide e hipocicloide uma circunferência onde a geratriz se move externa e internamente respetivamente. E perceber como elas formam importantes para o desenvolvimento da matemática.

Modelando as Curvas Cicloidais no Geogebra e no Maple

Para que os alunos possam vislumbrar como as equações parametrizadas das cicloides, epiciclóides e hipociclóides, como mostradas ao longo desta dissertação, geram essas curvas e como é seu formato após mudarmos algumas de suas variáveis é importante ter como ferramentas programas tais como: geogebra, maple, etc.

A.1 Usando o GeoGebra para Modelar a Ciclóide

O GeoGebra constitui um recurso didático importante. Suas capacidades de modelação dinâmica permite a transformação quase contínua de configurações mantendo um conjunto de restrições, e a possibilidade de testar propriedades, facilitaram a experimentação matemática, contribuindo para a classificação de conceitos e para a compreensão de resultados. Como consequência da utilização do GeoGebra ficaram algumas animações geométricas, que permitem visualizar e aprender de forma rápida, alguns dos conteúdos abordados tornando-os acessíveis a todos. É claro que estas animações, por si só, não explicam o porquê dos resultados mas fornecem evidências que poderão despertar curiosidade e fornecer motivação para explorações matemáticas.

A circunferência móvel de raio r rola sobre o eixo Ox , selecionando a caixa cicloide ou sob a reta $y=2r$ selecionando a caixa cicloide invertida. A origem da curva a ser descrita é o ponto de contato da circunferência com Ox . No instante inicial o ponto P , gerador da cicloide, esta sobre o eixo Ou . Nesse instante a sua ordenada é representada por c . utilizando o seletor c , o ponto P pode ser posicionado sobre a circunferência, no seu interior

ou no seu exterior, o que faz alterar a forma da ciclóide, obtendo-se respectivamente uma ciclóide, uma ciclóide alongada ou uma ciclóide encurtada.

A.2 Usando o Maple para Modelar a Ciclóide, Epiciclóide e a Hipociclóide

Utilizando o Maple para modelar as curvas cicloidalis, inicialmente deve-se digitar na o comando *with(plots)*; que abrirá um pacote para plotar gráficos e entrada das equações paramétricas da curva cicloidal em questão.

A.2.1 Modelando a Ciclóide

Digitando no Maple a equação:

$$x:=a*t-b*\sin(t);$$

$$y:=a-b*\cos(t);$$

$$a:a; b:b; \text{plot}([x(t),y(t), t=-2*\text{Pi}..2\text{Pi}]);$$

Após atribua às variáveis a e b valores com o seguinte critério: Se $a = b$ então teremos o gráfico de uma ciclóide.

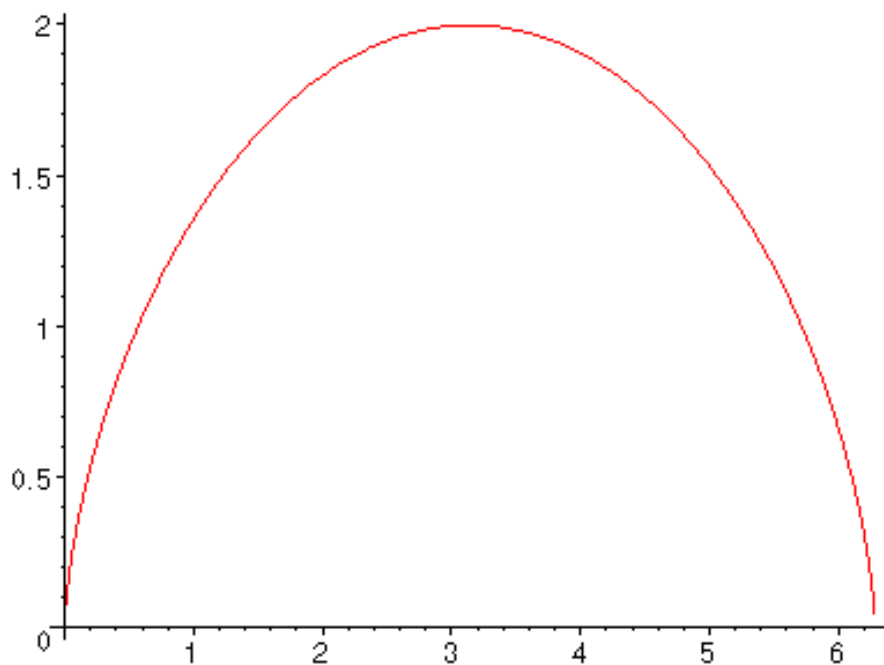


Figura A.1: Ciclóide.

Se a for maior que b , então, teremos uma ciclóide reduzida.

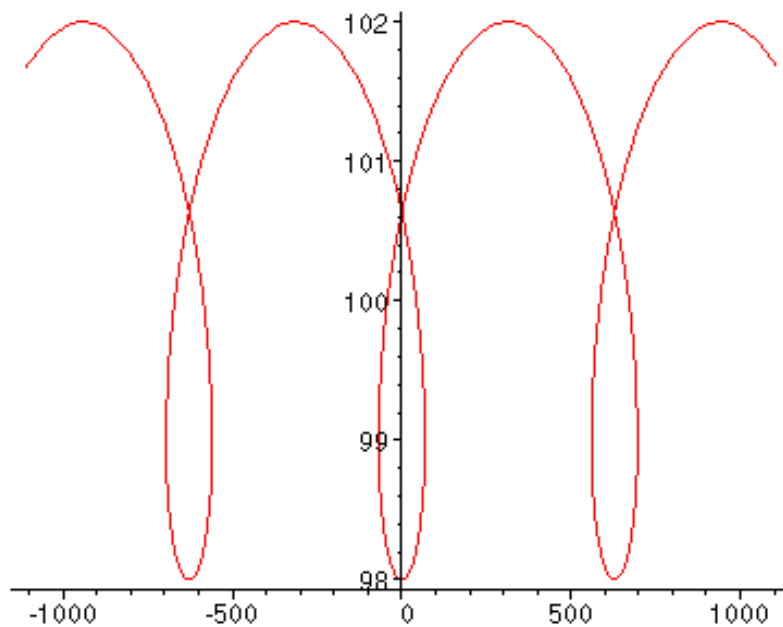


Figura A.2: Ciclóide Reduzida.

Se a for menor que b , então teremos uma ciclóide alargada ou Trocóide.

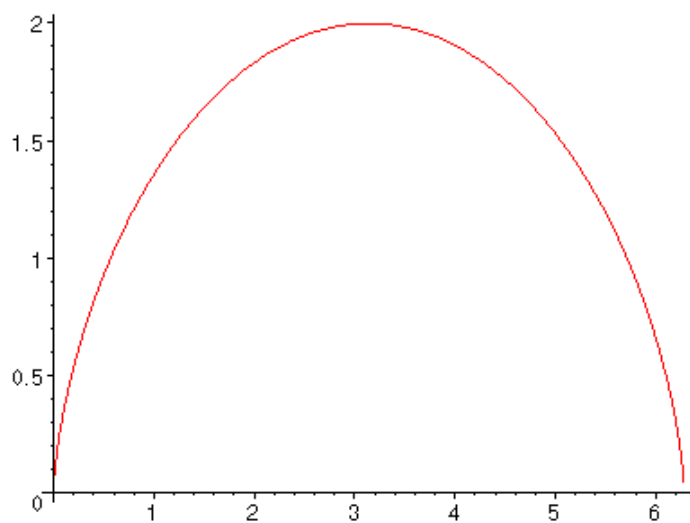


Figura A.3: Ciclóide Alargada ou Trocóide.

A.2.2 Modelando a Epiciclóide

Iniciando o trabalho por digitar `with(plots);`, em seguida digitamos a equação paramétrica da epiciclóide:

```
x:=(a+b)*cos(t)-b*cos(((a+b)/b)*t);
```

```
y:=(a+b)*sin(t)-b*sin(((a+b)/b)*t);
```

```
a:1;
```

```
b:b;
```

```
plot([x(t),y(t), t=-20*Pi..20Pi]);
```

Após atribua às variáveis a e b valores para a modelagem da curva. Vale ressaltar que a refere-se ao raio do círculo base e b ao raio do círculo rolante. Se fizermos a sendo fixo e igual a 1 temos que $b=1/n$ onde n é um natural podemos gerar quantas cúspides quisermos.

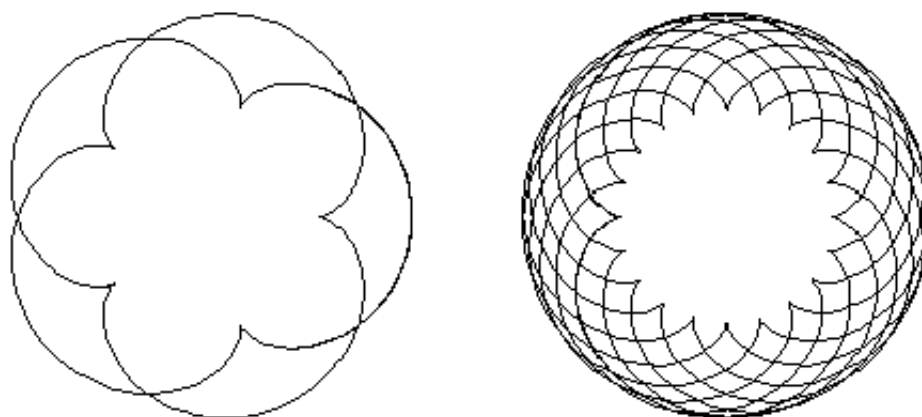


Figura A.4: Epiciclóides.

A.2.3 Modelando a Hipociclóide

Iniciando o trabalho por digitar `with(plots);`, em seguida digitamos a equação paramétrica da hipociclóide:


```
x:=r*(k-1)*cos(t)+r*cos((k-1)*t);
```

```
y:=r*(k-1)*sin(t)+r*sin((k-1)*t);
```

```
k:k;
```

```
r:r;
```

```
plot([x(t),y(t), t=-20*Pi..20*Pi]);
```

Lembramos que $k = \frac{R}{r}$, onde R é o raio do círculo maior e r o raio do círculo menor. Fixando $r = 1$ e variando K podemos plotar uma infinidade de gráficos da hipociclóide. O que foi mostrado para a epiciclóide vale também para a hipociclóide, se k for um número irracional a figura não fecha jamais.

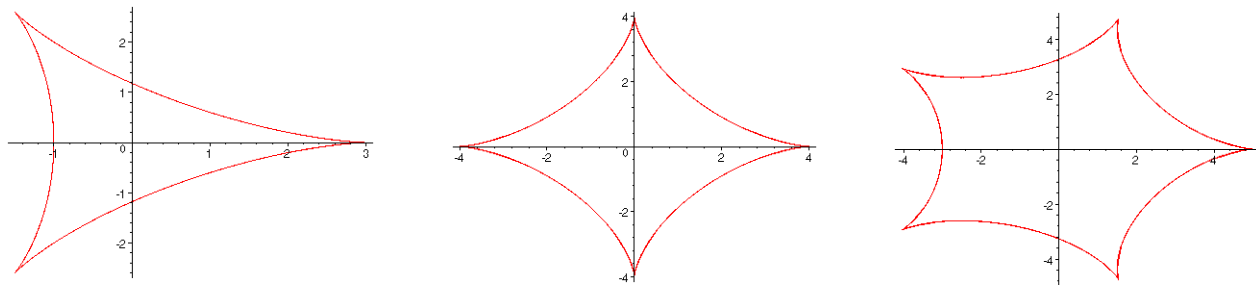


Figura A.5: Hipociclóide com $k = 3, 4$ e 5 .

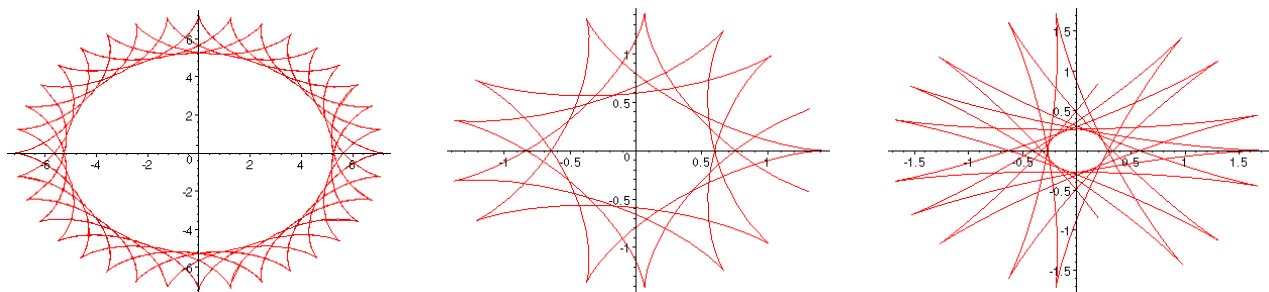


Figura A.6: Hipociclóide com $k = 7, 2, k = \sqrt{2}$ e $k = \sqrt{3}$.

Considerações Finais

Encerrando essa dissertação, concluo-a com o prazer de ter sondado o trabalho de gigantes, verdadeiros Colossos da matemática, tais como:

- Johann Bernoulli, que tendo solucionado o problema da braquistócrona desafiou as mentes mais brilhantes de seu tempo a fazerem o mesmo, fato esse que alavancou enormemente o cálculo variacional.
- Sir Isaac Newton, que tendo aceitado o desafio proposto por Bernoulli, resolveu como conta a história, em uma noite o problema da braquistócrona, enviando sua solução sem se identificar, contudo a identificação do mesmo não passou despercebido tal foi o brilhantismo de sua solução, pois de fato “o leão se conhece pela sua pata”.
- Blaise Pascal que para contornar sua dor de dente se empenhou em solucionar o problema da braquistócrona, feito esse alcançado pelo mesmo. Contudo, Pascal na questão da braquistócrona tem outro mérito, o de ter introduzido Christian Huygens, nessa disputa, de fato Huygens ao estudar a curva cicloide tornou-se um perito tão apurado desta curva que provou que ela era tautócrona e num lance de mestre, supôs se esta curva não solucionaria o problema que era um grande entrave para a navegação do século XVII, o problema do pêndulo isócrona, conseguiu provar que um pêndulo que tenha como obstáculos laterais duas cicloides descreveria um movimento cicloidal.

Para meus alunos de ensino médio ficou a beleza do “estranho”, pensar que mesmo sendo uma reta a menor distância entre dois pontos, uma bolinha solta apenas sob a ação da gravidade sempre chegaria primeiro descendo pela curva cicloide é fantástico, para não dizer bizarro. Com certeza para eles ficou nítido que a matemática, longe de ser uma ciência chata e sem “muita aplicabilidade”, pelo menos é que a maioria dos alunos de ensino médio pensam, é uma ciência dinâmica, cheia de desafios, desafios esses que

promovem o desenvolvimento da forma como o homem encara o mundo e como ele pode transformá-lo buscando o bem comum.

Para mim, após uma trajetória de mestrando, onde família, trabalho, apostolado disputavam meu tempo, concluo tendo um grande espírito de gratidão a esses gigantes que brilham no céu do conhecimento científico, mas também a meus professores que tais como discípulos desses mestres perpetuam o que eles propagaram como a vida: o desejo de conhecer, o desejo de descobrir.

Referências Bibliográficas

- [1] Acta Eruditorum. *Revista dos eruditos*, publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz.
- [2] Carlos Farina. *Huygens a Helena da Geometria e o Aprisionamento do Tempo*, Universidade Federal do Rio de Janeiro (2013).
- [3] Daniel Leal Macedo. *Aplicações do Cálculo Variacional: Braquistócrona e o Princípio de Fermat*, (2004).
- [4] George B. Thomas. *Cálculo Volume 2*, décima edição, (2013).
- [5] Graciliano da Silveira Batista, Cleuton Freire e José Evangelista Moreira. *Experiências com a Braquistócrona*, Universidade Federal do Ceará, (2006).
- [6] José Luiz Pastore Melo. *Revista do Professor de Matemática*, (2006).
- [7] Maria Teresa Carrapa Ribeiro de Carvalho. *Evolutas, Involutas e Roulettes*, Dissertação, Faculdade de Ciências Universidade do Porto Portugal, (2013).
- [8] M. Burrowes e Carlos Farina. *Sobre o Pêndulo Isócrono de Christiaan Huygens (On the isochronous pendulum of Christiaan Huygens)*, Revista Brasileira de Ensino de Física, (2005).
- [9] Nils P. Johnson. *The Brachistochrone Problem*, Published by Mathematical Association of America, (2004).
- [10] Ricardo L. Viana. *Cálculo Variacional* - Departamento de Física Universidade Federal do Paraná, (2011).
- [11] Wellington de Lima Caetano. *Queda em Curvas de Menor Tempo e Tempo Independente da Altura - Braquistócrona e tautócrona*, (2008).

- [12] William E. Boyce e Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, sexta edição, (1996).