Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Teorema de Pitágoras e Áreas: sua aplicabilidade no banco de questões da OBMEP.

Verissimo Docarmo Neto

Teresina - 2014

Verissimo Docarmo Neto

Dissertação de Mestrado:

Teorema de Pitágoras e Áreas: sua aplicabilidade no banco de questões da OBMEP.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2014

Aos meus pais, à minha esposa, à minha filha, às minhas irmãs, à minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

À Deus por ter permitido que tudo isso acontecesse.

Aos meus pais (Plácido e Elza), pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

À minha esposa Samara e minha filha Lara(maior presente)que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu concluisse esta etapa de minha vida.

Às minhas irmãs (Joelma, Jackeliny e Jaysa), por terem entendido os momentos de minha ausência dedicadas ao estudo.

À minha família e amigos pelo incentivo e apoio.

Ao professor Jurandir de Oliveira Lopes, pela orientação, apoio e confiança.

À todos os professores do PROFMAT por me proporcionar o conhecimento.

Por fim, aos amigos de mestrado Ricardo Ribeiro e Walter Junior, pelo grupo formado e apoio recíprocos durante os muitos dias de estudos, superando as inúmeras dificuldades.

Resumo

Este trabalho enfoca o Teorema de Pitágoras e Áreas como conteúdos da Geometria tomando por base a apostila da OBMEP de Eduardo Wagner, intitulada "Teorema de Pitágoras e Áreas". No desenvolvimento deste utilizou-se pesquisa bibliográfica sobre a abordagem histórica do tema e alguns conceitos matemáticos pertinentes ao conteúdo trabalhado. Foram realizadas resoluções de alguns problemas, que foram organizados iniciando-se com os que tinham uma aplicação direta, passando-se aos que havia conteúdos correlatos. Com o trabalho, espera-se contribuir para que professores e alunos vislumbrem as possibilidades de trabalhar de maneira integrada o tema Teorema de Pitágoras, Áreas e suas aplicações no banco de questões das Olimpíadas de Matemática.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras. Áreas. Olimpíadas de Matemática.

Abstract

This study focuses on the Pythagorean Theorem and Geometry content areas like building on the handout from OBMEP of Eduardo Wagner, entitled " Pythagorean Theorem and Areas." In this development we used literature on the historical approach to the topic and some relevant content working mathematical concepts. Solving some problems, which were organized beginning with those who had a direct application to the going-related content that had been made. The work is expected to contribute to teachers and students envisage the possibilities of working in an integrated way the theme Pythagorean Theorem, Areas and their applications in the question bank of Mathematics Olympiads.

Keywords: Pythagorean Theorem. Areas. Mathematics Olympiads.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho enfoca o Teorema de Pitágoras e Áreas através da discussão da relevância destes para a geometria e para o ensino da matemática em geral, bem como realiza algumas aplicações através de questões propostas nas Olimpíadas de Matemática nos últimos 5 anos, (ver [5, 6, 7, 8, 9]). Cabe destacar que conforme Wagner (ver [11]), os conteúdos enfocados possuem forte conexão.

A realização do trabalho tem diferentes motivadores. A relevância que o conteúdo tem dentro da matemática, especialmente no que se refere ao cálculo de áreas é um deles. Outro motivador decorre da presença de variadas formas geométricas em todas as sociedades, e a necessidade de realizar cálculos de áreas com que muitas vezes as pessoas se deparam. De acordo com os PCN's [2], um trabalho adequado de geometria, permitirá ao aluno usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Além desses, o interesse pela temática é decorrente do fato do mesmo constituir, dentro da geometria, um conteúdo com uma infinidade de aplicações para resolução de questões, tornando-se um tema de grande relevância para professores e estudantes. Destaque-se que os professores, em especial os da rede pública, mesmo sendo amparados pela Lei nº 11.738, de 16 de julho de 2008, que garante um terço da carga horária livre para atividades de planejamento educacional, têm ainda uma carga horária elevada, o que dificulta a dedicação dos mesmos às atividades de estudos e pesquisas para melhor desenvolvimento das disciplina e aplicação de conteúdos, como os aqui propostos.

O trabalho foi desenvolvido a partir de pesquisa bibliográfica sobre a abordagem histórica do tema e a realização de demonstrações e aplicações a partir de questões propostas pela OBMEP, que no ano de 2014 completa uma década com sucesso devido à elaboração de questões diferenciadas, pela sua organização e contextualização.

As questões trabalhadas compõem um grupo selecionado de problemas que abordam apenas o conteúdo visto neste trabalho, retirado do banco de questões das Olimpíadas de Matemática dos últimos 5 anos. Esse recorte temporal foi definido considerando o contato do pesquisador com este evento, através da preparação de alunos de escolas públicas da rede estadual de ensino, quando passou a observar com maior atenção e a trabalhar com tais questões. O conteúdo que será trabalhado nas aplicações tem como principal referência o trabalho de Eduardo Wagner [11], intitulado "Teorema de Pitágoras e Áreas".

O trabalho encontra-se estruturado em dois capítulos além da introdução. Um intitulado Teorema de Pitágoras e Áreas aborda a dimensão histórica do teorema e a dimensão conceitual destes temas, e o outro apresenta as diferentes aplicações que podem ser realizadas nas questões propostas pela OBMEP (ver [5, 6, 7, 8, 9]).

Com este estudo espera-se contribuir para que os professores vislumbrem as possibilidades de trabalhar de maneira integrada o tema Teorema de Pitágoras e Áreas e as questões de olimpíadas, passando estas a constituírem uma possibilidade de aplicação dos mesmos. Isso contribuirá para aproximação dos professores com as questões da OBMEP, que são tidas por muitos como difíceis e por isso deixam de ser trabalhadas com os alunos; noutros termos oportunizará a professores e estudantes o domínio dos conteúdos foco deste estudo e desmistificará a representação sobre o grau de dificuldade das questões de olimpíadas. Com isso incentivará o aprimoramento matemático dos alunos e professores.

Capítulo 2

Teorema de Pitágoras e Áreas

2.1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é uma das relações mais utilizadas na geometria e aplicado em vários desenvolvimentos matemáticos e que sempre causou muita curiosidade entre matemáticos e pesquisadores. A sua relevância para as ciências matemáticas é evidenciada no surgimento das mais variadas formas de demonstrá-lo.

A origem deste Teorema encontra-se em tempos remotos e vincula-se às elaborações dos gregos. Estes se tornaram referência intelectual e inauguraram no séc. VI a.C. a denominada Geometria Moderna, baseada na confirmação de resultados lógicos, formalizados sobre pressupostos básicos. A partir de tais elaborações, os resultados que provinham apenas de observações e experimentações passaram a não ter reconhecimento, sendo descartados (ver [3]).

Segundo Eves [3], Pitágoras de Samos (532 a.C.) preocupou-se em desenvolver a Geometria Moderna a partir da lógica, sendo que suas proposições foram posteriormente desenvolvidas pela Escola Pitagórica, em Crotona. Esta Escola era uma espécie de sociedade filosófico-religiosa secreta de regras rígidas, onde trabalhavam com a matemática desprovida de objetivos práticos, e por isso diz-se que praticavam a chamada matemática pura.

As demonstrações do Teorema são inúmeras e ao longo do tempo evidencia-se como alvo de bastante interesse e dedicação. Nesse sentido, os indícios de estudos em relação ao Teorema de Pitágoras são encontrados ao longo do tempo, como se pode verificar em alguns extratos históricos de demonstrações.

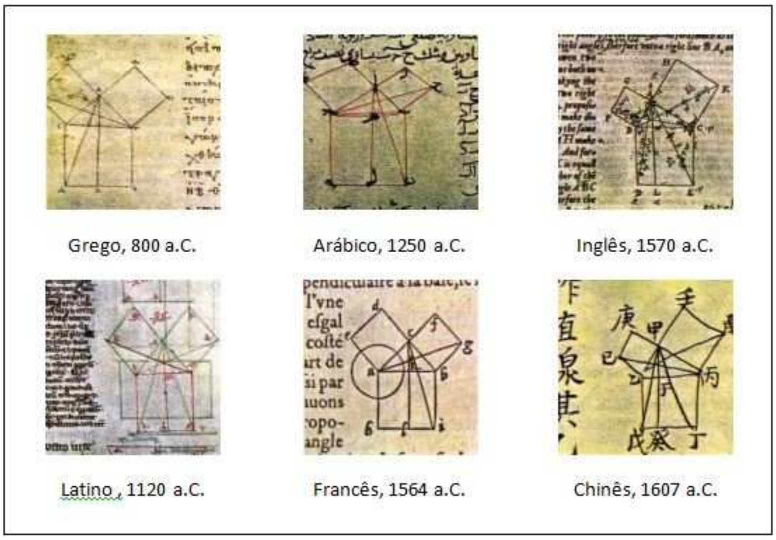


Figura 2.1: Extratos de demonstrações

Ilustrando o interesse pelo o Teorema, em 1940 o matemático americano Elisha Scott Loomes compilou 370 diferentes tipos de demonstrações para seu livro intitulado "The Pythagorian Proposition" (ver [4, 10]).

Um dos enunciados mais utilizados para o Teorema se faz em relação a um triângulo retângulo de hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, e diz que:

Teorema 1. *O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, isto é:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Serão realizadas duas demonstrações para o **Teorema 1**.

Demonstração. 1. Usaremos a semelhança de triângulos (uma das demonstrações utilizadas com maior frequência) para demonstração do teorema. Consideremos um triângulo retângulo ABC como na figura dada abaixo.

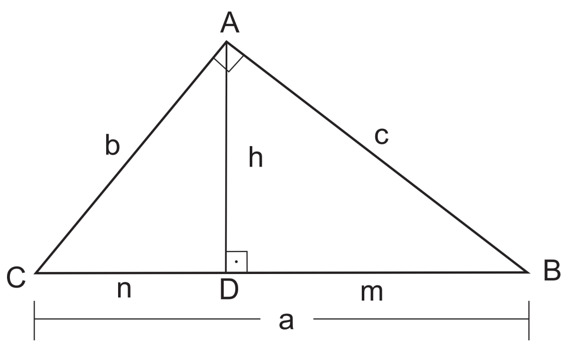


Figura 2.2: Triângulo retângulo

Observa-se também em relação à figura que foi traçada em relação ao vértice A e ao lado BC a altura desse triângulo h que intersecta o seguimento BC no ponto D dividindo o lado BC em duas partes, de medidas m e n. Sendo os triângulos ADB e ABC semelhantes, verifica-se a seguinte razão de semelhança:

$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c} \Longleftrightarrow c^2 = a \times m. \tag{2.1}$$

Os triângulos ADC e ABC são semelhantes, daí:

$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow b^2 = a \times n. \tag{2.2}$$

Somando-se (2.1) e (2.2), membro a menbro, obtem-se:

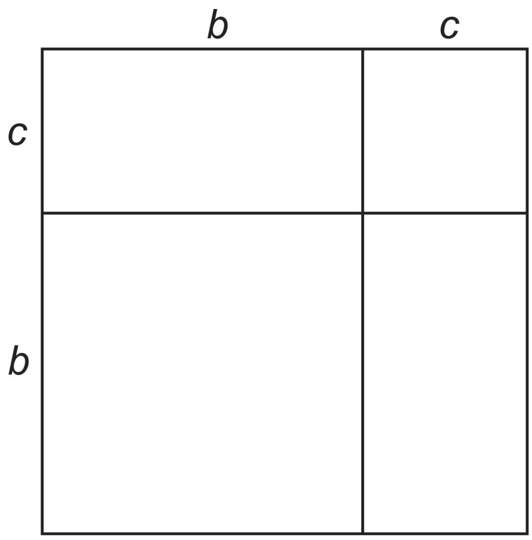
$$c^2 + b^2 = am + na = a \times (m + n).$$

Da figura acima apresentada $m + n = a$, encontra-se como relação

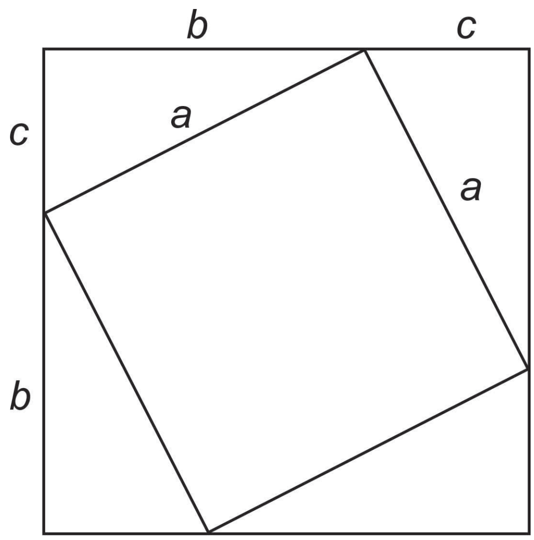
$$c^2 + b^2 = a \times a = a^2,$$

estando assim demonstrado o Teorema de Pitágoras. □

Demonstração. 2. Considere dois quadrados divididos como nas figuras abaixo:



(a) Primeiro quadrado.



(b) Segundo quadrado.

O primeiro quadrado de lado $b+c$ é formado por dois quadrados, sendo um de lado b e outro de lado c e dois retângulos de lados b e c. Chamando de A a área de um desses retângulos, e sendo l^2 a área de um quadrado de lado l, temos para a área do primeiro quadrado:

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2 \times A.$$

Sendo o segundo quadrado também de lado $b+c$, o mesmo é formado por um quadrado de lado a e quatro triângulos retângulos de catetos b e c. Os quatro triângulos geram dois retângulos de lados b e c, e como já havia sido chamado de A a área desse retângulo, teremos para o segundo quadrado a relação:

$$(b+c)^2 = a^2 + 2 \times A.$$

Logo, o primeiro quadrado e o segundo quadrado possuem áreas iguais e das duas relações teremos:

$$a^2 + 2 \times A = b^2 + c^2 + 2 \times A$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

A proposição a seguir é a recíproca do Teorema de Pitágoras.

Proposição 1. *Em um triângulo de lados a, b e c, se $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo.*

Demonstração. Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente b e c. Neste novo triângulo, de acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Portanto, este novo triângulo (que é retângulo) tem lados medindo a, b e c. Com isso o triângulo é congruente ao triângulo original. Logo, o triângulo original é retângulo. □

Observa-se que o enunciado do Teorema de Pitágoras pode também ser relacionado através de relações de áreas. Assim, este enunciado poderia ser descrito da seguinte forma: em relação ao triangulo ABC da Figura 2.2, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados de lados b e c. Conforme mostra a figura a seguir.

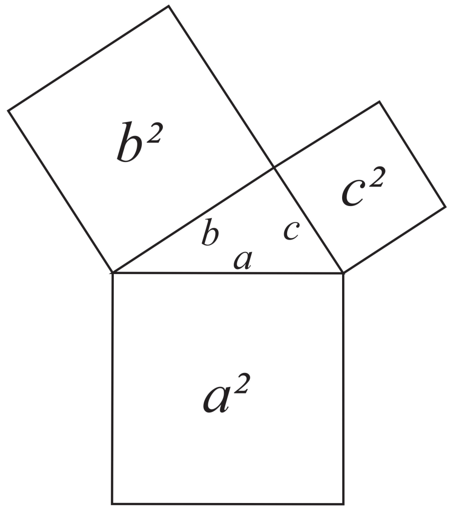


Figura 2.3: Triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c.

Vale destacar que além de poder ser aplicado a quadrados construídos sobre o lado do triângulo, o Teorema pode ser generalizado também com figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. Com isso, torna-se evidente a relação que se tem entre o Teorema de Pitágoras e Áreas que é o outro tema enfocado neste estudo.

2.2 Áreas

Entende-se por áreas, conforme Lima [4], "a porção de um plano ocupado por uma figura". Isto implica dizer que a área compreende à medida de uma superfície. Neste trabalho, será enfocado apenas em regiões poligonais, a base de região triangular e área de região circular.

2.2.1 Áreas de regiões triangulares

Qualquer região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares, que duas a duas não tem pontos interiores em comum (ver [1]).

Para melhor apresentar a área de regiões triangulares iremos apresentar a área do quadrado e do paralelogramo.

Definição 1. *A área* S *de um retângulo de base* b *e altura* h *é produto da base* b *pela altura* h*, isto é,*

$$S = b \times h.$$

Proposição 2. *A área* S *de um paralelogramo de base* b *e altura* h *é igual a área de um retângulo de base* b *e altura* h*,ou seja,*

$$\mathsf{S} = \mathsf{b} \times \mathsf{h}.$$

Demonstração. Seja um paralelogramo ABCD de base BC igual a b e altura h. Por B e C passamos retas perpendiculares a BC, encontrando a reta que passa por A e D nos pontos E e H respectivamente, formando o retângulo EBCH como mostra a figura.

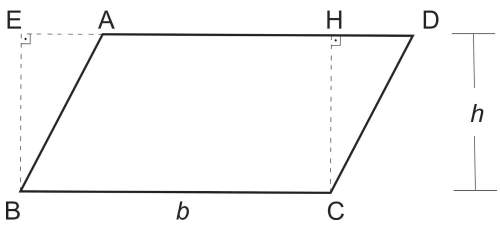


Figura 2.4: Paralelogramo ABCD.

Temos que os triângulos ABE e CDH são congruentes, pois AB é igual a CD, BE é igual a CH e os ângulos nos vértices E e H são iguais a 90º. Com isso, a área do retângulo EBCH é:

$$\frac{\mathsf{b} \times \mathsf{h}}{2},$$

que é igual a área do paralelogramo ABCD. $\square$

Proposição 3. *A área* S *de um triângulo de base* b *e altura* h *relativa a base é igual a metade do produto da medida da base* b *pela medida da altura* h.

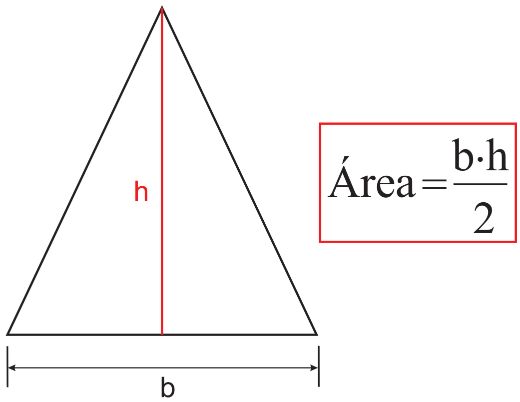


Figura 2.5: Triângulo qualquer.

Demonstração. Seja um triângulo ABC com base BC de comprimento b e altura de comprimento h relativa a base. Passamos pelo vértice A uma paralela ao lado BC e pelo vértice C uma paralela ao lado AB, determinando um paralelogramo $ABCD$.

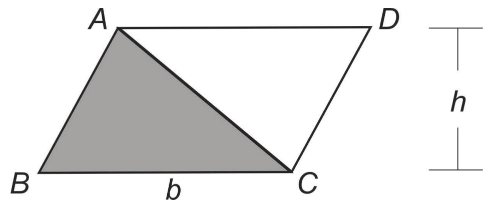


Figura 2.6: Paralelogramo $ABCD$.

Pelo paralelogramo temos que os triângulos ABC e ACD são congruentes, então eles possuem a mesma área. Logo, a área S do triângulo ABC é igual a metade da área do paralelogramo, ou seja:

$$S = \frac{b \times h}{2}.$$

$\square$

Podemos encontrar outras fórmulas de cálculo de área de triângulos.

Teorema 2. *Seja um triângulo ABC, sendo a e b dois de seus lados e α o ângulo compreendido entre eles, então a área S de ABC é dada por:*

$$S = \frac{1}{2} \times \operatorname{sen} \alpha \times a \times b.$$

Demonstração. Considere um triângulo qualquer ABC, de lados a, b, c e altura h como o da figura abaixo:

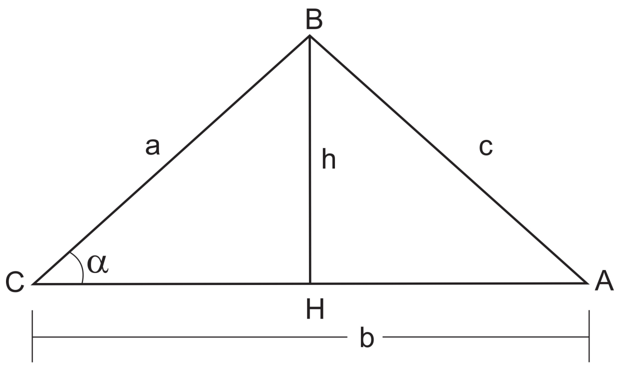


Figura 2.7: Triângulo qualquer.

Seja α o ângulo determinado por BC e AC e aplicando nesse ângulo α o seno em relação ao triangulo retângulo BCH, tem-se que:

$$\operatorname{sen}\alpha = h/a \Longrightarrow h = a \operatorname{sen}\alpha. \tag{2.3}$$

Da Definição 3 a área S do triângulo ABC, é dada por:

$$S = \frac{1}{2}hb.$$

Assim, de (2.3), tem-se que:

$$S = \frac{1}{2} \times \operatorname{sen}\alpha \times a \times b.$$

□

Teorema 3. *(Heron) Seja o triângulo* ABC *de lados de medida* a, b, c *e semi-perímetro* $p = \dfrac{a+b+c}{2}$*, então área* S *de* ABC *é dada por:*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)p-c)}.$$

Demonstração. Seja um triângulo ABC de lados a, b e c, altura de comprimento h e com m e $a-m$ as projeções ortogonais de c e b, como mostra a figura abaixo.

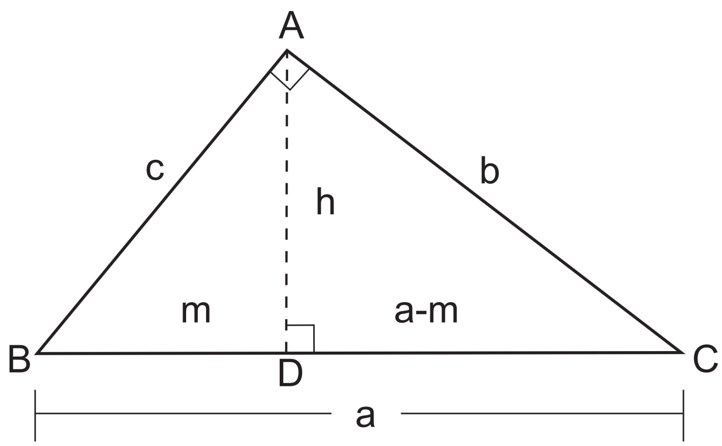


Figura 2.8: Triângulo qualquer

Pela figura formaram-se os triângulos retângulos ABD e ACD. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos:

$$b^2 = h^2 + (a-m)^2,$$

e dessa relação :

$$m^2 = b^2 - a^2 - h^2 + 2am. \tag{2.4}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos :

$$c^2 = h^2 + m^2. \tag{2.5}$$

Fazendo a substituição de (2.4) em (2.5) obtemos:

$$c^2 = h^2 + b^2 - a^2 - h^2 + 2am,$$

daí,

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Substituindo o valor de m em (2.5) e em seguida fazendo o desenvolvimento teremos:

$$c^2 = h^2 + \left[\frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right]^2$$

$$h^2 = c^2 - \left[\frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right]^2$$

$$h^2 = \frac{\left[2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - (a^2)^2 - (b^2)^2 - (c^2)^2\right]}{4a^2}.$$

Fatorando a última expressão encontrada, podemos escrever:

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4a^2}. \tag{2.6}$$

Sendo p o semi-perímetro do triângulo ABC encontramos:

$$2p = a + b + c. \tag{2.7}$$

Daí, determinamos as seguintes relações:

$$\begin{cases} a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \\ a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \\ b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a). \end{cases} \tag{2.8}$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.6) obtemos:

$$h^2 = \frac{2p \times 2(p - c) \times 2(p - b) \times 2(p - a)}{4a^2},$$

segue-se que

$$h = \frac{2}{a} \times \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$
$$\frac{ah}{2} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Como $\frac{ah}{2}$ é a área S do triângulo ABC, logo:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

$\square$

2.2.2 Áreas de regiões circulares

Iremos aqui também mostrar a relação utilizada para cálculos de áreas de regiões circulares. Antes de mostrar a relação utilizada para o cálculo dessas regiões será definida o π (pi), que é valor de uma constante utilizada na relação a ser trabalhada no cálculo de área.

Segundo Wagner [11], o número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Esse número possui sempre o mesmo valor independentemente da circunferência que se trabalhe para realizar essa razão. Com isso chamando de C o comprimento da circunferência de raio R, podemos definir por:

$$\pi = \frac{C}{2R},$$

que da relação obtemos:

$$C = 2\pi R.$$

Definido o π, podemos enunciar a relação utilizada para o cálculo de áreas de regiões circulares.

Teorema 4. *A área* (S) *de um círculo de raio* R *é dada por:*

$$S = \pi R^2.$$

Demonstração. Seja um polígono com todos os lados e ângulos internos congruentes (polígono regular) de n lados inscrito em uma circunferência de raio R. Dividindo o polígono em n triângulos isósceles onde todos tenham o vértice no centro, esses triângulos terão dois lados iguais a R e um lado igual a a.

Definindo h como a altura relativa a base, a área S_n do polígono é:

$$S_n = \frac{n \times a \times h}{2} = \frac{(n \times a)h}{2} = \frac{P_n \times h}{2},$$

com P_n o perímetro do polígono de n lados.

A medida que n vai aumentando, P_n tenderá ao valor do comprimento da circunferência $(2\pi R)$ e h se aproximará ao valor do raio R. Daí, a área S do círculo é:

$$S = \frac{2 \times \pi \times R \times R}{2} = \pi R^2.$$

□

Para o cálculo de apenas uma parte dessa região circular que chamamos de setor circular, como observado na figura a seguir,

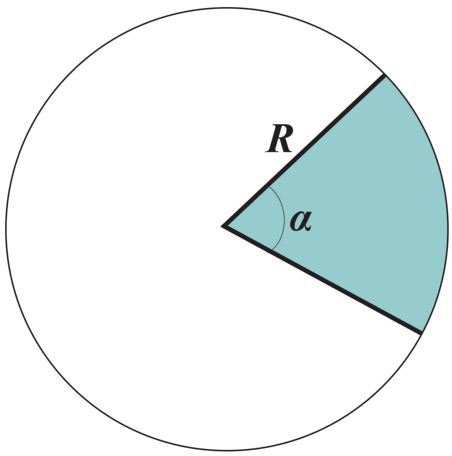


Figura 2.9: Setor circular

utiliza-se a relação:

$$S = \frac{\alpha}{360} \times \pi \times R^2,$$

onde $\frac{\alpha}{360}$ representa a fração do círculo no qual deseja-se determinar a área.

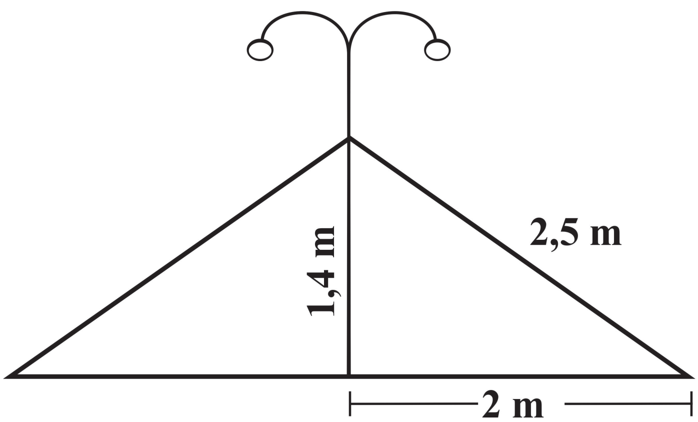
Por fim, será realizada no item a seguir algumas aplicações do conteúdo aqui abordado, Teorema de Pitágoras e Áreas, tomando por base o banco de questões da OBMEP.

Capítulo 3

Aplicações

Os temas Teoremas de Pitágoras e Áreas possuem diversas possibilidades de aplicação, conforme será demonstrado na aplicação de questões que haviam apenas os conteúdos aqui trabalhados retiradas do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas (OBMEP).

Exemplo 1. *(OBMEP 2010) Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram presos cabos no poste, a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme a figura.*



Um professor de Matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

Solução: Para verificar se o professor está certo em relação ao ângulo do poste em relação ao solo, vamos supor que o poste esteja perpendicular ao solo logo formará um ângulo de 90^0. Com essa suposição, podemos afirmar que o triângulo formado com as três dimensões citadas na questão é um triângulo retângulo, então valerá para esse triângulo o Teorema de Pitágoras. Fazendo a verificação, temos:

$$(2,5)^2 = (1,4)^2 + 2^2$$

$$6,25 = 1,96 + 44$$

$$6,25 = 5,96.$$

Assim os valores encontrados em cada membro não são iguais, não satisfazendo então o Teorema de Pitágoras. Logo o ângulo formado entre o poste e o solo não é 90^0, como havia afirmado o professor.

Exemplo 2. *(OBMEP 2010) Um ponto* P *está no centro de um quadrado de* $10\ \mathsf{cm}$ *de lado. Quantos pontos da borda do quadrado estão a uma distância de* $6\ \mathsf{cm}$ *de* P*?*

Solução: O ponto P que está no centro do quadrado, encontra-se a uma distância de $5\ \mathsf{cm}$ a cada um dos lados do quadrado. Como queremos saber os pontos da borda que estão a uma distância de $6\ \mathsf{cm}$ da mesma, iremos trabalhar com esse valor em um triângulo retângulo formado pela hipotenusa que é $6\ \mathsf{cm}$, $5\ \mathsf{cm}$ que é a distância ao lado do quadrado como um cateto e outro cateto chamaremos de x, onde esse valor deverá ser possível de modo ainda permanecer sobre o lado do retângulo, ou seja, ser menor ou igual a $5\ \mathsf{cm}$. Para verificar tal valor, iremos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo relatado, onde teremos:

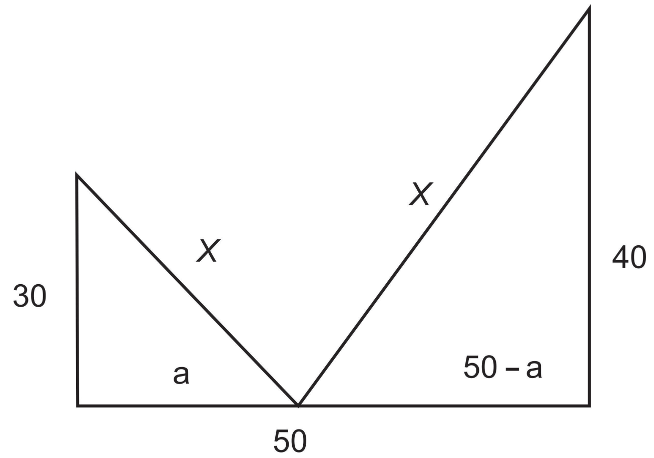
$$6^2 = 5^2 + x^2$$

$$x^2 = 36 - 25 = 11 \Longrightarrow x = \sqrt{11}.$$

O valor encontrado para x é um valor que está compreendido entre 3 e 4, sendo perfeitamente possível o mesmo ser colocado sobre a metade do lado do quadrado. Em cada lado do quadrado será possível colocar dois pontos, pois da metade do lado para um sentido ou para outro é possível inserir uma distância equivalente ao valor de x encontrado. Assim, como o quadrado tem 4 lados será possível representar sobre os lados do mesmo, 8 pontos no total.

Exemplo 3. *(OBMEP 2011) "Duas torres, uma com 30 passos e a outra com 40 passos de altura, estão à distância de 50 passos uma da outra. Entre ambas se acha uma fonte, para a qual dois pássaros descem no mesmo momento do alto das torres com a mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo. Quais as distâncias horizontais da fonte às duas torres?"(Leonardo de Pisa, Liber Abaci, 1202)*

Solução:



Para resolver a questão, foi dada uma informação muito importante, que os pássaros desceram no mesmo instante e com a mesma velocidade. Isso pela idéia de velocidade nos permite concluir que a distância do topo das duas torres até a fonte são as mesmas e chamaremos de X. Chamaremos de a, a distância horizontal da torre com 30 passos até a fonte, daí a distancia horizontal da torre de 40 passos até a fonte será $50 - a$. Observamos que foram formados dois triângulos retângulos de hipotenusa iguais a X. Se aplicarmos o Teorema de Pitágoras nos dois triângulos teremos o mesmo valor para X. Dessa maneira podemos afirmar:

$$30^2 + a^2 = 40^2 + (50 - a)^2$$

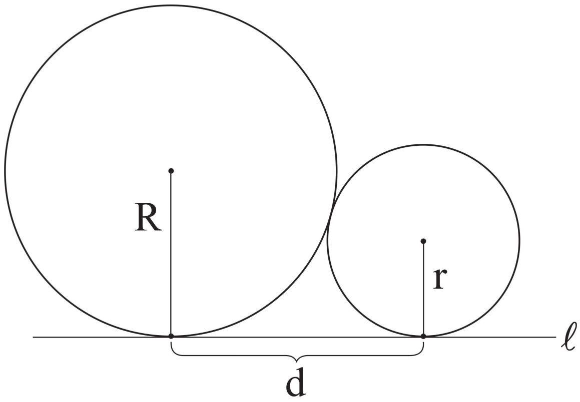
$$900 + a^2 = 1600 + 2500 - 100a + a^2$$

$$100a = 4100 - 900$$

$$100a = 3200 \Longrightarrow a = 32.$$

Como o valor de a determinado é a distância de uma das torres até a fonte, segue que a distância da outra será $50 - 32 = 18$. Logo as distâncias entre as torres até a fonte terá medidas de 32 e 18 passos.

Exemplo 4. *(OBMEP 2011) Duas circunferências de raios* R *e* r *são tangentes externamente . Demonstre que o segmento determinado pela tangente comum externa* l *mede* $d = 2\sqrt{Rr}$.



Solução: Vejamos que na figura a distância entre os centros das duas circunferências é a soma das medidas dos dois raios $R + r$. Observa-se também que a diferença entre os raios é $R - r$. Com isso, podemos formar um triângulo retângulo determinado pela distância dos dois centros (hipotenusa), a diferença entre os raios (cateto) e a tangente comum externa d (cateto). Aplicando então o Teorema de Pitágoras:

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + d^2$$

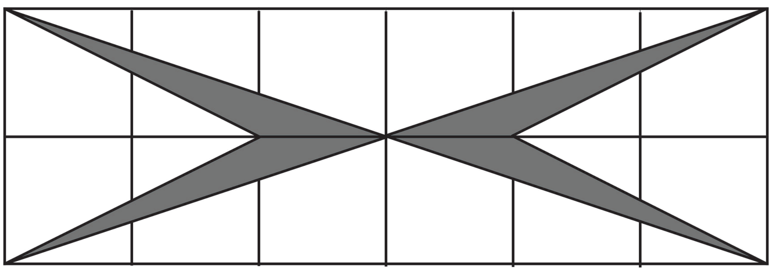
$$R^2 + 2Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + d^2$$

$$d^2 = 2Rr + 2Rr$$

$$d^2 = 4Rr \Longrightarrow d = 2\sqrt{Rr}.$$

Logo o valor encontrado de d corresponde ao valor de l que é $2\sqrt{Rr}$.

Exemplo 5. *(OBMEP 2010) A figura dada foi montada com 12 azulejos quadrados de lados iguais a* 10 cm. *Qual a área da região destacada?*



Solução: Observando a região destacada, podemos imaginá-la como sendo 4 vezes a área determinada pelo triângulo de base 10 $\mathtt{cm}$ e altura 10 $\mathtt{cm}$. Aplicando a relação de área do triângulo $\dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ encontraremos para a mesma, o seguinte:

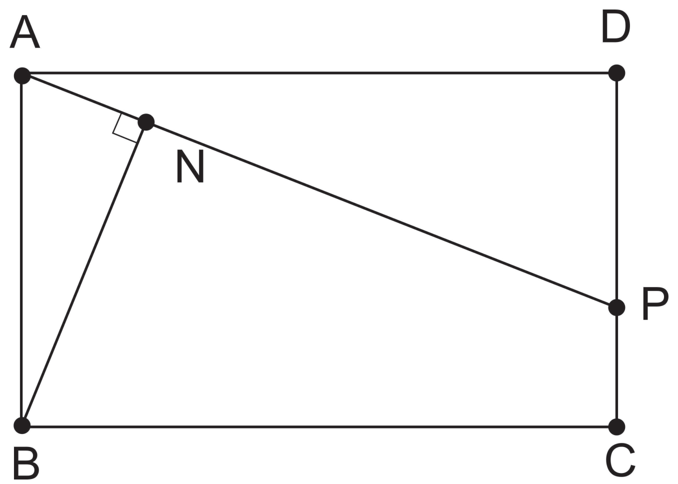
$$\acute{A}rea\ tri\hat{a}ngulo = \frac{10 \times 10}{2} = 50.$$

Esse valor determina apenas a área de um triângulo e temos que a área procurada deverá ser então multiplicada por 4 como havia sido imaginado, sendo assim a área com o seguinte valor:

$$\acute{A}rea\ regi\tilde{a}o = 4 \times 50$$

$$\acute{A}rea\ regi\tilde{a}o = 200\ \mathrm{cm}^2.$$

Exemplo 6. *(OBMEP 2011)* ABCD *é um retângulo,* $\mathsf{AD} = 5$ *e* $\mathsf{CD} = 3$.



Se BN é perpendicular a AP. Calcule $\mathsf{AP} \times \mathsf{BN}$.

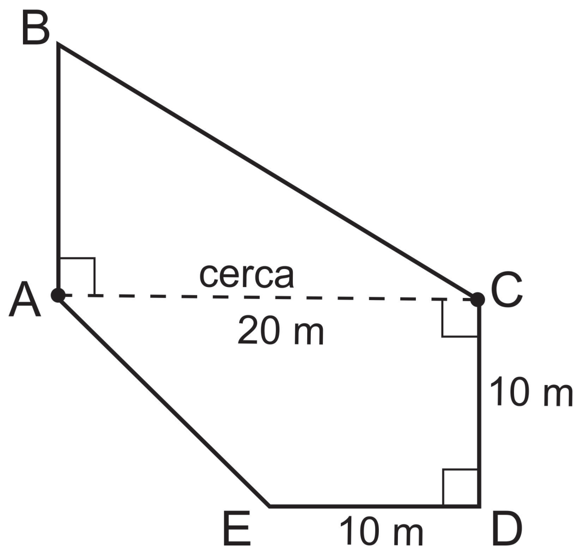
Solução: Para calcular a $\mathsf{AP} \times \mathsf{BN}$ que é pedido na questão, iremos trabalhar com a idéia da área do triângulo. Vejamos que $\mathsf{AP} \times \mathsf{BN}$ é igual a área do triângulo ABP, multiplicada por 2, pois AP é base e BN é altura desse triângulo, pelo fato de BN ser perpendicular a AP. Podemos então trabalhar a área de APB, através de uma nova base, que é AB igual CD de medida 3. Em relação à base AB temos que a altura do triângulo será igual AD de valor 5, pelo fato de AB ser perpendicular a AD, por serem lados do retângulo ABCD. Daí segue então que o valor de $\mathsf{AP} \times \mathsf{BN}$, será:

$$\mathsf{AP} \times \mathsf{BN} = 2 \times \acute{a}rea(\mathsf{APB})$$

$$\mathsf{AP} \times \mathsf{BN} = 2 \times \frac{3 \times 5}{2}$$

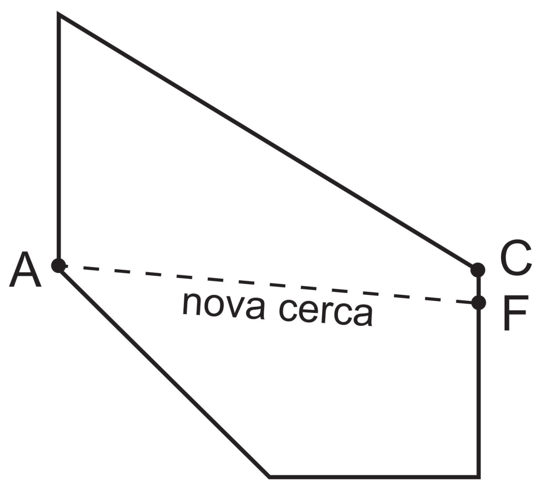
$$\mathsf{AP} \times \mathsf{BN} = 15.$$

Exemplo 7. *(OBMEP 2012) A figura abaixo representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento* AC. *A parte triangular* ABC *tem área igual a* $120\ \mathsf{m}^2$.



a) Qual a área total do terreno?

b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca representada pelo segmento AF *na figura abaixo, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância* CF?



Solução:

a) A área total do terreno $ABCDE$, será a soma da área do triângulo ABC já determinada e a área do polígono $ACDE$. Observando o polígono citado, se ligarmos os vértices C e E, teremos os triângulos: ACE de base 20 e altura 10 e o CDE de base 10 e altura 10. Chamando de S_1 a área do triângulo ACE, temos:

$$S_1 = \frac{base \times altura}{2}$$

$$S_1 = \frac{20 \times 10}{2} \Longrightarrow S_1 = 100.$$

Trabalhando com a mesma relação de área de S_1 para calcular S_2, onde S_2 é a área do triângulo CDE, teremos:

$$S_2 = \frac{10 \times 10}{2} \Longrightarrow S_2 = 50.$$

Daí, segue então que a área total do terreno(S),será:

$$S = 120 + 100 + 50 \Longrightarrow S = 270\ m^2.$$

b) Para resolver esse item, iremos partir do resultado do item a), pois como deseja-se dividir o terreno em duas partes de mesma área e encontramos como área total $270m^2$, temos que cada parte após a divisão terá área igual a $135m^2$. Sendo assim podemos afirmar que a área do polígono que se encontra traçando o segmento AF(cerca), será a soma da área do triângulo ABC igual a $120m^2$ com a área do triângulo ACF (S_3) de base CF e altura $AC = 20m$. Como a área do polígono $ABCF$ é $135\ m^2$, temos que:

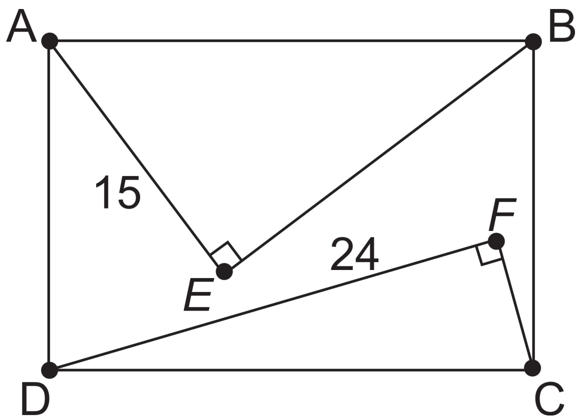
$$135 = 120 + \frac{CF \times 20}{2}$$

$$10CF = 135 - 120$$

$$10CF = 15 \Longrightarrow CF = 1,5.$$

Logo a distância que estava sendo procurada tem o valor de $1,5\ m$.

Exemplo 8. *(OBMEP 2010) Na figura dada,* $ABCD$ *é um retângulo, e* ABE *e* CDF *são triângulos retângulos. A área do triângulo* ABE *é* $150\ cm^2$ *e os segmentos* AE *e* DF *medem, respectivamente,* $15\ cm$ *e* $24\ cm$. *Qual é o comprimento do segmento* CF*?*



Solução: Como a área do triângulo ABE é $150\mathsf{cm}^2$ e foi dito que $\mathsf{AE} = 15$ e ABE é retângulo, temos então que a área de ABE será determinada por $\dfrac{\mathsf{AE} \times \mathsf{BE}}{2}$. Tendo assim uma maneira para encontrar BE que é o único valor que falta na relação, teremos:

$$150 = \frac{15 \times \mathsf{BE}}{2}$$

$$\mathsf{BE} = \frac{150 \times 2}{15} \Longrightarrow \mathsf{BE} = 20.$$

No mesmo triângulo temos que AB é hipotenusa, AE é cateto e BE, agora determinado, também é cateto. Daí aplicando Teorema de Pitágoras para determinar AB, temos:

$$\mathsf{AB}^2 = 15^2 + 20^2$$

$$\mathsf{AB}^2 = 225 + 400$$

$$\mathsf{AB}^2 = 625 \Longrightarrow \mathsf{AB} = \sqrt{625} = 25.$$

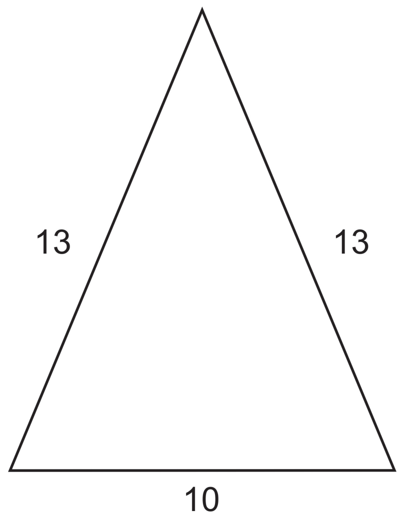
A figura ABCD é um retângulo, assim $\mathsf{AB} = \mathsf{DC} = 25\ \mathsf{cm}$. O valor a ser determinado para a resposta é a medida de CF, que se observarmos na figura temos que CDF é retângulo, onde CD é hipotenusa, DF e CF são catetos. Se aplicarmos o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, o único valor que não temos será justamente o valor que queremos determinar. Aplicando então o teorema temos:

$$25^2 = 24^2 + \mathsf{CF}^2$$

$$\mathsf{CF}^2 = 625 - 576 \Longrightarrow \mathsf{CF} = \sqrt{49} = 7.$$

Encontrando então como resposta para CF o valor de $7\ \mathsf{cm}$.

Exemplo 9. *(OBMEP 2010) Um triângulo isósceles tem uma base de* $10\ \mathtt{cm}$ *e dois lados iguais medindo* $13\ \mathtt{cm}$. *É possível cortar esse triângulo em dois outros triângulos de tal modo que, juntando esses triângulos de outra maneira obtenhamos um outro triângulo isósceles (evidentemente com a mesma área)?*



Solução: Iremos calcular a área desse triângulo pela fórmula de Heron que é representada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Foi fornecido o valor dos três lados do triângulo, que são: 10, 13 e 13. Assim, o semi-perímetro do triângulo é:

$$p = \frac{10+13+13}{2} = 18.$$

Calculando a área:

$$A = \sqrt{18(18-10)(18-13)(18-13)}$$

$$A = \sqrt{18 \times 8 \times 5 \times 5} = 60.$$

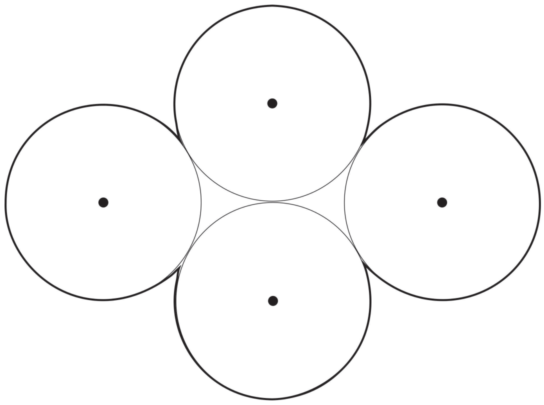
Para que seja possível encontrar um triângulo de mesma área, partiremos o triângulo isósceles fornecido na questão ao meio formando dois triângulos de base 5. Utilizando a relação de área que trabalha com base e altura, temos:

$$60 = \left(5 \times \frac{\mathrm{Altura}}{2}\right) \times 2$$

$$\mathrm{Altura} = \frac{60}{5} = 12.$$

Então o valor da altura do triângulo equivale a 12. Agora iremos verificar se o valor igual a 12 satisfaz a condição. Quando as bases dos dois triângulos formados de valores iguais a 5 forem colocadas encostadas, forma-se um triângulo de dimensões 13, 13 e 24. Torna então o valor 12 um valor correto para a solução da questão. Tendo assim como novo triângulo isósceles um triângulo de medidas iguais a 13, 13 e 24. Sendo então possível ser feito o corte no triângulo.

Exemplo 10. *(OBMEP 2010) A figura a seguir é formada por quatro círculos tangentes de raio* $\mathfrak{a}$. *Determine o comprimento do contorno externo, que está com o traçado destacado.*



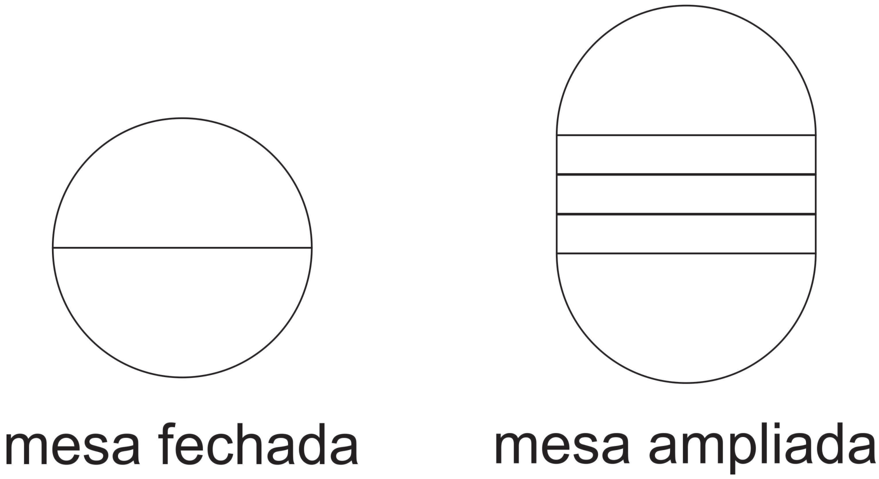
Solução: A figura mostra quatro círculos tangentes de raio $\mathfrak{a}$. Observando três dessas circunferências tangentes entres si duas a duas, percebe-se que se ligarmos os centros dessas circunferências iremos construir um triângulo equilátero de lado igual ao dobro do raio. Como o triângulo é equilátero, temos que os ângulos internos são iguais a 60°. Com isso percebe-se em relação a uma circunferência, $1/6$ dela não foi traçada. Quando se verifica na figura quantas dessas partes existem são identificadas seis partes, gerando $6/6$ da circunferência, ou seja, uma circunferência inteira. Então o comprimento do contorno externo que é formado por quatro circunferências, será:

$$C = 4 \times 2\pi \times a - 2\pi \times a$$

$$C = 8a\pi - 2a\pi$$

$$C = 6a\pi \text{ cm}.$$

Exemplo 11. *(OBMEP 2010) Uma mesa redonda tem 1,40 metros de diâmetro. Para uma festa, a mesa é ampliada colocando-se três tábuas de 40* cm *de largura cada uma, como mostra a figura. Se cada pessoa à mesa deve dispor de um espaço de 60* cm*, quantos convidados poderão se sentar à mesa?*



Solução: O comprimento dessa mesa redonda inicialmente, será calculada pela relação de comprimento de uma circunferência $C = 2\pi \times r$. Como foi dito na questão que a mesa possui diâmetro igual a 1,40 m, seu raio é a metade que vale 0,70 m. Então o comprimento da circunferência será:

$$C = 2 \times \pi \times 0,7$$

$$C = 1,4\pi.$$

Com a ampliação da mesa, acrescentando-se 3 tábuas de 40 cm de largura irá ser aumentada ao total em cada lado da mesa 120 cm que vale 1,2 m. Com isso a mesa ampliada (M) terá um comprimento total:

$$M = 1,4\pi + 2 \times 1,2$$

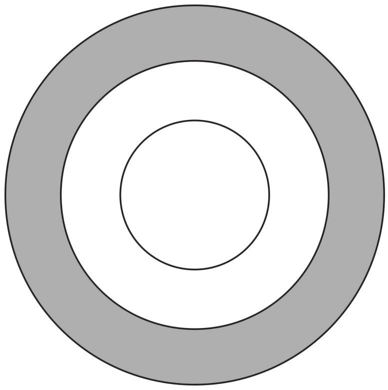
$$M = 1,4\pi + 2,4.$$

Como cada pessoa deve dispor de um espaço de 60 cm = 0,6 m, dividiremos o comprimento ampliado (M) por 0,6:

$$\frac{1,4\pi + 2,4}{0,6},$$

obtendo um valor aproximado igual a 11. Assim, sendo possível 11 convidados se sentarem à mesa.

Exemplo 12. *(OBMEP 2010) Na figura, os três círculos são concêntricos, e a área do menor círculo coincide com a área do maior anel, destacado em cinza. O raio do menor círculo é 5* cm *e do maior 13* cm*. Qual é o raio (em cm) do círculo intermediário?*



Solução: Para resolver a questão iremos trabalhar com a igualdade das áreas, mas inicialmente vamos adotar com $5 + a$ o raio do círculo intermediário. Como foi dito na questão que a área do menor círculo coincide com a área do maior anel, que essa pela figura é a diferença entre a área do maior círculo e o círculo intermediário, teremos:

$$\pi \times 5^2 = \pi \times 13^2 - \pi(5 + a)^2$$

$$25 = 169 - (5 + a)^2$$

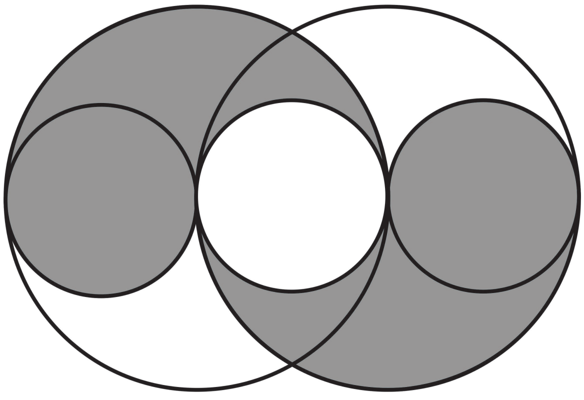
$$(5 + a)^2 = 169 - 25 = 144$$

$$5 + a = \sqrt{144}$$

$$5 + a = 12.$$

Observa-se que $5 + a = 12$ e foi adotado como $5 + a$ o raio do círculo intermediário, logo o raio procurado mede 12 cm.

Exemplo 13. *(OBMEP 2013) Abaixo, veem-se círculos grandes e pequenos. Os círculos grandes têm raio 2, e os círculos pequenos têm raio 1. Qual a área da região pintada de cinza?*



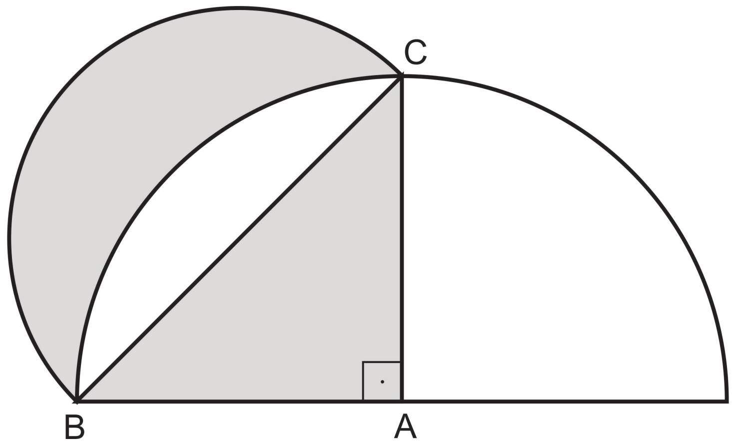
Solução: Se observarmos atentamente a figura da questão, observamos que os círculos grandes além de serem secantes, uma dentro da outra passam em seus respectivos centros. Isso ocorre pelo fato do círculo maior ter raio 2 e o círculo menor ter raio igual a 1. Como o que se deseja na questão é determinar a região pintada em cinza, tomando como referência os círculos maiores, observa-se que a área pintada de cada um são as mesmas, cada uma correspondendo a metade da área do círculo maior. Sendo assim a área procurada é igual à área de um desses círculos de raio maior, que vale 2 e terá como área:

$$S = \pi \times r^2$$

$$S = \pi \times 2^2 = 4\pi.$$

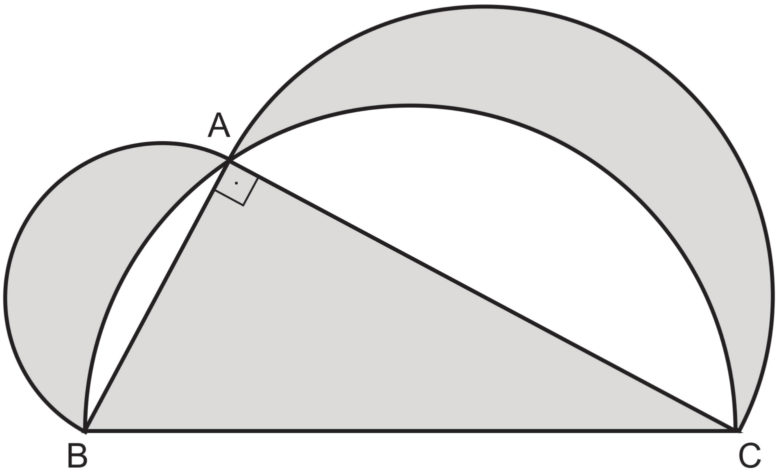
Exemplo 14. *(OBMEP 2014) Lúnulas*

a) Leandro desenha uma Lúnula de Hipócrates como mostrado na figura a seguir:



Nesta figura, o triângulo ABC *é retângulo e isósceles. A lúnula é a região em forma de lua crescente interna a uma semicircunferência e externa à outra semicircunferência, como mostra a figura. A primeira tem raio igual ao comprimento do cateto* AB *e a segunda tem raio igual à metade do comprimento da hipotenusa* BC*. Mostre que a área da Lúnula de Hipócrates desenhada por Leandro é igual à área do triângulo retângulo* ABC*.*

b) Inspirado pelo desenho de Leandro, Renato decide desenhar as Lúnulas de Alhazen, conforme mostrado na figura abaixo:



Nessa figura, as lúnulas são as regiões em forma de lua crescente. Um triângulo retângulo ABC *e três semicircunferências são utilizadas para obter essas regiões. O comprimento do raio da maior das semicircunferências é igual a metade do comprimento da hipotenusa, enquanto que as duas menores tem raio igual à metade do comprimento do cateto correspondente. Mostre que a soma das áreas das duas Lúnulas desenhadas Renato é igual à área do triângulo* ABC.

Solução:

a) Como ABC é isósceles vamos considerar $AB = AC = r$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC,

$$BC^2 = r^2 + r^2$$

$$BC = 2r^2$$

$$BC = r\sqrt{2}$$

Pela generalização do Teorema de Pitágoras, que é trabalhado em relação à área dos lados do triângulo, temos:

$$\frac{A_1(\textit{semicircunferência de diâmetro BC})}{A_2(\textit{semicircunferência de diâmetro AB})} = \frac{BC^2}{AB^2}$$

Daí:

$$\frac{A_1}{\frac{\pi(r/2)^2}{2}} = \frac{(r\sqrt{2})^2}{r^2} \Rightarrow \frac{2A_1}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{2r^2}{r^2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Veja que a área do setor BAC (S) é $\dfrac{1}{4}$ da área da circunferência de centro A e raio AB. Então:

$$S = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi r^2}{4},$$

de onde conclui-se que A_1 é igual a área do setor($A_1 = S$). Observando a figura, temos que S_1 será a área comum as duas. Com isso retirando S_1 das áreas encontradas, concluímos que a área desenhada por Leandro (Lúnula) possui a mesma área do triângulo retângulo ABC.

b) Considerando a, b e c como lados do triângulo retângulo ABC iremos calcular a soma das áreas das Lúnulas e área do triângulo retângulo. Para isso é necessário inicialmente calcular as áreas das semicircunferências que estão sobre os lados do triângulo ABC. Então a área da semicircunferência de diâmetro AB será S_1 e vale:

$$S_1 = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} \Longrightarrow S_1 = \frac{\pi c^2}{2 \times 4} \Longrightarrow S_1 = \frac{\pi c^2}{8}.$$

A área da semicircunferência de diâmetro AC será S_2 e vale:

$$S_2 = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} \Longrightarrow S_2 = \frac{\pi b^2}{2 \times 4} \Longrightarrow S_2 = \frac{\pi b^2}{8}.$$

A área da semicircunferência de diâmetro BC será S_3 e vale:

$$S_3 = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Longrightarrow S_3 = \frac{\pi a^2}{2 \times 4} \Longrightarrow S_3 = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Temos também que a área (A_t) do triângulo retângulo ABC é dado por:

$$A_t = \frac{bc}{2}.$$

Observando a figura temos que a soma das áreas das Lúnulas (S_t) é dada por:
$S_t = S_1 + S_2 - (S_3 - A_t)$ que vale:

$$S_t = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} - \frac{\pi a^2}{8} + \frac{bc}{2}$$

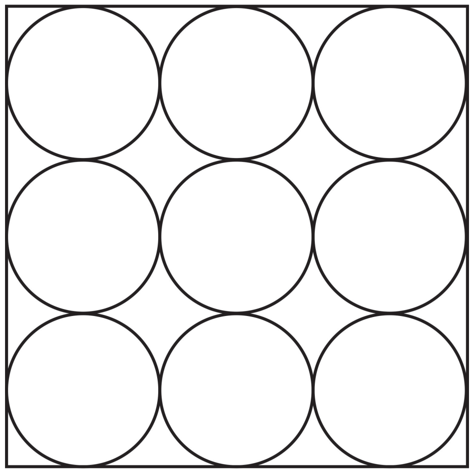
$$S_t = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{bc}{2}$$

Observe que pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ no triângulo retângulo ABC. Com isso $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, que se conclui:

$$S_t = \frac{bc}{2}.$$

Daí mostramos que $S_t = A_t$, ou seja, a soma das áreas das Lúnulas é igual a área do triângulo ABC.

Exemplo 15. *(OBMEP 2010) Para fabricar nove discos de papelão circulares para o Carnaval usam-se folhas quadradas de* 10 cm *de lado, como indicado na figura. Qual é a área (em* cm^2*) do papel não aproveitado?*



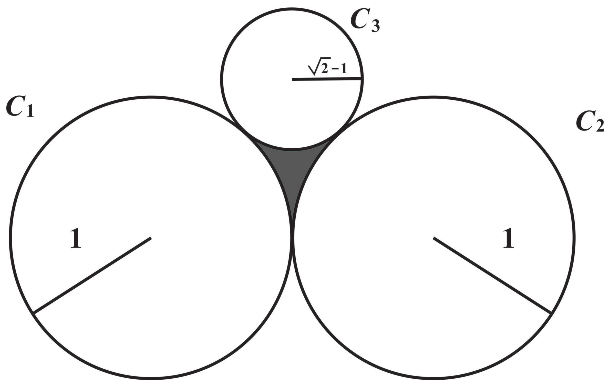
Solução: Observamos que cada lado do quadrado é correspondente a medida de 6 raios desses círculos que são todos iguais. Melhorando, temos que 3 diâmetros são equivalentes a 6 raios, pois o diâmetro é o dobro do raio. Fazendo uma relação entre o lado do quadrado que mede 10 cm e os $6r$, onde o r é o raio do círculo, temos que:

$$6r = 10$$
$$r = \frac{10}{6}$$
$$r = \frac{5}{3}\ \mathrm{cm}.$$

A parte não aproveitada do papelão (N) será determinada pela diferença entre a área do quadrado de lado 10 cm (2 x área do triângulo retângulo de catetos iguais a 10 cm) e a área dos 9 círculos de raio igual $\frac{5}{3}$ cm, e vale:

$$N = 2 \times \frac{10 \times 10}{2} - 9 \times \pi \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$$
$$N = 100 - 9 \times \pi \times \frac{25}{9}$$
$$N = 100 - 78,5$$
$$N = 21,5\ \mathrm{cm}^2.$$

Exemplo 16. *(OBMEP 2014) Em uma folha de papel, Emanuelle desenha duas circunferências de raio 1 que se tangenciam em um ponto. Em seguida, ela desenha uma terceira circunferência de raio $\sqrt{2}-1$ que tangencia as duas anteriores externamente, conforme a figura abaixo.*



Emanuelle calcula a área da região limitada e exterior às três circunferências que é mostrada em cinza na figura acima. Qual o valor por ela encontrado?

Solução: Queremos encontrar a área cinza da figura. Se observarmos atentamente, a área procurada será determinada se fizermos a diferença entre a área do triângulo de vértices iguais aos centros de cada circunferência e a soma das áreas dos setores de cada uma das circunferências. Para determinar a área do triângulo, observe que o triângulo formado é isósceles, pois possui duas medidas iguais a $1+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}$, e a terceira medida igual a 2, isso porque cada lado é a soma das medidas dos raios de duas circunferências pelo fato das mesmas serem tangentes. Observando as medidas encontradas temos:

$$2^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2.$$

Com isso além de isósceles o triângulo é retângulo. Daí temos que os ângulos opostos a cada um dos lados congruentes somam 90°, o que garante cada um no valor de 45°. Uma das relações de área do triângulo definidas é $S = \frac{1}{2} \times a \times b \times sen\alpha$, onde α é o ângulo formado pelos lados a e b. Aplicando-se a fórmula no triângulo, temos:

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times sen 45^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Chamamos de S_1, S_2 e S_3 as áreas dos setores referentes as circunferências C_1, C_2 e C_3 respectivamente, e valem pela relação $S_i = \frac{\alpha}{360} \times \pi \times r^2$, os seguintes valores:

$$S_1 = \frac{45}{360} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{8}.$$

Como C_1 e C_2 são iguais, os seus setores são iguais $S_1 = S_2$, e para S_3:

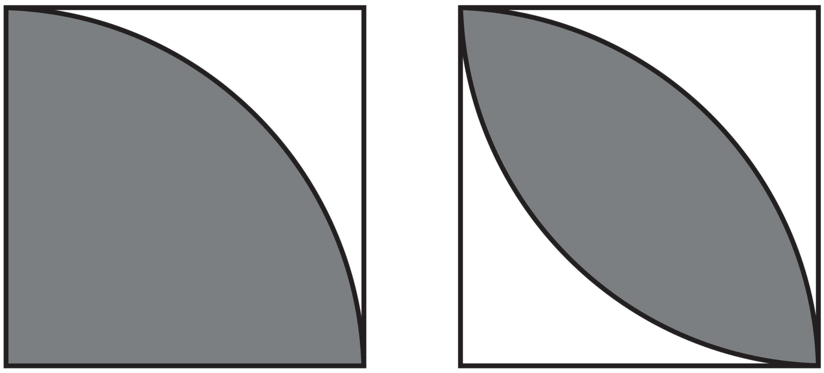
$$S_3 = \frac{90}{360} \times \pi \times (\sqrt{2}-1)^2 = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}.$$

Então a área procurada será A e valerá:

$$A = S - (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$A = 1 - (\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)^2)$$
$$A = 1 - (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)^2)$$
$$A = 1 - \frac{\pi}{4}(1 + (\sqrt{2}-1)^2)$$
$$A = 1 - \frac{\pi}{4}(1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1)$$
$$A = 1 - \frac{\pi}{4}(4 - 2\sqrt{2})$$
$$A = 1 - \frac{\pi}{2}(2 - \sqrt{2}).$$

Exemplo 17. *(OBMEP 2012) Em cada uma das figuras a seguir tem-se um quadrado de lado* r. *As regiões hachuradas em cada uma destas figuras são limitadas por lados desse quadrado ou por arcos de círculos de raio* r *de centros nos vértices do quadrado. Calcule cada uma dessas áreas em função de* r.



(a) (b)

Solução:

a) A área da figura que está sendo trabalhada é um quarto da área do círculo, logo é a área do setor de ângulo 90° e raio r. Pela relação $A_{setor} = \frac{\alpha}{360} \times \pi r^2$, temos:

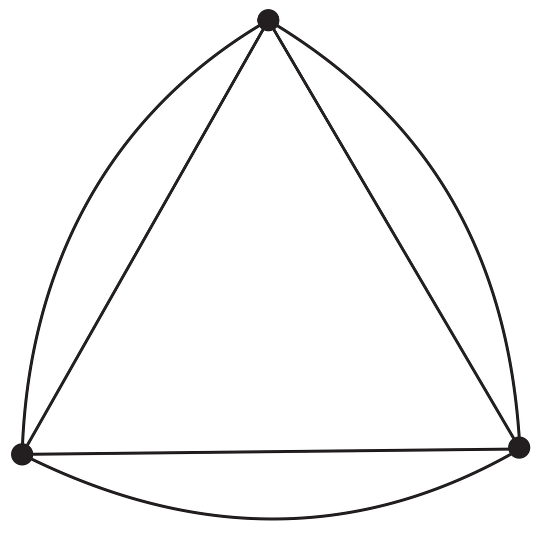
$$A = \frac{90}{360} \times \pi r^2$$

$$A = \frac{\pi r^2}{4}.$$

b) Nesse item a figura hachurada é equivalente ao dobro do resultado da área do setor do item a) subtraído a área do triângulo retângulo de catetos iguais a r. Daí a área procurada vale:

$$A = 2 \times (\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r \times r}{2})$$
$$A = \frac{\pi r^2}{2} - r^2.$$

Exemplo 18. *(OBMEP 2010) O triângulo de Reuleaux é a figura formada a partir de um triângulo equilátero, substituindo os lados por arcos de circunferência centrados nos vértices do triângulo e de raios iguais ao lado do triângulo. Qual é a área de um triângulo de Reuleaux, se os lados do triângulo equilátero inicial medem* 1 cm*?*



Solução: Como se percebe pela figura, existem um triângulo equilátero dentro do triângulo de Reuleaux. Mas se observa que além desse triângulo existem, três áreas (A_c) de mesmo valor, onde cada uma delas é a diferença entre a área do setor determinado por dois lados desse triângulo equilátero e a área do triângulo equilátero. Calculando a área, teremos que a área do setor será com um ângulo de $60°$ pelo fato do triângulo ser equilátero de lado 1 cm como foi determinado na questão e valerá:

$$A_c = \textit{área do setor - área do triângulo equilátero}$$

$$A_c = \frac{\alpha}{360} \times \pi r^2 - \frac{a \times b \times sen\alpha}{2}$$

$$A_c = \frac{60}{360} \times \pi 1^2 - \frac{1 \times 1 \times sen 60^0}{2}$$
$$A_c = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Daí segue que a área do triângulo de Reuleaux (S), será:

$$S = \textit{área do triângulo equilátero} + 3 \times A_c$$
$$S = \frac{1 \times 1 \times sen 60^0}{2} + 3 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$
$$S = \frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{4}$$
$$S = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$S = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\ cm^2.$$

Capítulo 4

Conclusão

Os conteúdos Teorema de Pitágoras e Áreas são temas constantes nas questões das olimpíadas da OBMEP. Estes constituem ferramentas imprescindíveis à resolução de problemas no campo da Geometria, tendo uma importante contribuição para o desenvolvimento da matemática moderna.

Conforme visto, o Teorema de Pitágoras possui um uso que é que histórico e sua validade atravessa os diferentes períodos da nossa sociedade. Isso se deve à eficácia da sua aplicação na resolução de problemas que envolvem cálculo de medidas desconhecidas em figuras como quadrado, triângulo e retângulo à medida que se realiza a decomposição destas figuras em triângulos retângulos. Trata-se, portanto, de um Teorema de fácil aplicação e memorização, devido à sua lógica de construção em que se baseia em uma figura especifica, o triângulo retângulo.

Na resolução dos problemas do banco de questões da OBMEP abordadas neste trabalho, verificou-se que em alguns problemas retirados do banco de questões as respostas podem ser encontradas facilmente, com através da simples aplicação do Teorema, enquanto em outras situações, a aplicação do Teorema exige maior interpretação geométrica em relação às figuras.

No que se refere ao conteúdo de áreas, este possui diferentes possibilidades de aplicação. Quando se trata de círculo, o cálculo é feito através da relação πr^2 ou fração dela. Já quando se trata das demais figuras, as relações encontradas são todas baseadas em áreas de triângulo. Cabe destacar que a formação de diversas figuras planas a partir de triângulos, além de simplificar a aplicação por se trabalhar apenas como uma relação de área, estimula a percepção geométrica dos estudantes e docentes.

Identificou-se que mesmo não se tratando de problema que envolva conteúdo de área, o mesmo pode ser resolvido através desse conteúdo. Isso demonstra as possibilidades de aplicação do conteúdo de área em diferentes questões.

No desenvolvimento do trabalho observou-se que algumas questões abordadas apresentaram em sua solução tanto a aplicação do Teorema de Pitágoras quanto o cálculo de áreas, demonstrando que tais conteúdos aparecem associados.

Desse modo, o estudo contribuirá para que docentes de matemática trabalhem de maneira integrada o Teorema de Pitágoras e Áreas no banco de questões da OBMEP, oportunizando a aproximação de professores e alunos a este banco de questões.

Posteriormente, pretende-se que os resultados deste estudo sejam socializados através de oficinas junto aos professores de matemática da educação básica, de modo a proporcionar a estes um aprofundamento nos modelos de questões abordados na OBMEP e demonstrar as diferentes possibilidades de aplicação dos conteúdos foco deste estudo.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana, Coleção Professor de Matemática, SBM, 11 ed. 2012.

[2] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000.

[3] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

[4] LIMA, Elon Lages et al. .Temas e Problemas Elementares. Sociedade Brasileira de. Matemática. Coleção do Professor de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[5] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). Olimpíadas Brasileiras De Matemática Das Escolas Públicas (OBMEP). Banco de Questões 2010. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bancoobmep2010.pdf> . Acesso em 10 de jan. de 2014.

[6] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). Olimpíadas Brasileiras De Matemática Das Escolas Públicas (OBMEP). Banco de Questões 2011. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bancoobmep2011.pdf> . Acesso em 10 de jan. de 2014.

[7] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). Olimpíadas Brasileiras De Matemática Das Escolas Públicas (OBMEP). Banco de Questões 2012. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bancoobmep2012.pdf> . Acesso em 10 de jan. de 2014.

[8] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). Olimpíadas Brasileiras De Matemática Das Escolas Públicas (OBMEP). Banco de Questões 2013. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2013.pdf>. Acesso em 10 de jan. de 2014.

[9] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA (SBM). Olimpíadas Brasileiras De Matemática Das Escolas Públicas (OBMEP). Banco de Questões 2013. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2014.pdf>. Acesso em 10 de jan. de 2014.

[10] UNIVERSIDADE DE LISBOA. História do Teorema de Pitágoras. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm25/pitagoras/dirhpitagoras.htm>. Acesso em: 12 de mar. de 2014.

[11] WAGNER, Eduardo. Teorema de Pitágoras e Áreas. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila3-teorema_de_pitagoras.pdf. > Acesso em 24 de fev. de 2014.