JULIO CESAR MOHNSAM

As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2014

JULIO CESAR MOHNSAM

As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas

Dissertação submetida por Julio Cesar Mohnsam como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. Adriano De Cezaro

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2014

M698c Mohnsam, Julio Cesar.
As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas / Julio Cesar Mohnsam. – 2014.
86 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande/ FURG, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Dr. Adriano De Cezaro.

1. Arquimedes. 2. Áreas. 3. Métodos. 4. Aproximações. 5. Ensino. I. De Cezaro, Adriano. II. Título.

CDU 51

Catalogação na fonte: Bibliotecária Flávia Reis de Oliveira CRB10/1946

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Instituto de Matemática Estatística e Física - IMEF
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado

No quinto dia do mês de julho do ano de 2014, às 14:00 h na sala 2101 do prédio 2 do Campus Carreiros da FURG, realizou-se a Defesa de Trabalho de Conclusão intitulado As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas, de autoria do candidato **JULIO CESAR MOHNSAM**, aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da FURG. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Adriano de Cezaro** (Presidente), **Juliana Ziebel** e **Celene Buriol**. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi **aprovado** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de 15 dias para o candidato efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

Adriano De Cezaro

Adriano de Cezaro
(Orientador-Presidente) (FURG)

Juliana Santos Ziebell

Juliana Ziebel
(FURG)

Celene Buriol

Celene Buriol
(UFSM)

Dedico o trabalho à Tia Dorotéia

Agradecimentos

Gostaria de agradecer muitas pessoas, mas, primeiramente, agradecer ao alfa e ao Omega por ter conseguido terminar este trabalho.

Quero agradecer aos meus orientadores, professor Adriano De Cezaro e professora Fabiana Travessini De Cezaro, exemplos de dedicação e mestres, que me orientaram com dedicação.

Agradecer a minha esposa por todo apoio. Muito obrigado meu amor, te amo muito.

Aos meus familiares, que me motivaram a não desistir, nestes momentos de grandes dificuldades; deixo a minha gratidão.

Agradeço aos meus amigos do Profmat Furg e a todos os professores do programa. Obrigado pelos conhecimentos transmitidos.

Aos amigos do Exército Brasileiro, das unidades do 9º BI Mtz e do Colégio Militar de Santa Maria-RS, meus agradecimentos.

Aos amigos da Marinha do Brasil, do CIAW no Rio de Janeiro-RJ, meus agradecimentos.

Aos amigos da comunidade de Santa Silvana, 6º distrito de Pelotas-RS, todo meu grato carinho.

"Você precisa fazer aquilo que pensa que não é capaz de fazer.”
(Eleanor Roosevelt)

Resumo

Arquimedes de Siracusa foi, sem dúvida, o maior matemático da antiguidade e é considerado um dos maiores de todos os tempos, ao lado de Isaac Newton, Johann Carl Friedrich Gauss e Leonhard Paul Euler. Como cientista, ele é comparado apenas a Sir. Isaac Newton, em virtude de suas descobertas. Arquimedes trabalhou como Matemático, Físico, Astrônomo e Engenheiro Militar. Seus vastos trabalhos varrem diversas áreas da ciência. Sabemos que a necessidade de resolver problemas diários, relacionados ao cálculo de áreas, remete ao Egito antigo, quando os agricultores tinham de dividir as terras não inundadas pelas cheias do rio Nilo, bem como, demarcar as divisas. No entanto, a complexidade, o rigor e a profundidade dos cálculos necessários no Egito antigo não se comparam aos propostos e resolvidos por Arquimedes. Neste trabalho, exploraremos as contribuições de Arquimedes ao cálculo de áreas e, em particular, ao cálculo integral moderno. Em particular, utilizar-nos-emos os métodos das alavancas e da exaustão, ambos propostos por Arquimedes, para resolver o problema da quadratura da parábola. Faremos uma comparação do trabalho de Arquimedes com contribuições de alguns matemáticos importantes, como Pascal, Fermat e Riemann, que, somente séculos depois e com o desenvolvimento de uma matemática muito mais moderna que a conhecida por Arquimedes, obtiveram resultados similares. Nós utilizaremos das ferramentas do cálculo integral moderno e de softwares livres para obter estimativas de erros para os cálculos feitos por Arquimedes no problema de quadratura da parábola. Por fim, exploraremos a aplicação dos conceitos e das técnicas, utilizadas neste trabalho, no ambiente escolar.

Palavras-chaves: Arquimedes, áreas, métodos, aproximações, ensino

Abstract

Archimedes of Syracuse was, without doubt, the greatest mathematician of antiquity and he is considered beside greatest of all time, one of the Isaac Newton, Johann Carl Friedrich Gauss and Leonhard Paul Euler. As a scientist, he is compared to Sir. Isaac Newton, by virtue of their findings. Archimedes worked as a mathematician, physicist, astronomer and engineer. His vast work cover many areas of science. We know that the necessity to solve daily problems related to the calculation of areas, dates back to ancient Egypt, at that time, farmers had to divide the lands that were not inundated by the floods of the Nile, as well as delimit the boundaries. However, complexity, accuracy and depth of the necessary calculations in ancient Egypt do not compare some proposed and solved by Archimedes. In this work, we explore the contributions of Archimedes to the calculation of areas and, in particular, to the modern integral calculus. We will use the methods of the levers and exhaust, both proposed by Archimedes, to solve the problem of the parabola quadrature problem. We will compare the work of Archimedes with contributions from some leading mathematicians like Pascal, Fermat and Riemann, who only centuries later and with the development of a more modern mathematics as Archimedes, obtained similar results. Moreover, we will use the modern integral calculus and free software tools to obtain error estimates for the Archimedes calculation in the parabola quadrature problem. Finally, we will explore the application of concepts and techniques, used in this work, in the school environment.

Key-words: Archimedes, methods, areas, approaches, teaching

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pintura de Domenico Fetti 1620. (WIKIPEDIA,) 18
Figura 2 – Estátua de bronze de Arquimedes está no Observatório Archenhold em Berlim. Esculpida por Gerhard Thieme em 1972. (WIKIPEDIA,) . . 19
Figura 3 – Morte de Aquimedes. (ARCAUNIVERSAL,) 21
Figura 4 – Arquimedes de Siracusa. (ARCAUNIVERSAL,) 23
Figura 5 – Stomachion. Quebra-cabeças geométrico. (WIKIPEDIA,) 28
Figura 6 – Método da alavanca. Adaptada de (ASSIS, 2008) 31
Figura 7 – Quadratura da parábola pela lei da alavanca. (BOYER, 1974) 32
Figura 8 – Triângulos inscritos. Imagem adaptada de (CARVALHO, 2012) 37
Figura 9 – Gráfico $y = x^2$ 43
Figura 10 – Gráfico de $y = x^2$ e do retângulo de base b e altura b^2 45
Figura 11 – Aproximação da área com retângulos interiores. 46
Figura 12 – Aproximação da área com retângulos exteriores. 46
Figura 13 – Aproximação da área com retângulos exteriores. (APOSTOL, 2004) . . 47
Figura 14 – Gráfico de $y = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, por excesso. (GUIDORIZZI, 2001) 50
Figura 15 – $y = x^k$, por falta. (GUIDORIZZI, 2001) 52
Figura 16 – $y = x^k$, Aproximação por exceso. (GUIDORIZZI, 2001) 53
Figura 17 – Área S (FLEMMING, 2000) 54
Figura 18 – Retângulos da soma de Riemann. (FLEMMING, 2000) 55
Figura 19 – Curva de Gauss 67
Figura 20 – Área aproximada por retângulos interiores. 68
Figura 21 – Área aproximada por retângulos exteriores 69
Figura 22 – Área aproximada por retângulos exteriores com 5 divisões de intervalo 70
Figura 23 – Área aproximada por retângulos exteriores com 30 divisões de intervalo 70
Figura 24 – Área aproximada por retângulos exteriores e interiores com 10 divisões de intervalo 71
Figura 25 – Área aproximada por retângulos exteriores e interiores com 40 divisões de intervalo 72
Figura 26 – Quadratura da parábola pela lei da alavanca. (BOYER, 1974) 79
Figura 27 – Razões $\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$ 80
Figura 28 – Razões $\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$ 82

Sumário

Introdução **13**

Objetivos **15**

Justificativa **16**

1 Arquimedes de Siracusa aspectos históricos **17**

1.1 Arquimedes o maior matemático da antiguidade 17

1.2 Obras e trabalhos de Arquimedes 23

2 O problema da quadratura da parábola **29**

2.1 Método das Alavancas 29

2.2 Quadratura da parábola pelo método das alavancas 31

2.3 Método da Exaustão 34

2.4 Quadratura pelo método da exaustão 36

2.5 Quadratura da parábola por integração de Riemann 42

3 As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas abaixo de curva de um gráfico de uma função **45**

3.1 Arquimedes e o cálculo da área abaixo da parábola 45

3.2 Cálculo de Pascal 50

3.3 Cálculo integral de Fermat 52

3.4 Integral de Riemann 54

4 Estimativas de Erros **59**

4.1 Estimativa de erros da área abaixo da parábola 59

4.2 Estimativa de erros da área abaixo da curva $y = x^3$ 62

5 Aplicabilidade no ensino **67**

5.1 Problematização 67

5.2 Exercícios propostos para treinamento 71

6 Considerações finais **73**

Referências **75**

Apêndices **76**

APÊNDICE A Demonstrações de somas **77**

APÊNDICE B Demonstrações das razões usadas no capítulo 2 79

APÊNDICE C Integração da função de Gauss 84

APÊNDICE D Demonstração da identidade de Pascal 86

Introdução

Segundo historiadores, o cálculo de áreas é uma prática muito antiga. Os primeiros desses cálculos foram realizados no Egito, há muitos anos atrás. Naquela época, os agricultores se deparavam com o problema de dividir as terras que não estavam inundadas pelas cheias do rio Nilo, bem como, com problemas de demarcação de divisas, em virtude das altas taxas de impostos. Segundo (BOYER, 1974), registros desses cálculos estão no papiro de Rhind, documento matemático muito antigo, que mostra os problemas práticos de matemática do Egito antigo. Depois na Grécia antiga, Euclides de Alexandria sistematizou todo o conhecimento geométrico Grego, em sua obra "Os elementos", quando realizou também, diversos cálculos de áreas. No entando, tais problemas de geometria antiga não se comparam aos problemas resolvidos por Arquimedes de Siracusa, no que se refere à dificuldade e à complexidade. Outro ponto de destaque do trabalho de Arquimedes é a metodologia e análise dos problemas. Por esta razão Arquimedes é considerado o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos.

Arquimedes viveu no contexto da expansão do império romano, há quase dois mil e trezentos anos atrás, quando seus conhecimentos teóricos e sua capacidade de resolver problemas foram empregados, na prática, na defesa de Siracusa, sua cidade natal e de maior vivência. Vale a pena lembra que Arquimedes não trabalhou apenas como matemático. Na verdade, ele atuou em diversas áreas do conhecimento como, física, engenharia e geometria, conforme (AABOE, 1984).

Segundo (NETZ, 2007), em codex de Arquimedes, a palavra “Arquimedes” tem origem no grego e é a junção de duas palavras ou duas partes: arché, que significa princípio ou antigo; e mêdos, que significa mente. Se interpretarmos seu nome da esquerda para a direita, ele significa algo como “a mente principal.” Mas, na Grécia antiga, era mais comum interpretar o nome da direita para a esquerda. Neste caso, seu nome poderia significar “a mente do princípio,” assim como o nome Diomedes significaria “a mente de Deus”, conforme (ASSIS, 2008).

Segundo (AVILA, 1986), Arquimedes estudou em Alexandria no Egito, mas era superior a todos os matemáticos que estudavam lá. Segundo (BOYER, 1974), durante toda a idade Helenística, o centro da atividade matemática permaneceu em Alexandria, mas o maior matemático desse tempo e de toda a antiguidade não nasceu nessa cidade. Arquimedes pode ter estudado, por algum tempo, em Alexandria com os estudantes de Euclides, e mantido comunicação com os matemáticos de lá, mas ele viveu em Siracusa.

Neste trabalho, além de estudar a história de Arquimedes, faremos também um estudo sobre os métodos de calcular áreas utilizados por Arquimedes há aproximadamente

2300 anos atrás. Vamos mostar como Arquimedes realizou a quadratura da parábola com um método mecânico baseado na lei da alavanca e com um geométrico chamado método da exaustão. Depois disso, mostraremos como as ideias de Arquimedes enflueciaram matemáticos como Blaise Pascal, Pierre de Fermat e Gustvav Reimann. Em particular, veremos que as ideias fundamentais da teoria de integração de Riemann foram muito influenciadas pelos trabalhos de Arquimedes.

Na sequência apresentaremos estimativas de erros nas aproximações, usando o método da exaustão, desenvolvido por Arquimedes. Por fim, propomos o uso do software Geogebra como um facilitador para introduzir o cálculo de áreas, abaixo de uma curva, no ensino básico. Com o auxílio desse software, proporemos ainda a obtenção de aproximações do valor da área abaixo de uma curva.

Objetivos

Este trabalho tem vários objetivos. O primeiro é conhecer a vida de Arquimedes, usando, como base, livros de história da matemática. Junto, daremos um resumo de suas principais obras e trabalhos. Outro objetivo é mostrar como Arquimedes realizou a demonstração da quadratura da parábola. Neste caso daremos uma ideia mais completa das demonstrações da quadratura que não vem em livros de história da matemática. O próximo objetivo é mostrar como as ideias de Arquimedes foram usadas por matemáticos como Pascal, Fermat e Reimann no cálculo de áreas abaixo de curvas. Por fim, o norte é realizar estimativas de erros do método da exaustão e comparar estes resultado com os valores exatos. Poderemos atingir este objetivo usando o software livre Geogebra que da uma ideia da aproximação por falta e excesso. Partindo desta motivação, nosso último objetivo é mostrar uma forma de empregar esta proposta em sala de aula, ou seja, ministrar uma aula sobre estudos de áreas abaixo de curvas, conduzindo o estudante a reconhecer os conceitos fundamentais de cálculo integral. Abaixo os objetivos esquematizados mais especificamente.

Objetivos específicos:

- Reconhecer a história de vida de Arquimedes de Siracusa e as obras que encontramos dele.

- Apresentar a prova da quadratura da parábola, usando o método das alavancas e o da exaustão.

- Identificar como as ideias de Arquimedes foram continuadas nos cálculos de Pascal, Fermat e Reimman.

- Realizar estimativas de erros nos cálculos de área abaixo de curvas, usando as ideias de retângulos interiores e exteriores. O escopo é mostrar numericamente que o aumento de retângulo melhora a aproximação da área.

- Apresentar uma forma de trabalhar o cálculo de área abaixo de curvas, no ensino básico, mais especificamente no ensino médio, a partir do uso de software livre como o Geogebra, para facilitar o aprendizado. Com o Geogebra podemos mostrar que o aumento de retângulos interiores e superiores aproxima melhor o valor para a área abaixo da curva.

Justificativa

Conhecer a história da matemática é muito importante para os alunos e também muito motivador. Temos várias razões para este estudo. Uma delas é a grandeza desse matemático, que tem grande importância para a história da matemática, pois é considerado como um dos maiores matemáticos que já existiu. Os métodos utilizados por Arquimedes permitiram, ao mesmo, ir além dos matemáticos da antiguidade no estudo do cálculo de áreas. Além disso, essas conquistas de Arquimedes influenciaram decisivamente os matemáticos modernos que desenvolveram o cálculo integral, que é a ferramenta muito utilizada no cálculo de áreas abaixo de curvas diversas. O cálculo é uma disciplina de grande reprovação de alunos, em virtude da falta de base no ensino médio e fundamental. Pensando nisso, uma alternativa é o uso de novas formas de apresentar os conceitos de área abaixo de curvas, conforme as ideia de Arquimedes, de maneira inovadora e motivadora. Uma ferramenta interessante e muito utilizada atualmente é o computador. Com isso, os estudantes terão mais atração pelos temas do cálculo integral e teremos menos reprovações.

1 Arquimedes de Siracusa aspectos históricos

Neste capítulo descreveremos alguns fatos a respeito da vida de Arquimedes e suas obras conhecidas, que contribuiram para evolução da matemática.

1.1 Arquimedes o maior matemático da antiguidade

Segundo relatos do narrador e historiador Bizantino Joannes Tzetzes, Arquimedes, nasceu por volta de 287 a.C. na cidade portuária de Siracusa, na Sicília. Naquele período, essa comunidade era uma cidade-estado do mundo Grego. Atualmente, Siracusa é uma comunidade que pertence à Itália. O narrador Tzetzes relatou que Arquimedes talvez viveu aproximadamente 75 anos. Ele viveu num período de grande expansão de influência geopolitica do império romano. Podemos encontrar mais referências sobre o assunto em (AABOE, 1984).

Outro narrador que escreveu sobre Arquimedes foi Plutarco. Esse narrador escreveu sobre o grande matemático em vidas ilustres que são narrações que tratavam de personalidades do império romano, mais especificamente na vida do general das forças romanas Marco Cláudio Marcelo. Mas muitos detalhes da vida de Arquimedes ficaram perdidos. Na verdade, sabemos muito pouco sobre ele. Não temos relatos mais elaborados e outras provas históricas. Sabemos que, durante sua juventude, Arquimedes estudou em Alexandria, maior centro de estudos da antiguidade, que a pouco antes fora construída por Alexandre da Macedônia, no Egito que, na época, era governada por Ptolomeu I. Em Alexandria, Arquimedes trabalhou com Eratóstenes de Cirene e com outros matemáticos contemporâneos. Após terminar seus estudos Arquimedes regressou a Siracusa.

Segundo (ASSIS, 2008), o professor de Arquimedes, em Alexandria, foi Canon de Samos, mas a pessoa de maior contato foi Eratóstenes a quem dedicou seu método, "O Método dos Teoremas Mecânicos". Nesse método, ele explica a lei das alavancas, pela qual expôs uma genial aplicação da mecânica à geometria. Muitos dos seus trabalhos têm introduções aclamadas ao grande Eratóstenes, que foi o matemático que calculou, com boa aproximação, a circunferência do Planeta Terra e também foi o bibliotecário de Alexandria. Além do Método dos Teoremas Mecânicos podemos destacar ainda o teorema de análise diafontina, ou teorema bovino que também foi enviados a Eratóstenes.

Arquimedes também escreveu a Dositeu de Pelúsio em alguns trabalhos, como a quadratura da parábola. Mas acredita-se que vários trabalhos foram enviados a outros Matemáticos também. Hoje temos acesso a alguns trabalhos de Arquimedes, em virtude de terem sido enviados para Alexandria. Arquimedes tinha muitos amigos matemáticos em Alexandria e lá havia a maior biblioteca da época, com milhares de pergaminhos ou rolos de papiros, feitos de couros de animais.

Arquimedes mandava suas cartas para a Alexandria e elas eram publicadas em rolos de papiros pelos matemáticos da biblioteca. Esses trabalhos eram levados a discussões científicas e aplicados em novas pesquisas em Alexandria. Talvez, vários trabalhos de Arquimedes tenham sido destruídos no incêndio de 391 d. C. Esse incêndio significa uma grande perda comunicativa da passagem da história da Humanidade, pois muitas obras foram incendiadas nesse período e totalmente perdidas.

Abaixo, na figura 1, podemos observar a pintura em óleo sobre tela, realizada por Domenico Fetti, em 1620, onde Arquimedes aparece pensativo na reflexão de um problema geométrico. Esta imagem de Arquimedes é muito interessante e fez muito sucesso, pois o artista descreve bem o comportamento de Arquimedes diante dos problemas matemáticos.

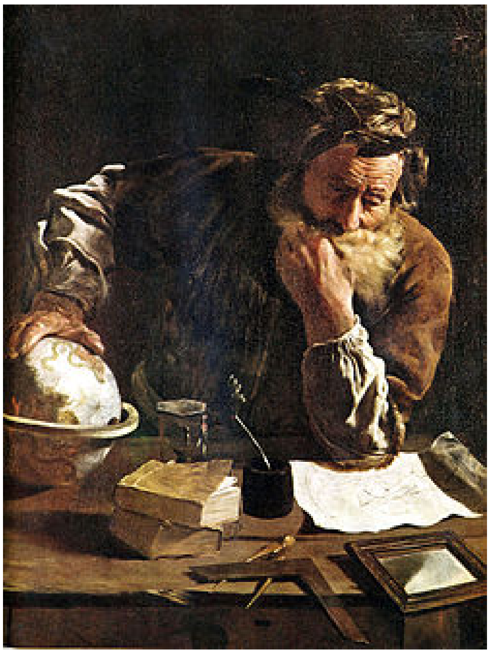

Figura 1 – Pintura de Domenico Fetti 1620. (WIKIPEDIA,)

Na sequência, na figura 2, temos uma escultura que expressa Arquimedes sentado no chão, resolvendo um problema geométrico com um galho para riscar o chão. Essa era uma das formas com que Arquimedes tirava várias inferências cientificas.

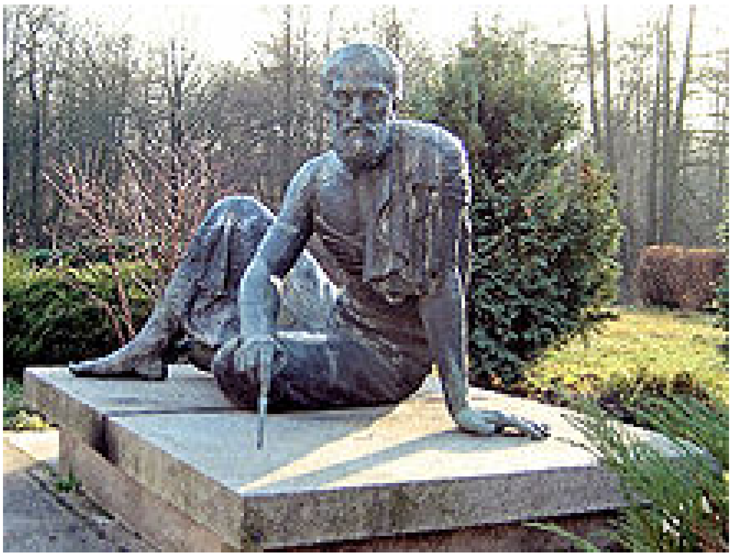

Figura 2 – Estátua de bronze de Arquimedes está no Observatório Archenhold em Berlim. Esculpida por Gerhard Thieme em 1972. (WIKIPEDIA,)

Nos tempos de Arquimedes, o império romano estava numa grande expansão, aumentando seu domínio territorial. Siracusa era muito importante geopoliticamente na Sicília. Nesse período, ocorreu a Segunda Guerra Púnica, quando forças romanas, sob o comando do General Marco Cláudio Marcelo, capturaram a cidade de Siracusa após um cerco de dois anos. A captura ocorreu quando as defesas de Siracusa demonstraram uma falha, durante a semana festiva de homenagem à Deusa da caça Diana. Arquimedes era um engenheiro que atuava na segurança da cidade com suas máquinas de destruir embarcações (sistema de roldanas, catapultas, ganchos e espelhos que refletiam raios solares), construídas com base em seus conhecimentos. É importante saber que Arquimedes era responsavél pela defesa fluvial e terrestre, conforme (LINTZ, 1999).

Muitos ataques foram enfrentados com as máquinas de Arquimedes, que destruíram as embarcações inimigas com garras mecânicas, colocando fogo com raios solares refletidos por espelhos. Sobre isso existe uma lenda de que Arquimedes construiu um espelho parabólico e usou a propriedade refletora das parábolas para queimar barcos inimigos.

Segundo (DIJKSTERHUIS, 1987), Arquimedes criava outros utensílios como bombas para puxar água em parafuso. Acredita-se que ele inventou esse sistema de bombeamento durante sua estadia no Egito. Eram tubos em hélice, presos a um eixo inclinado, acoplado a uma manivela para fazê-lo girar. Eram usados na irrigação dos campos e como bombas de água. Essas máquinas, com esse principio funcional, são usadas até os dias de hoje, para puxar água. A Arquimedes também foi creditado o aumento da precisão das catapultas que eram usadas para arremessar rochas contra os inimigos.

Atualmente, acreditamos que Arquimedes morreu em 212 a.C. na guerra Punica, durante o saque a Siracusa. Sobre a morte de Arquimedes existem diversas versões. De acordo com o relato dado por Plutarco, Arquimedes estava contemplando um diagrama matemático quando a cidade foi capturada. Um soldado romano o encontrou e ordenou que fosse se apresentar perante ao General Marcelo, mas ele se recusou, dizendo que ele tinha de terminar de trabalhar no problema ("não perturbe meus círculos"ou "Ei camarada, afaste-se de meu diagrama"). O soldado ficou furioso com isso e atravessou o corpo dele com uma espada.

Outra versão, menos popular, diz que Arquimedes pode ter sido morto enquanto tentava se render a um soldado romano. Conforme essa versão de sua morte, Arquimedes estava carregando instrumentos matemáticos, e foi morto porque o soldado pensou que fossem itens valiosos (pensou que Arquimedes estava roubando os instrumentos). O General Marcelo, quando informado do óbito de Arquimedes, teria ficado muito irritado, pois admirava o geômetra (oponente defensor de anos de Siracusa) e, por isso, queria ele vivo, visto que também era uma posse científica valiosa. E tinha ordenado que não fosse ferido, no entanto, sua ordem não foi cumprida e Arquimedes foi morto. Na verdade, o General tentou conquistar Siracusa por anos e sempre fora derrotado pelos equipamentos de defesa de Arquimedes. Por essa razão, o general admirava o adverário habilidoso e genial. Outras Vesões de sua morte podem se encontradas em (NETZ, 2007).

As últimas palavras que, talvez, Arquimedes pronunciou antes de morrer, segundo a primeira versão de sua morte são: "Não perturbe meus círculos". É uma referência aos círculos no desenho matemático que ele estudava quando perturbado pelo soldado romano. Essa citação é, muitas vezes, dada em Latim como "Noli turbare circulos meos", mas não há nenhuma evidência confiável de que Arquimedes pronunciou realmente essas palavras e elas não aparecem no relato dado por Plutarco ou em outro historiador. Logo abaixo, na figura 3, temos uma reprodução pictórica da possível cena da morte do grande Arquimedes.

Arquimedes ficava sempre pensativo em seus trabalhos. Por isso ficou com fama de distraído. Mas essa grande capacidade de concentração era uma aliada em seus estudos. Outra característica, que lhe deu fama, foi a de grande imaginação, pois a maioria dos seus trabalhos eram supreendentes para a época.

Segundo (BOYER, 1974), o filósofo e iluminista francês Voltaire, certa vez, afirmou que havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero. Homero foi um grande escritor de mitologias, contemporâneo de Arquimedes.

O código perdido de Arquimedes é um grande livro do estudioso Netz, que conta várias histórias do matemático. Nesse livro encontra-se uma citação de Plutarco que afirma que, muitas vezes os servos de Arquimedes o levavam, contra sua vontade, para os banhos, para lavá-lo e untá-lo. Contudo, estando lá, ele ficava sempre desenhando

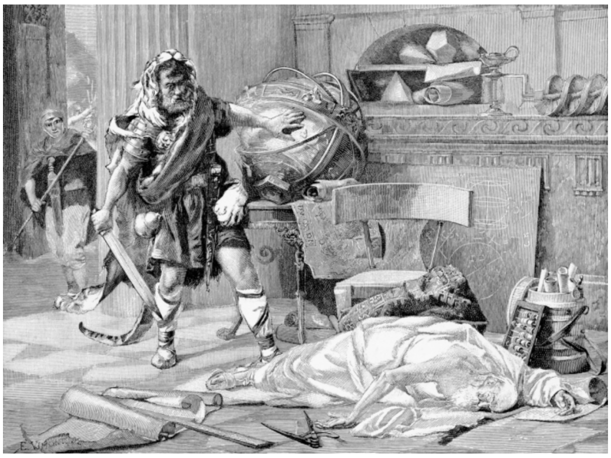

Figura 3 – Morte de Aquimedes. (ARCAUNIVERSAL,)

figuras geométricas, mesmo nas cinzas da chaminé, enquanto o estavam untando-o com óleos e perfumes, ele desenhava figuras sobre seu corpo nu, de tanto que se afastava das preocupações consigo próprio e entrava em êxtase ou em transe, com o prazer que sentia no estudo da geometria.

Arquimedes também pronunciou "Eureka, Eureka"que significa "achei, achei", quando resolveu o problema da coroa do Rei Heirão, que havia sido sabotada com a mistura de prata com ouro, porque um ladrão havia roubado grande parte de ouro (fundiu ouro com prata). Com isso, ao se banhar, Arquimedes, concentrado, descobriu que o volume deslocado pela água por um objeto é o volume do objeto. Em euforia saiu sem roupas pela cidade gritando "Eureka, eureka". Outra frase bem popular é em relação às alavancas, que diz: "Dai-me um ponto fixo que erguerei o mundo", conforme (AABOE, 1984).

Arquimedes divulgou, em um de seus trabalhos, o enunciado de que o volume e a área da superfície da esfera são dois terços da do cilindro incluindo suas bases. Outra demonstração interessante, é a de que é possível construir um triângulo com mesma área de um círculo. Em virtude dos seus dedicados trabalhos, uma esfera e um cilindro foram colocados sobre o túmulo de Arquimedes, de acordo com seu pedido, pois adorava essas formas geométricas. Recentemente, foi reencontrada uma obra muito antiga de Arquimedes. Nesse trabalho constam diversas obras, como por exemplo, o método, com que as leis das alavancas são mostradas. Esse trabalho permitiu que Arquimedes conseguise fazer a famosa quadratura da parábola. Mais adiante, vamos mostrar as demonstrações da quadratura da parábola.

Segundo (EVES, 2002), em 75 a.C, 137 anos após sua morte, o orador do império romano Cícero (Marco Túlio Cícero) estava trabalhando como representante de Roma na região da Sicília, como cônsul. Ele tinha ouvido muitas histórias sobre o túmulo de Arquimedes e, muito curioso, queria encontrar o referido túmulo, mas nenhum dos moradores siracusanos foi capaz de lhe dar uma localização. Após muito tempo de procura, depois de examinar vários monumentos dos cemitérios, que não eram poucos, por fim ele encontrou um túmulo, próximo ao portão de Agrigentino em Siracusa, em condições negligenciadas e coberto por relva e folhagem. Cícero, na condição de representante do imperador, ordenou a limpeza do túmulo e, com isso, ele foi capaz de ver a escultura e ler alguns dos versos que haviam sido adicionados como inscrição, que iam de encontro ao que diziam as histórias sobre o referido túmulo. Logo, ele teve a certeza de que aquele era o túmulo de Arquimedes de Siracusa. Sobre esse fato existe uma pintura muito bonita que descreve a cena onde Cíciro encontra o túmulo, pintada por Benjamin West (1738-1820).

Segundo (EVES, 2002), daí para frente, por ordens de Cícero, foram destacados homens para preservar o local e os terrenos vizinhos. Até quando continuou essa manisfestação de respeito não se sabe, pois o túmulo voltou a desaparecer. Até que, em 1965, quando se faziam escavações em algum lugar de Siracusa, para lançar as fundações de um hotel, encontrou-se, novamente e inesperadamente, o que se supõe ser o túmulo que há tantos séculos estava desaparecido.

Todas as versões conhecidas a respeito da vida de Arquimedes foram escritas muitos anos depois de sua morte pelos historiadores da Roma Antiga. O relato do cerco a Siracusa foi escrito por volta de setenta anos depois da morte de Arquimedes e foi utilizado, posteriormente, como fonte, por Plutarco, em virtude de escrever sobre o General Marcelo. Ele esclarece pouco sobre Arquimedes, mas afirma que era uma pessoa que tinha capacidade de grande concentração em problemas e era muito preocupado com a segurança de sua cidade, usando as máquinas de guerra que ele, supostamente, construiu a fim de defender a cidade, causando muita confusão às tropas de Roma.

Segundo (EVES, 2002), os trabalhos realizados por Arquimedes são grandes obras-primas de exposição matemática, com muita complexidade e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas de matemática pura e aplicada de nossa época. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada, técnica e objetiva, muito superior a qualquer outra usada em sua época. Sua escrita é de profissional e apresenta caracteristicas de grandes escritores modernos. Cerca de dez tratados de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestígios de outros extraviados e sobre os quais pouco se sabe atualmente.

Talvez a mais notável e importante das contribuições feitas à matemática por esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral. Podemos ter uma boa ideia disso na quadratura da parábola. Esta quadratura será bem discutida num capítulo posterior.

1.2 Obras e trabalhos de Arquimedes

Agora vamos falar um pouco sobre as obras de Arquimedes. Sabemos que ele realizou diversos trabalhos, mas só alguns chegaram a nós. Abaixo temos algumas obras e um resumo das mesmas que conhecemos.

Um estudo mais aprofundado pode ser feito em (HEATH, 1897), (Trabalhos de Arquimedes) que é uma obra muito importante e descreve bem os trabalhos de Arquimedes. Outro trabalho é o livro "Código de Arquimedes", (NETZ, 2007). Podemos encontrar muito sobre os trabalhos de Arquimedes em (ASSIS, 2008) e em (MAGNAGHI, 2011) que são Físicos e estudaram o grande geometra. Os Livros de história da matemática também falam sobre os trabalhos de Arquimedes.

Figura 4 – Arquimedes de Siracusa. (ARCAUNIVERSAL,)

Principais trabalhos que conhecemos:

Sobre o Equilíbrio dos Planos. Livro I e II.

No primeiro livro constam sete postulados e quinze proposições, já no segundo constam dez proposições.

Nesses livros, Arquimedes calculou centros de gravidade de várias figuras geométricas, incluindo triângulos, paralelogramos e parábolas. Sabemos que os objetos podem ser equilibrados pelo baricentro ou centro de massa ou de gravidade. Neste trabalho ele aprimorou a lei das alavancas de Aristóteles.

Quadratura da Parábola.

Nesse trabalho, Arquimedes prova, através de dois métodos, que a área delimitada por uma parábola e uma linha reta é 4/3 multiplicado pela área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura. Para isso, ele realiza uma demonstração mecânica (pela lei das alavancas) e outra geométrica (método da exaustão). No próximo capítulo valtaremos a falar sobre essa quadratura.

Sobre a Esfera e o Cilindro, Livros I e II.

Nesses trabalhos Arquimedes demonstra um resultado do qual ele tinha um grande orgulho. Ele realizou a dedução de uma relação entre uma esfera e um cilindro circunscrito, de mesma altura e diâmetro. O volume é $\frac{4}{3}\pi r^3$ para a esfera, e $2\pi r^3$ para o cilindro. A área superficial é $4\pi r^2$ para a esfera, e $6\pi r^2$ para o cilindro incluindo suas duas bases, onde r é o raio da esfera e do cilindro. A esfera tem um volume que é dois terços do volume do cilindro circunscrito. De forma similar, a esfera tem uma área que é dois terços da área do cilindro circunscrito incluindo as bases. Arquimedes pediu que no momento de sua morte, essas figuras deveriam ser colocadas sobre sua tumba com esculturas da esfera e do cilindro.

Sobre as Espirais.

Esse é o trabalho considerado como o mais difícil de Arquimedes e, por isso, ele é pouco estudado. Nesse trabalho, Arquimedes definiu o sintoma do que, atualmente, chama-se de espiral de Arquimedes (em sua homenagem), como o conjunto dos pontos correspondentes às posições de um ponto que se move à velocidade constante sobre uma reta, que gira à velocidade angular, constante sobre um ponto de origem fixo. As galáxias em espiral, os caracois e alguns redemoinhos de ventos ou de água tem a forma de uma espiral de Arquimedes. O estudo dessa espiral foi empregado em várias coisas, como no disco de vinil, compressores, micro propagação bacteriana, espiral de Fermat e logarítmica, espiral de Littus e Parker(nos ventos solares) e na roda de Catarina. Embora Arquimedes não tenha descoberto essa espiral, ele a usou neste livro para quadrar um círculo e fazer a trissectar um ângulo, que são dois problemas clássicos e históricos da matemática, juntamente com a duplicação do cubo. Esses problemas não apresentam solução usando construções com régua e compasso, mas Arquimedes a apresentou como a solução de dois desses problemas, usando outro tipo de construção não Euclidiana chamada de Neusis. A neusis admitia constração com régua graduada. (KNORR, 1978)

Sobre Conóides e Esferóides.

Nesse tratado, Arquimedes calcula as áreas e volumes das seções de cones, troncos, esferas, e paraboloides (troncos).

Sobre os Corpos Flutuantes. Livros I e II.

No primeiro livro desse tratado, Arquimedes enuncia a lei dos fluídos em equilíbrio, com seu princípio de Arquimedes da flutuabilidade, com o seguinte enunciado: "Qualquer corpo total ou parcialmente imerso em um fluído experimenta uma força para cima igual, mas em sentido oposto, ao peso do fluído deslocado". A grosso modo é o empuxo que o corpo sofre.

O estudo dos fluidos despertou interesse em virtude da tentativa de provar que a Terra era redonda. O princípio de Arquimedes explica porque os barcos flutuam e também permite determinar a porcentagem que fica acima da água quando um objeto flutua em um líquido, como, por exemplo, gelo flutuando em água líquida.

No segundo livro, ele calcula as posições de equilíbrio de seções de parabolóides. Por este estudo o casco de embarcações foi padronizado com forma de parabolóide.

Medida do Círculo.

Trata-se de uma obra bem curta, escrita na forma de uma correspondência para Dositeu de Pelúsio, um aluno de Conon de Samos. Nesse trabalho Arquimedes mostra o valor aproximado de π . A aproximação ficou com valores de π entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$.

O Contador de Areia ou O Arenário

Nesse tratado, Arquimedes calcula o número de grãos de areia que caberiam no universo. Usando um sistema de números baseado em potências de miríade, Arquimedes conclui que o número de grãos de areia necessários para preencher o universo é 8.10^{63} (em notação científica moderna). Na verdade ele criou um novo sistema numérico para cálculos. O Contador de Areia ou Psammites é a única obra sobrevivente de Arquimedes em que ele discute suas ideias sobre astronomia e Cosmologia.

Método sobre os Teoremas Mecânicos ou o Método

Esse trabalho, apresenta vinte proposições em dois livros. Aqui ele chegou nos resultados próximos aos atuais em cálculo integral. Sabemos que essa obra estava perdida, mas então ela foi redescoberta no celebrado Palimpsesto de Arquimedes. O palimpsesto inclui a explicação de Arquimedes sobre o "método mecânico", chamado assim porque ele depende da lei da alavanca, descoberta por Arquimedes, e do centro de gravidade, ele descobriu para vários casos especiais. Além disso temos outros trabalhos neste Palimpsesto.

Segundo (MAGNAGHI, 2011), em 1229 um padre chamado Ioannes Mironas decidiu raspar alguns papiros gregos antigos para colocar suas orações, em virtude de não ter material para escrever. Uma desta obras era de Arquimedes e, por sorte, a raspagem não foi bem feita e o texto matemático não foi totalmente eliminado.

Reivel Netz (2007), em sua obra, fala que em 1899 foi feito um catálogo das obras existentes no Metochion, biblioteca do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. No catálogo foi identificado um manuscrito de orações contendo, um pouco apagado, um texto grego de matemática. Tratava-se do livro escrito pelo padre Ioannes Mironas 670 anos antes.

Em 1906, o professor Johan Ludwig Heiberg (estudava matemáticos gregos), ficou sabendo da existência em Constantinopla, de um papiro muito antigo contendo textos gregos de matemática e decidiu invetigar o documento.

Quando Heiberg viu o papiro em Constantinopla, não teve a menor dúvidas e reconheceu facilidade que o texto apagado era trabalho de Arquimedes. Com isso, ele conseguiu identificar uma obra que estava perdida há mais de 2000 anos: O Método Sobre os Teoremas Mecânicos. Nessa raspagem temos outras obras de Arquimedes.

Em 1907, Heiberg publicou o texto em grego e a tradução para o alemão. Pouco tempo depois, o palimpsesto desapareceu novamente e reaparece somente em 1998 para ser leiloado na Christie's de Nova York.

O papiro ainda está em trabalho de desifração de seus textos gregos e ainda estão sendo completado pela equipe multidisciplinar coordenada pelo museu Walters, em Baltimore (Estados Unidos). Estão sendo usados raios X fluorescentes, produzidos pelo Centro do Acelerador Linear da Universidade de Stanford da Califórnia.

Esperamos que, com os recursos e com as novas tecnologias futuras, seja possível conseguir uma interpretação do texto mais completa do que aquela obtida por Heiberg. Essa obra perdida é muito importante para a história, e a matemática perdeu muito durante o período que a mesma estava perdida. (HEATH, 1897).

Problema Bovino.

Esse problema envolve oito incógnitas inteiras relacionadas por sete equações lineares e sujeitas a duas condições adicionais em equações diofantinas simultâneas. Essa obra também estava perdida e foi encontrada em 1773 por Gotthold Ephraim Lessing em um manuscrito grego consistindo de um poema de 44 linhas, na Biblioteca Herzog August, na Alemanha. É destinado a Erastótenes e aos matemáticos de Alexandria. Arquimedes desafia-os a contar o número de bovinos no rebanho do Sol resolvendo uma quantidade de equações de análise diofantinas simultâneas.

Livro de Lemas.

O Livro de Lemas ou Liber Assumptorum é um tratado sobre a natureza dos círculos, onde tem quinze proposições. A cópia mais antiga conhecida do texto está escrita em árabe. Segundo Thomas Little Heath, em trabalhos de Arquimedes, argumenta que este livro não pode ter sido escrito por Arquimedes (obra apócrifa) na sua forma atual, uma vez que ele cita o próprio Arquimedes, o que sugere que foi modificado ou escrito por um outro autor. Talvez o "Lemas"seja baseado em um uma obra mais antiga, agora perdida, escrita por Arquimedes.

Poliedros SemiRegulares.

Existe dúvida se autoria deste trabalho é de Arquimedes, mas Papus de Alexandria garantiu em sua obra que este trabalho é realmente de Arquimedes. Poliedros SemiRegulares são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, exemplo com faces triangulares, pentagonais ou outra em um mesmo sólido. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. Além disso, todo vértice pode ser transformado em outro vértice por uma simetria do poliedro. Existem apenas 13 (treze) poliedros arquimedianos e são todos obtidos por operações sobre os sólidos platônicos. São clasificados ainda como truncados, snubificados e duais.

Stomachion.

Este trabalho é um quebra-cabeças bem complicado de corte e montagem similar a um tangram como um puzze, e o tratado descrevendo-o foi encontrado em forma mais completa no Palimpsesto de Arquimedes (papiro de couro raspado). Arquimedes calculou as áreas de 14 peças que podiam ser reunidas para formar um quadrado. O quebra-cabeças representa um exemplo de problema de combinatória antigo.

Sabemos ainda que Arquimedes construiu um grande sistema planetário que dava os movimentos de alguns planetas do sitema solar, como a lua e os outros cinco planetas conhecidos. Em relação à astronomia Arquimedes foi influênciado pelo seu pai que era um astrônomo.

A construção da bomba, usando canos espiralados ao redor de uma manivela,

Figura 5 – Stomachion. Quebra-cabeças geométrico. (WIKIPEDIA,)

facilitou muito no transporte de água na antiguidade. Essa técnica é usada até os dias de hoje.

Segundo (BOYER, 1974), também acredita-se que a fórmula de Heron da área de triângulo de lados conhecidos é autoria de Arquimedes.

2 O problema da quadratura da parábola

Agora passaremos a falar sobre um problema fantástico, a quadratura da parábola. Esse problema consiste em construir um quadrado que tenha a mesma área do segmento parabólico. Essa tarefa não era tão trivial, pois os únicos recursos usados pelos gregos eram régua e compasso. Arquimedes usou métodos mecânicos e geométricos. Com argumentos lógicos e princípios geométricos, vamos demonstrar que a a área do segmento parabólico é quatro terços da área de um triângulo com a mesma base e a mesma altura. Esse último passo é conhecido como método da exaustão. Com esse resultado a quadratura estava completa pois já era trivial obter um quadrado com mesma área que um triângulo e este passo já era omitido na demonstração, em virtude de ser óbvio de concluir.

Antes de qualquer coisa, é interessante lembrar que, na época de Arquimedes, já existia uma teoria de cônicas. Na verdade, as cônicas eram tratadas com secções de cones (o cone obtido pela rotação de triângulos em torno de um de seus lados como eixo) e não como lugares geométricos, diferente do tratamento da geometria analítica.

O estudo das cônicas começou a partir do problema da duplicação do cubo. Este problema não pode ser resolvido com régua e compasso. Com as cônicas não foi possível realizar a duplicação, mas foram demonstradas propriedades importantes de diversas cônicas, como a parábola. Arquimedes empregava estes resultados em seus estudos de geometria.

Com o conhecimento de cônicas e de geometria euclidiana, Arquimedes tinha bons elementos para realizar a quadratura da parábola, mas era necessário mais. Talvez a Física que em grego significa natureza podia oferecer algo importante para Arquimedes, como veremos a seguir.

2.1 Método das Alavancas

Segundo (SIMMONS, 1987) os primeiros problemas da história do cálculo diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Na verdade, historicamente, o cálculo integral surgiu primiro que o cálculo diferencial. O cálculo integral foi fomentado por necessidades de calcular áreas, volumes e comprimentos de arcos, e o cálculo diferencial foi motivado pelos problemas das retas tangentes às curvas e pelo da velocidade instanânea, esses últimos no século 17 com Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Arquimedes foi talvez, o segundo a publicar um tratado importante de física, pois o primeiro foi Aristóteles. Arquimedes aprimorou um método geométrico chamado método da Exaustão. A grosso modo, o método da exaustão consiste em aproximar a área de uma região curva pela inscrição de um polígono com área conhecida. Falaremos mais sobre este método em uma seção mais adiante. Segundo (EVES, 2002) o método de exaustão é rigoroso, mas estéril. Em outras palavras, uma vez conhecida uma fórmula, o método de exaustão pode se constituir num elegante instrumento para prová-la, mas o método, por si só, não se presta para a descoberta inicial do resultado. Quanto a esse aspecto, o método de exaustão assemelha-se muito ao princípio de indução matemática. Como, então, Arquimedes descobria as fórmulas que tão elegantemente demonstrava pelo método da exaustão.

Para os padrões de demonstração da época, o método da exaustão era rigoroso, no entanto, para esses cálculos de área era necessário algo para deduzir fórmulas para serem provadas com o uso de métodos geométricos. Podemos comparar o método da exaustão com método da indução finita, que serve para mostrar identidades relativas a números. No caso da exaustão é necessário um chute para provar por absurdo.

Na sequência, enunciaremos o método desenvolvido por Arquimedes chamado de método das alavancas. Este método foi importante, pois com ele Arquimedes calculou áreas e volumes, mas estes resultados necessitavam ser provados posteriormente no rigor do método geométrico da exaustão. Nesta época a matemática era baseada na geometria de Euclides onde as únicas ferramentas possíveis são a régua e o compasso. Arquimedes começou a usar as neusis (outras construções sem régua e compasso), no entanto não havia álgebra, números reais e processo por limites.

Agora falaremos um pouco da Física das alavancas, para dar uma ideia rudimentar e simples.

A teoria das alavancas simples foi formulada por Arquimedes e ele dizia:

"Dai-me um ponto de apoio e levantarei a Terra".

Vamos discutir esta frase de Arquimedes. Como seria erguer a Terra. Mas primeiro veja este enunciado.

Princípio: com uma força P aplicada no braço maior b é possível equilibrar uma força maior, R, que esteja na ponta do braço menor a, já que o produto $P \times b$ é igual ao produto $R \times a$.

Ou seja:

$$R \times a = P \times b \tag{2.1}$$

Observe a figura abaixo retirada de (ASSIS, 2008)

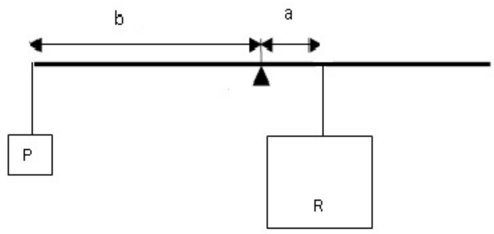

Figura 6 – Método da alavanca. Adaptada de (ASSIS, 2008)

Suponhamos que uma das forças seja o peso de Arquimedes (aproximadamente 60 kg) e a segunda força o peso da terra (aproximatamente 6.10^{24} kg). Suponhamos ainda que a segunda distância seja de 1 metro. Para que o equilíbrio aconteça o tamanho do primeiro braço deveria ser de 100000000000000000000000 metros (10^{23}m). Este tamanho é impressionante e superior ao tamanho da Via Láctea, que é a nossa galáxia, onde o sol está. Claro que esta construção não é viável, e foi montada de maneira grosseira.

Veremos agora, como a lei da alavanca foi importante para a quadratura da parábola.

2.2 Quadratura da parábola pelo método das alavancas

Vamos usar a teoria anterior para fazer esta prova. A ideia é montar uma alavanca com a área do triângulo e com a área da parábola, com isso podemos ver que a relação é que a área do segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo inscrito com mesma base.

Demonstração. A montagem da próxima figura é singular nesta prova. Observe a alavanca teórica e depois seu roteiro de construção.

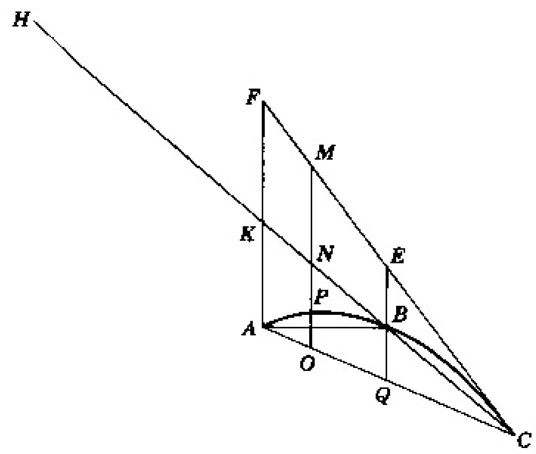

Figura 7 – Quadratura da parábola pela lei da alavanca. (BOYER, 1974)

Na figura 7, temos um segmento de parábola que passa pelos pontos ABC de base $\overline{AC}$. Dentro deste segmento de parábola temos um triângulo ΔABC. Vamos prolongar o segmento $\overline{QB}$ até E que pertence ao segmento da tangente a C, onde Q é o ponto médio da base e B é um tal que a reta tangente que passa por B é paralela a base $\overline{AC}$. Construímos outros dois segmentos, $\overline{AF}$ e $\overline{OM}$, ambos paralelos a $\overline{QE}$. Observamos que O é um ponto arbitrário importante pertencente ao segmento $\overline{AC}$. O segmento $\overline{OM}$ começa em O na base $\overline{AC}$, intercepta a parábola no ponto P e encontra a reta tangente no ponto M (reta tangente que passa pelo ponto C). Analogamente, o ponto F também pertence a reta tangente. Agora, desenhamos a mediana $\overline{CK}$ do triangulo ΔAFC, relativa ao vértice C e ao lado $\overline{AF}$. Esta mediana passa pelos pontos B e N. O triângulo ΔABC está inscrito na parábola e possui uma altura igual a um quarto da altura do triângulo ΔAFC, isto se justifica pelas propriedades da reta tangente (isto já era conhecido por Arquimedes). Consequentemente, a área do triângulo ΔAFC é quatro vezes a do triângulo ΔABC. Vamos prolongar a mediana a partir do ponto K até o ponto H, tal que $\overline{CK} = \overline{KH}$. Estas distâncias devem ser iguais, pois colocaremos um fulcro (apoio) de uma alavanca teórica, exatamente em K.

Mostraremos que a área do segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo ΔABC. Como $\overline{CF}$ é tangente ao ponto C e devido aos conhecimento das cônicas, era conhecido:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \tag{2.2}$$

Como $\overline{CK}$ é a mediana do triângulo ΔAFC e $\overline{AF}$ é paralela a $\overline{OM}$ e usando o teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} \tag{2.3}$$

Obs: Estas duas razões estão demonstradas no apêndice B.

As razões (2.2) e (2.3) implicam em:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \tag{2.4}$$

Logo:

$$\overline{KN} \times \overline{OM} = \overline{KC} \times \overline{OP} \tag{2.5}$$

Lembramos que $\overline{HK} = \overline{KC}$, substituindo em (2.5) obtemos que:

$$\overline{KN} \times \overline{OM} = \overline{HK} \times \overline{OP} \tag{2.6}$$

Com a igualdade em (2.6) podemos perceber a lei da alavanca com fulcro (ponto de apoio do centro da alavanca) no ponto K, ou seja, o peso $\overline{OM}$ colocado a uma distância $\overline{KN}$ do fulcro, equilibra o peso $\overline{OP}$ a uma distância $\overline{KH}$ do fulcro.

Notemos que como o ponto O é um ponto arbitrário pertencente ao segmento $\overline{AC}$, então, qualquer segmento paralelo ao eixo que corta a parábola e o triângulo podem ser postos segundo a mesma condição de equilibrio.

Como a área da parábola é a soma de todos esses segmentos paralelos ao segmento $\overline{QB}$ e, analogamente, a área do triângulo ΔAFC é a soma de todos os segmentos paralelos ao $\overline{QE}$. Logo podemos dizer que se levarmos a parábola até o ponto H equilibrará o triângulo ΔAFC a uma distância de $\frac{1}{3}$ do fulcro, pois o baricentro do triângulo ΔAFC esta em cima da mediana $\overline{CK}$ a uma distância de $\frac{1}{3}$ do ponto K (pois sabemos da geometria plana que $\overline{KG} = \frac{\overline{KC}}{3}$, onde G é o baricentro).

Então podemos concluir que:

$$(A_S) \times \overline{KH} = A(\Delta AFC) \times \frac{\overline{KH}}{3} \tag{2.7}$$

onde A_S é a área do segmento parabólico

Ou seja,

$$A_S = \frac{A(\Delta AFC)}{3} \tag{2.8}$$

e, consequentemente como $A(\Delta AFC) = 4A(\Delta ABC)$, pois a altura de ΔAFC é quarto vezes maior que a altura de ΔABC, mas ambos tem a mesma base. Portanto:

$$A_S = \frac{4A(\Delta ABC)}{3} \tag{2.9}$$

□

Esta prova e outras podemos encontrar em (CONTADOR, 2012). Feito isso, e antes de tudo, agora ainda é necessário provar o resultado anterior geometricamente. Basta então usar o método da exaustão para provar o resultado anterior. Isto será feito a seguir.

2.3 Método da Exaustão

Conforme (BOYER, 1974), dos matemáticos antigos, quem aplicou, de maneira mais elegante, o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida, foi Arquimedes. Uma de suas inúmeras descobertas foi a fórmula para a área de um segmento parabólico.

Estudos mostraram que Eudoxo pode ser considerado o autor desse método que calcula o volume do cilindro. Euclides publicou as demonstrações. Essa teoria foi criada para escapar da teoria dos infinitésimos de Demócrito e atacada por Zenão Eleia em seu paradoxo da tartaruga. Usando a lógica formal, Eudoxo de Cnido, escapou dos infinitesimais, mas quem deu subtilidade ao método foi Arquimedes, mais precisamente quando ele combinou com o método das alavancas.

O método de exaustão consiste em aproximar a área de uma região curva pela inscrição de um polígono com área conhecida e multiplicar o número de lados desse polígono até que a sua área seja a mais próxima possível da área da região curvilínea. Ele não diz que a área da curva é igual à do polígono inscrito, mas que a sua diferença de área pode ser menor que qualquer valor (**Lema de Euclides**), ou seja, podemos fazer esta diferença tão pequena quando quisermos. Como vimos na seção anterior, o método da exaustão é estéril, sozinho. Era necessário o método das alavancas para achar as fórmulas que depois então eram provadas pelo método da exaustão que era o método válido e rigoroso. Depois do lema de Euclides e da dedução das alavancas, ainda era necessário fazer um duplo absurdo com a dedução e encontrar duas contradições perante as proposições de exaustão tidas como verdadeiras, com isso a prova estava terminada. Podemos ter uma boa ideia do método em (AVILA, 1986).

A proposição que serve de base para o método é a seguinte:

"Se, de uma grandeza qualquer, subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará, por fim, a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie". (EVES, 2002)

Duplo absurdo (reductio ad absurdum):

Para demonstrar que $X = Y$, mostra-se que não se pode ter $X < Y$ ou $X > Y$, o que acarreta, forçosamente, que $X = Y$.

Um exemplo abaixo para entendermos o modo operacional do método.

"O volume de um cilindro é a área da base (área do círculo da base A_c) vezes sua altura (h)."

$$V = A_c \times h$$

Demonstração. Primeiramente, vamos supor que $V > A_c \times h$

Logo existe um $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon = \frac{V}{h} - A_c$

Mas pelas proposições do método da exaustão existe um polígono circunscrito à circunferência da base do cilindro tal que a área (P_c) do polígono circunscrito é maior que a da circunferência da base do cilindro, ou seja, sempre tem um ϵ, tal que $P_c - A_c < \epsilon$

(Lema de Euclides da Exaustao).

Então temos que:

$$P_c - A_c < \epsilon = \frac{V}{h} - A_c$$

Logo: $P_c - A_c < \frac{V}{h} - A_c$

O que implica em $P_c < \frac{V}{h}$, ou seja $V > P_c \times h$ que é um absurdo, pois o volume da pirâmide circunscrita ao cilindro não pode ser menor que o volume deste cilindro.

Agora vamos supor $V < A_c \times h$, então desta desigualdade temos que:

$A_c \times h - V > 0$. Como $h > 0$, $A_c - \frac{V}{h} > 0$.

Seja $\epsilon = A_c - \frac{V}{h}$.

Pela propriedade de exaustão temos que a diferença entre a área do círculo da base do cilindro e a área de polígono inscrito (P_I) pode ser menor que qualquer ϵ, ou seja, $A_c - P_I < \epsilon = A_c - \frac{V}{h}$.

Então, $P_I > \frac{V}{h}$, o que implica em: $P_I \times h > V$, que é um absurdo, em virtude do volume do sólido inscrito não poder ser maior do que o circunscrito. Logo, concluímos que $V = A_c \times h$.

□

2.4 Quadratura pelo método da exaustão

No início de sua obra sobre a quadratura da parábola, Arquimedes escreve uma carta a Dositeu, onde ele afirma usar mecânica antes dos argumentos geométricos. Abaixo esta um fragmento de sua carta.

> "Um certo teorema geométrico que não investigado antes e que foi agora investigado e que eu descobri, primeiramente, por meio da mecânica e que exibi, em seguida, por meio da geometria". (CARVALHO, 2012).

O método da exaustão, quando usado como método para calcular aproximações, aritmética computacional está muito próximo do que hoje se faz em análise numérica, por outro lado, foi também um importante precursor do desenvolvimento do cálculo integral por Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Para isso vamos enunciar algumas proposições usadas por Arquimedes neste cálculo. Vamos colocar apenas as proposições essenciais para a quadratura da parábola, os outros lemas de quadratura e suas respectivas demonstrações encontramos em (HEATH, 1897).

Abaixo a proposição 19 do livro de Arquimedes, a numeração abaixo segue conforme o livro de Arquimedes, conforme (CARVALHO, 2012).

Proposição 19.

Sejam P o Vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola. O ponto no segmento parabólico que passa por $qrPRQ$ e R, no qual a tangente é paralela a PQ. Seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta Qq, um segmento paralelo à tangente por P.

Então: $\overline{PV} = \frac{4}{3}\overline{RM}$ (Ver a figura 8).

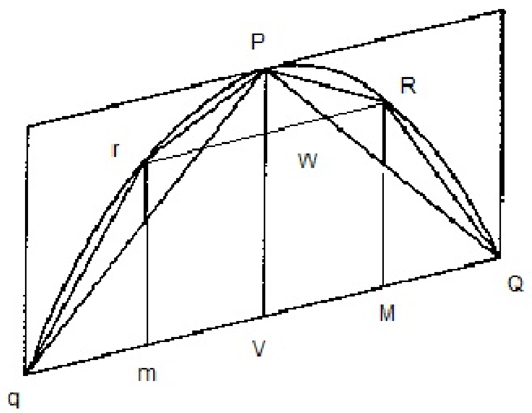

Figura 8 – Triângulos inscritos. Imagem adaptada de (CARVALHO, 2012)

Prova:

A prova desta proposição encontramos em (CARVALHO, 2012).

Proposição 21.

Sejam $\overline{Qq}$ a base e P o vértice de um segmento de parábola PQq. Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a $\overline{PQ}$ (Figura 8). Então:

$$A(PQq) = 8A(PRQ) \tag{2.10}$$

Demonstração:

A prova desta proposição encontramos em (CARVALHO, 2012).

Agora vamos mostrar como Arquimedes efetua a quadratura da parábola, através do método da exaustão. Suponhamos que a área do triângulo ΔPQq é T, isto é, $A(\Delta PQq) = T$. Pela Igualdade (2.10), segue que:

$$T = A(PQq) = 8A(PRQ) \tag{2.11}$$

e

$$T = A(PQq) = 8A(Prq) \tag{2.12}$$

Que implica em:

$$A(PRQ) + A(Prq) = \frac{T}{4} \tag{2.13}$$

Observação: os triângulos ΔPRQ e ΔPrq são construídos sobre os lados de ΔPQq.

Podemos então continuar este processo e construir na diferença entre a parábola e o polígono obtido pela união das áreas dos triângulos ΔPQq, ΔPRQ e ΔPrq, o que fornece áreas $\frac{T}{4^2}$, $\frac{T}{4^3}$, ... e assim por diante.

A área do segmento parabólico é a soma infinita destas áreas.

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + ... = \frac{T}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4T}{3} \tag{2.14}$$

Pois temos uma soma infinita de uma progressão geométrica de primeiro termo T e razão $\frac{1}{4}$.

Mas Arquimedes, porém, não conhecia somas infinitas. As somas infinitas eram paradoxos, como o paradoxo da tartaruga de Zenão. Logo, Arquimedes usou a proposição abaixo:

Proposição 23.

Dada a série finita de áreas, A, B, C, D, ..., Y, Z, das quais A é a maior, e cada uma é quatro vezes sua sucessora, então:

$$A + B + C + D + ... + Y + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A \tag{2.15}$$

Demonstração. Sabemos que os trabalhos de matemáticos de Aristoteles são bem complicados, pois se trata de trabalhos direcionados a profissionais e não a estudantes. Em virtude disso, apresentamos uma demonstração um pouco diferente da que Arquimedes utilizou, mas a ideia essencialmente é de Arquimedes, conforme (CARVALHO, 2012).

Sejam b, c, d, ... áreas tais que

$$b = \frac{1}{3}B$$
$$c = \frac{1}{3}C$$
$$d = \frac{1}{3}D$$
$$...y = \frac{1}{3}Y$$
$$z = \frac{1}{3}Z$$

Somando os resultado de $B + b$, $C + c$,..., $Z + z$, temos que:

$$B + b = B + \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}A$$
$$C + c = \frac{1}{3}B$$

$$D + d = \frac{1}{3}C$$
$$...$$
$$Z + z = \frac{1}{3}Y$$

Somando todas as equações, obtemos que:

$$B + C + D + ... + Y + Z + b + c + d + ... + y + z = \frac{1}{3}(A + B + C + D + ... + Y) \quad (2.16)$$

Mas sabemos que:

$$b + c + d + ... + y = \frac{1}{3}(B + C + D + ... + Y) \quad (2.17)$$

Subtraindo (2.17) de (2.16) temos:

$$B + C + D + ... + Y + Z + z = \frac{1}{3}A \quad (2.18)$$

Somando A em ambos lados de (2.18), temos que:

$$A + B + C + D + ... + Y + Z + \frac{Z}{3} = \frac{4}{3}A \quad (2.19)$$

□

Arquimedes aplicou este resultado a área do triângulo ΔPQq da figura 8, e obteve:

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + ... + \frac{T}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4T}{3} \quad (2.20)$$

Então com esse resultado, passa-se para a última proposição, que é a prova final do teorema da quadratura.

Proposição 24.

Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele. (figura 8)

Chamando a área a encontrar de S, vamos mostrar que $S = \frac{4T}{3}$.

Demonstração. Vamos supor primeiro que $S > \frac{4T}{3}$.

Então, deve existir n triângulos tais que a soma de suas áreas.

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + ... + \frac{T}{4^{n-1}} = A$$

seja inferior a S e superior a $\frac{4T}{3}$.

Mas como

$$\frac{4T}{3} - \frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}} = A$$

Temos uma contradição, pois a soma seria inferior a $\frac{4T}{3}$, contrariando a hipótese que A é superior a $\frac{4T}{3}$.

Agora vamos supor que $S < \frac{4T}{3}$ e considere a diferença $\frac{4T}{3} - S$. Pela proposição de exaustão deve haver um m, inteiro tal que a área

$$T_m = \frac{T}{4^{m-1}}$$

seja inferior a esta diferença. Por outro lado,

$$T_m > \frac{T_m}{3} = \frac{4T}{3} - T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

e

$$\frac{4T}{3} - S > T_m > \frac{4T}{3} - T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

portanto:

$$S < T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

que é uma contradição, pois S não pode ser menor que a área do polígono inscrito.

Logo, a área do segmento parabólico é $\frac{4T}{3}$ como queríamos demonstrar.

□

2.5 Quadratura da parábola por integração de Riemann

Nesta seção vamos mostrar com a integral moderna as demonstrações das proposições de Arquimedes da quadratura da parábola, essa demonstração é muito interessante, pois ela vai ao encontro do resultado da quadratura que Arquimedes fez.

Justificativa do teorema por meio do cálculo integral.

Demonstração. Para realizar este cálculo vamos usar a figura 9.

Vamos fazer a quadratura por meio de integrais. Na figura 9 abaixo, temos o exemplo da clássica parábola $y = x^2$. Para isso observe o trapézio ABX_BX_A, e também lembre que a área abaixo de uma curva é calculada por uma integral. Na figura 9, temos que a componente da abscissa de C é a média aritmética das abscissas de A e B. Se descontarmos da área do trapézio a área abaixo da parábola teremos então a área do segmento parabólico (A_S). Ou seja, temos que:

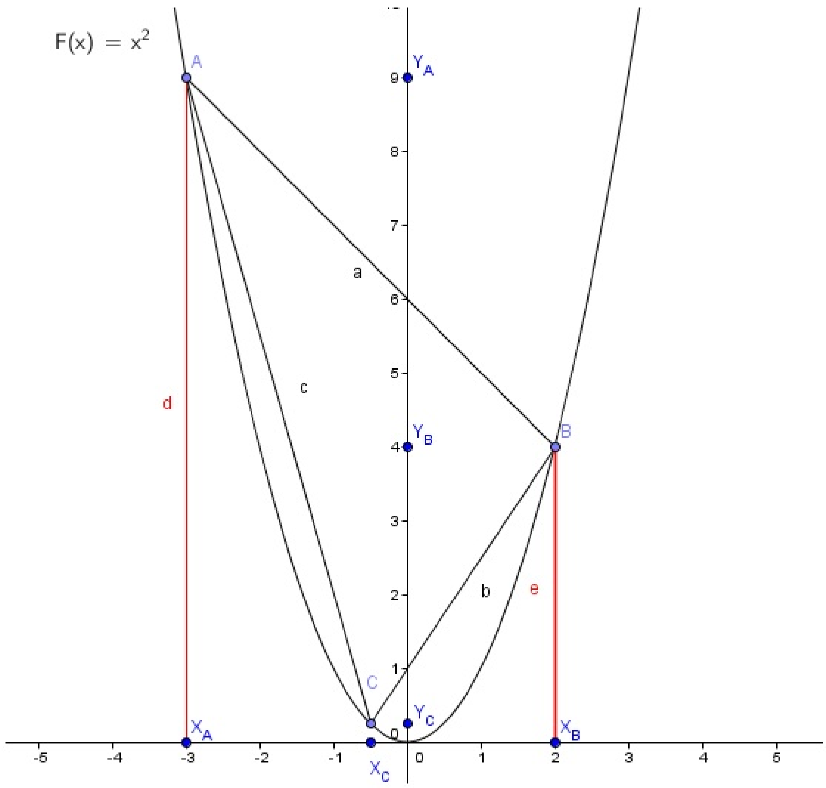

Figura 9 – Gráfico $y = x^2$

$$A_S = A(ABX_BX_A) - \int_{X_A}^{X_B} x^2 dx$$

Pela área do trapézio temos que

$$A_S = (Y_A + Y_B)\frac{(X_B - X_A)}{2} - \frac{(X_B^3 - X_A^3)}{3}$$

Como Y_A e Y_B pertencem ao gráfico de $y = x^2$ parábola temos:

$$A_S = (X_A^2 + X_B^2)\frac{(X_B - X_A)}{2} - \frac{(X_B^3 - X_A^3)}{3}$$

ou seja,

$$A_S = \frac{(X_B^3 - X_A^3 + 3X_A^2X_B - 3X_AX_B^2)}{6}$$

A área do triângulo ΔABC é dada por

$$A(ABC) = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix} \right|. \tag{2.21}$$

Novamente, Y_A e Y_B pertencem ao gráfico de $y = x^2$, o ponto C é ponto médio de$A$ e B em relação ao eixo X, substituíndo em (2.21) obtemos que

$$A(ABC) = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_A & X_A^2 & 1 \\ X_B & X_B^2 & 1 \\ \frac{X_A+X_B}{2} & \frac{(X_A+X_B)^2}{4} & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{8}(X_A^3 - X_B^3 - 3X_A^2X_B + 3X_AX_B^2) \right|. \tag{2.22}$$

Como $X_A < 0$ e $X_B > 0$, então em (2.22) obtemos que

$$A(ABC) = \left| \frac{1}{8}(X_B^3 - X_A^3 + 3X_A^2X_B - 3X_AX_B^2) \right|,$$

logo

$$A_S = \frac{8}{6}A(ABC) = \frac{4}{3}A(ABC).$$

□

3 As contribuições de Arquimedes para o cálculo de áreas abaixo de curva de um gráfico de uma função

Neste capítulo mostraremos como Arquimedes calculou a área abaixo da curva $y = x^2$, de 0 até um b (inteiro), no eixo X. Ele mostrou que esta área é exatamente um terço da área de um retângulo com a mesma base e altura b^2. Para alcançar este resultado Aquimedes empregou mais uma vez o método da exaustão. Além disso, vamos comparar os resultados obtidos por Arquimedes com os resultados de outros matemáticos, como Pascal, Fermat e Riemann, que obtiveram resultados similares, mas com séculos de novos conhecimentos matemáticos.

3.1 Arquimedes e o cálculo da área abaixo da parábola

Mostraremos o cálculo da área abaixo do gráfico da função $y = x^2$ usando o método da exaustão.

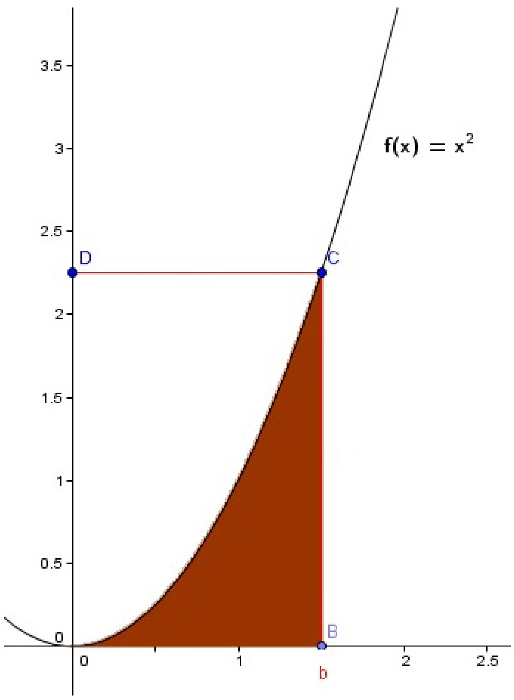

Figura 10 – Gráfico de $y = x^2$ e do retângulo de base b e altura b^2

Observamos que x é um ponto arbitrário na base da figura 10. Definimos x como a distância do ponto $(x, 0)$ até à origem $(0, 0)$. A distância do ponto $(x, 0)$ até a parábola é x^2.

Chamamos de A_p a área abaixo do gráfico da parábola $y = x^2$, com $x \in [0, b]$.

Na figura 11 aproximamos A_p pela soma da área por retângulos interiores a região abaixo do gráfico da parábola. Na figura 12 aproximamos A_p pela soma da área por retângulos que contém a região abaixo do gráfico da parábola.

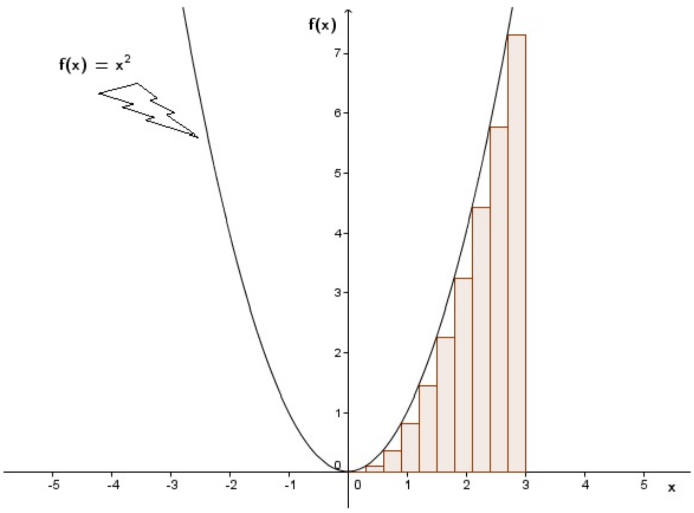

Figura 11 – Aproximação da área com retângulos interiores.

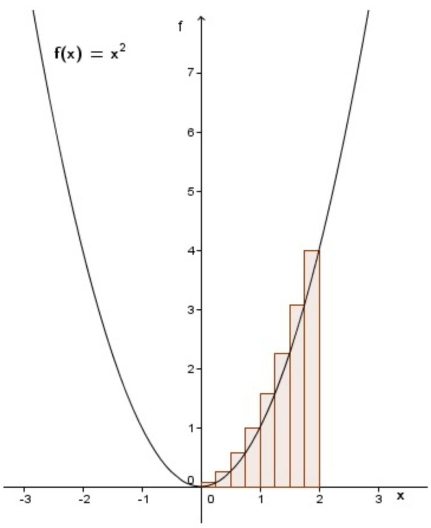

Figura 12 – Aproximação da área com retângulos exteriores.

Na figura 11 Arquimedes mostrou o resultado surpreendente da área abaixo da parábola é um terço da área do retângulo de base b e altura b^2, ou seja $A_p = \frac{b^3}{3}$. Apresentaremos agora a demonstração de Arquimedes.

Vamos particionar o intervalo $[0, b]$ em n subintervalos, ou seja $[0, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$, onde $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, de comprimento $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b}{n}$ e $x_k = \frac{kb}{n}$, com $k = 0, 1, 2, ..., n$.

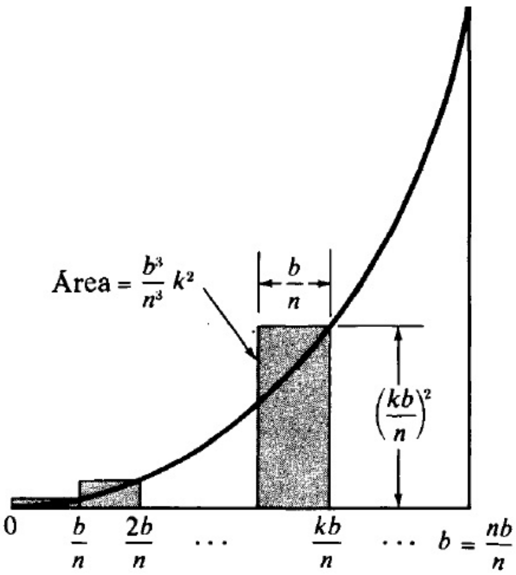

Figura 13 – Aproximação da área com retângulos exteriores. (APOSTOL, 2004)

Sabemos que a área procurada é maior que a soma das áreas dos retângulos interiores e menor que a soma das áreas dos retângulos exteriores.

Se escolhermos uma abcissa $x_k = \frac{kb}{n}$ e a base Δx_k, o retângulo R_k terá base Δx_k e altura $(\frac{kb}{n})^2$

A área de R_k é dada por

$$A(R_k) = \frac{b}{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{k^2 b^3}{n^3}.$$

Seja S_n a soma das áreas dos retângulos exteriores, ou seja

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k) = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + ... + n^2). \tag{3.1}$$

Alogamente, escolhemos a base Δx_k do retângulo de altura $(x_{k-1})^2 = \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2$.

A área de R_k é dada por:

$A(r_k) = \frac{b}{n}(x_{k-1})^2$.

A soma das áreas dos retângulos interiores é

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} A(r_k) = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2]. \tag{3.2}$$

Arquimedes utilizou a seguinte dupla desigualdade

$$[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2] < \frac{n^3}{3} < (1^2 + 2^2 + ... + n^2). \tag{3.3}$$

O matemático Grego sabia que esta dupla desigualdade valia para $n \geq 1$. Esta dupla desigualdade pode ser provada por indução matemática.

Agora basta multiplicar (3.3) por $\frac{b^3}{n^3}$ e obtemos que

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \tag{3.4}$$

para qualquer $n \geq 1$.

Sabemos também do método da Exaustão que o valor da área (A) abaixo da parábola está entre os valores de s_n e S_n, isto é,

$$s_n < A < S_n \tag{3.5}$$

para qualquer $n \geq 1$.

Da desigualdade esquerda de (3.3) adicionando n^2 temos que

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

multiplicamos ambos os lados por $\frac{b^3}{n^3}$ e obtemos que

$$S_n < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{3.6}$$

Analogamente usando o lado direito de (3.3), podemos subtrair também n^2 e obter o seguinte resultado:

$$\frac{n^3}{3} - n^2 < 1^2 + 2^2 + ... + n^2 - n^2$$

Multiplicamos ambos os lados da por $\frac{b^3}{n^3}$ e obtemos que:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n \tag{3.7}$$

Das desigualdades (3.5), (3.6) e (3.7), concluímos que

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \tag{3.8}$$

para qualquer intero $n \geq 1$.

Agora vamos prova que $\frac{b^3}{3}$ é o único número que satisfaz esta desigualdade (3.4).

Demonstração. Usaremos o duplo absurdo.

Suponhamos que $A > \frac{b^3}{3}$.

Então pela desigualdade (3.8) podemos escrever que $A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n}$.

Como $A - \frac{b^3}{3} > 0$, segue que:

$n < \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}}$ para todo o $n \geq 1$, mas a desigualdade não vale para $n \geq \frac{b^3}{A - \frac{b^3}{3}}$, logo $A > \frac{b^3}{3}$ é um absurdo.

De maneira análoga chegamos que $A < \frac{b^3}{3}$ é uma contradição.

Logo,

$$A = \frac{b^3}{3}$$

ou seja, a área abaixo da parábola limitada pelo eixo x e as retas $x = 0$ e $x = b$ é um terço da área do retângulo de base b (mesma base) e altura b^2.

□

Passado quase 2000 anos da descoberta de Arquimedes que a área abaixo de um segmento parabólico é um terço do retângulo com base b e altura b^2, Bonavetura Cavalieri (APOSTOL, 2004) estudou o cálculo da área limitada pela curva x^k, $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq x \leq b$. Utilizando o método dos indivisíveis, Cavalieri provou que se $k \in [0, 9]$ a área de baixo do gráfico $y = x^k$, entre as retas $x = b$, $x = 0$ e o eixo x é dada por $A_k = \frac{b^{k+1}}{k+1}$ (APOSTOL, 2004).

Vamos apresentar a demonstração de Pascal e Fermat que mostram que $A_k = \frac{b^{k+1}}{k+1}$ é valida para todo k natural. Mostraremos também a integral de Riemann que é uma generalização deste resultado.

3.2 Cálculo de Pascal

Pascal dividiu o intervalo $[0, b]$ em n partes iguais. considerando S_n como soma das áreas dos retângulos de base $\frac{b}{n}$ e altura $\frac{(ib)^k}{n}$ para $i = 0, 1, 2...$, conforme a figura 14. Ou Seja,

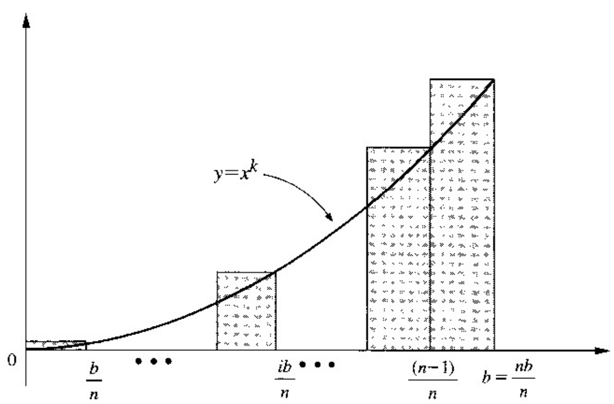

Figura 14 – Gráfico de $y = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, por excesso. (GUIDORIZZI, 2001)

$$S_n = \frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^k + \frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^k + ... + \frac{b}{n}\left(\frac{nb}{n}\right)^k \tag{3.9}$$

isto é,

$$S_n = \frac{b^k + 1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k) \tag{3.10}$$

Chamando a soma $S_k = (1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k)$, de (3.10) segue que:

$$S_n = b^{k+1}\frac{S_k}{n^{k+1}}. \tag{3.11}$$

Conforme (APOSTOL, 2004) para chegar ao valor da área basta tomar n suficientemnete grande em (3.7), ou seja, calcular o limite $\frac{S_k}{n^{k+1}}$ quando n tende ao infinito. Mas para isso Pascal utilizou a identidade de Pascal que estabele uma relação com $S_1, S_2, ..., S_k$.

Identidade de Pascal:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C^1_{k+1}S_k + C^2_{k+1}S_{k-1} + ... + C^{k-1}_{k+1}S_2 + C^k_{k+1}S_1 + n \tag{3.12}$$

C^p_n é a combinação de n elementos tomados p a p.

Demonstramos esta identidade no apêndice D.

Dividindo ambos os membros de (3.12) por n^{k+1}, segue que:

$$\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = \frac{1+n}{n^{k+1}} + C^1_{k+1}\frac{S_k}{n^{k+1}} + C^2_{k+1}\frac{S_{k-1}}{n^{k+1}} + ... + C^{k-1}_{k+1}\frac{S_2}{n^{k+1}} + C^k_{k+1}\frac{S_1}{n^{k+1}}. \tag{3.13}$$

Observe que:

$$\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \tag{3.14}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = 1. \tag{3.15}$$

Substituindo (3.10) em (3.9) e aplicando limite em ambos os lados de (3.9), de (3.11) podemos observar que:

$\frac{S_{k-1}}{n^{k+1}}, \frac{S_{k-2}}{n^{k+1}}, ..., \frac{S_2}{n^{k+1}}$, e $\frac{S_1}{n^{k+1}}$ vão todos para zero quando n vai para o infinito.

No entanto $\frac{S_k}{n^{k+1}}$ tende a $\frac{1}{k+1}$ quando n vai para o infinito e como $C^1_{k+1} = k+1$

Segue que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b^{k+1}\frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{b^{k+1}}{k+1}. \tag{3.16}$$

Esta foi uma aproximação por excesso. Para a aproximação por falta o procedimento é analogo, usando a figura 15.

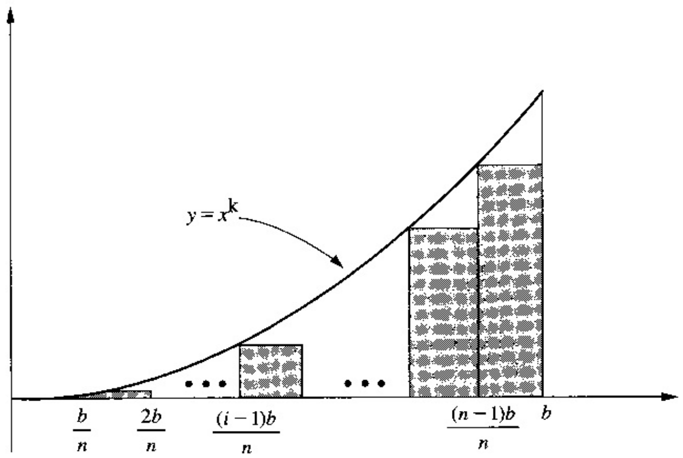

Figura 15 – $y = x^k$, por falta. (GUIDORIZZI, 2001)

3.3 Cálculo integral de Fermat

Mostraremos, nesta seção, como Fermat mostrou que a área abaixo do gráfico $y = x^k$, $x \in [0, b]$, entre as retas $x = 0$, $x = b$ e o eixo x é $\frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}$. Fermat considerou um número E, tal que $0 < E < 1$, e dividiu o intervalo $[0, b]$ em infinitos subintervalos da seguinte forma:

$$...[bE^i, bE^{i-1}], ..., [bE^3, bE^2], [bE^2, bE], [bE, b]$$

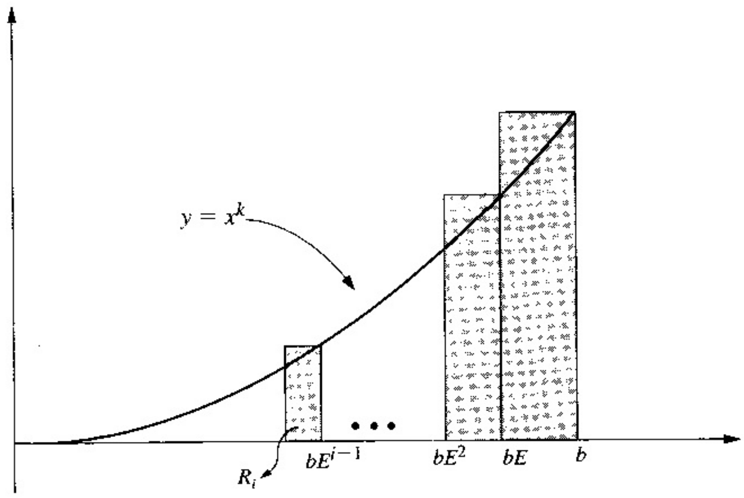

Figura 16 – $y = x^k$, Aproximação por exceso. (GUIDORIZZI, 2001)

Observe que $b, bE, bE^2, bE^3, bE^{i-1}, bE^i...$ é uma progressão geométrica de razão E, onde E^i tende a zero quando i vai para infinito, pois $0 < E < 1$.

A área do retângulo R_i é descrita por:

$$R_i = \left\{(x, y); bE^i \leq x \leq bE^{i-1}, 0 \leq y \leq (bE^{i-1})^k\right\}$$

A base do retângulo é $bE^{i-1}(1 - E)$, e a altura do retângulo é $b^k E^{k(i-1)}$, então a área é:

A área $A(R_i) = bE^{i-1}(1 - E)b^k E^{k(i-1)} = b^{k+1}(1 - E)(E^{k+1})^{i-1}$, com i=1,2,3...

Temos uma sequência $A(R_1), A(R_2), ...$ onde $A(R_i)$ está em progressão geométrica com razão E^{k+1} e primeiro termo $b^{k+1}(1 - E)$. Usando a soma da progressão geométrica infinita chegamos a área total da soma infinita de todos o retângulos por excesso, conforme abaixo:

$$A = \frac{b^{k+1}(1 - E)}{1 - E^{k+1}} = \frac{b^{k+1}(1 - E)}{(1 - E)(1 + E + E^2 + E^3 + ... + E^k)} = \frac{b^{k+1}}{1 + E + E^2 + E^3 + ... + E^k}.$$

Sabemos que E está entre zero e um, mas quanto mais próximo E é de 1, mais fica eficaz a aproximação por excesso. Neste resultado acima Fermat considerou $E = 1$ e chegou no resultado procurado abaixo:

$$A = \frac{b^{k+1}}{1 + E + E^2 + E^3 + ... + E^k} = \frac{b^{k+1}}{k+1}.$$

A aproximação por falta é feita de forma análoga.

3.4 Integral de Riemann

A integral de Riemann foi a primeira teoria de integração e é considerada a definição mais simples de integral, mas é uma definição rigososa. O nome vem em homenagem a Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático da escola alemã. Para entendermos a integral de Riemann vamos pensar no problema de calcular a área S da figura 17, onde S é a região fechada e delimitada por uma curva, gráfico de uma função f não negativa, pelo eixo X e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

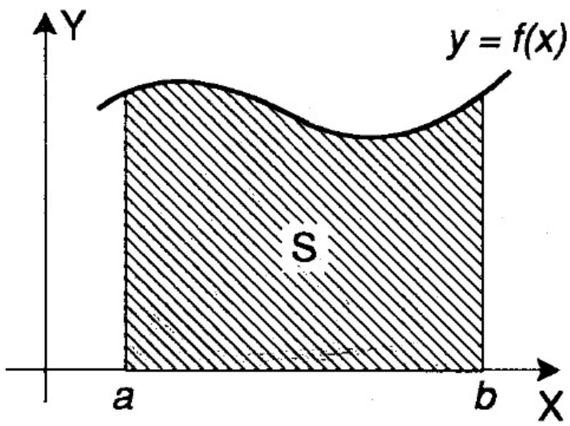

Figura 17 – Área S (FLEMMING, 2000)

Consideramos uma partição P do intervalo $[a, b]$, ou seja, $[a, b] = [x_0 = a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n = b]$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$.

A amplitude do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ é $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Escolhemos um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.

O retângulo R_i de base Δx_i e altura $f(c_i)$ tem área $A(R_i) = \Delta x_i f(c_i)$, $i = 1, 2, 3..., n$, ver figura 18.

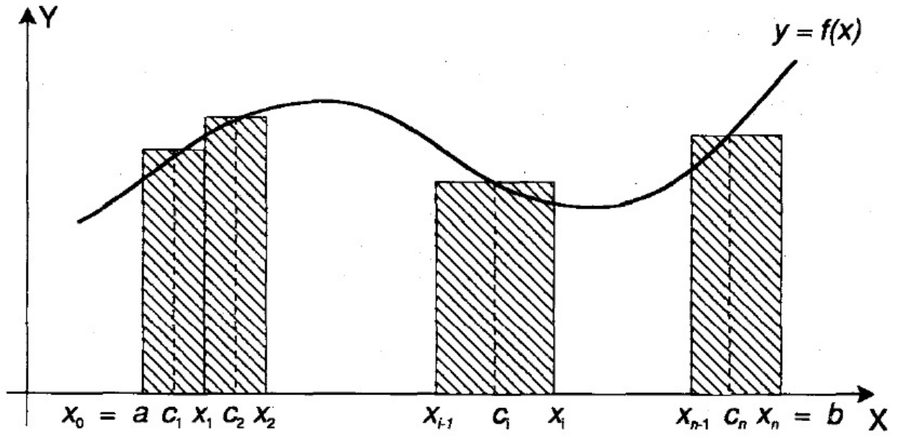

Figura 18 – Retângulos da soma de Riemann. (FLEMMING, 2000)

Seja

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} A(R_i) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{3.17}$$

S_n é chamada soma de Riemann de f relativa a partição P.

Definimos a área de S como:

$$A = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{3.18}$$

Riemann observou que quando Δx_i começa a diminuir chegamos cada vez mais próximo do valor da área. Atravéz de limites, ele definiu:

$$A(S) = \lim_{máx \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \tag{3.19}$$

A simbologia em (3.19) do lado esquerdo se deve a Cauchy, chamada de "integral definida"de f no intervalo $[a, b]$, onde a é o limite inferior de integração e b é o limite superior de integração.

A integral em (3.19) é o limite da soma de Riemann (3.17) de f relativa a partição P. A grosso modo, quanto mais fina a partição P, ou seja, quanto mais pontos, melhor será a aproximação da área. Contudo, o significado preciso a cerca do que significa "cada vez mais fino"é o mais importante. Abaixo temos a definição precisa da integral.

Definição:

Seja f uma função contínua no intervalo [a,b], esta função é integrável a Riemann se para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro N tal que:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right| < \epsilon$$

para todo $n > N$ (propriedade Arquimediana) e toda escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Observe que essa definição é muito parecida com o Lema de Euclides da Exaustão.

Exemplo 1: Vamos calcular, segundo a Riemann a área limitada pelo gráfico da curva $y = x^2$, a reta $x = 2$ e os eixos coordenados.

Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[0, 2]$, em que $x_i = \frac{2}{n}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n}$, e escolhemos $c_i = \frac{i2}{n} \in [x_i, x_{i-1}]$, $i = 1, 2, .., n$.

A soma de Riemann de f relativa a partição a P é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i2}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$

isto é,

$$S_n = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Por (3.19) e observe que quando $\Delta x_i \to 0, n \to \infty$, e S é a região.

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{8}{3}u.a$$

Onde usamos o fato que:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Essa demonstração está no apêndice A.

Nos livros de Cálculo como Simmons 1987 (Cálculo com geometria analitica) e Femming 2000 (Cálculo A) ou outro livro de cálculo você pode conhecer as técnicas de integração para cálcular áreas com integrais definidas.

Exemplo 2: Calcular pela soma de Riemann, a área da região S delimitada pela curva $y = x^3$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 1$.

Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[0, 1]$,em que $x_i = \frac{1}{n}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, e escolhemos $c_i = \frac{i}{n} \in [x_i, x_{i-1}]$. Assim, temos que $f(c_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^3$, onde $i = 1, 2, .., n$.

A soma de Riemann de f relativa a partição a P é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$$

Por (3.19).

$$A(S) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}u.a$$

Na última identidade usamos o fato que:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Essa demonstração está no apêndice A.

4 Estimativas de Erros

Neste capítulo vamos calcular valores aproximados das áreas usando o método de Arquimedes, ou seja vamos fazer divisões pequenas do intervalo e mostrar que o resultado é próximo do real e ainda mostrar o erro que temos no uso deste procedimento. O importante é sabermos que se aumentarmos o número de divisões e somarmos mais retângulos o resultado é mais próximo do real.

Por exemplo, vamos pegar as curva $y = x^2$ e $y = x^3$ e calcular a área com retângulos exteriores e interiores e ver os erros comparando com resultado exato.

4.1 Estimativa de erros da área abaixo da parábola

Em uma partição com $t_i = a + ih$, com $i = 1, ..., n$ e $h = \frac{b-a}{n}$, onde $t_i \in [a, b]$, temos que a soma supreior, com relação a partição é dada por

$$S_n = h \times \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \tag{4.1}$$

e a soma inferior com relação a partição fica

$$s_n = h \times \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \tag{4.2}$$

onde $\sup f(x)$ é o supremo de $f(x)$ e $\inf f(x)$ é o ínfimo de $f(x)$, no referido intervalo.

Note que, se f for contínua e crescente, então as equações (4.1) e (4.2) ficam, respectivamente,

$$S_n = h \times \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

e

$$s_n = h \times \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})$$

É fácil ver que, para qualquer função integrável, temos que para a área abaixo do gráfico, denotada por A, vale que

$$s_n \leq A \leq S_n \tag{4.3}$$

Deste modo, para a função $f(x) = x^2$ limitada pelo eixo x e as retas $x = 0$ e $x = b$

$S_n = \frac{b}{n} \times \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b}{n} \times \left(\frac{b}{n}\right)^2 \times \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$

Da mesma forma e conforme o capítulo 3 nas equações (4.1) e (4.2) temos que:
$s_n = \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2]$

Vamos usar o fato de que $(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e que $[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2] = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (ver a demonstração no apêndice A).

portanto, como $A = \frac{b^3}{3}$, temos que as estimativas de erro em termos de n são:

$$\left|\frac{b^3}{3} - S_n\right| = \left|\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right| = \left|\frac{b^3}{6}\left(-\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right| \tag{4.4}$$

$$\left|s_n - \frac{b^3}{3}\right| = \left|\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{b^3}{3}\right| = \left|\frac{b^3}{6}\left(\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right| \tag{4.5}$$

Antes de fazer a estimativa de erro observe o teorema abaixo:

Teorema: Uma função f contínua é integrável a Riemann se, e somente se, existir uma partição P de $[a,b]$ tal que, para qualquer que seja o $\epsilon > 0$.

$$|s_n - S_n| < \epsilon \tag{4.6}$$

Demonstração. Para está prova veja (GUIDORIZZI, 2001) no lema de integrabilidade de funções contínuas apêndice 4 página 523. □

Neste trabalho vamos realizar algumas provas particulares como a seguir.

A função $f(x) = x^2$ limitada pelo eixo x e as retas $x = 0$ e $x = b$ é integrável a Riemann, pois a soma de Riemann existe.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$, temos que:

$|s_n - S_n| = \left|\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right| = \left|\frac{b^3}{n}\right|$
Quando $n \to \infty \Rightarrow |s_n - S_n| = 0 < \epsilon$

Portanto a função é integrável a Riemann. □

Por exemplo, se escolhermos $n = 5$ e usando (4.3)

$$\frac{(1^2+2^2+3^2+4^2)b^3}{125} < A < \frac{(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)b^3}{125}$$

Então:

$$\frac{30b^3}{125} < A < \frac{55b^3}{125}$$

Escolhendo o ponto médio das soma das áreas dos retângulos exteriores e da soma dos retângulos interiores, em virtude deste ponto pertencer ao intervalo (s_n, S_n), então temos que:

$$\frac{s_n + S_n}{2} = \frac{(30+55)b^3}{2 \times 125} = 0,34b^3$$

que é uma boa aproximação.

Agora vamos achar o erro com b=1,

$$\left|\frac{1}{3} - 0,34\right| = 0,00666666........$$

que é uma boa aproximação para a área da parábola.

Se aumentarmos o valor de n, por exemplo, $n = 30$, temos que

a soma inferior para é dada por

$$s_n = \frac{(1^2+2^2+3^2+...+29^2)b^3}{30^3} = \frac{29(30)(59)b^3}{6 \times 27000} = \frac{8555b^3}{27000}$$

a soma superior é:

$$S_n = \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 29^2 + 30^2)b^3}{30^3} = \frac{30(31)(60)b^3}{6 \times 27000} = \frac{9455b^3}{27000}$$

logo

$$|s_{30} - S_{30}| \leq |s_{30} - A| + |A - S_{30}| \approx 0,67b^3$$

Então basta escolher um $\epsilon = 0,67b^3$.

Substituindo em (4.3)

$$\frac{8555b^3}{27000} < A < \frac{9455b^3}{27000}$$

Vamos obter o ponto médio:

$$\frac{s_n + S_n}{2} = \frac{8555 + 9455(b^3)}{54000} = \frac{18010b^3}{54000} = b^3 \times (0,33351...)$$

que representa um erro bem pequeno, com b=1.

$\left|\frac{1}{3} - 0.33351\right| = 0.000174....$

Para $n = 1000$; $s_n = 0,33283335b^3$ e $S_n = 0,33383335b^3$

Fazendo a média aritmética temos uma boa aproximação igual a $0,3333335b^3$.

4.2 Estimativa de erros da área abaixo da curva $y = x^3$

Exemplo 2: Calcule a área abaixo da curva $y = x^3$ limitada pelo eixo X e as retas $x = 0$ e $x = b$.

A área do retângulo R_i é:

$$R_i = \frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^3$$

neste caso temos que,

$S_n = \frac{b^4}{n^4}(1^3 + 2^3 + ... + n^3) = \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

e

$s_n = \frac{b^4}{n^4}[1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3] = \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$

Sabemos que $A = \frac{b^4}{4}$

A função $y = x^3$ limitada pelo eixo x e as retas $x = 0$ e $x = b$ é integrável a Riemann.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$, temos que:

$|s_n - S_n| = \left|\frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 - \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\right| = \left|-\frac{b^4}{n^3}\right|$

Observe que $n \to \infty \Rightarrow |s_n - S_n| = 0 < \epsilon$

Portanto a função é integrável a Riemann. □

Vamos fazer a estimativa de erro em função de n. Temos que

$$|A - S_n| = \left|\frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\right| = \left|\frac{b^4}{4}\left(-\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right| \tag{4.7}$$

e

$$|s_n - A| = \left|\frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 - \frac{b^4}{4}\right| = \left|\frac{b^4}{4}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right| \tag{4.8}$$

Por exemplo, se escolhermos $n = 5$ e usando (4.3), temos:

$$\frac{(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)b^4}{625} < A < \frac{(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3)b^4}{625};$$

então:

$$\frac{100b^4}{625} < A < \frac{225b^4}{625}$$

Escolhendo o ponto médio das soma das áreas dos retângulos exteriores e da soma dos retângulos interiores.

$$\frac{s_n + S_n}{2} = \frac{(100 + 225)b^4}{2 \times 625} = 0,26b^4$$

que é uma boa aproximação.

Agora vamos achar o erro, com b=1.

$\left|\frac{1}{4} - 0,26\right| = 0,01$

Vamos usar $n = 30$ agora para ver a melhora da aproximação.

Sabemos que a soma dos n primeiros cubos é:

$$[1^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3] = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

Então temos que a soma inferior é:

$$s_n = [1^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + ... + (28)^3 + 29^3]\frac{b^4}{30^4} = \frac{(29)^2(30)^2b^4}{4 \times 30^4} = \frac{189225}{30^4}$$

e a soma superior é

$$S_n = [1^3 + 2^3 + 3^3 + 3^3 + ... + (29)^3 + 30^3]\frac{b^4}{30^4} = \frac{(30)^2(31)^2 b^4}{4 \times 30^4} = \frac{216225}{30^4}$$

Logo,

$$|s_{30} - S_{30}| \leq |s_{30} - A| + |A - S_{30}| \approx 0,501b^4$$

Então basta escolher um $\epsilon = 0,501b^4$.

$$\frac{189225b^4}{810000} < A < \frac{216225b^4}{810000}$$

Vamos achar o ponto médio:

$$\frac{s_n + S_n}{2} = \frac{189225 + 216225}{2.810000}b^4 = b^4 \times 0,2502777.....$$

O erro é $0,00027777....$

Exemplo de função não integrável a Riemann.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

A função f é limitada mas não é integrável em $[0,1]$.

Demonstração. Para toda partição de $[0,1]$, com $t_i = ih$ e $h = \frac{1}{n}$, onde $t_i \in [0,1]$, temos que:

$S_n = h \times \sum_{i=1}^{n} \sup[f(t_i)] = 1$ se $t_i \in \mathbb{Q}$, com $i = 1, 2, ..., n$.

$s_n = h \times \sum_{i=1}^{n} \inf[f(t_{i-1})] = 0$ se $t_i \in \mathbb{I}$, com $i = 1, 2, ..., n$.

Logo a Soma de Riemann não existe. Portanto f não é integrável segundo Riemann. $\square$

Se continuarmos a calcular a área abaixo de $y = x^k$, $k = 1, 2, 3, ..$ com aproximações veremos que os resultados vão ao encontro dos resultados do capítulo 3. Esta aproximações podem ser feitas por estudantes que não conhecem o cálculo integral e querem chegar ao resultado de áreas abaixo de curvas, diferentes das estudadas em geometria plana e espacial. Se aumentarmos o número de divisões do intervalo o resultado se aproxima cada vez mais do valor real da área. Mostraremos isso usando o Geogebra.

5 Aplicabilidade no ensino

Como parte final de nossas contribuições neste trabalho, discutiremos como os conceitos e técnicas utilizadas neste TCC se aplicam na sala de aula. Mostraremos como uma aula pode ser preparada para alunos que ainda não estudaram o cálculo integral e limites. Podemos usar o Geogebra (GEOGEBRA,) ou outros programas para suprir as necessidades. Com o uso de recursos computacionais, veremos que no cálculo aproximado de áreas limitadas por curvas, que são gráficos de funções, se aumentarmos o número de retângulos interiores e exteriores, obtemos uma aproximação cada vez mais precisa desta área. Os estudantes de ensino médio possuem condição de entender as ideias de Arquimedes, pois elas são intuitivas. Elas mostram como calcular áreas usando retângulos interiores e exteriores.

Um bom modo de começar esta aula é criar uma situação problema. Na sequência mostraremos a teoria e as ferramentas para resolver o problema.

5.1 Problematização

Pensando nisso observe o problema abaixo:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

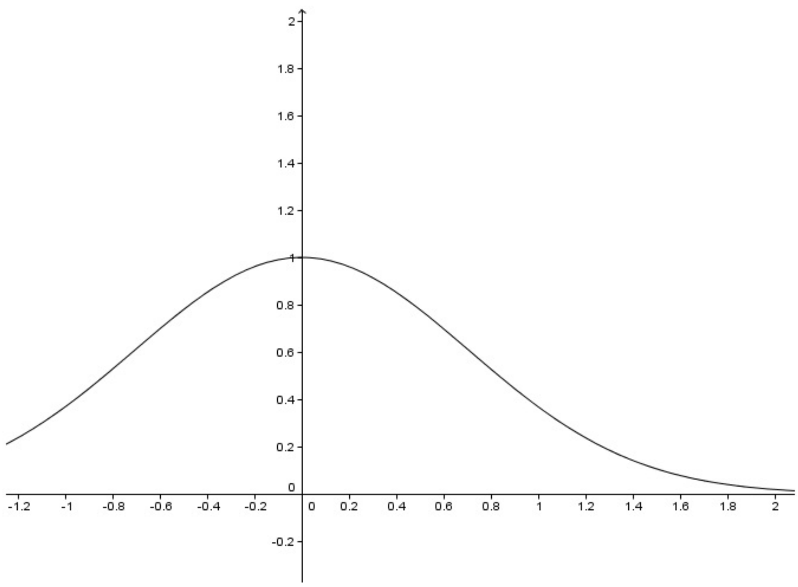

Figura 19 – Curva de Gauss

A função acima no gráfico tem diversas aplicações em ciências exatas, como física ou estatística, visto que a distribuição normal descreve uma gama imensa de fenômenos de interesse.

Problema: como cacular a área abaixo da curva $f(x) = e^{-x^2}$ limitado pelo eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 1$.

Vamos usar as idéias do capítulo anterior para aproximar a área preenchendo a curva com retângulos interiores e exteriores, pois as áreas dos retângulos nós conhecemos. Logo a área abaixo da curva esta entre a soma das áreas dos retângulos exteriores e a soma das áreas dos retângulos inferiores.

Antes de resolvermos o problema acima, vamos resolver um mais simples calculado no capitulo 4. Usando o o Software livre Geogebra vamos calcular a área abaixo da parábola $y = x^2$ novamente, no intervalo de [0,2], para termos uma idéia do método. Abaixo temos os passos para encontar a área.

1º) Primeiramente abra o Geogebra e na barra de digitação digite exatamente a função;

2º) Use na mesma barra o comando Somainferior[f(x), 0, 2, 10], onde 10 é o número de divisões do intervalo [0,2].

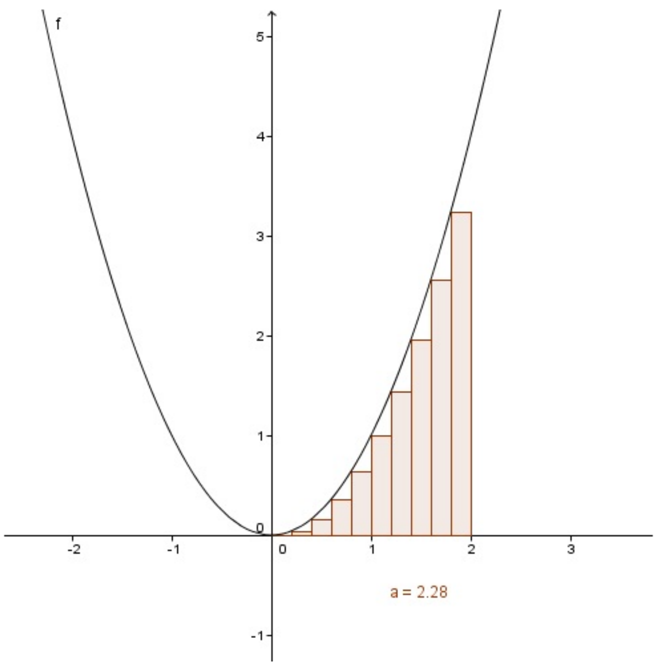

Figura 20 – Área aproximada por retângulos interiores.

A área encontrada é de 2,28 bem próxima da área real que é 8/3. Analogamente a soma superior é obtida usando o comando Somasuperior[f(x), 0, 2, 10].

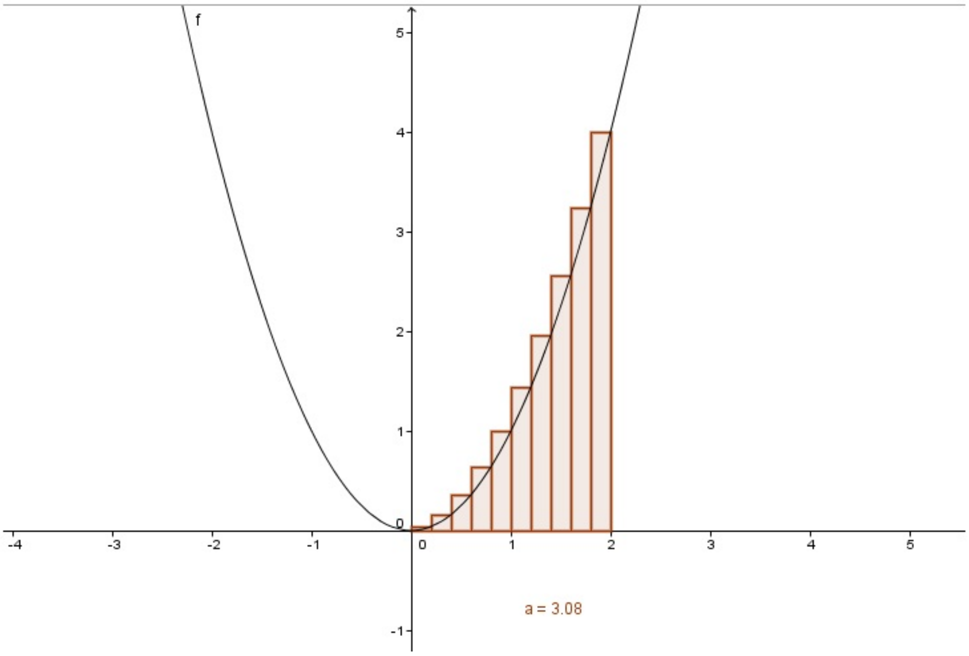

Figura 21 – Área aproximada por retângulos exteriores

Podemos aumentar as divisões e o número de subintervalos, com isso podemos ter um aproximação bem melhor. Um modo visual e interesante é fazer este intervalos variarem. O comando para isso é o de controle deslizante. Devemos definir o número de divisões para realizar o deslize e com isso a impressão visual é bem interessante. Conforme abaixo com 30 divisões, a área é de 2,8 bem mais próxima da área real que é 8/3.

Agora podemos voltar ao problema inicial da curva de Gauss e aproximar a área abaixo da curva de 0 a 2, eixo x, usando o Geogebra. Mostraremos o procedimento adotado para o cálculo da curva de Gauss. Primeiramente defina a função na caixa de digitação do geogebra e plote o gráfico. Depois use o comando da soma inferior ou da soma superior para aproximar por retângulos. Abaixo temos alguns resultados.

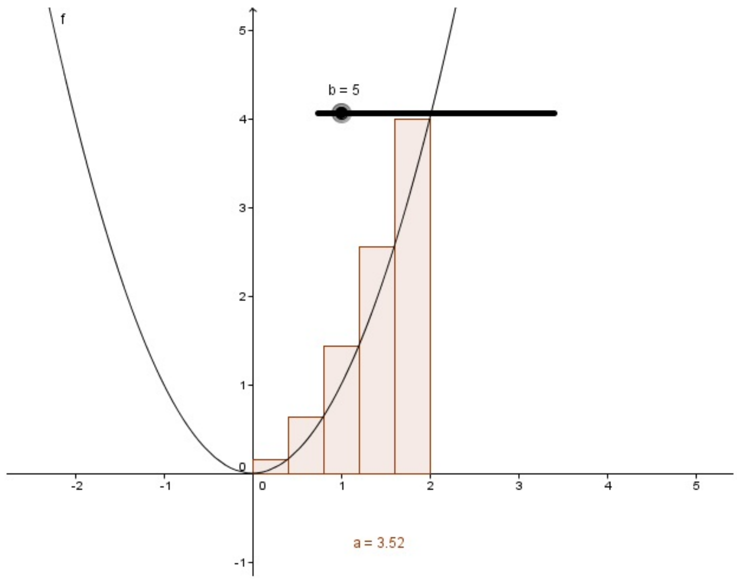

Figura 22 – Área aproximada por retângulos exteriores com 5 divisões de intervalo

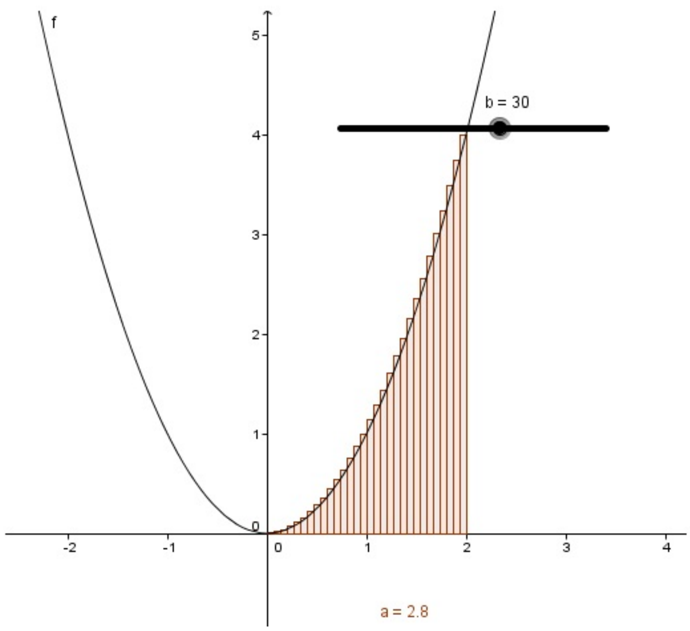

Figura 23 – Área aproximada por retângulos exteriores com 30 divisões de intervalo

A figura 25 é a mais aproximada da área real. Está entre 0.74 ou 0.75 que é um resultado muito próximo da área real que é aproximadamente 0.746824, na verdade a área é exatamente igual a

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(1)$$

.

No apêndice C colocamos informações sobre a integração da função de Gauss.

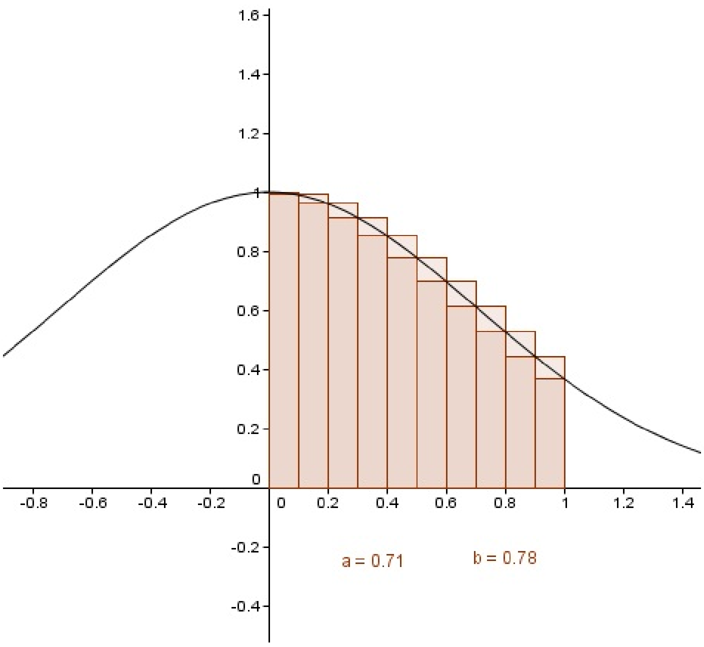

Figura 24 – Área aproximada por retângulos exteriores e interiores com 10 divisões de intervalo

5.2 Exercícios propostos para treinamento

Use o geogebra para Calcular as áreas abaixo das curvas listadas abaixo:

(a) Área limitada por $f(x) = \ell n(x)$ e o eixo x e pelas reats $x = 1$ e $x = 3$, com 10 divisões de intervalo e depois com 50 divisões de intervalo.

(b) Área limitada por $f(x) = -x^2 + 4$ e o eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$, com 10 divisões de intervalo e depois com 50 divisões de intervalo.

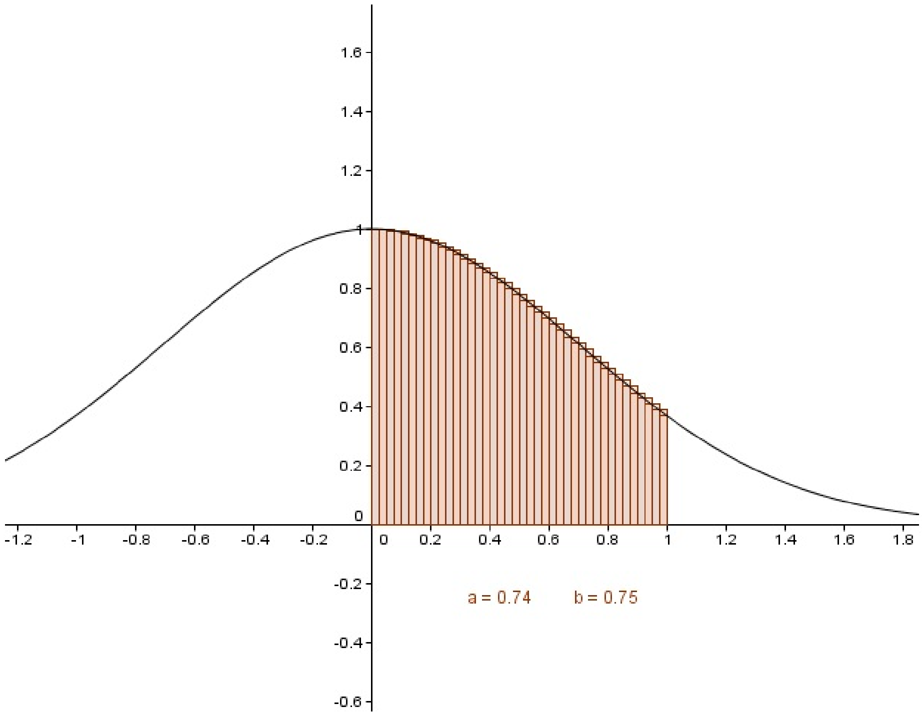

Figura 25 – Área aproximada por retângulos exteriores e interiores com 40 divisões de intervalo

6 Considerações finais

Pensando em tudo que foi exposto e antes de tudo, podemos inferir o quanto foi importante os trabalhos do brilhante matemático Arquimedes realizados, aproximadamente 2000 anos atrás numa época bem diferente e muito mais rudimentar em matemática. Ele atuou em diversas frentes como matemático, Físico e engenheiro militar. Seus conhecimentos foram empregados na defesa de sua cidade na proteção dos ataques do poderoso império romano.

Sabemos que o matemático Arquimedes foi o primeiro a obter a quadratura da parábola. Ou seja, ninguém antes dele havia sequer enunciado este resultado, quanto menos apresentado uma demonstração. E também que o resultado foi inicialmente obtido pela mecânica. Apenas depois que já sabia o resultado é que Arquimedes conseguiu elaborar uma demonstração geométrica do teorema.

Com este teorema Arquimedes conseguiu obter a área delimitada por uma curva, a parábola, em termos da área de um certo polígono, que era o triângulo inscrito na parábola. Logo com o feito de Arquimedes, e como os gregos já sabiam que a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos semelhantes, possuindo a metade da área do paralelogramo. Então eles construíram geometricamente um quadrado que tinha a mesma área de um dado paralelogramo. Como todo polígono pode ser decomposto em triângulos, isto significa que conseguiam obter geometricamente um quadrado que tinha a mesma área que qualquer polígono dado. Com este teorema Arquimedes conseguiu então obter a quadratura da parábola, ou seja, construir geometricamente um quadrado que tivesse a mesma área que um dado segmento de parábola.

O cálculo da área abaixo da parábola foi um ponta-pé inicial extremamente importante na geometria e influenciou decisivamente os matemáticos modernos que desenvolveram o calculo integral, que é uma ferramenta para cálculo de áreas abaixo de curvas diversas, amplamente utilizado por engenheiros e cientistas.

Como as idéias de Arquimedes são intuitivas, podemos inferir que podem ser usadas por estudantes que não viram cálculo integral na escola média, para construir os conceitos de áreas mais gerais. O Software livre Geogebra é uma excelente ferramenta neste processo, mas existem vários outros programas que tem um desempenho similar ou até melhor. Neste sentido, o nosso ensino básico necessita da aproximação dos professores e dos estudantes com o computador.

Novos temas também podem ser explorados por estudantes que gostam de pesquisar história da matemática. Existem vários trabalhos que podem ser explorados em relação a Arquimedes, como por exemplos, o cálculo de volumes, a espiral de Arquimedes e também sobre a física de Arquimedes que vai de mecânica clássica a fluídos. Estes temas podem ser explorados por matemáticos, Físicos, engenheiros ou até estudantes das ciências humanas como filósofos e historiadores.

Referências

AABOE, A. *Episódios da matemática antiga*. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

APOSTOL, T. M. *Cálculo*. Rio de Janeiro: Editorial Reverté, 2004.

ARCAUNIVERSAL. *Arca universal*. Disponível em: <http://www.universal.org-/mundocristao/series/noticias/lugares-da-biblia—siracusa-15074.html>. Acesso em: 26.8.2013.

ASSIS, A. K. T. *O centro de gravidade e a lei da alavanca*. MONTREAL: C. Roy Keys Inc., 2008.

AVILA, G. S. S. *Arquimedes, o rigor e o método*. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 1986.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM Coleção PROFMAT, 2012.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve História*. São Paulo: LF, 2012.

DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes, with a new bibliographic*. Princeton: Princeton University Press, 1987.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: UNICAMP, 2002.

FLEMMING, D. *Cálculo A*. São Paulo: Makron Books, 2000.

GEOGEBRA. *Software Livre Geogebra*. Disponível em: <http://www.geogebra.org-/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 05.1.2014.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo. Vol 1*. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HEATH, T. *The Works Of Archimedes*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1897.

KNORR, W. R. *Archimededes and the pre-euclidean proportion theory*. [S.l.]: Archives internationales d'histoire des sciennces, 28, 1978.

LINTZ, R. G. *História da matemática*. Blumenau: FURB, 1999.

MAGNAGHI, C. P. *Análise e tradução da obra de Arquimedes intitulada "método sobre os teoremas mecânicos"*. Campinas: [s.n.], 2011.

NETZ, R. *Il Codice Perduto di Archimede*. Milano: Rizzoli, 2007.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica. 10^a E.d.* [S.l.: s.n.], 1987.

WIKIPEDIA. *Enciclopédia livre e gratuita*. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org-/wiki/Arquimedes>. Acesso em: 26.9.2013.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstrações de somas

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demonstração. Usaremos a indução finita.

Se n = 1, temos que $1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(3)}{6} = 1$, logo a soma é valida para n=1, agora supondo que a soma vale para n =k e vamos mostrar que isso implica que a soma vale para n = k+1.

Sabemos que por hipótese a soma vale para n=k, assim somamos $(k+1)^2$ em ambos os lados da igualdade. Então temos:

$$(1^2+2^2+3^2+...+k^2)+(k+1)^2 = \frac{(k)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 = (k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6},$$

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6}(2k^2+k+6k+6) = \frac{(k+1)}{6}(2k^2+4k+3k+6),$$

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6}(2k(k+2)+3(k+2)) = \frac{(k+1)}{6}(k+2)(2k+3).$$

□

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Demonstração. Usaremos a indução finita.

Se n = 1, temos que $1^3 = 1 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$, logo a soma é valida para n=1, agora supondo que a soma vale para n =k e vamos mostrar que isso implica que a soma vale para n = k+1.

Sabemos que por hipótese a soma vale para n=k, assim somamos $(k+1)^3$ em ambos os lados da igualdade. Então temos:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3) + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^2(k+1),$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}[k^2 + 4k + 4] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

□

APÊNDICE B – Demonstrações das razões usadas no capítulo 2

Vamos voltar a figura do capítulo 2, para mostrar duas razões usadas por Arquimedes. Arquimedes usou estes resultados que ja eram bem difundidos entre os matemáticos desde os Elementos de Euclides. Abaixo temos a figura da alavanca teórica:

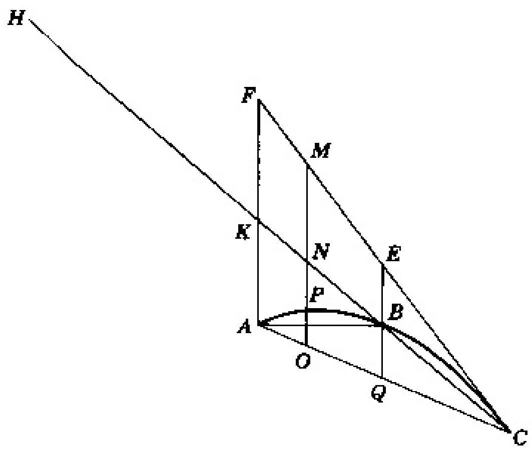

Figura 26 – Quadratura da parábola pela lei da alavanca. (BOYER, 1974)

1º Provar que:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$$

2º Provar que:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$$

Para a primeira razão vamos realizar esta demonstração usando a geometria analítica e o cálculo integral. Na época de Arquimedes esta razão era conhecida pois foi publicada nos elementos de Euclides. Mas a demonstração antiga é muito complicada e demorada, e é necessário vários teoremas e proposições para a demonstrações, então abaixo mostramos uma versão mais moderna. Para isso vamos montar uma figura equivalente no geogebra.

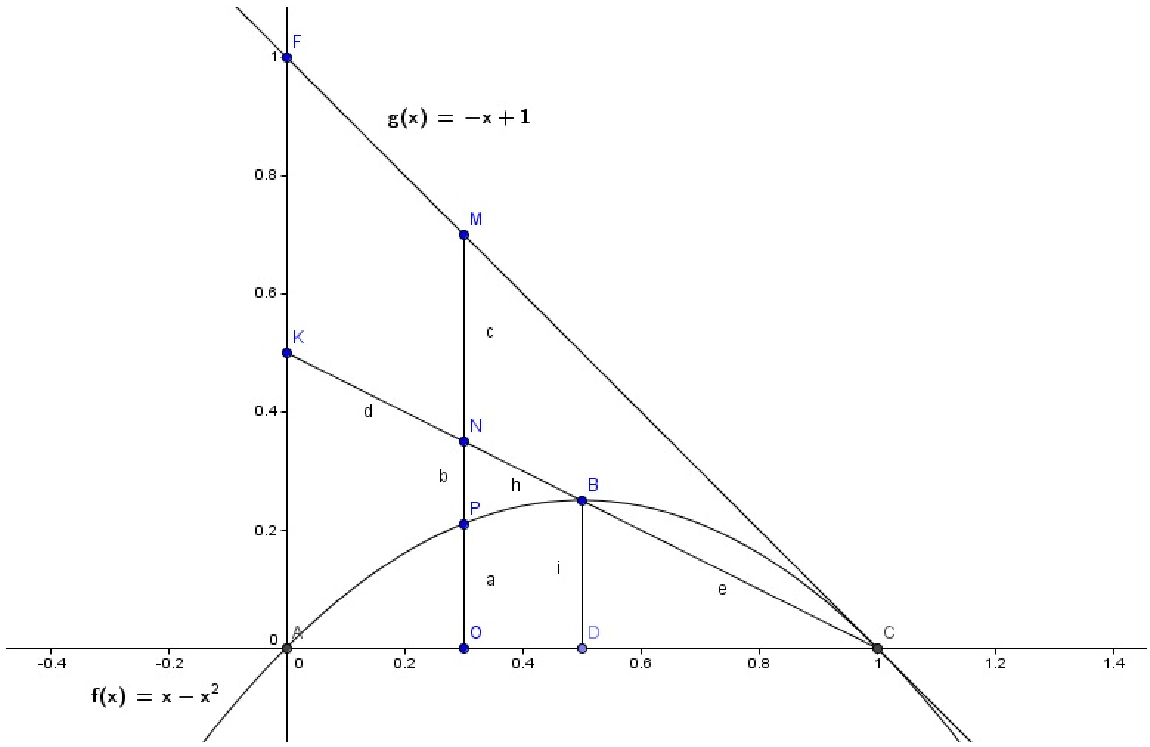

Figura 27 – Razões $\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$

Vamos definir a parábola $f(x) = x - x^2$ seja $g(x)$ a reta tangente a parábola $f(x)$, em $x = 1$, a equação de g(x) é $g(x) = 1 - x$.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 1 - 2x$$

Vamos obter a reta tangente a $f(x)$ em $x = 1$. $g(x) - 0 = f'(1)(x - 1)$ e como $f'(1) = -1$, temos que:

$$g(x) = -x + 1$$

Agora vamos calcular $\overline{OP}$.

$$\overline{OP} = f(O) = O - O^2 = O(1 - O)$$

Agora vamos achar $\overline{OM}$:

$$\overline{OM} = g(O) = f'(O) = 1 - O$$

Agora vamos fazer a razão, $\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}$:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{f(O)}{g(O)} = \frac{O(1-O)}{1-O} = O$$

Agora vamos cálcular a razão $\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$:

Sabemos que $\overline{AO} = O$, pois A está na origem, e $\overline{AC} = 1$. Então temos:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}} = \frac{O}{1} = \frac{O(1-O)}{1-O} = O$$

O resultado desta última razão comparada com o resultado da primeira razão termina a demonstração, pois elas são iguais. Sabemos que é muito importante lembrar que o ponto O é um ponto arbritrário da base da parábola e também $\overline{BD}$ é o eixo da parábola. $\overline{AF}$ e $\overline{OM}$ são segmentos paralelos ao eixo e cortam a tangente respectivamente em F e M.

Agora com a mesma figura vamos fazer a prova da segunda razão.

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$$

Observamos que na figura abaixo podemos usar a semelhança de triângulos nos triângulos ΔAFC e ΔOMC. Sabemos que $\overline{KC}$ é a mediana do triângulo ΔAFC e divide o lado $\overline{AF}$ em dois lado iguais. Ainda sabemos que os triângulos ΔAKC e ΔONC também são semelhantes.

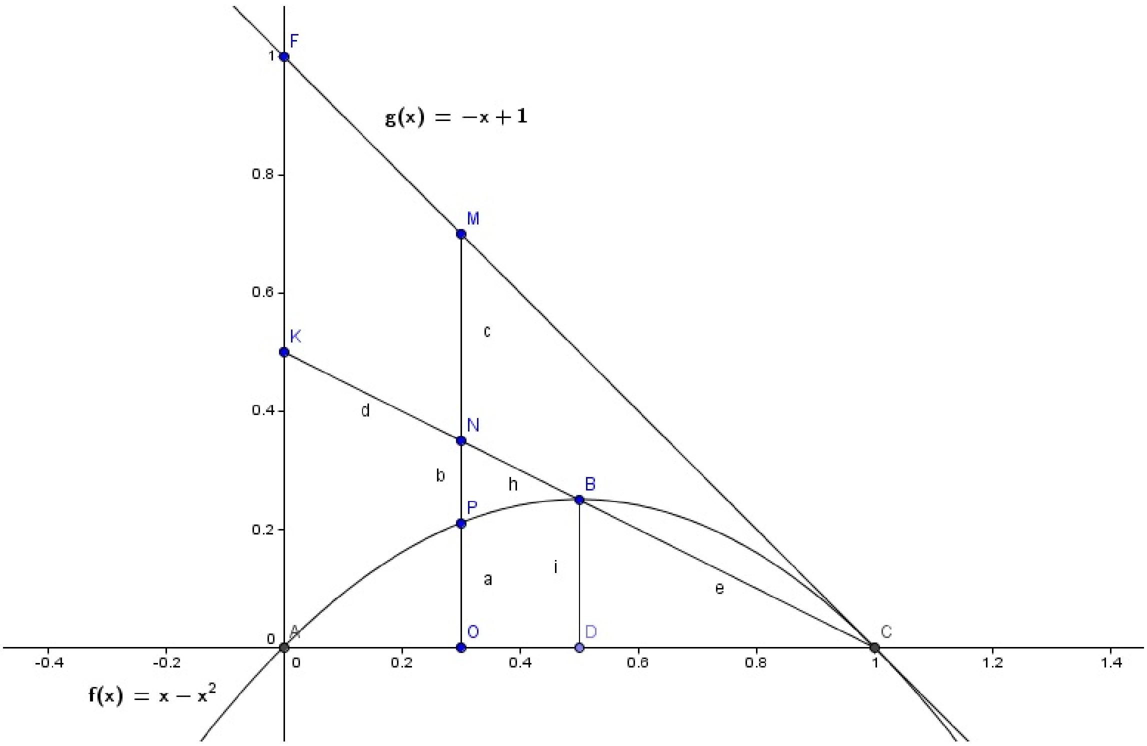

Figura 28 – Razões $\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$

Logo por semelhaça de triângulos sabemos que:

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}}$$

Mas, $\overline{NC} = \overline{KC} - \overline{KN}$ e $\overline{OC} = \overline{AC} - \overline{AO}$, vamos substituir isso acima, então temos que:

$$\frac{\overline{KC} - \overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AC} - \overline{AO}}{\overline{AC}}$$

Isso implica em:

$$1 - \frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = 1 - \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$$

Portanto:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}$$

como queríamos demonstrar.

APÊNDICE C – Integração da função de Gauss

Esta função é muito importante em matemática aplicada. Podemos encontrar aplicações em diversas áreas, como na teoria de ditribuições de probabilidades e na Fisíca. A sua integração é um pouco complicada, pois não possui primitiva em termos de funções elementares. esta integral também é chamada de de integral de Euler-Poisson. Podemos usar métodos numéricos para expandir a função em série de Taylor e depois integrar o polinômio, mas esta expansão deixa sempre um resto de Lagrange.

Uma alternativa analitica é usar as coordenadas polares e as integrais duplas, quando os limites de integração são de menos infinito até mais infinito.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Quando os limites são finitos é chamada de função erro. Como a função de Gauss é uma função par, pelas propriedades de integrais definidas, podemos calcular a integral de 0 até ∞ e multiplicar o resultado por dois. Vamos agora realizar a demonstração abaixo usando integrais duplas e coordenadas polares.

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Demonstração. Para a demonstração vamos criar uma segunda integral equivalente:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Agora vamos fazer o produto das integrais, então temos que:

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

Vamos observar a região de integração em coordenadas polares. Então sabemos que $r^2 = x^2 + y^2$, também sabemos que o elemento diferencial de área $dxdy$ é igual a $rdrd\theta$, pois o jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas polares é r. Ainda sabemos que o ângulo θ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, pois a tangente é zero em 0 e a tangente é infinita em π. Assim podemos realizar a integração usando integrais duplas e coordenadas polares.

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-(r^2)} rdrd\theta$$

Agora chamando $-r^2 = u$ e fazendo a derivada temos que, $dx = \frac{du}{-2r}$. Fazendo a substituição temos que:

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} e^{-(r^2)}|_0^\infty d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

APÊNDICE D – Demonstração da identidade de Pascal

Identidade de Pascal:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^{1}S_k + C_{k+1}^{2}S_{k-1} + ... + C_{k+1}^{k-1}S_2 + C_{k+1}^{k}S_1 + n$$

onde $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ é a combinação de n elementos tomados p a p.

Demonstração. Vamos expandir o binômio de Newton que na época de Pascal não tinha este nome.

Sabemos que:

$$(1+1)^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^{1}1^k + C_{k+1}^{2}1^{k-1} + ... + C_{k+1}^{k-1}1^2 + C_{k+1}^{k}1 + 1^{k+1}$$
$$(2+1)^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^{1}2^k + C_{k+1}^{2}2^{k-1} + ... + C_{k+1}^{k-1}2^2 + C_{k+1}^{k}2 + 1^{k+1}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^{1}n^k + C_{k+1}^{2}n^{k-1} + ... + C_{k+1}^{k-1}n^2 + C_{k+1}^{k}n + 1^{k+1}$$

Agora somando membro a membro e observando que $(1+1)^{k+1} = 2^{k+1}$ da primeira linha, $(2+1)^{k+1} = 3^{k+1}$ da segunda linha, ... e $(n-1)+1^{k+1}$ na penúltima linha podem ser cancelados.

Podemos observar que o último termo do lado esquerdo será n, pois $1+1+1+...+1$ com n parcelas é n. Com isso realizando as simplificações e cancelamentos, temos que:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^{1}S_k + C_{k+1}^{2}S_{k-1} + ... + C_{k+1}^{k-1}S_2 + C_{k+1}^{k}S_1 + n$$

$\square$