

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PROPRIEDADES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS
DAS TERNAS PITAGÓRICAS**

Calebe Miranda da Silva

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira

FEIRA DE SANTANA-BA

27 de agosto de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**PROPRIEDADES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS
DAS TERNAS PITAGÓRICAS**

Calebe Miranda da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira

Feira de Santana
27 de agosto de 2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

S579p Silva, Calebe Miranda da
Propriedades aritméticas e geométricas das ternas pitagóricas / Calebe
Miranda da Silva. – Feira de Santana, 2014.
40 f. : il.

Orientador: Maurício de Araújo Ferreira.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Ternas pitagóricas. 2. Geometria. 3. Aritmética. I. Ferreira,
Maurício de Araújo, orient. II. Universidade Estadual de Feira de
Santana. III. Título.

CDU: 514

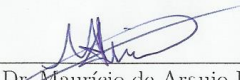


ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE CALEBE
MIRANDA DA SILVA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

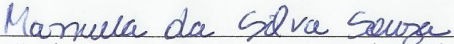
Aos vinte e dois dias do mês de agosto de dois mil e quatorze às 10:00 horas no MT55 - Módulo 5. UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**PROPRIEDADES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS DAS TERNAS PITAGÓRICAS**”, do discente **Calebe Miranda da Silva**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: **Maurício de Araujo Ferreira** (Orientador, UEFS), **Manuela da Silva Souza** (UFBA) e **Haroldo Gonçalves Benatti** (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 22 de agosto de 2014.



Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira (UEFS)
Orientador




Profa. Dra. Manuela da Silva Souza (UFBA)



Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)

Visto do Coordenador:



Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

A Deus, por esta comigo sempre.

A Senhor Olavo e Dona Terezinha, meus pais, pela formação espiritual e pessoal. E por sempre acreditar em meu potencial.

A minha namorada Liliam que me deu carinho e atenção em momentos importantes e sempre teve paciência para me aturar.

A minhas sobrinhas Tainá e Rafaela pelo carinho e respeito.

A meus amigos Álvaro, Andrei, Béu, Darlos e Eduardo por ter sempre me apoiado e sempre me deixando de cabeça erguida para enfrentar os problemas.

A meu tio João Paulo pelo apoio nesta reta final e minha vó Dona Lurde por sempre acreditar em mim.

A Maurício, meu orientador, pela disposição e paciência em sempre me auxiliar.

A meus colegas e amigos do PROFMAT pelo apoio, amizade e companheirismo nesta caminhada.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo de alguns aspectos aritméticos e geométricos das tripas pitagóricas. Triplas pitagóricas são tripla de números inteiros positivos (a, b, c) que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Estudaremos a fórmula para gerar triplas pitagóricas $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, com n e m de paridades distintas, conhecida como fórmula paramétrica babilônica em duas variáveis. Usaremos tal fórmula para encontrar tripla com um dos valores fixo. Por fim relacionaremos tripla pitagóricas a ângulos internos de um triângulo e a pontos racionais da circunferência, da elipse e da hipérbole.

Palavras Chaves: Triplas Pitagóricas - Triângulos Retângulos - Ângulos Pitagóricos

Abstract: This aim of this work is to study of some arithmetical and geometrical aspects of Pythagorean triples. A Pythagorean triple is a triple of positive integer numbers (a, b, c) satisfying the relation $a^2 + b^2 = c^2$. We study a formula for generate Pythagorean triples $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, with one of m and n is odd and the other is even, which is known as Babylonian parametric formula in two variables. We use this formula to find triples with one of the fixed values. Finally, we relate Pythagorean triples to the internal angles of a triangle and the rational points on the circle, ellipse and hyperbola.

Key Words: Pythagorean Triple - Triangles Rectangles - Angles Pythagoreans

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Sumário	iii
Introdução	1
1 Conceitos básicos da aritmética	5
2 Ternas pitagóricas	10
3 Ternas pitagóricas e geometria	19
3.1 Triângulo pitagórico e ângulos	19
3.2 Ângulos pitagóricos e pontos racionais da circunferência	25
3.3 Pontos racionais nas cônicas	28
Conclusão	34
Referências Bibliográficas	35

Introdução

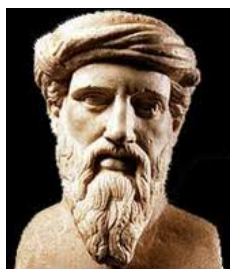


Figura 1: Pitágoras

Pitágoras, filósofo e matemático, nasceu em 572 a.C. em Samos, uma ilha grega no mar Egeu na costa da Ásia Menor, na época pertencente à Grécia, ele viajou pelo Egito e Babilônia, e segundo alguns historiadores, possivelmente foi até à Índia. Pitágoras mudou-se para Crotona, na atual Itália e ali fundou uma escola filosófica que muito se assemelhava a um culto religioso. A escola fundada por ele era secreta e ao mesmo tempo comunitária, onde conhecimento e propriedades eram comuns, possuía bases religiosas, matemáticas e filosóficas.

Pouco se sabe sobre Pitágoras e sua escola e isso se deve também ao fato de que ela tinha muitas regras sigilosas que protegiam os seus segredos, pois os iniciados na Escola Pitagórica cumpriam regras de silêncio, além disso haviam regras de lealdade entre os membros da escola e os bens materiais eram distribuídos comunitariamente.

O filósofo e matemático Pitágoras, além de fundador e líder, era visto como profeta. A escola também praticava rituais de purificação através do estudo de Geometria, Aritmética, Música e Astronomia. Acreditavam na transmigração da alma de um corpo para o outro após a morte, portanto acreditavam na reencarnação e na imortalidade da alma.

A Escola Pitagórica santificava a vida e também se interessavam por diversas questões filosóficas. Eles criaram relações da matemática com assuntos abstratos como a justiça, desenvolvendo assim um misticismo em torno dos números.

Eles acreditavam que o mundo era governado pelas mesmas estruturas matemáticas que governam os números pois, eles simbolizavam a harmonia e essa harmonia ou ordem eles perceberam analisando os astros e a natureza.

O lema da escola pitagórica era “Tudo é número”, pois eles procuravam explicar tudo que existe na natureza através dos números. Os pitagóricos formaram uma sociedade cujo emblema era o pentágono estrelado ou pentagrama, a única aspiração deles era o conhecimento. Os estudos dos pitagóricos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente na Geometria, entre essas contribuições, a de maior sucesso foi sem dúvida o conhecido Teorema de Pitágoras.

A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome, Teorema de Pitágoras, o qual estabelece que a área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos. Este teorema já era conhecido pelos babilônios desde o tempo de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras.

Pitágoras relacionou a harmonia matemática também com a música. Ele descobriu que se dividirmos uma corda em determinadas proporções vamos obter vibrações proporcionais que vão formar a harmonia das notas musicais. Além disso, se dividirmos essas notas em determinadas frações e as combinarmos com as notas simples vamos obter sons harmoniosos, já frações diferentes produzem sons não harmônicos. Como todos os corpos que se movem rapidamente produzem som, isso acontece também com os corpos celestes. O movimento dos astros produz o som correspondente a uma oitava, este som não é percebido pelas pessoas pois, nós o ouvimos desde que nascemos e nossos ouvidos não conseguem mais percebê-los.

Pitágoras foi expulso de Crotona e passou a morar em Metaponto onde morreu provavelmente em 496 a.C., além de não deixar nenhum registro do seu trabalho, sua escola em Crotona foi destruída por rivais políticos e a maioria dos membros foi morta. Os sobreviventes dispersaram-se pela Grécia e continuaram a divulgar a filosofia da religião dos números. Conta-se que Aristóteles escreveu uma biografia sobre os pitagóricos, embora esta tenha-se perdido.

As contribuições de Pitágoras à matemática transformou essa ciência numa forma liberal de instituição, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual.



Figura 2: A tableta Plimpton 322.

Os babilônios em 1700 a.C. já conheciam o fato de que em um triângulo retângulo, a soma do quadrado das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Tabletes de argila encontrados na Babilônia (Figura 2), utilizados entre 1900 a 1600 a.C., possuem sequências de números correspondentes aos Ternos Pitagóricos. Entretanto, diversos historiadores matemáticos ressaltam que nos papiros que chegaram até nós, não há prova de que os egípcios tinham conhecimento do teorema.

Matematicamente, três números inteiros positivos que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$ são chamados ternos pitagóricos. Se (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ka, kb, kc) também é um terno pitagórico, para qualquer número natural k .

Existem algumas fórmulas para gerar ternos pitagóricos, entre elas: $(2n, n^2 - 1, n^2 + 1)$, para todo n natural maior que 1, que gera todos os ternos pitagóricos, em que os dois últimos termos são dois ímpares ou pares consecutivos, como por exemplo, $(4, 3, 5)$, $(6, 8, 10)$ e $(8, 15, 17)$. Uma outra fórmula é $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, sendo n e m de paridades distintas, ou seja, m ímpar e n par ou m par e n ímpar, que gera todas as ternas pitagóricas primitivas, conhecida como fórmula paramétrica babilônica em duas variáveis, esta fórmula utilizaremos posteriormente, pois será o objeto de estudo deste trabalho.

A seguir faremos agora fazer um breve resumo sobre os capítulos da dissertação. No primeiro capítulo falamos de alguns resultados e definições da Aritmética que servem de base para o restante do trabalho, resultados que são acompanhados de demonstrações simples. No segundo capítulo estudaremos fórmulas para gerar ternas pitagóricas, mostraremos que

existem infinitas ternas pitagóricas e mostraremos como encontrar triângulos pitagóricos a partir de um lado fixo. No terceiro capítulo estudamos propriedades aritméticas dos ângulos agudos de um triângulo pitagórico e procuramos os ângulos pitagóricos α° com α inteiro e em seguida relacionamos ternas pitagóricas a pontos racionais de uma circunferência, além disso utilizamos ternas pitagóricas para encontrarmos pontos racionais de uma elipse e de uma hipérbole.

Capítulo 1

Conceitos básicos da aritmética

Neste capítulo falaremos de alguns resultados de aritmética que servirão como base para este trabalho. Para isso iniciaremos com alguns conceitos básicos. Para este capítulo usaremos os livros Martinez[1], Muniz Neto[3] e Moreira[4]

Usaremos como base o conjunto dos Números Naturais incluindo o zero, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Definição 1.1 (Divisibilidade). Dados dois números $a, d \in \mathbb{Z}$, dizemos que d divide a , ou d é divisor de a , e escrevemos

$$d|a$$

se existir $q \in \mathbb{Z}$ com $a = qd$. Caso contrário, escrevemos $d \nmid a$.

Alguns resultados decorrem da definição:

- Se $d|a$ e $d|b$, então $d|ax + by$ para qualquer combinação linear $ax + by$ de a e b com $x, y \in \mathbb{Z}$.
- Se $d|a$, então $a = 0$ ou $d \leq a$.
- Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Definição 1.2. Chamamos D_n o conjunto dos divisores de $n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, temos que $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

Definição 1.3 (Máximo divisor comum - mdc). Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, chamamos de máximo divisor comum (mdc) o maior dos elementos em $D_a \cap D_b$.

Observemos que o conjunto $D_a \cap D_b$ é finito (pois D_a e D_b são finitos) e não vazio (já que 1 pertence à intersecção).

Definição 1.4. Um número natural $p > 1$ é chamado de *primo* se os únicos divisores naturais de p são 1 e p . Caso contrário, chamamos de *composto*.

Chamaremos $d(n)$ o número de primos distintos que divide n , por exemplo, $d(6) = 2$.

Proposição 1.5. *Seja p um número primo e sejam $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$. Se $p|a_1 \cdots a_m$, então $p|a_i$ para algum i , $1 \leq i \leq m$.*

Não incluiremos a demonstração, pois requer alguns conceitos e resultado que não estão no trabalho. A demonstração poderá ser encontrado na Proposição 7.1.1 do livro [7].

Teorema 1.6 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Seja $n \geq 2$ um número natural. Podemos escrever n de uma única forma como um produto*

$$n = p_1 \cdots p_m$$

onde $m \geq 1$ é um número natural e $p_1 \leq \cdots \leq p_m$ são primos.

Demonstração. Mostraremos a existência da fatoração de n em primos por indução em $n \in \mathbb{N}$. Se n é primo não há o que provar, em particular para $n = 2$. Se n é composto podemos escrever $n = ab$, $a, b \in \mathbb{N}$, $1 < a < n$, $1 < b < n$.

Por hipótese de indução, a e b se decompõem como produto de primos. Juntando as fatorações de a e b obtemos uma fatoração de n .

Vamos mostrar agora a unicidade. Supondo por absurdo que existem duas fatorações de n distintas

$$p_1 \cdots p_m = n = q_1 \cdots q_t,$$

com $p_1 \leq \cdots \leq p_m$, $q_1 \leq \cdots \leq q_t$. Como $p_1|q_1 \cdots q_t$ temos que $p_1|q_i$, pela Proposição 1.5, para algum i . Logo, como q_i é primo, $p_1 = q_i$ e $p_1 \geq q_1$. Analogamente temos $q_1 \geq p_1$, isto é, $p_1 = q_1$. Logo teremos

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_m = q_2 \cdots q_t.$$

Supondo $m < t$, poderemos repetir o argumento $m - 1$ vezes e teremos que $p_i = q_i$ para todo $1 \leq i \leq m$ e além disso teremos

$$1 = q_{m+1} \cdots q_t,$$

um absurdo pois q_{m+1}, \dots, q_t são primos, logo $m = t$ e portanto n possui uma única fatoração. □

Definição 1.7. Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a é *congruente a b módulo n* , e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se $n|(a - b)$, ou seja, se a e b deixam o mesmo resto na divisão por n .

Assim temos, imediato a definição, que:

- (*Reflexividade*) $a \equiv a \pmod{n}$;
- (*Transitividade*) Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$, então $a \equiv c \pmod{n}$.

Teorema 1.8 (Pequeno Teorema de Fermat). *Seja p um primo e $a \in \mathbb{N}$, então*

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução em a .

Se $a = 0$ ou $a = 1$ a afirmação é verdadeira.

Para $p = 2$ temos que $a^2 \equiv a \pmod{p}$ se e somente se $2|a(a-1)$, isto é, $a(a-1)$ é par.

Por hipótese de indução, suponhamos que, para certo $a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a \pmod{p}$. Então pelo Binômio de Newton

$$\begin{aligned}(a+1)^p &\equiv a^p + pa^{p-1} + \dots + p(p-1)a + 1 \pmod{p} \\ &\equiv a^p + 1 \pmod{p} \\ &\equiv a + 1 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Logo $a^p \equiv a \pmod{p}$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

□

Proposição 1.9. *Se $a = bq + r$, então $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$.*

Demonstração. Mostraremos que $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$, onde D_n é o conjunto dos divisores de n . Neste caso, temos em particular que os seus máximos serão iguais. Se $d \in D_a \cap D_b$ temos que $d|a$ e $d|b$, logo $d|a - bq$, isto é, $d|r$ e portanto $d \in D_b \cap D_r$. Da mesma forma, se $d \in D_b \cap D_r$, temos $d|b$ e $d|r$, logo $d|bq + r$, o que implica $d|a$ e assim $d \in D_a \cap D_b$. □

Definição 1.10. Dado um número real α definiremos $\lfloor \alpha \rfloor$ como sendo o maior número inteiro menor ou igual a α .

Lema 1.11 (Lema de THUE). *Se m é um número natural e a é um número, tal que $\text{mdc}(a, m) = 1$, então existem números naturais x e y , não ambos nulos, menores que \sqrt{m} tais que algum dos números $ax + y$ ou $ax - y$ é divisível por m .*

Demonstração. No caso em que $m = 1$, quaisquer valores de x e y satisfazem as condições. Suponhamos que m seja um número natural maior que 1. Seja $q = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, então temos que $q + 1 > \sqrt{m}$ e portanto $(q + 1)^2 > m$. Consideraremos todos os números da forma $ax - y$ onde x e y tomam os valores $0, 1, \dots, q$. Observe que estamos considerando $(q + 1)^2$ números. Como existem m restos possíveis ao dividir um número por m , então existem dois desse números que têm o mesmo resto quando divididos por m . Sejam $ax_1 - y_1$ e $ax_2 - y_2$ tais números. Portanto sua diferença $a(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)$ é divisível por m .

Como $0 \leq y_1 < \sqrt{m}$ e $0 \leq y_2 < \sqrt{m}$, então $-\sqrt{m} < y_1 - y_2 < \sqrt{m}$. Da mesma forma $-\sqrt{m} < x_1 - x_2 < \sqrt{m}$.

Se $x_1 - x_2 = 0$, então $y_1 - y_2$ será divisível por m , o que implicará em $y_1 = y_2$. Mas os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são diferentes, logo isso nos leva a uma contradição. Da mesma forma, se $y_1 - y_2 = 0$, então $a(x_1 - x_2)$ será divisível por m , mas a e m são primos relativos, assim m divide $(x_1 - x_2)$ e teremos $x_1 = x_2$, contradição. Assim, $x_1 - x_2 \neq 0$ e $y_1 - y_2 \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_1 - x_2 > 0$ e, neste caso, tomamos $x = x_1 - x_2$ e $y = |y_1 - y_2|$. \square

Proposição 1.12. *Sejam a e b dois números naturais tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e seja p um número primo ímpar tal que p divide $a^2 + b^2$, então $p \equiv 1 \pmod{4}$.*

Demonstração. Observemos que p não divide nem a nem b , e que $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$. Elevando a potência $\frac{p-1}{2}$ temos que $a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} b^{p-1} \pmod{p}$. Pelo Pequeno Teorema de Fermat temos $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ e $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, logo $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Logo $\frac{p-1}{2}$ é um número par. Portanto $\frac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod{2}$, o que implica $p - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, assim teremos que $p \equiv 1 \pmod{4}$. \square

Teorema 1.13 (Teorema de Wilson). *Seja $n > 1$. Então $n|(n-1)! + 1$ se, e somente se, n é primo. Em particular temos que se n é um número primo então*

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}.$$

Demonstração. Se n é composto mas não é o quadrado de um primo podemos escrever $n = ab$ com $1 < a < b < n$. Neste caso tanto a quanto b são fatores de $(n-1)!$ e portanto $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. Se $n = p^2$, $p > 2$, então p e $2p$ são fatores de $(n-1)!$ e novamente $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. Para $n = 4$ temos que 4 não divide $7 = (4-1)! + 1$; isto demonstra que para todo composto temos $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Se n é primo podemos escrever $(n-1)! \equiv 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \pmod{n}$, como podemos juntar os inversos aos pares, temos então que $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$. \square

Teorema 1.14. *Todo primo da forma $p = 4k + 1$ pode ser escrito de forma única como soma de dois quadrados de inteiros positivos.*

Demonstração. Seja p um número primo da forma $4k+1$. Pelo Teorema de Wilson (Teorema 1.13), temos que

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

mas temos que

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2} \equiv (-1)(-2) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{p-1}{2}\right) \equiv (p-1)(p-2) \cdot \dots \cdot \frac{p+1}{2} \pmod{p}$$

já que $\frac{p-1}{2}$ é um número par, portanto

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Tomando $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ então p divide $a^2 + 1$ e aplicando o Lema de THUE existem inteiros $0 < x, y < \sqrt{p}$ tais que algum dos números $ax \pm y$ é divisível por p , portanto $(ax + y)(ax - y) = a^2x^2 - y^2$ é divisível por p . Dai segue que

$$x^2 + y^2 \equiv -a^2x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

em que $0 < x, y < \sqrt{p}$. Logo $0 < x^2 + y^2 < 2p$ e portanto segue que $p = x^2 + y^2$.

Unicidade.

Suponha que p seja primo e que $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ com $a, b, c, d < \sqrt{p}$. Como p é primo temos que $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(c, d) = 1$. Se $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ e $d^2 \equiv -c^2 \pmod{p}$, então $(ad)^2 \equiv (bc)^2 \pmod{p}$; e como p é primo, temos que p divide $ad - bc$ ou $ad + bc$.

No primeiro caso, temos que $|ad - bc| \leq \max\{ad, bc\} < p$. logo $ad - bc = 0$, isto é $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Mas como as duas frações são irredutíveis, temos que $a = c$ e $b = d$.

No caso em que p divide $ad + bc$, observemos que p^2 divide

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

portanto p divide $ac - bd$ e, pelo mesmo argumento, obtemos que $a = d$ e $b = c$. \square

Proposição 1.15. *Se p_1 e p_2 , números inteiros distintos, podem ser escrito como soma de dois quadrados, então p_1p_2 também pode ser escrito como soma de dois quadrados.*

Demonstração. Dados $p_1 = m_1^2 + n_1^2$ e $p_2 = m_2^2 + n_2^2$ teremos então que

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= (m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) \\ &= m_1^2m_2^2 + m_1^2n_2^2 + n_1^2m_2^2 + n_1^2n_2^2 + 2m_1m_2n_1n_2 - 2m_1m_2n_1n_2 \\ &= (m_1^2m_2^2 + 2m_1m_2n_1n_2 + n_1^2n_2^2) + (m_1^2n_2^2 - 2m_1m_2n_1n_2 + n_1^2m_2^2) \\ &= (m_1m_2 + n_1n_2)^2 + (m_1n_2 - n_1m_2)^2. \end{aligned}$$

Logo p_1p_2 pode ser escrito como soma de dois quadrados. \square

Capítulo 2

Ternas pitagóricas

As ternas de números inteiros positivos (a, b, c) que satisfazem a equação

$$a^2 + b^2 = c^2$$

são denominadas *triplas ou ternas pitagóricas*, que correspondem aos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de lados inteiros pelo Teorema de Pitágoras.

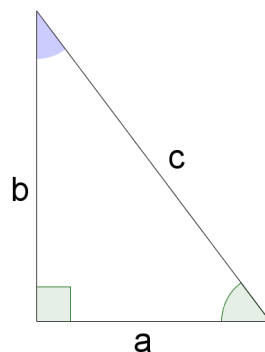


Figura 2.1: Triângulo Retângulo

Neste capítulo veremos alguns resultados que caracterizam ternas pitagóricas (a, b, c) . Podemos supor que a, b, c são relativamente primos dois a dois, pois se houver um primo p tal que $p \mid \text{mdc}(a, b)$, por exemplo, teremos então $p \mid (a^2 + b^2) = c^2$, isto é, $p \mid c$, logo $(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p})$ também é tripla pitagórica. Isto motiva a definição a seguir.

Definição 2.1. Uma tripla pitagórica (a, b, c) cujos termos são relativamente primos dois a dois denomina-se *tripla pitagórica primitiva*.

Observemos que em uma terna pitagórica primitiva os termos a e b não são pares ao mesmo tempo, pois neste caso teremos que estes termos não são relativamente primos entre si.

Lema 2.2. *Dada uma tripla pitagórica primitiva (a, b, c) temos que a e b têm paridades distintas e além disso c é ímpar.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $b = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Note que

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

e

$$(2r)^2 = 4r^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

ou seja, quadrados perfeito são congruentes a 0 ou a 1 módulo 4. Portanto a não pode ser ímpar pois caso contrário teríamos $c^2 \equiv a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$, um absurdo. Resumindo, temos que a é par e por consequência temos que c é ímpar. \square

Usaremos, a partir deste resultado, a par e b ímpar para facilitar o entendimento do trabalho.

Teorema 2.3. *A terna (a, b, c) é uma terna pitagórica primitiva se e somente se é da forma*

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2 \quad e \quad c = m^2 + n^2,$$

com $\text{mdc}(m, n) = 1$ além de m e n de paridades distintas.

Demonstração. (\implies) Dada a terna pitagórica primitiva (a, b, c) temos então que

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b). \tag{2.1}$$

Como b e c são ímpares, $c - b$ e $c + b$ são pares. Como $\text{mdc}(b, c) = 1$, logo $\text{mdc}(b + c, c) = 1$ e além disso $b + c$ é par, logo, $\text{mdc}(2c, c + b) = 2$ e portanto temos que $\text{mdc}(c - b, c + b) = 2$, logo $\text{mdc}\left(\frac{c-b}{2}; \frac{c+b}{2}\right) = 1$.

Comparando a fórmula (2.1) obtemos que $(c - b)(c + b)$ é um quadrado, pelo Teorema Fundamental da Aritmética temos portanto que $\frac{c-b}{2}$ e $\frac{c+b}{2}$ devem ser quadrados de números naturais. Tomemos $m, n \in \mathbb{N}$ tais que,

$$\frac{c + b}{2} = m^2 \quad e \quad \frac{c - b}{2} = n^2, \quad \text{logo} \quad a = 2mn \quad e \quad \text{mdc}(m, n) = 1. \tag{2.2}$$

Resolvendo (2.2) obtemos

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2 \quad e \quad c = m^2 + n^2.$$

(\Leftarrow) Note que $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ é um terna pitagórica, pois

$$\begin{aligned}(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 &= 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2.\end{aligned}$$

Vamos mostrar apenas que b e c são primos entre si. Como $\text{mdc}(m, n) = 1$ temos $\text{mdc}(m^2, m^2 + n^2) = 1$, portanto

$$\begin{aligned}\text{mdc}(b, c) &= \text{mdc}(m^2 - n^2, m^2 + n^2) \\ &= \text{mdc}(2m^2, m^2 + n^2) \\ &= \text{mdc}(2, m^2 + n^2)\end{aligned}$$

que é igual a 1 já que $m^2 + n^2$ é ímpar.

Para verificar que a é relativamente primo com b e c basta verificar que os divisores de a são 2, os divisores de m e os divisores de n , que não dividem $b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$ pois, $\text{mdc}(m, n) = 1$. \square

Todas as demais ternas pitagóricas podem ser obtidas a partir de uma tripla pitagórica primitiva, multiplicando seus termos por uma constante.

Proposição 2.4. *Existem infinitas ternas pitagóricas primitivas.*

Demonstração. Dadas as ternas da forma $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$, ou seja, com $n = 1$. Se usarmos $m = 2k$ e k primo, temos que $a = 2m = 4k$ só possui dois divisores primos, a saber 2 e k . Porém $b = m^2 - 1$ e $c = m^2 + 1$ são ímpares, logo $2 \nmid b$ e $2 \nmid c$, além disso $k \nmid b$ e $k \nmid c$. Portanto a, b, c são relativamente primos entre si. Como existem infinitos primos k . Logo existem infinitas ternas pitagóricas primitivas da forma $(2m, m^2 - 1, m^2 + 1)$. \square

Mostraremos agora alguns exemplo que podem ser resolvido utilizando ternas pitagóricas.

Exemplo 2.5. Vamos mostrar que existem naturais x, y e z tais que

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 = (x + z)^2.$$

Como x, y e z são números naturais temos que $x + y, y + z$ e $x + z$ também são, portanto a terna $(x + y, y + z, x + z)$ é uma terna pitagórica.

No primeiro caso suponha que seja uma terna pitagórica primitiva. Pelo Teorema 2.3 temos que existem m e n tais que $x + y = 2mn, y + z = m^2 - n^2$ e $x + z = m^2 + n^2$. Assim teremos

$$x = 2mn - y \quad \text{e} \quad z = m^2 - n^2 - y,$$

como $x + z = m^2 + n^2$, então

$$x + z = 2mn + m^2 - n^2 - 2y.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}m^2 + n^2 &= x + z = 2mn + m^2 - n^2 - 2y \\ y &= mn - n^2\end{aligned}$$

e portanto temos que

$$x = mn + n^2 \quad \text{e} \quad z = m^2 - mn.$$

No segundo caso, se $(x + y, y + z, x + z)$ não for uma terna pitagórica primitiva então existem $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tais que

$$(x + y, y + z, x + z) = (d(a + b), d(b + c), d(a + c))$$

e $((a + b), (b + c), (a + c))$ é um terna pitagórica primitiva. Além disso temos que

$$x = da, \quad y = db \quad \text{e} \quad z = dc.$$

Logo pelo caso anterior temos que existem n e m tais que

$$a = mn + n^2, \quad b = mn - n^2 \quad \text{e} \quad c = m^2 - mn.$$

Portanto temos que

$$x = d(mn + n^2), \quad y = d(mn - n^2) \quad \text{e} \quad z = d(m^2 - mn).$$

Exemplo 2.6. Vamos mostrar que não existem inteiros ímpares x, y e z tais que

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 = (x + z)^2.$$

Usaremos as expressões do exemplo anterior, ou seja, existem d, n e m tais que

$$x = d(mn + n^2), \quad y = d(mn - n^2) \quad \text{e} \quad z = d(m^2 - mn),$$

com m e n de paridades distinta.

Se d for par temos que x, y e z são pares. Se d for ímpar, teremos 2 casos:

- 1º caso. n par e m ímpar. Teremos que x e y pares e z ímpar.
- 2º caso. n ímpar e m par. Teremos que x e y ímpares e z par.

Portanto, em todos os casos teremos ao menos um dos valores um número par.

Proposição 2.7. *Sejam x, y e z inteiros tais que $x^2 + y^2 = z^2$, então xy é múltiplo de 6.*

Demonstração. Observemos que (x, y, z) é uma terna pitagórica. Podemos considerar, sem perda de generalidade que a terna é primitiva, ou seja, que $x = 2mn$ e $y = m^2 - n^2$, assim x é múltiplo de 2. Se m ou n for múltiplo de 3 então teremos que x múltiplo de 3 e portanto xy será múltiplo de 6.

Por outro lado teremos quatro casos possíveis:

- 1º caso. $m = 3k + 1$ e $n = 3q + 1$, teremos

$$\begin{aligned} y &= (3k + 1)^2 - (3q + 1)^2 \\ &= 9(k^2 - q^2) + 6(k - q). \end{aligned}$$

- 2º caso. $m = 3k + 1$ e $n = 3q + 2$,

$$\begin{aligned} y &= (3k + 1)^2 - (3q + 2)^2 \\ &= 9(k^2 - q^2) + 6(k - 2q) - 3. \end{aligned}$$

- 3º caso. $m = 3k + 2$ e $n = 3q + 1$,

$$\begin{aligned} y &= (3k + 2)^2 - (3q + 1)^2 \\ &= 9(k^2 - q^2) + 6(2k - q) + 3. \end{aligned}$$

- 4º caso. $m = 3k + 2$ e $n = 3q + 2$,

$$\begin{aligned} y &= (3k + 2)^2 - (3q + 2)^2 \\ &= 9(k^2 - q^2) + 12(k - q). \end{aligned}$$

Portanto, nestes casos, temos que y é múltiplo de 3. Logo como x é múltiplo de 2, temos que xy é múltiplo de 6. □

Proposição 2.8. *Em toda terna pitagórica existe ao menos um número múltiplo de 5.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3 toda terna pitagórica primitiva pode ser escrita da forma $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$, com n e m inteiros.

Se n ou m for múltiplo de 5, então $2mn$ é um múltiplo de 5.

Vamos supor que n e m não sejam múltiplos de 5. Note que o quadrado de n ou m só pode ser congruente a 1 ou 4 módulo 5, pois

$$\begin{aligned} 1^2 &\equiv 1 \pmod{5} \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{5} \\ 3^2 &\equiv 4 \pmod{5} \\ 4^2 &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

Logo $m^2 - n^2 \equiv 0 \pmod{5}$ ou $m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod{5}$. Assim temos que $m^2 - n^2$ ou $m^2 + n^2$ é um múltiplo de 5. □

Definição 2.9. *Triângulo pitagórico* é um triângulo retângulo cujas medidas dos lados são números inteiros.

Definição 2.10. Um *triângulo pitagórico primitivo* é um triângulo cuja medida dos lados forma uma terna pitagórica primitiva.

A partir destas definições poderemos contar quantos triângulos pitagóricos primitivos existem, dado uma medida fixa.

Proposição 2.11. *O número de triângulos pitagóricos primitivos dado um cateto de lado X ímpar é dado pela fórmula*

$$2^{d(X)-1}$$

com $d(X)$ sendo o número de primos distintos que divide X .

Demonstração. Como X é ímpar então pelo Teorema 2.3, X é da forma

$$X = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n).$$

Basta contar o número de soluções de

$$X = u.v, \tag{2.3}$$

com $u = m - n$ e $v = m + n$. Por outro lado se existir um primo p tal que $p|u$ e $p|v$ não iremos gerar uma terna pitagórica primitiva, pois teremos que $\text{mdc}(n, m) \neq 1$. Logo para cada primo teremos então que ou p divide u ou p divide v .

Assim para cada primo p teremos que escolher se p compõem u ou p compõem v , e como temos sempre dois casos $X = u_1.v_1$ e $X = u_2.v_2$ tais que $u_1 = v_2$ e $v_1 = u_2$ que gera a mesma terna pitagórica, teremos $2^{d(X)-1}$ soluções para (2.3). Assim existem $2^{d(X)-1}$ ternas pitagóricas primitivas com X sendo um dos catetos. Lembrando que $\text{mdc}(u, v) = 1$ portanto $\text{mdc}(m, n) = 1$. \square

Exemplo 2.12. Vamos determinar o número de triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual 21. Temos que $d(21) = 2$, logo existem dois pares de divisores distintos, sendo (1,21) e (3,7). Ou seja, existem dois triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual a 21. Para determinar estes triângulos basta resolver os sistemas

$$\begin{cases} m + n = 21 \\ m - n = 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} m + n = 7 \\ m - n = 3 \end{cases} \tag{2.5}$$

Resolvendo (2.4) temos que $m = 11$ e $n = 10$ e gera o triângulo pitagórico de lados (220, 21, 221). Resolvendo (2.5) temos que $m = 5$ e $n = 2$ e gera o triângulo pitagórico de lados (20, 21, 29). Logo os triângulo (20, 21, 29) e (220, 21, 221) são os únicos triângulos pitagóricos primitivos com um cateto medindo 21.

Exemplo 2.13. Vamos determinar o número de triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual 45. Temos que $d(45) = 2$, logo existem dois pares de divisores distintos primos entre si, sendo eles (1,45) e (5,9). Ou seja, existem dois triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual a 45. Para determinar estes triângulos basta resolver os sistemas

$$\begin{cases} m + n = 45 \\ m - n = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} m + n = 9 \\ m - n = 5 \end{cases} \quad (2.7)$$

Resolvendo (2.6) temos que $m = 23$ e $n = 22$ e gera o triângulo pitagórico de lados (1012, 45, 1013). Resolvendo (2.7) temos que $m = 7$ e $n = 2$ e gera o triângulo pitagórico de lados (28, 45, 53). Logo os triângulo (1012, 45, 1013) e (28, 45, 1013) são os únicos triângulos pitagóricos primitivos com um cateto medindo 45.

Observemos que o triângulo de lados (108, 45, 117) é pitagórico mas não é primitivo.

Proposição 2.14. *O número de triângulos pitagóricos primitivos dado um cateto de lado X par é dado pela forma*

$$C(2^{a+1}M) = \begin{cases} 0, & \text{se } a = 0; \\ 2^{d(M)}, & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

com $X = 2^{a+1}M$ e M ímpar.

Demonstração. Devemos contar de quantas forma podemos escrever X . Como X é par, temos que $X = 2mn$ com m e n de paridades distintas. Logo se $\frac{X}{2}$ for ímpar, não existe nenhum triângulo pitagórico primitivo que tenha X como um de seus catetos. Escrevendo $X = 2^{a+1}M$, onde M é ímpar e $a \geq 1$, assim podemos definir

$$M = u \cdot v \quad (2.8)$$

tal que $m = 2^a u$ e $sn = v$. Assim basta encontrar o número de soluções de (2.8) tal que $\text{mdc}(u, v) = 1$. Logo para cada primo p que divide M temos que ou $p|u$ ou $p|v$.

Logo existem $2^{d(M)}$ ternas pitagóricas primitivas com X sendo um dos catetos. \square

Exemplo 2.15. Vamos determinar o número de triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual 12.

Como $X = 12$, logo $M = 3$ e $d(M) = 1$, ou seja, existem dois triângulos pitagóricos primitivos que possui 12 como um de seus catetos. Além disso, temos que $3 = 1 \times 3$ e assim podemos tomar o par (m, n) como sendo (6,1) ou (3,2), que geram os triângulos com os lados (12, 35, 37) e (12, 5, 13).

Exemplo 2.16. Vamos determinar o número de triângulos pitagóricos primitivos com cateto igual 180.

Como $X = 4$, logo $M = 45$ e $d(M) = 2$, ou seja, existem quatro triângulos pitagóricos primitivos que possui 180 como um de seus catetos. Além disso, temos que $45 = 1 \times 45$ e $45 = 5 \times 9$ assim podemos tomar o par (m, n) como sendo $(45, 2)$, $(10, 9)$, $(18, 5)$ ou $(90, 1)$, que geram respectivamente os triângulos com os lados $(180, 2021, 2029)$, $(180, 19, 181)$, $(180, 299, 349)$ e $(180, 8099, 8101)$.

Observemos que os triângulos de lados $(180, 189, 261)$, $(180, 891, 909)$ são pitagóricos mas não são primitivos.

Proposição 2.17. *Se N é par ou é divisível por um primo da forma $p = 4k + 3$ então não existe triângulo pitagóricos primitivos com hipotenusa N .*

Demonstração. As únicas ternas pitagóricas primitivas possíveis são tais que n e m satisfazem $N = m^2 + n^2$. Se N é par, pelo Teorema 2.3 temos que não existe ternas pitagóricas primitivas com hipotenusa N . Se N possuir um divisor da forma $N = 4q + 3$, pela Proposição 1.12, não possui nenhum triângulo pitagórico primitivo com hipotenusa N . □

Proposição 2.18. *Se N é da forma $N = p^r$, com $r \in \mathbb{N}$ e p primo tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$, então existe pelo menos um triângulo pitagórico primitivo dada à hipotenusa de medida N .*

Demonstração. Seja $p = x^2 + y^2$ primo, com $x < y$ tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$ temos que $\text{mdc}(x, y) = 1$ e além disso temos que x e y tem paridades distintas, pois caso contrário teríamos p um número par.

Mostraremos por indução em $r \in \mathbb{N}$

Se $r = 1$, isto é, $N = p$, pelo Teorema 1.14 só existe uma terna pitagórica primitiva com N sendo a hipotenusa.

Se N é da forma $N = p^2$, podemos escrever $N = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2$ e teremos que $\text{mdc}(2xy, x^2 - y^2) = 1$, além disso $2xy$ e $x^2 - y^2$ tem paridades distintas, logo podemos concluir que existe pelo menos um terna pitagórica primitiva com N sendo a hipotenusa. Supondo que vale para $r = k$, ou seja, $N = p^k = w^2 + v^2$, vamos mostrar que vale para $r = k + 1$, ou seja, $N = p^{k+1}$.

$$N = p^k \cdot p = (ux + vy)^2 + (|uy - vx|)^2.$$

Concluir que dado $N = p^r$ temos que existe ao menos uma terna pitagórica primitiva. □

Exemplo 2.19. Vamos verificar se existe triângulo pitagórico primitivo com a hipotenusa igual 625.

Como $625 = 5^4$ e $5 = 4 + 1$ teremos então um triângulo pitagórico primitivo com hipotenusa igual a 65. Por outro lado temos que $5 = 2^2 + 1^2$, logo podemos escrever $625 = 24^2 + 7^2$, daí teremos $m = 24$ e $n = 7$ que gera a terna pitagórica primitiva $(336, 527, 625)$.

Observação 2.20. A demonstração que existe exatamente uma terna pitagórica primitiva, para a Proposição 2.18, exige resultado que não serão abordados neste trabalho. Além disso o número de triângulo pitagórico primitivo com N sendo a hipotenusa com $N = p_1^{n_1} \cdots p_i^{n_i}$ e $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ é dada por 2^{i-1} , no entanto não iremos demonstrar neste trabalho, mais pode ser estudada no livro [4].

Exemplo 2.21. Vamos verificar se existe triângulo pitagórico primitivo com a hipotenusa igual 169.

Como $169 = 13^2$ e $13 = 3 \cdot 4 + 1$ teremos então uma terna pitagórica primitiva com hipotenusa igual a 169. Por outro lado temos que $13 = 3^2 + 2^2$, logo podemos escrever $169 = 12^2 + 5^2$, daí teremos $m = 12$ e $n = 5$ que gera a terna pitagórica primitiva $(120, 119, 169)$.

Capítulo 3

Ternas pitagóricas e geometria

Neste capítulo iremos tratar das propriedades geométricas das ternas pitagóricas.

3.1 Triângulo pitagórico e ângulos

Podemos observar que em um triângulo retângulo ABC, com lados medindo a, b e c , o $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ e $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ são números racionais (veja a Figura 3.1).

Definição 3.1. Um ângulo é dito pitagórico se o seno e o cosseno são números racionais.

Observemos que um ângulo agudo α é pitagórico se, e somente se, α é um dos ângulos internos de um triângulo pitagórico.

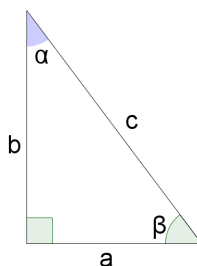


Figura 3.1: Triângulo

Proposição 3.2. *Seja α um ângulo trigonométrico. Então:*

- (i) α é um ângulo pitagórico se, e somente se, o seu complementar é ângulo pitagórico.
- (ii) Se α é um ângulo pitagórico então $k\pi \pm \alpha$ também é ângulo pitagórico para todo $k \in \mathbb{Z}$. Em particular o seu suplementar é um ângulo pitagórico.

Demonstração. (i) No triângulo ABC na Figura 3.2, de hipotenusa c e catetos a e b , por hipótese, seja β é o complementar de α . Note que $\text{sen } \alpha = \cos \beta$ e $\cos \alpha = \text{sen } \beta$, logo α é ângulo pitagórico se, e somente se, β é pitagórico.

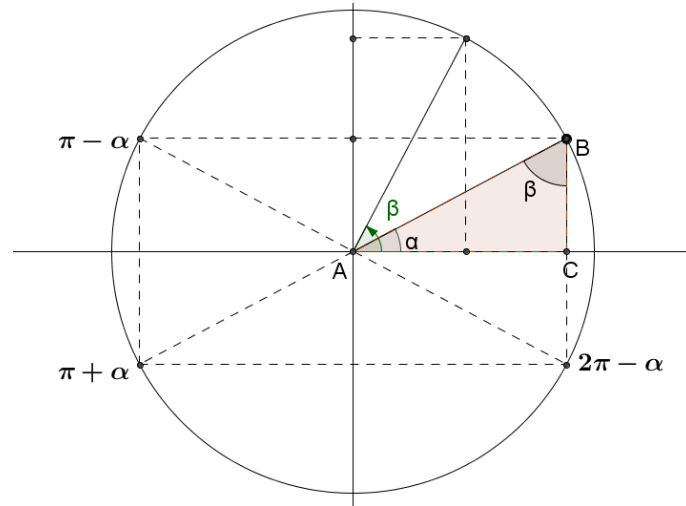


Figura 3.2: Ângulo complementar e ângulo suplementar.

(ii) Observe pela Figura 3.2 que α e os ângulos $\theta = k\pi \pm \alpha$ tem os mesmos senos e cossenos a menos de sinal, Assim se α é ângulo pitagórico, então θ é ângulo pitagórico.

□

Proposição 3.3. Se α e β são ângulos pitagóricos, então $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ são ângulos pitagóricos.

Demonstração. Suponhamos que α e β são ângulos pitagóricos, ou seja, $\text{sen } \alpha = \frac{a_1}{c_1}$, $\cos \alpha = \frac{b_1}{c_1}$, $\text{sen } \beta = \frac{a_2}{c_2}$ e $\cos \beta = \frac{b_2}{c_2}$ são racionais. Assim teremos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta \\ &= \frac{a_1}{c_1} \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_1}{c_1} \frac{a_2}{c_2} \\ &= \frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{c_1 c_2}. \end{aligned}$$

Da mesma forma teremos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \\ &= \frac{b_1}{c_1} \frac{b_2}{c_2} - \frac{a_1}{c_1} \frac{a_2}{c_2} \\ &= \frac{b_1 b_2 - a_1 a_2}{c_1 c_2}. \end{aligned}$$

Logo $\sin(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$ são racionais, portanto $\alpha + \beta$ é um ângulo pitagórico. Analogamente,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{a_1 b_2}{c_1 c_2} - \frac{b_1 a_2}{c_1 c_2} \\ &= \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{c_1 c_2},\end{aligned}$$

alem disso,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2} + \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} \\ &= \frac{b_1 b_2 + a_1 a_2}{c_1 c_2}.\end{aligned}$$

Logo $\sin(\alpha - \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$ são racionais, portanto $\alpha - \beta$ é um ângulo pitagórico. □

Proposição 3.4. *Se α é um ângulo pitagórico então $n\alpha$ é ângulo pitagórico para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução em n .

Para $n = 0$ ou $n = 1$ não há nada a fazer.

Supondo que vale para $n = k$, ou seja, $\sin(k\alpha)$ e $\cos(k\alpha)$ são racionais. Vamos mostrar que vale para $n = k + 1$, isto é, mostrar que $\sin((k + 1)\alpha)$ e $\cos((k + 1)\alpha)$ são racionais.

$$\begin{aligned}\sin((k + 1)\alpha) &= \sin(k\alpha + \alpha) \\ &= \sin(k\alpha) \cos \alpha + \cos(k\alpha) \sin \alpha,\end{aligned}$$

e alem disso,

$$\begin{aligned}\cos((k + 1)\alpha) &= \cos(k\alpha + \alpha) \\ &= \cos(k\alpha) \cos \alpha - \sin(k\alpha) \sin \alpha.\end{aligned}$$

Como por hipótese temos que o seno e o cosseno do ângulo $k\alpha$ são racionais, logo $\sin((k + 1)\alpha)$ e $\cos((k + 1)\alpha)$ são racionais.

Para $n < 0$, temos

$$\begin{aligned}\cos(nk) &= \cos(-(-nk)) = \cos(-nk) \\ \sin(nk) &= \sin(-(-nk)) = -\sin(-nk),\end{aligned}$$

que são racionais pois $-n$ é um inteiro positivo. □

Teorema 3.5. *Os únicos ângulos pitagóricos da forma α° com α sendo um número inteiro são os múltiplos de 90° .*

Demonstração. Sabemos que os ângulos 0° e 90° e seus múltiplos são ângulo pitagóricos. Iremos mostrar que os ângulos que não são múltiplos de 90° não são ângulos pitagóricos. Para isso basta verificar todos os ângulos α° , com $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$, pois sabemos que os ângulos maiores que 45° são complementares ou suplementares deste ângulos. Temos que os ângulos 30° , 45° e 60° não são pitagóricos, pois $\cos 30^\circ$, $\sin 45^\circ$ e $\sin 60^\circ$ não são números racionais. Assim pela Proposição 3.4 temos que os ângulos divisores de 30° , 45° e 60° não são ângulos pitagóricos. Ou seja, temos que os ângulos

$$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ \text{ e } 45^\circ$$

não são pitagóricos.

Além disso, temos que os suplementares de 30° , 45° e 60° não são pitagóricos, isto é 150° , 135° e 120° não são ângulos pitagóricos e portanto seu divisores não são pitagóricos, ou seja, temos ainda que o ângulo 25° não é pitagórico, pois é um divisor de 150° , o ângulo 27° não é ângulo pitagórico, pois é divisor de 135° e os ângulos 8° e 24° não são pitagóricos, pois são divisores de 120° .

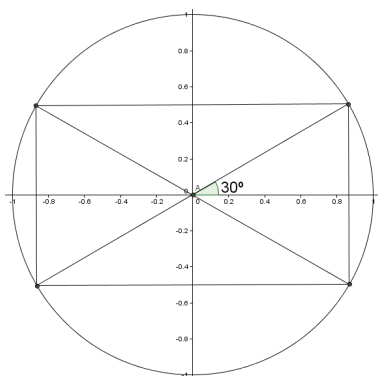


Figura 3.3: Relação entre os ângulos $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ e 330°

Temos ainda, pela Figura 3.3 que os ângulos de 210° e 330° possui o mesmo valor do seno e do cosseno de 30° , a menos de sinal, portanto não são ângulos pitagóricos e seus divisores também não são. Logo temos ainda que os ângulo de 7° , 14° , 21° , 35° e 42° não são ângulos pitagóricos, pois são divisores de 210° , além disso temos que 11° , 22° e 33° não são ângulos pitagóricos, pois são divisores de 330° .

Desta mesma forma temos que o ângulo de 240° possui o mesmo seno e cosseno de 60° , a menos de sinal, portanto seus divisores não são ângulos pitagóricos, isto é, 16° e 40° não são ângulos pitagóricos.

Por outro lado, pela Proposição 3.2, temos que 88° não é ângulo pitagórico, pois é complementar de 2° . Portanto podemos concluir que seus divisores não são ângulos pitagóricos, isto é, 44° também não é ângulo pitagórico por ser divisor de 88. Com o mesmo argumento vamos indicar so outros ângulos α que não são pitagóricos com $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Observe a Tabela 3.1.

α	Complementar de α	Divisores do complementar de α	Novos ângulos não pitagóricos
2°	88°	1, 2, 4, 8, 11, 22, 44 e 88	44°
3°	87°	1, 3, 29 e 87	29°
4°	86°	1, 2, 43 e 86	43°
5°	85°	1, 5, 17 e 65	17°
6°	84°	1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28,42 e 84	28°
8°	82°	1, 2, 41 e 82	41°
12°	78°	1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 e 78	$13^\circ, 26^\circ$ e 39°
14°	76°	1, 2, 4, 19, 38 e 76	19° e 38°
16°	74°	1, 2, 37 e 74	37°
21°	69°	1, 3, 23 e 69	23°
22°	68°	1, 2 4, 17, 34 e 68	34°
26°	64°	1, 2, 4, 16, 32 e 64	32°
28°	62°	1, 2, 31 e 62	31°

Tabela 3.1: Ângulos não pitagóricos.

Para concluir a demonstração, pela Tabela 3.1 resta verificar se os ângulos 18° e 36° são ângulos pitagóricos ou não.

Vamos calcular seno e cosseno de 18° . Para este calculo usaremos como referência o livro Carmo[2].

Considere o triângulo ABC da Figura 3.4 com $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $\widehat{BAC} = 36^\circ$. Traçando a bissetriz CD de \widehat{ACB} , podemos calcular todos os ângulos da figura. Como os triângulos CDB e CDA são isósceles, temos $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ e, como os triângulos CDB e ABC são semelhantes, temos

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}},$$

isto é,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x},$$

o que nos leva a equação do 2° grau $x^2 + x - 1 = 0$, cuja as soluções são $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e

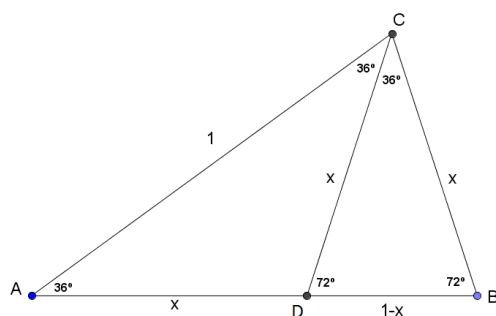


Figura 3.4:

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

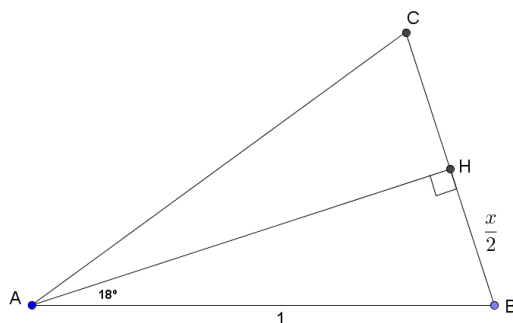


Figura 3.5:

Traçando a altura AH do triângulo isóscele ABC (Figura 3.5), temos $\text{sen } 18^\circ = \frac{HB}{AB} = \frac{x}{2}$, ou seja

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2 18^\circ + \text{cos}^2 18^\circ = 1$, donde concluímos que

$$\text{cos } 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Portanto o ângulo de 18° não é ângulo pitagórico.

Podemos calcular o seno de 36° pela formula $\text{sen } 2\theta = 2\text{sen } \theta \text{cos } \theta$, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{sen } 36^\circ &= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \end{aligned}$$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2 36^\circ + \text{cos}^2 36^\circ = 1$, obtemos

$$\text{cos } 36^\circ = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Portanto o ângulo de 36° também não é pitagórico. □

Pela Proposição 2.4, existem infinitos ângulos pitagóricos. Por outro lado o Teorema 3.5 no diz que os ângulos que são mais utilizados em exercícios do ensino médio não são pitagóricos. Veremos na próxima seção que o conjunto dos ângulos pitagóricos é denso em \mathbb{R} .

3.2 Ângulos pitagóricos e pontos racionais da circunferência

Nesta seção apresentaremos métodos para encontrar pontos racionais na circunferência de centro na origem e raio 1.

Inicialmente observemos que $a^2 + b^2 = c^2$ é equivalente à equação $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, isto é, o ponto $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ é um ponto com coordenadas racionais da circunferência C com centro na origem e raio 1, se a, b e c são racionais.

Notemos que o ponto $(0,-1)$ pertence a circunferência. Se temos outro ponto (r, s) sobre a circunferência que também é racional, distinto de $(0,1)$, então a reta t que passa pelos pontos $(0,-1)$ e (r, s) corta a circunferência apenas nesses pontos e tem inclinação $\frac{s+1}{r}$, que é um número racional.

Agora pensemos ao contrário, peguemos uma reta t que passa por $(0,-1)$ e tem inclinação racional $\frac{r}{s}$. Ela cortará a circunferência C em um ponto (a, b) de coordenadas racionais? Podemos responder esta pergunta resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{r}{s}x - 1 \end{cases}$$

assim, substituindo y por $\frac{r}{s}x - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + \left(\frac{r}{s}x - 1\right)^2 = x^2 + \frac{r^2}{s^2}x^2 - 2\frac{r}{s}x + 1 \\ \left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)x^2 - 2\frac{r}{s}x &= 0 \\ \left(\left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)x - 2\frac{r}{s}\right)x &= 0. \end{aligned}$$

Logo um solução é $x = 0$, que já era esperada, enquanto a outra solução é

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)x - 2\frac{r}{s} &= 0 \\ \frac{s^2 + r^2}{s^2}x &= 2\frac{r}{s} \\ a = x &= \frac{2rs}{s^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Substituindo em y temos

$$\begin{aligned} y &= \frac{r}{s} \frac{2rs}{s^2 + r^2} - 1 \\ y &= \frac{2r^2 - s^2 - r^2}{s^2 + r^2} \\ b = y &= \frac{r^2 - s^2}{s^2 + r^2} \end{aligned}$$

logo a e b são números racionais.

Vamos mostrar que existe uma correspondência bijetiva entre os ângulos pitagóricos e as retas $y = \alpha x - 1$ com α racional.

Teorema 3.6. *Existe uma correspondência bijetiva entre os ângulos pitagóricos $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e os números racionais positivos \mathbb{Q}_+^* .*

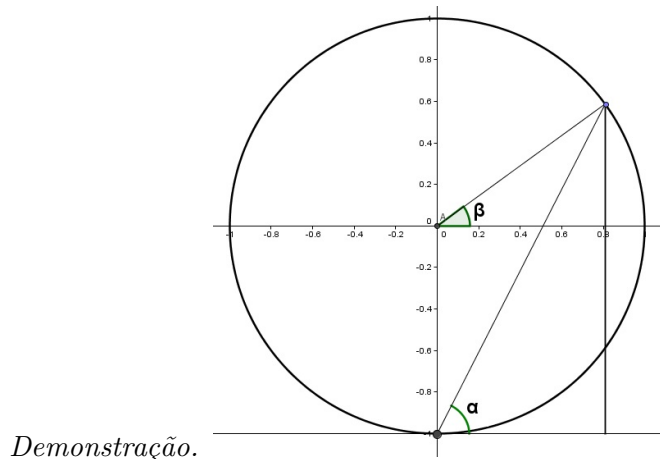


Figura 3.6:

Podemos observar na Figura 3.6 que o ponto é dado por $(\cos \beta, \sin \beta)$. Por outro lado, temos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta + 1}{\cos \beta}$ e β pitagórico implica $\operatorname{tg} \alpha$ é racional.

Definindo a função $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$, no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Para valores β_1 e β_2 distintos definimos pontos distintos na circunferência de raio 1, além disso definimos inclinações α_1 e α_2 distintas. Para isso, basta observar que a função f é crescente, isto é, a primeira derivada é positiva, ou seja,

$$f'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} > 0.$$

Logo a função é injetiva, pois é estritamente crescente.

A função f tem inversa

$$\begin{aligned} g : (0, +\infty) &\longrightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\longmapsto \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right). \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} g \circ f &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)^2 - 1}{\frac{2(\sin x + 1)}{\cos x}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{2\sin x + 2}{\cos x}} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin^2 x + 2\sin x + \sin^2 x - 1}{\cos x(2\sin x + 2)} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x(2\sin x + 2)}{\cos x(2\sin x + 2)} \right) \\ &= \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x} \\ &= \operatorname{tg} x + \sec x = x \\ &= \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

Para $x > 0$ temos a composição $f \circ g$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{2x} + \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} &= \frac{x^2 - 1}{2x} + \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{2x} + \frac{x^2 + 1}{2x} \\ &= \frac{2x^2}{2x} \\ &= x. \end{aligned}$$

Se $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é ângulo pitagórico então temos que $\operatorname{sen} \beta$ e $\cos \beta$ são racionais logo $f(\beta) = \frac{\operatorname{sen} \beta + 1}{\cos \beta}$ é racional.

Por outro lado x é racional temos que $\frac{x^2 - 1}{2x}$ é racional, portanto $\frac{\frac{x^2 - 1}{2x}}{\frac{x^2 + 1}{2x}}$ é racional. Logo $\operatorname{sen} \beta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ e $\cos \beta = \frac{2x}{x^2 + 1}$ são racionais, pois $\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2 = 1$ e conseqüentemente temos que β é ângulo pitagórico. \square

Com estes resultados podemos responder a pergunta citada anteriormente.

Proposição 3.7. *O conjunto dos ângulos pitagóricos é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração. Usaremos, para facilitar os cálculos, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, para os demais valores seguem por simetria do círculo trigonométrico.

Da função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x}$, obtemos a função inversa $g(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$. Lembramos que a função g é crescente neste intervalo, portanto tomando dois valores $\gamma < \delta$ encontraremos dois pontos $(\cos \gamma, \operatorname{sen} \gamma)$ e $(\cos \delta, \operatorname{sen} \delta)$. Mais com o conjunto \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} temos que existe $x_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $\gamma < x_1 < \delta$, isto é, como a função g é crescente temos $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma}\right) < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x_1^2 - 1}{2x_1}\right) < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\delta^2 - 1}{2\delta}\right)$. Como o ângulo $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x_1^2 - 1}{2x_1}\right)$ é pitagórico temos que o conjunto dos ângulos pitagóricos é denso.

Do Teorema 3.6 concluímos que cada número racional está associado a um ponto racional no círculo trigonométrico, e reciprocamente ponto racional do círculo trigonométrico esta associado a um número racional. Portanto, cada ângulo pitagórico esta associado a um número racional. Como o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é denso no conjunto dos números reais \mathbb{R} , então o conjunto dos ângulos pitagóricos é denso \mathbb{R} . \square

3.3 Pontos racionais nas cônicas

Utilizando o mesmo argumento da sessão anterior podemos achar pontos racionais em uma cônica, assim podemos relacionar estes pontos racionais a ternas pitagóricas. Veja os exemplos:

Exemplo 3.8. Vamos achar pontos racionais da elipse de equação $x^2 + 3y^2 = 13$.

Vamos encontrar pontos de coordenadas racionais que pertencem a elipse $x^2 + 3y^2 = 13$. Observem que a elipse tem seus focos no eixo x do plano cartesiano. Além disso, o ponto $(1,2)$ pertence a esta cônica. Assim, temos que a reta que passa pelo ponto $(1,2)$ e tem inclinação racional $\frac{m}{n}$ passa por um ponto de coordenadas racionais da elipse. A equação da reta é dada por:

$$y = \frac{m}{n}(x - 1) + 2 = \frac{m}{n}x + \frac{2n - m}{n}. \quad (3.1)$$

Logo os pontos de intersecção da elipse com a reta, são as soluções do sistema de equações

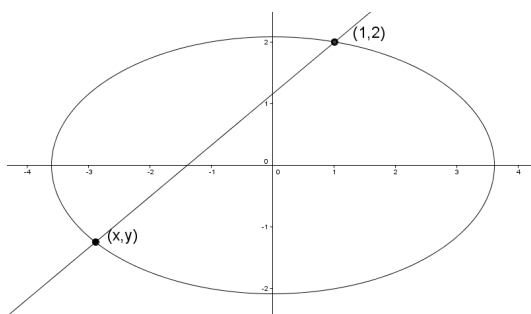


Figura 3.7: Elipse

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13 \\ y = \frac{m}{n}x + \frac{2n-m}{n} \end{cases}$$

Substituindo y na equação da elipse obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + 3\left(\frac{m}{n}x + \frac{2n-m}{n}\right)^2 &= 13 \\ \frac{n^2 + 3m^2}{n^2}x^2 + \frac{12mn - 6m^2}{n^2}x + \frac{12n^2 - 12nm + 3m^2 - 13n^2}{n^2} &= 0 \\ x^2 + \frac{12mn - 6m^2}{n^2 + 3m^2}x + \frac{12n^2 - 12nm + 3m^2 - 13n^2}{n^2 + 3m^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como $(1,2)$ é um dos pontos de intersecção da elipse com a reta temos que $x = 1$ é solução da equação (3.2). Usando o fato de que o coeficiente independente de uma equação do

2º grau, cujo coeficiente do termo de grau 2 é 1, é o produto de suas raízes, temos que a outra raiz é

$$x = \frac{12n^2 - 12nm + 3m^2 - 13n^2}{n^2 + 3m^2} = \frac{-n^2 - 12nm + 3m^2}{n^2 + 3m^2},$$

substituindo em 3.1 teremos

$$y = \frac{m - n^2 - 12nm + 3m^2}{n} \frac{1}{n^2 + 3m^2} + \frac{2n - m}{n} = \frac{2n^2 - 2nm - 6m^2}{n^2 + 3m^2}.$$

Logo teremos o ponto de coordenada racionais

$$\left(\frac{-n^2 - 12nm + 3m^2}{n^2 + 3m^2}, \frac{2n^2 - 2nm - 6m^2}{n^2 + 3m^2} \right) \quad (3.3)$$

Na equação (3.1) temos que $n \neq 0$, contudo se substituirmos $n = 0$ com $m \neq 0$ em (3.3) encontraremos o ponto (1,-2) que pertence à elipse devido a simetria com relação ao eixo Ox .

Exemplo 3.9. Vamos achar pontos racionais da elipse de equação $16x^2 + 9y^2 = 25$.

Vamos encontrar pontos de coordenadas racionais que pertencem a elipse $16x^2 + 9y^2 = 25$. Observem que a elipse possui seus focos no eixo das ordenadas do plano cartesiano. Além disso o ponto (1,1) pertence a esta cônica. Assim, temos que a reta que passa pelo ponto (1,1) e tem inclinação $\frac{m}{n}$ passa por um ponto de coordenadas racionais da elipse e tem equação:

$$y = \frac{m}{n}(x - 1) + 1 = \frac{m}{n}x + \frac{n - m}{n}. \quad (3.4)$$

Logo os pontos de intersecção da elipse com a reta, são as solução do sistema de equações

$$\begin{cases} 16x^2 + 9y^2 = 25 \\ y = \frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n} \end{cases}$$

Substituindo y na equação da elipse obtemos

$$\begin{aligned} 16x^2 + 9\left(\frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n}\right)^2 &= 25 \\ \frac{16n^2 + 9m^2}{n^2}x^2 + 18\frac{mn - m^2}{n^2}x + \frac{9n^2 - 18nm + 9m^2 - 25n^2}{n^2} &= 0 \\ x^2 + 18\frac{mn - m^2}{16n^2 + 9m^2}x + \frac{-16n^2 - 18nm + 9m^2}{16n^2 + 9m^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como (1,1) é um dos pontos de intersecção da elipse com a reta temos que $x = 1$ é solução da equação (3.5). Usando o fato de que o coeficiente independente de uma equação do 2º grau é o produto de raízes, temos que a outra raiz é

$$x = \frac{-16n^2 - 18nm + 9m^2}{16n^2 + 9m^2}$$

substituindo em (3.4) teremos

$$y = \frac{m - 16n^2 - 18nm + 9m^2}{n(16n^2 + 9m^2)} + \frac{n - m}{n} = \frac{16n^2 - 32nm - 9m^2}{16n^2 + 9m^2}.$$

Logo teremos o ponto de coordenada racionais

$$\left(\frac{-16n^2 - 18nm + 9m^2}{16n^2 + 9m^2}, \frac{16n^2 - 32nm - 9m^2}{16n^2 + 9m^2} \right) \quad (3.6)$$

Na equação (3.4) temos que $n \neq 0$, contudo se substituirmos $n = 0$ com $m \neq 0$ em (3.6) encontraremos o ponto (1,-1) que pertence à elipse devido a simetria com relação ao eixo Ox .

Podemos encontrar ternas pitagóricas a partir de uma elipse.

Proposição 3.10. *Dada a elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$, temos que se $\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$ é uma solução, com u , w e v inteiros se, e somente se, (au, bw, cv) é uma terna pitagórica.*

Demonstração. Como $\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$ pertence a elipse então podemos substituir na equação $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$ e obtemos

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{u}{v}\right)^2 + b^2 \left(\frac{w}{v}\right)^2 &= c^2 \\ \left(\frac{a^2u^2}{v^2}\right) + \left(\frac{b^2w^2}{v^2}\right) &= c^2 \\ (au)^2 + (bw)^2 &= (cv)^2 \end{aligned}$$

Temos que (au, bw, cv) é um terna pitagórica se, e somente se $\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$ pertence a elipse. \square

Exemplo 3.11. Observemos que o ponto $\left(\frac{14}{13}, \frac{11}{13}\right)$ pertence a elipse $16x^2 + 9y^2 = 25$.

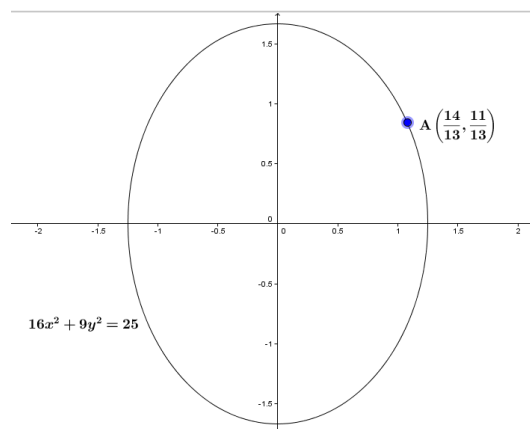


Figura 3.8: Elipse 2

Basta verificar que

$$\begin{aligned} 16\left(\frac{14}{13}\right)^2 + 9\left(\frac{11}{13}\right)^2 &= \frac{16 \cdot 196}{169} + \frac{9 \cdot 121}{169} \\ &= \frac{3136}{169} + \frac{1089}{169} \\ &= 25. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que $(4 \cdot 14, 3 \cdot 11, 5 \cdot 13) = (56, 33, 65)$ é uma terna pitagórica, segue da Proposição 3.10.

Podemos utiliza do mesmo argumento para a hipérbole. Veja os exemplos:

Exemplo 3.12. Vamos achar pontos racionais da hipérbole de equação $25x^2 - 9y^2 = 16$.

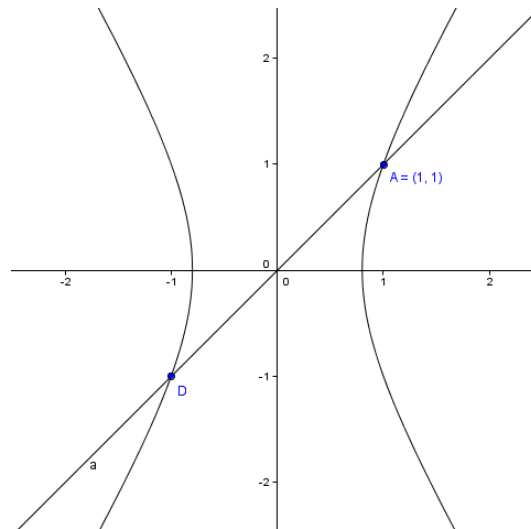


Figura 3.9: Hipérbole

Vamos encontrar pontos de coordenadas racionais que pertencem a hipérbole $25x^2 - 9y^2 = 16$. Observem que a hipérbole está centrada na origem do plano cartesiano. Além disso o ponto $(1,1)$ pertence a esta cônica. Assim, temos que a reta que passa pelo ponto $(1,1)$ e tem inclinação $\frac{m}{n}$ passa por um ponto de coordenadas racionais da hipérbole e tem equação:

$$y = \frac{m}{n}(x - 1) + 1 = \frac{m}{n}x + \frac{n - m}{n}. \quad (3.7)$$

Logo os pontos de intersecção da hipérbole com a reta, são as solução do sistema de equações

$$\begin{cases} 25x^2 - 9y^2 = 16 \\ y = \frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n} \end{cases}$$

Substituindo y na equação da hipérbole obtemos

$$\begin{aligned}
25x^2 - 9\left(\frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n}\right)^2 &= 16 \\
\frac{25n^2 - 9m^2}{n^2}x^2 + 18\frac{m^2 - nm}{n^2}x - \frac{9n^2 - 18nm + 9m^2 + 16n^2}{n^2} &= 0 \\
x^2 + 18\frac{m^2 - nm}{25n^2 - 9m^2}x - \frac{25n^2 - 18nm + 9m^2}{25n^2 - 9m^2} &= 0. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Como $(1,1)$ é um dos pontos de intersecção da hipérbole com a reta temos que $x = 1$ é uma solução da equação (3.8). Usando o fato de que o coeficiente independente de uma equação do 2º grau é o produto de raízes, temos que a outra raiz é

$$x = \frac{-25n^2 + 18nm - 9m^2}{25n^2 - 9m^2}.$$

Substituindo em (3.7) temos

$$y = \frac{m - 25n^2 + 18nm - 9m^2}{n} + \frac{n - m}{n} = \frac{25n^2 - 50nm + 9m^2}{25n^2 - 9m^2}.$$

Logo, os pontos de coordenadas racionais são da forma

$$\left(\frac{-25n^2 + 18nm - 9m^2}{25n^2 - 9m^2}, \frac{25n^2 - 50nm + 9m^2}{25n^2 - 9m^2} \right) \tag{3.9}$$

Na equação (3.7) temos que $n \neq 0$. Contudo, se substituirmos $n = 0$ com $m \neq 0$ em (3.9) encontraremos o ponto $(1,-1)$ que pertence a hipérbole $25x^2 - 9y^2 = 16$.

Proposição 3.13. *Dada a hipérbole $c^2x^2 - a^2y^2 = b^2$, temos que se $\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$ é uma solução, com u, w e v inteiros se, e somente se, (aw, bv, cu) é uma terna pitagórica.*

Demonstração. Como $\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)$ pertence a hipérbole então podemos substituir na equação $c^2x^2 - a^2y^2 = b^2$ e obtemos

$$\begin{aligned}
c^2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - a^2\left(\frac{w}{v}\right)^2 &= b^2 \\
\left(\frac{c^2u^2}{v^2}\right) - \left(\frac{a^2w^2}{v^2}\right) &= b^2 \\
(cu)^2 - (aw)^2 &= (bv)^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$(cu)^2 = (aw)^2 + (bv)^2.$$

Logo temos que (aw, bv, cu) é um terna pitagórica. □

Exemplo 3.14. Temos que $(432, 665, 793) = (12 \cdot 36, 5 \cdot 133, 13 \cdot 61)$ é uma terna pitagórica para isso basta verificar que $432^2 + 665^2 = 793^2$. Portanto temos que o ponto $\left(\frac{61}{36}, \frac{133}{36}\right)$ pertence a hipérbole $169x^2 - 25y^2 = 144$. segue da Proposição 3.13.

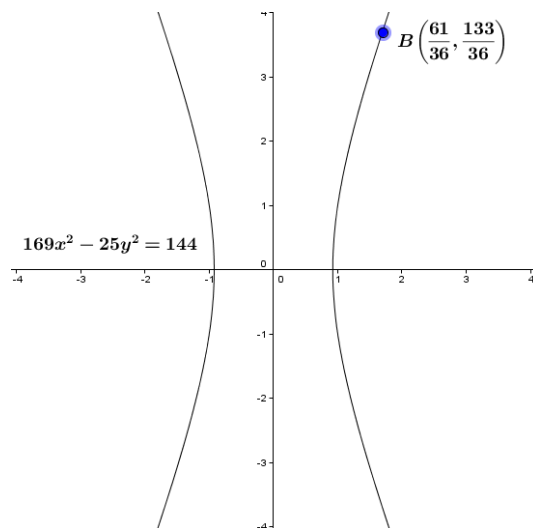


Figura 3.10: Hipérbole 2

Conclusão

Neste trabalho pesquisamos as propriedades aritméticas das ternas pitagóricas, ou seja, das triplas numéricas (a, b, c) tais que $a^2 + b^2 = c^2$, estudando as fórmulas que utilizamos para gerar estas ternas, visto que na aulas do ensino médio os professores estão muito limitados a alguns triângulos retângulos de lados inteiros, a exemplo dos triângulos que geram as ternas $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$.

Percebemos então que estas ternas estão relacionadas com ângulos internos de um triângulo retângulo, que chamamos de ângulos pitagóricos. Estudamos estes ângulos para verificar se não existiriam algum ângulo inteiro quando medido em graus, com seno e cosseno racionais. No entanto descobrimos que tal ângulo não existe, ou seja, não encontramos nenhum triângulo simples, com ângulo inteiro e seno e cosseno racionais.

Este é um resultado relevante, pois mostrar que não é tão simples encontrar triângulos que tenha ângulos pitagóricos, ou seja, com seno e cosseno racionais, ângulos estes que poderia facilitar o entendimento dos alunos em sala de aula.

Por fim verificamos que existe uma relação entre as ternas pitagóricas e os pontos de coordenadas racionais de uma circunferência e com isso também descobrimos que a partir de ternas pitagóricas também podemos encontrar pontos racionais na circunferência, na elipse e na hipérbole.

Referências Bibliográficas

- [1] MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E., *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro* - 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [2] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E., *Trigonometria/ Números Complexos* - 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [3] MUNIZ NETO, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos números* - 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] MOREIRA, C. G. T. A., *Tópicos de teoria dos números*, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [5] LIMA, E. L., *Curso de análise; V.1.* 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [6] BOYER, C. B., *História da matemática.* Trad. Elza F. G. Sao Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- [7] HEFEZ, A., *Elementos de Aritmética.* 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.