



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

DANIEL RODRIGUES MARQUES

CÁLCULO E APLICAÇÕES DE DETERMINANTES

FORTALEZA

2014

DANIEL RODRIGUES MARQUES

CÁLCULO E APLICAÇÕES DE DETERMINANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

M316c Marques, Daniel Rodrigues
Cálculo e aplicações de determinantes / Daniel Rodrigues Marques. – 2014.
48 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

Coorientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

1. Determinantes (Matemática). 2. Álgebra linear. 3. Geometria analítica. I. Título.

DANIEL RODRIGUES MARQUES

CÁLCULO E APLICAÇÕES DE DETERMINANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

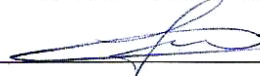
Aprovada em: 03 / 05 / 2014.

BANCA EXAMINADORA



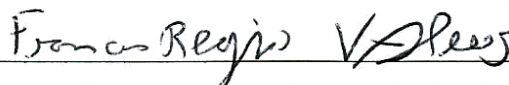
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

À minha esposa, Juliana, e minha família.

AGRADECIMENTOS

A DEUS!

À minha esposa, Juliana, por ser compreensiva e me motivar.

À minha família que sempre acreditou nos meus estudos e me incentivou a lutar por meus sonhos.

Aos meus tios, Pedro e Ernestina, que me acolheram como filho sempre que precisei.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo, por confiar no meu trabalho.

Aos professores Dr. Marcelo Ferreira de Melo, Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. José Othon Dantas Lopes, Dr. José Robério Rogério, Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. Romildo Silva, Dr. Alberto Maia e Dr. Gleison Alberto Garcia, por todas as aulas ministradas.

Aos meus colegas do curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará (UFC), pelo conhecimento, diversão e companheirismo proporcionados aos sábados.

Ao amigo e colega de trabalho Antônio de Sousa Zacarias, pela ajuda no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura oferecida.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Ao meu amigo Pedro Sérgio que me ajudou no início deste curso.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste sonho.

RESUMO

Este trabalho trata das propriedades e aplicações dos Determinantes reconhecendo-os como uma ferramenta importante para sintetizar a representação e o cálculo de algumas funções e equações na área de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Nos primeiros capítulos apresentam-se um pouco da história dos determinantes, os matemáticos que contribuíram na sua evolução e a necessidade que gerou o início do seu estudo. Prossegue-se então, a definição de determinante e o cálculo dos determinantes a partir do teorema de Laplace via recorrência, bem como o dispositivo prático de Sarrus para determinante de terceira ordem. No capítulo seguinte, são apresentadas as propriedades, num total de doze, com suas demonstrações e exemplos, pois elas serão utilizadas nas aplicações dos determinantes. Logo após, apresenta-se uma série de aplicações na área de Álgebra Linear, por exemplo: dependência e independência linear, matriz inversa, solução de sistemas lineares (Regra de Cramer) e produto vetorial; além de aplicações na área de Geometria Analítica, tais como: condição de alinhamento de três pontos, área do paralelogramo e volume do paralelepípedo. Por fim, conclui-se que é fundamental o professor da segunda série do Ensino Médio abordar em suas aulas um pouco da história, chamando a atenção dos alunos para os matemáticos que se destacaram neste estudo; expor as aplicações dos determinantes, despertando a curiosidade de seus alunos e o interesse pela área de Álgebra Linear ou Geometria Analítica.

Palavras-chave: Determinantes. Teorema de Laplace. Aplicações dos determinantes. Propriedades dos determinantes.

ABSTRACT

This paper deals with the properties and applications of determinants recognizing them as an important tool to synthesize the representation and calculation of some functions and equations in the field of Analytical Geometry and Linear Algebra. In the first chapters we present some of the history of determinants, the mathematicians who contributed in its evolution and the need that generated the beginning of their study. Then we proceed, the definition of determining and calculating the determinants from the theorem of Laplace via recurrence as well as the handy device for determining Sarrus third order. In the next chapter, we present the properties, a total of twelve, with their statements and examples, as they will be used in applications of determinants. Soon after, it presents a number of applications in linear algebra, eg, linear dependence and independence, inverse matrix, solution of linear systems (Cramer's Rule) and cross product; addition to applications in analytical geometry, such as alignment condition of three points of the parallelogram area and volume of the parallelepiped. Finally, it is concluded that it is essential the teacher of the second grade of high school address in their classes a little history, calling students' attention to mathematicians who have excelled in this study; expose the applications of determinants, arousing the curiosity of their students and interest in the area of Linear Algebra and Analytic Geometry.

Keywords: Determinants. Laplace theorem. Applications of determinants. Properties of determinants.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	UM POUCO DE HISTÓRIA DOS DETERMINANTES.....	10
3	CÁLCULO DOS DETERMINANTES.....	12
4	ABAIXAMENTO DE ORDEM.....	15
4.1	Teorema de Laplace	15
4.2	Regra de Chió.....	19
5	PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES.....	20
6	APLICAÇÕES E EXERCÍCIOS	31
6.1	Aplicações dos determinantes em Álgebra Linear.....	33
6.1.1	<i>Matriz inversa</i>	33
6.1.2	<i>Dependência e independência Linear</i>	34
6.1.3	<i>Solução de Sistemas Lineares (Regra de Cramer)</i>	35
6.1.4	<i>Produto vetorial</i>	38
6.2	Aplicações dos determinantes em Geometria Analítica.....	39
6.2.1	<i>Condição de alinhamento de três ponto</i>	39
6.2.2	<i>Equação geral da reta determinada por dois pontos dados</i>	40
6.2.3	<i>Área de um triângulo em função das coordenadas do vértice</i>	42
6.2.4	<i>Área do paralelogramo</i>	44
6.2.5	<i>Cálculo do volume do paralelepípedo</i>	45
7	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS.....	48

1 INTRODUÇÃO

Definimos como determinante um número real que se associa a matriz quadrada M , de ordem $n \times n$, sendo representado por $\det(M)$, $D(M)$, $|a_{ij}|$ ou ainda $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, por

recorrência, como será apresentado abaixo.

$$\text{Se } M = (a_{ij}) \Rightarrow D(M) = a_{ij}$$

$$\text{Se } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow D(M) = a_{11}(-1)^{1+1}D(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}D(A_{21}), \text{ sendo que } A_{ij} \text{ é a}$$

matriz formada pela matriz M excluindo a linha i e a coluna j , ou seja, $D(M) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

$$\text{Se } M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow D(M) = a_{11}(-1)^{1+1}D(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}D(A_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}D(A_{13})$$

isto é,

$$D(M) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Portanto, definimos o determinante de uma matriz $M_{n \times n}$, como o número real

$$D(M) = a_{11}(-1)^{1+1}D(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}D(A_{12}) + \dots + a_{1j}(-1)^{1+j}D(A_{1j}) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j}D(A_{1j})$$

Enfim, definimos por recorrência, pois para encontrarmos o determinante da matriz $M_{n \times n}$ devemos ter a definição do determinante da matriz $A_{(n-1) \times (n-1)}$, que são os determinantes das matrizes A_{1j} . Esta definição, também conhecida como **Desenvolvimento de Laplace**, foi desenvolvida a partir da primeira linha da matriz, o Teorema está demonstrado para o caso geral no capítulo 4 deste trabalho.

Segundo o Guia de Livro Didático PNLD 2012, o conteúdo de determinantes é iniciado na segunda série do Ensino Médio em todas as coleções aprovadas para a escolha do livro didático nas escolas públicas. Este conteúdo é precedido pelo estudo de matrizes. Contudo, apenas em uma das coleções aprovadas, o conteúdo de sistemas lineares precede o de matriz, visto que historicamente as matrizes e os determinantes surgiram como uma ferramenta essencial na resolução desses sistemas.

Os educandos aprendem inicialmente suas propriedades, a saber: a soma; o produto por escalar; o produto entre matrizes, que fornece um primeiro exemplo de operação matemática não comutativa, e a inversa de uma matriz. É bem verdade que a descoberta dos determinantes precede a das matrizes, porém é necessário que os educandos tenham um conhecimento prévio de matriz para que haja uma melhor compreensão dos determinantes.

O grande erro que muitos autores cometem, ainda segundo o Guia do PNL 2012, é escrever uma lista de regras para calcular determinantes, pouco justificadas. Nas matrizes de ordem três aparece, magicamente, a regra de Sarrus; apenas em uma das obras justifica porque o cálculo dos determinantes é feito da forma indicada. Registrar os teoremas ou propriedades e justificá-los resultam em mecanismos prontos que os educandos apenas reproduzem como está no livro, sem o interesse de saber como surgiu a ideia ou até mesmo tentar desenvolvê-la. Dessa forma, gera apenas uma memorização, sem questionamentos, e não uma aprendizagem significativa, pois é através do estudo de um caso geral que o aluno estará preparado para resolver qualquer questão.

Os determinantes surgiram a partir da necessidade de alguns matemáticos, tais como: Laplace, Sarrus, Cauchy, Leibniz, Kowa, Cramer, entre outros; que pretendiam descobrir novas formas de resolução de um sistema linear que, logo depois, em 1812, se tornaria um ramo distinto da Álgebra. Poucos livros trazem um breve resumo da história dos determinantes, fato que pode deixá-lo menos atrativo para aqueles que, possivelmente, nunca ouviram falar sobre o assunto e suas inúmeras aplicações, como por exemplo: na geometria analítica, álgebra linear, entre outras.

Atualmente, muitos educadores criticam a inclusão dos determinantes no Ensino Médio, devido ao fato de o método de escalonamento ser mais eficiente na solução de sistemas lineares; já outros sugerem que seja um tópico opcional (ou obrigatório?), devido a sua inegável importância na matemática.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DOS DETERMINANTES

O conceito de matriz desenvolvido pelos matemáticos ingleses Cayley e Sylvester (1814-1897) surgiu na metade do século XIX. O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Arthur Cayley (1821-1895), natural de Richmond, Inglaterra, em 1855. Diga-se de passagem, que o termo matriz já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário. De fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares.

Cayley utilizou duas barras verticais ladeando o quadrado para simplificar a notação de transformação linear e observou que de duas transformações sucessivas sugeriu-lhe a definição de produto de matriz, daí chegou-se a ideia de inversa e elemento neutro. Três anos depois ele introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação por escalar.

A ideia de determinante surgiu inicialmente no Japão, em 1683, quando o matemático japonês Takakazu Seki Kowa (1642- 1708), publicou sua obra *Kake fukudai no ho* em que apresenta um método geral para o cálculo de determinantes. Com a finalidade de resolver sistemas lineares, ele pretendia eliminar uma incógnita em um sistema de equação de grau n . Na Europa, no mesmo ano de 1683, o matemático alemão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) escreveu ao matemático francês L'Hospital sobre a classificação de um sistema linear em que se aplicava um novo tipo de cálculo, definindo como conhecemos hoje, **determinante**. Leibniz pretendia desenvolver um cálculo para eliminar as incógnitas na solução de um sistema linear formado por $n+1$ equações a n incógnitas.

Como vimos acima, o determinante nasceu a partir do desenvolvimento de técnicas para resolução de sistemas lineares. Uma das mais estudadas no Ensino Médio é a “Regra de Cramer”, publicada, em 1750, pelo matemático e astrônomo suíço Gabriel Cramer (1704-1752), sendo utilizada para resolver sistemas lineares de n equações a n incógnitas.

Outros matemáticos que contribuíram na aplicação e cálculo do determinante foram os franceses: Ettiéne Bézolt (1730-1783), que em 1764, sistematizou o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante; Alexandre Vandermonde (1735-1796), que no ano de 1771, fez a primeira abordagem da teoria dos determinantes, independentemente do estudo de sistemas lineares. Em 1772, Pierre Simon de Laplace (1749-

1827) demonstrou o teorema que é conhecido por “teorema de Laplace”, permitindo efetuar o cálculo dos determinantes através dos menores complementares, também chamado complementos algébricos.

O termo determinante, com o sentido atual, parece ter surgido em 1812, em um trabalho apresentado por Louis Augustin Cauchy (1789-1857), na Academia de Ciências da França. Nascido em Paris, seis semanas depois da queda da Bastilha, Cauchy contribuiu de forma significativa para a teoria dos determinantes. Dentre suas contribuições, podemos destacar a notação a_{ij} , para indicar a linha e a coluna que o termo ocupa; melhorou o desenvolvimento de Laplace dos determinantes, além da formulação do teorema do determinante do produto.

O alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851) também contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes, pois a ele é devida uma forma mais simples e elementar de desenvolver essa teoria.

Das sete coleções aprovadas pelo PNLD 2012, três delas iniciam o conteúdo pela apresentação de textos que contextualizam, histórica ou socialmente, o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo. Em muitos casos, dá-se ênfase nas motivações sociais e econômicas que levaram ao avanço do conteúdo. Em outras obras, faz-se apenas uma listagem cronológica dos fatos.

3 CÁLCULO DOS DETERMINANTES

Seja M uma matriz quadrada de ordem n , onde todos os seus elementos são números reais, podemos calcular o seu determinante da seguinte forma:

- a) Para $n = 1$, o determinante da matriz $M_{1 \times 1}$ é o próprio elemento da matriz.

$$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$$

Exemplo 3.1:

$$M = [8] \Rightarrow \det M = 8$$

$$M = [6] \Rightarrow \det M = 6$$

- b) Para $n = 2$, o determinante da matriz $M_{2 \times 2}$ é a diferença do produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 3.2:

$$\begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 5 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 30 - 12 = 18$$

- c) Para $n = 3$, o determinante da matriz $M_{3 \times 3}$ pode ser calculado utilizando-se a “regra de Sarrus”, também chamada de “regra do octógono estrelado”, esta regra refere-se a um determinante de ordem 3, podendo ser estendida a determinantes de ordem ímpar. Podemos aplicá-la seguindo os seguintes passos:

1. Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da matriz.
2. Os produtos dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos das diagonais paralelas a principal são antecidos pelo sinal de mais, já o produto dos elementos da diagonal secundária e o produto dos elementos das diagonais paralelas a secundária são precedidos pelo sinal de menos.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

- - - + + +

Ou, ainda podemos representá-la da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo 3.3:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \\ 5 & 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \det A = 2.6.8 + (-4).(-3).5 + 0 - 5.6.1 - 7.(-3).2 - 0 \\ \det A = 96 + 60 - 30 + 42 = 168 \end{matrix}$$

d) Para $n \geq 4$, na introdução apresentamos a definição de determinantes pelo desenvolvimento de Laplace, agora vamos apresentar uma demonstração rápida de determinante por permutação, para o cálculo do determinante de uma matriz $M_{n \times n}$, cujos resultados serão iguais ao determinante.

1.1 Tomemos os elementos a_{ij} , onde $i = j$ (diagonal principal).

1.2 Fixemos o índice i nos elementos a_{ij} , tal que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, e permutemos de todas $n!$ maneiras o índice j . Seja $p_1 p_2 \dots p_n$ qualquer uma dessas $n!$ permutações, daí teremos $n!$ produtos do tipo $a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$.

1.3 Seja σ o número de inversões das permutações de j em relação à permutação 1, 2, ..., n tomada como principal em cada produto.

1.4 Multipliquemos cada um dos $n!$ produtos pelo seu respectivo $(-1)^\sigma$.

1.5 Somemos algebricamente os $n!$ produtos $(-1)^\sigma a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$ que o número real obtido é o determinante da matriz.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \det = \sum (-1)^\sigma . a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

Pela definição de determinante: $\det = \sum (-1)^\sigma . a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$, vemos que cada parcela da somatória é formada por um produto de n fatores, tomando um em cada linha e em uma cada coluna, havendo, pois, elementos de todas as linhas e de todas as colunas de modo que não há dois elementos de uma mesma linha ou coluna.

Vamos ilustrar com dois exemplos, onde iremos aplicar as duas definições de modo que possamos verificar os mesmos resultados.

Exemplo 3.4:

Vamos calcular o determinante das matrizes abaixo via permutação e desenvolvimento de Laplace.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Via permutação:

Fixamos $i (a_{1j}, a_{2j})$ e escrevemos as possíveis permutamos de $j (12, 21)$, logo,

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Via desenvolvimento de Laplace pela primeira linha:

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot D(a_{22}) + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot D(a_{21}) \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Via permutação:

Fixamos $i (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$ e escrevemos as possíveis permutamos de $j (123, 132, 213, 231, 312, 321)$, logo,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\Rightarrow \det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\Rightarrow \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Via desenvolvimento de Laplace pela primeira linha:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \det A &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Observação¹: Todas as definições apresentadas (via Laplace ou via permutações) conduzem à mesma forma n-linear alternada em \mathbb{R}^n , que é, precisamente, a função determinante.

4 ABAIXAMENTO DE ORDEM

Verificamos no capítulo anterior como se calcula o determinante de 1ª, 2ª e 3ª ordem. Foi demonstrada a forma geral para o cálculo de ordem n , onde foi dada a definição de determinante no capítulo em que iniciamos o Teorema de Laplace por recorrência, quando fixamos a linha 1. Agora, vamos definir para um caso particular. Iremos apresentar algumas regras que permitem o abaixamento de ordem, ou seja, dada uma matriz M de ordem n podemos calcular o seu determinante usando matrizes de ordem $n-1$ e, aplicando sucessivamente este raciocínio, chegaremos às matrizes de 3ª ordem, onde finalmente podemos aplicar a regra de Sarrus.

4.1. Teorema de Laplace

Menor complementar de um elemento: Dada uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 2$, denominamos de menor complementar de um elemento a_{ij} o determinante da submatriz de M , obtida pelas eliminações da linha i e coluna j do elemento escolhido de M , a qual representaremos por M_{ij}^* .

Exemplo 4.1:

O menor complementar do elemento a_{21} , ou seja, M_{21}^* , na matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ é o determinante da matriz } \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ suprimindo a 1ª}$$

coluna e a 2ª linha.

Exercício 4.1:

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ calcule $M_{23}^* + M_{31}^*$.

Solução:

$$\left. \begin{array}{l}
 M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{23}^* = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 5 - 2 = 3 \\
 M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{31}^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 8 = -5
 \end{array} \right\} \Rightarrow M_{23}^* + M_{31}^* = 3 + (-5) = -2$$

Cofator ou complemento Algébrico de um elemento: Dada uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 2$, denominamos de cofator de um elemento a_{ij} ao número $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}^*$, que será representado por M_{ij} .

Exemplo 4.2

No exemplo 4.1 temos que $M_{21}^* = \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, logo, o cofator do

elemento a_{21} será $M_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{21} = -\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Exercício 4.2

Na matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ calcule A_{23} .

Solução:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot A_{23}^* \Rightarrow (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (2 - 21) = 19$$

(Regra de Laplace) Teorema: Seja M uma matriz $n \times n$, em que $n > 1$ e $1 < i \leq n$. Então, $\det M = a_{i1}(-1)^{i+1}D(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}D(A_{i2}) + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}D(A_{in})$, isto é, o determinante de M pode ser expandido segundo qualquer linha ou segundo qualquer coluna (como é mostrado na propriedade **(P 1)** que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta).

O determinante da matriz M , de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores. Isto é,

- a) Se escolhermos a coluna j da matriz M

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então: $\det M = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}.$

b) Se escolhermos a linha i da matriz M

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então: $\det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}.$

Observação¹: Todas as definições apresentadas (via Laplace ou via permutações) conduzem à mesma forma n -linear alternada em \mathbb{R}^{n^2} que é, precisamente, a função determinante.

Exemplo 4.3

Calcule, usando o método de Laplace, os determinantes abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Observação²: Como temos liberdade de escolha da fila, devemos escolher aquela que apresenta maior número de zeros.

Solução:

a) Tomando a 2ª linha para expansão, temos:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot (8 - 12) - 1 \cdot (6 - 8) = -20 + 2 = -18$$

b) Usando a 3ª coluna, pois ela tem maior número de zeros:

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 5 \cdot (-1)^{4+3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando os determinantes de 3ª ordem, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right| 2 = (24 + 8 + 0) - (6 + 0 + 18) = 32 - 24 = 8 \\ \left| \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right| 2 = (32 + 24 + 18) - (18 + 32 + 24) = 74 - 74 = 0 \end{array} \right\} \text{logo det. será } 4 \cdot 8 - 5 \cdot 0 = 32$$

Exemplo 4.4

(EXPCEX-98) Para todo x e y reais, com $x \neq \pm y$, o quociente entre os determinantes

$$\frac{\begin{bmatrix} x+y & x-y & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & x & x^2+y^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}} \text{ é equivalente a:}$$

Solução:

Como vimos na observação anterior, iremos selecionar a linha ou coluna com maiores números de zeros.

$$\left. \frac{\begin{bmatrix} \cancel{x+y} & \cancel{x-y} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & x & x^2+y^2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}} \right\} (x+y) \begin{bmatrix} 1 & y \\ x & x^2+y^2 \end{bmatrix} = (x+y) \cdot (x^2+y^2 - x \cdot y) \text{ e } \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y) \cdot (x^2+y^2 - x \cdot y)}{x^2 - y^2} = \frac{\cancel{(x+y)} \cdot (x^2+y^2 - x \cdot y)}{\cancel{(x+y)} \cdot (x-y)} = \frac{x^2+y^2 - x \cdot y}{x-y}$$

Exemplo 4.5

(FATEC-87) Se $x + y = \frac{\pi}{3}$, então $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} y & \cos y & 0 \end{vmatrix}$ é igual a:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} y & \cos y & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{vmatrix} = \cos x \cdot \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x = \cos(x+y) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

4.2 Regra de Chió¹

No cálculo do determinante de uma matriz quadrada M , de ordem $n \geq 3$, é interessante abaixar a ordem de M , isto é, obter uma matriz N , de ordem $n - 1$, de modo que $\det. M = \det. N$. Agora, considere uma matriz M , de ordem $n \geq 3$, com um elemento $a_{ij} = 1$. A regra de Chió obedece aos seguintes passos:

- Eliminemos a linha e a coluna que se cruzam no elemento $a_{ij} = 1$, no caso, a linha i e a coluna j .
- De cada elemento a_{ij} restante da matriz, subtraímos o produto dos elementos correspondentes à linha i e coluna j que foram eliminados no item “a”.
- Com as diferenças obtidas construiremos uma matriz de ordem $(n-1)$, cujo determinante é multiplicado por $(-1)^{i+j}$, onde i e j correspondente à linha e coluna do elemento $a_{ij} = 1$, são iguais ao da matriz original.

Exemplo 4.6

Vamos calcular o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ usando a regra de Chió.

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-4 \cdot 2 & 3-4 \cdot 0 & 7-4 \cdot 8 \\ 4-3 \cdot 2 & 1-3 \cdot 0 & 6-3 \cdot 8 \\ 3-2 \cdot 2 & 4-2 \cdot 0 & 5-2 \cdot 8 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -6 & 3 & -25 \\ -2 & 1 & -18 \\ -1 & 4 & -11 \end{vmatrix} \text{ por Sarrus, } \begin{vmatrix} -6 & 3 & -25 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -18 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -11 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (66 + 54 + 200) - (25 + 432 + 66) =$$

$$= 320 - 523 = -203$$

¹ Coleção Elementos da Matemática (Oliveira, 2009) pag. 253.

5 PROPRIEDADE DOS DETERMINANTES

Nesta seção serão apresentadas as propriedades que minimizarão nossos esforços para o cálculo do determinante, muitas delas são conhecidas pelos nomes dos matemáticos que as desenvolveram e/ou realizaram a prova das mesmas. Listamos doze propriedades com sua definição e sua demonstração².

(P 1) Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M^t a sua transposta, tem-se que $\det M^t = \det M$, ou seja, o determinante não se altera quando trocamos ordenadamente as linhas pelas colunas.

Demonstração:

Pelo princípio da indução finita.

Para $n = 1$, temos $M = [a] = M^t \Rightarrow \det M = \det M^t$, logo, a propriedade é verdadeira.

Agora, suponhamos que a propriedade seja verdadeira para matrizes de ordem $n-1$, iremos provar que ela será verdadeira para o determinante de matrizes de ordem n . Então, temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } M^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

onde, $a_{ij} = b_{ji} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Resolvendo por Laplace temos:

$$\det M = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \dots + a_{n1} \cdot A_{n1} \quad (\text{pela primeira coluna})$$

$$\det M = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} + b_{13} \cdot B_{13} + \dots + b_{1n} \cdot B_{1n} \quad (\text{pela primeira linha})$$

Pela definição dada antes de matriz transposta, temos que:

$$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{21}, a_{13} = b_{31}, \dots, a_{1n} = b_{n1}, \text{ e pela hipótese de indução temos:}$$

$$A_{11} = B_{11}, A_{21} = B_{12}, A_{31} = B_{13}, \dots, A_{n1} = B_{1n}, \text{ pois } A_{11} \text{ é uma matriz de ordem } n-1 \text{ e } B_{1j} \text{ é a sua}$$

transposta, logo, $\det M^t = \det M$.

Portanto, a propriedade é verdadeira para toda matriz quadrada de ordem n , $\forall n \geq 1$.

Exemplo 5.1

² As demonstrações apresentadas foram baseadas no livro Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 4 (Iezzi, 1993)

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 - (-4 \cdot 8) = -12 + 32 = 20$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 10 - 20 - 0 - 0 = -10 \text{ e } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 10 + 0 - 20 - 0 - 0 = -10$$

A partir desta propriedade iremos chamar de fila uma linha ou coluna da matriz, pois acabamos de provar que toda propriedade válida para as linhas também é válida para as colunas.

(P 2) O determinante de uma matriz quadrada M de ordem n é nulo se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) forem todos iguais a zero, ou seja, $\det M = 0$.

Demonstração:

Suponhamos que os elementos da i-ésima linha de M sejam todos nulos, ou seja:

$$a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = \dots = a_{in} = 0$$

Desenvolvendo o determinante por Laplace, temos:

$$\det M = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + 0 \cdot A_{i3} + \dots + 0 \cdot A_{in} = 0$$

Exemplo 5.2

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ y & 0 & 2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

(P 3) Se multiplicarmos uma fila (linha ou coluna) qualquer de uma matriz quadrada M de ordem n por um número real K, o determinante da nova matriz M' obtida será o produto de K pelo determinante de M, ou seja, $\det M' = K \cdot \det M$.

Demonstração:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ e } M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K \cdot a_{i1} & K \cdot a_{i2} & \dots & K \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante de M e M' por Laplace, temos:

$$\det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (\text{I})$$

$$\det M' = K \cdot a_{i1} \cdot A_{i1} + K \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + K \cdot a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + K \cdot a_{in} \cdot A_{in} \quad (\text{II})$$

colocando K em evidência em (II) podemos concluir que:

$$\det M' = K(a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}) \text{ de (I), } \det M' = K \cdot \det M$$

Exemplo 5.3

$$\begin{vmatrix} 16 & 8 & 6 \\ 12 & 0 & 7 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot (56 + 18 - 28 - 48) = 8 \cdot (-2) = -14$$

Exemplo 5.4

Seja α um número real e $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, temos que o determinante de $\alpha \cdot M$

é igual a:

$$\alpha \cdot M = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \alpha \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{32} & \alpha \cdot a_{33} & \dots & \alpha \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n1} & \alpha \cdot a_{n2} & \alpha \cdot a_{n3} & \dots & \alpha \cdot a_{nn} \end{bmatrix},$$

logo por (P 3) temos $\det(\alpha \cdot M) = \alpha \dots \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \det(\alpha \cdot M) = \alpha^n \cdot \det A.$

Então, temos que quando os elementos de uma fila tiverem um fator comum, este pode ser colocado em evidência no determinante.

(P 4) Teorema de Bezout – Em uma matriz M quadrada de ordem $n \geq 2$, o sinal do seu determinante muda quando trocamos a posição de duas filas (linha ou coluna), ou seja, ao trocarmos duas filas obtemos uma nova matriz M' , tal que, $\det M' = -\det M$.

Demonstração:

Iremos demonstrar pelo princípio da indução finita.

Inicialmente, vamos provar que a propriedade é válida para $n=2$.

$$\text{Seja } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Trocando as linhas de posição, obteremos uma matriz M' , tal que:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \det M' = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} \Rightarrow \det M' = -a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12} = -\det M$$

Suponhamos que a propriedade é válida para matrizes de ordem $(n-1)$, daí provemos que ela também é válida para matrizes de ordem n .

Permutando-se duas linhas, somente mantendo as colunas, e desenvolvendo $\det M$ e $\det M'$, obtemos:

$$\det M = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} \text{ e } \det M' = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A'_{ij}$$

Seja A'_{ij} o cofator, ou seja, o determinante de uma matriz de ordem $n-1$ obtido de A_{ij} , ao trocarmos duas linhas de posição, segue-se pela hipótese de indução que $A'_{ij} = -A_{ij}$, $\forall i \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, n\}$, logo, concluímos que $\det M' = -\det M$.

Exemplo 5.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 8 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 36 - 48 - (-15) = -45, \text{ trocando-se a linha 1 pela linha 3 obtemos}$$

$$\text{o seguinte determinante } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -4 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 48 + 15 - 24 - (-36) = 45.$$

(P 5) Se uma matriz M quadrada de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas iguais, seu determinante será igual a zero, ou seja, $\det M = 0$.

Demonstração:

Tomemos uma matriz M quadrada de ordem $n \geq 2$ com duas colunas r e s formadas por elementos respectivamente iguais, isto é, $a_{ir} = a_{is}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Trocando-se a posição dessas colunas pela propriedade **(P 4)**, obteremos uma matriz M' , cujo determinante é igual ao oposto do determinante da matriz M , ou seja, $\det M' = -\det M$. (I)

No entanto, como r e s são iguais a matriz, a matriz M' é igual à matriz M , logo, o determinante de M' é igual ao determinante de M , então, $\det M' = \det M$. (II)

De (I) e (II), concluímos que:

$$\det M = -\det M \Rightarrow \det M + \det M = 0 \Rightarrow 2 \cdot \det M = 0 \Rightarrow \det M = 0.$$

Pela propriedade (P 1), o mesmo ocorre quando trocamos duas linhas.

Exemplo 5.6

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 3 & x & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2x^2 + 6 + 12x - (2x^2 + 12x + 6) = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 20a + 4b + 5c - (5c + 20a + 4b) = 0.$$

(P 6) Teorema de Cauchy – A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela, é igual a zero.

Demonstração:

Seja o determinante $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Desenvolvendo D pela s -ésima linha, temos $D = a_{s1} \cdot A_{s1} + a_{s2} \cdot A_{s2} + \dots + a_{sn} \cdot A_{sn}$.

Substituindo na matriz a s -ésima linha pela r -ésima linha, obtemos o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \text{linha } s$$

Desenvolvendo D , ainda pela linha s , temos que os cofatores dos elementos continuam os mesmos, logo, temos: $D = a_{r1} \cdot A_{s1} + a_{r2} \cdot A_{s2} + \dots + a_{rn} \cdot A_{sn}$.

Pela propriedade (P 5), pois os elementos das linhas s e r são respectivamente iguais, temos: $D = 0 \Rightarrow a_{r1} \cdot A_{s1} + a_{r2} \cdot A_{s2} + \dots + a_{rn} \cdot A_{sn} = 0$.

Exemplo 5.7

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ linha } \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \rightarrow \text{elementos} \\ 2^{\text{a}} \text{ linha } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{21} \ A_{22} \ A_{23} \rightarrow \text{cofatores} \end{array}$$

Aplicando a propriedade de Cauchy:

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 13, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 31 \text{ e } A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 3 \cdot (13) + (-1) \cdot 31 + (-4) \cdot (2) = 0$$

Observação: Seja D o determinante de uma matriz, podemos sintetizar os teoremas de Laplace e Cauchy na expressão:

$$a_{r1} \cdot A_{s1} + a_{r2} \cdot A_{s2} + \dots + a_{rm} \cdot A_{sm} \begin{cases} = D, & \text{se } r = s \\ = 0, & \text{se } r \neq s \end{cases} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n a_{ri} \cdot A_{si} \begin{cases} = D, & \text{se } r = s \\ = 0, & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

(P 7) Se uma matriz quadrada M de ordem n ≥ 2 tem duas filas paralelas, formadas por elementos respectivamente proporcionais, então: det M = 0.

Demonstração:

Dada a matriz M cujas linhas r e s sejam formadas por elementos proporcionais, tal que: $a_{rj} = K \cdot a_{sj} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $K \in \mathbb{R}$.

Logo:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n3} \end{vmatrix}, \text{ como } a_{rj} = K \cdot a_{sj} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K \cdot a_{s1} & K \cdot a_{s2} & \dots & K \cdot a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{matrix} (P3) \\ = \end{matrix} K \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n3} \end{vmatrix} \begin{matrix} (P5) \\ \Rightarrow \end{matrix} D = K \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

A demonstração é análoga para colunas proporcionais.

Exemplo 5.8

$$\begin{vmatrix} 2 & 16 & 8 & 6 \\ 3 & 9 & \text{sen } \theta & 9 \\ 5 & 5 & b & 15 \\ 8 & 12 & a & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 8 & 3.2 \\ 3 & 9 & \text{sen } \theta & 3.3 \\ 5 & 5 & b & 3.5 \\ 8 & 12 & a & 3.8 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 16 & 8 & 2 \\ 3 & 9 & \text{sen } \theta & 3 \\ 5 & 5 & b & 5 \\ 8 & 12 & a & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0$$

(P 8) O determinante de uma Matriz de ordem n , com uma fila formada de polinômios de K termos, pode se desdobrar numa soma de K determinantes, que se obtém de matrizes formadas, conservando-se as outras filas, e substituindo-se a fila formada de polinômios, ora pelos primeiros termos dos polinômios, depois pelos segundos termos e assim por diante.

Demonstração:

$$\text{Seja a matriz } M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j} + c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j} + c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj} + c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ cuja coluna de ordem } j \text{ é}$$

formada por binômios.

Aplicando Laplace, na coluna j temos que o determinante D da matriz M é:

$$\begin{aligned} D &= (b_{1j} + c_{1j}) \cdot A_{1j} + (b_{2j} + c_{2j}) \cdot A_{2j} + \dots + (b_{nj} + c_{nj}) \cdot A_{nj} \\ \Rightarrow D &= b_{1j} \cdot A_{1j} + c_{1j} \cdot A_{1j} + b_{2j} \cdot A_{2j} + c_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + b_{nj} \cdot A_{nj} + c_{nj} \cdot A_{nj} \\ \Rightarrow D &= b_{1j} \cdot A_{1j} + b_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + b_{nj} \cdot A_{nj} + c_{1j} \cdot A_{1j} + c_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + c_{nj} \cdot A_{nj} \\ \Rightarrow D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \Rightarrow D &= D_b + D_c \end{aligned}$$

A propriedade também é válida se tivermos uma adição em uma linha.

Exemplo 5.9

$$\begin{vmatrix} 3 & 3+x & 5 \\ 5 & 6+y & 4 \\ 4 & 5+z & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & x & 5 \\ 5 & y & 4 \\ 4 & z & 7 \end{vmatrix} = 14 + \begin{vmatrix} 3 & x & 5 \\ 5 & y & 4 \\ 4 & z & 7 \end{vmatrix}$$

(P 9) Se uma matriz quadrada M de ordem n , tiver uma fila (linha ou coluna) formada pela combinação linear de outras filas (linha ou coluna) paralelas, seu determinante será nulo.

Demonstração:

Suponhamos que a r^{a} coluna (ou linha) seja uma combinação linear de p outras colunas (ou linhas) de índices s_1, s_2, \dots, s_p .

Desenvolvendo o determinante pela r^{a} coluna (ou linha), temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^n a_{ir} \cdot A_{ir} = \sum_{i=1}^n (k_1 \cdot a_{is_1} + k_2 \cdot a_{is_2} + \dots + k_p \cdot a_{is_p}) \cdot A_{ir}$$

Por **(P 8)**, $k_1 \sum_{i=1}^n a_{is_1} \cdot A_{iq} + k_2 \sum_{i=1}^n a_{is_2} \cdot A_{iq} + \dots + k_p \sum_{i=1}^n a_{is_p} \cdot A_{iq}$ e finalmente por **(P 6)**,

temos:

$$\det M = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + \dots + k_p \cdot 0 = 0.$$

Exemplo 5.10

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ -4 & 9 & 1 \\ 5 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a } 3^{\text{a}} \text{ coluna é igual a duas vezes a } 1^{\text{a}} \text{ coluna mais a } 2^{\text{a}} \text{ coluna.}$$

Exemplo 5.11

$$\begin{vmatrix} 7 & 12 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois a } 3^{\text{a}} \text{ linha é igual a } 1^{\text{a}} \text{ linha menos três vezes a } 2^{\text{a}} \text{ linha.}$$

(P 10) Teorema de Jacobi – Seja a matriz quadrada M de ordem n , o seu determinante não se altera, quando se soma a uma fila, uma combinação linear de filas paralelas.

Demonstração:

Primeiramente, iremos demonstrar que o determinante não se altera, quando somamos a uma fila outra fila paralela multiplicada por uma constante, ou seja:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (a_{1r} + k \cdot a_{1s}) & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (a_{2r} + k \cdot a_{2s}) & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nr} + k \cdot a_{ns}) & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De fato, aplicando a propriedade **(P 9)** ao determinante do 2º membro da igualdade, temos:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1r} + k.a_{1s}) & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2r} + k.a_{2s}) & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nr} + k.a_{ns}) & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & k.a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & k.a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & k.a_{ns} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

↑
r

Como a segunda parcela tem duas filas paralelas proporcionais, podemos aplicar a propriedade (P 8), e assim concluímos que:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \det M$$

Exemplo 5.12

$$\begin{vmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 4 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 - 2.3 & 6 \\ 4 & 10 - 2.4 & 4 \\ 2 & 5 - 2.5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 48 + 24 - 24 - 12 - 24 = 18$$

Observação: Por meio do Teorema de Jacobi conseguimos reduzir a zero todos os elementos de uma fila, menos um, e assim abaixar a ordem da matriz aplicando Laplace ou Chió.

(P 11) O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Demonstração:

Chama-se matriz triangular aquela cujos elementos de um lado da diagonal principal forem nulos.

Seja D o determinante da matriz, temos que:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Laplace, $D = a_{11} \cdot A_{11}$, como $A_{11} = a_{22} \cdot A_{22}$ e $A_{22} = a_{33} \cdot A_{33}$.

Aplicando sucessivamente o teorema, concluímos que: $D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$ ou $D = \prod_{i=1}^n (a_{ii})$.

Exemplo 5.13

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot (-1) = -10$$

Corolário: Seja uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, cujos elementos de um lado da diagonal secundária forem nulos, o valor do determinante será o produto dos elementos da diagonal secundária multiplicado por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Demonstração:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Aplicando-se Laplace, teremos:

$$D = (-1)^{(n+1)} \cdot a_{1n} \cdot A_{1n}$$

Porém, aplicando sucessivamente o teorema:

$$A_{1n} = (-1)^{1+(n-1)} \cdot a_{2,n-1} \cdot A_{2,n-1}$$

$$A_{2,n-1} = (-1)^{n-1} \cdot a_{3,n-2} \cdot A_{3,n-2}$$

.....

$$A_{n-2,3} = (-1)^3 \cdot a_{n-1,2} \cdot a_{n1}$$

assim,

$$D = (-1)^{3+4+\dots+(n+1)} \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

como

$$3 + 4 + \dots + (n + 1) = \frac{((n + 1) + 3) \cdot (n - 1)}{2} = \frac{(4 + n) \cdot (n - 1)}{2} = \frac{4(n - 1)}{2} + \frac{n(n - 1)}{2}$$

Concluímos que:

$$D = (-1)^{\frac{4(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

Exemplo 5.14

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 = (-1)^3 \cdot 48 = -48$$

Observação: Na propriedade **(P 11)** o determinante da matriz identidade I_n é igual a 1.

(P 12) Teorema de Binet – Seja A e B matrizes de ordem n, o determinante da matriz, produto de A e B, é igual ao produto dos determinantes de A e B.

Demonstração³:

Tomemos os determinantes

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

e o seu determinante produto

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Para provar que $C=A.B$, vamos construir um determinante D de ordem $2n$ e calculá-lo de duas maneiras distintas. Na primeira vamos calcular $D=A.B$ e na segunda $D=C$, onde iremos concluir que: $C=A.B$.

Inicialmente, teremos:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

³ Demonstração retirada do livro teoria elementar dos determinantes, F A Lacaz Netto, 1958

Dividindo o determinante acima em quadrante, podemos observar que o determinante A no 2º quadrante e o determinante B no 4º quadrante, no 1º quadrante os elementos são nulos e no 3º quadrante a diagonal principal é formada pelo elemento -1 e os demais elementos nulos.

Calculando D pelo teorema de Laplace (generalizado), o único determinante de ordem n que obteremos, pois os outros são evidentemente nulos, será:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Igual ao determinante B , o complemento algébrico desse menor complementar, em D , é o produto:

$$(-1)^{(1+2+\dots+n)+(1+2+\dots+n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{2(1+2+\dots+n)} . A = A$$

Portanto, pelo teorema de Laplace (generalizado):

$$D = A.B$$

Agora, calculemos D da segunda maneira. À coluna de ordem $(n+1)$, somemos as n primeiras multiplicadas respectivamente por $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}$; à coluna de ordem $(n+2)$ somemos também as n primeiras, multiplicadas respectivamente por $b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}$, e assim por diante; à última coluna somemos as n primeiras multiplicadas respectivamente por $b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}$.

Como a uma fila estamos somando uma combinação linear de filas paralelas, aplicando o teorema de Jacobi (**P 10**), ficamos com:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando D novamente pelo teorema de Laplace (generalizado), o único determinante de ordem n que obteremos, pois os outros são evidentemente nulos, será o determinante C , e o seu complemento algébrico e o menor complementar é:

$$(-1)^{(1+2+\dots+n)+(n+1)+\dots+2n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(2n+1)2n}{n}} \cdot (-1)^n = (-1)^{(2n+1)n+n} = (-1)^{2n(n+1)}$$

Portanto,

$$D = C \cdot (-1)^{2n(n+1)} \Rightarrow D = C$$

Como já provamos que

$$D = A \cdot B$$

Temos a tese

$$C = A \cdot B$$

Isto é, o determinante-produto, por linhas, de 2 outros numa ordem dada, é igual ao produto desses outros.

Exemplo 5.14

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A \cdot B \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 51 & 31 \\ -8 & -2 & 38 \\ 3 & -41 & 33 \end{vmatrix} = 66 + 5814 + 10168 \\ +186 - 1558 + 13464 = 28140 \\ A = 0 - 60 - 8 - 0 + 18 - 160 = -210 \\ B = -90 + 0 - 6 - 0 - 18 - 20 = -134 \end{cases} \Rightarrow (-210) \cdot (-134) = 28140$$

6 APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES

Neste capítulo destacaremos a aplicação dos determinantes no estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear. É importante fazer esta associação - durante o ensino de determinantes no segundo ano do Ensino Médio, onde estes conhecimentos serão aplicados -, pois os livros adotados pelas escolas públicas trazem um estudo isolado de matrizes, determinantes e sistemas lineares, sem defini-los como pré-requisitos para o estudo de Álgebra Linear e Geometria Analítica, os quais são aplicados às turmas de terceiro ano do Ensino Médio.

Esperamos contribuir com exemplos que poderão ser utilizados pelo professor em suas aulas de determinantes. Inicialmente, veremos suas aplicações no estudo de Álgebra Linear.

6.1 Aplicações dos determinantes em Álgebra Linear.

6.1.1 Matriz inversa.

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , chamamos de inversa de A uma matriz quadrada B de ordem n tal que $AB = BA = I_n$.

Aplicação: Uma matriz A é invertível se, e somente se, o determinante for diferente de zero. Se A é invertível, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot \text{adj}(A), \text{ em que } \text{adj}(A) \text{ é a transposta da matriz dos cofatores de } A.$$

Prova: Pela Propriedade de Binet (**P 12**) $D(A) \cdot D(B) = D(A \cdot B)$, pela definição de matriz inversa $AB = BA = I_n$, assim pela propriedade (**P 11**) $D(I_n) = 1$, logo:

$$D(A) \cdot D(B) = D(AB) = D(I_n) = 1 \Rightarrow D(A) \neq 0, D(B) \neq 0.$$

Logo, se $\frac{1}{D(A)} \cdot \text{adj}(A)$ é a inversa de A , teremos:

$$\left(\frac{1}{D(A)} \cdot \text{adj}(A) \right) \cdot A = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot \text{adj}(A).$$

Exemplo 6.1

Vamos determinar a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ utilizando os determinantes.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 4 - (-8 - 3 - 0) = 1,$$

teremos agora os cofatores de A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -(4); \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(-2); \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1)$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-1); \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Logo, a matriz dos cofatores de A será $\begin{bmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $adj(A) = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Concluimos então que:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6.1.2 Dependência e independência Linear

Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores em \mathbb{R}^n , em que $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ e $A = [a_{ij}]$ é a matriz, cujas linhas são geradas por estes vetores, onde $1 \leq i \leq n$, são linearmente independentes se, e somente se, A for invertível.

Aplicação: Como vimos anteriormente, A só é invertível se, e somente se, seu determinante for diferente de zero.

Prova: Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores em \mathbb{R}^n . Dizemos que v_1, v_2, \dots, v_n são linearmente independentes se a equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$, admite solução trivial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por hipótese, A é invertível, podemos aplicar transformações elementares em A , tais que $e_r(\dots(e_2(e_1(A)))) = I$, daí:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0,$$

logo, v_1, v_2, \dots, v_n são L.I. se o determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ for diferente de zero.

Consequentemente, os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são **linearmente dependentes** se, e somente se, pelo menos um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores.

Prova: Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz gerada pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_n , onde $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ são as linhas da matriz A . Pela propriedade (**P 9**) se pelo menos uma linha for uma combinação linear das demais, o seu determinante é igual a zero.

Para concluirmos, verificamos se dois ou mais vetores são **L.I.** ou **L.D.** se o determinante da matriz gerada por estes vetores for diferente de zero (**L.I.**) ou igual a zero (**L.D.**).

Exemplo 6.2

Vamos verificar se os vetores $v_1 = \{-3, 0, 4\}$, $v_2 = \{5, -1, 2\}$ e $v_3 = \{1, 1, 3\}$ são linearmente dependentes ou independentes.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ gerada pelos vetores v_1, v_2 e v_3 , temos que:

$$D(A) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 20 - (-4 - 6) = 39$$

Logo, v_1, v_2 e v_3 são vetores linearmente independentes e A é invertível.

6.1.3 Solução de Sistemas Lineares (Regra de Cramer)

Vimos no capítulo 2 que os determinantes foram criados com a finalidade de resolver sistemas lineares. Em 1750, Gabriel Cramer (1704-1752) publicou uma técnica conhecida como regra de Cramer que utiliza determinantes para encontrar a solução de um sistema linear, estudada atualmente na 2ª série do Ensino Médio.

Aplicação: A Regra de Cramer utiliza o quociente de dois determinantes para descobrir as incógnitas de um sistema linear. Seja $AX = B$, onde A é uma matriz $n \times n$ formada pelos coeficientes das incógnitas, e X a matriz $n \times 1$ formada pelas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , a solução do sistema é dada por:

$$x_j = \frac{D(A^j)}{D(A)}, \text{ com } j = 1, 2, \dots, n,$$

onde A^j é a matriz obtida pela substituição da j -ésima coluna de A pela única coluna de B .

Prova: Considere o sistema S $\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$,

e sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Se $D(A) \neq 0$, segue-se que A é invertível e o sistema tem uma única solução dada por:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}.B \Rightarrow X = \frac{1}{D(A)} \cdot \text{adj}(A).B$$

$$X = \frac{1}{D(A)} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{D(A)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{bmatrix}$$

O elemento da j -ésima linha da matriz X será:

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}}{D(A)}.$$

Substituindo a j -ésima coluna de A pela única coluna de B obteremos a matriz:

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante pela j -ésima coluna, temos:

$$D(A^j) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$$

que implica:

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}}{D(A)} = \frac{D(A^j)}{D(A)}$$

Exemplo 6.3

Resolva pela regra de Cramer o sistema linear $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 4x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 36 - (12 + 12 - 4) = 16$$

$$A^x = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A^x) = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -14 + 10 + 54 - (30 + 42 - 6) = -16$$

$$A^y = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A^y) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -12 + 28 + 60 - (36 + 20 - 28) = 48$$

$$A^z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D(A^z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 12 + 84 - (28 + 36 + 20) = 3$$

Logo,

$$x = \frac{D(A^x)}{D(A)} = \frac{-16}{16} = -1; \quad y = \frac{D(A^y)}{D(A)} = \frac{48}{16} = 3; \quad z = \frac{D(A^z)}{D(A)} = \frac{32}{16} = 2$$

Temos que o conjunto solução do sistema é $x = -1$, $y = 3$ e $z = 2$.

6.1.4 Produto vetorial

O produto vetorial é uma operação que combina dois vetores linearmente independentes dando como resultado outro vetor que é ortogonal ao plano gerado pelos outros dois vetores.

Aplicação: Dados os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, podemos definir o produto vetorial $u \times v$ como o “determinante” da matriz:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são as bases canônicas de \mathbb{R}^3 .

Prova: Considere os vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ em \mathbb{R}^3 e $w = (x, y, z)$ um vetor tal que $w \perp u$ e $w \perp v$ e suas coordenadas é a solução do sistema:

$$\begin{cases} w \cdot u = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ w \cdot v = a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema nas incógnitas x e y , temos:

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot z \quad \text{e} \quad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot z$$

Escolhendo $z = a_1b_2 - a_2b_1$. Obtemos as coordenadas do vetor:

$$w = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1)$$

O produto vetorial de u e v é o vetor $u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 - a_2b_1)$

podendo ser escrito de forma simplificada como o determinante:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot e_1 - \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot e_2 + \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot e_3.$$

Escrevendo este produto de forma mais compacta vamos obter uma matriz do tipo 3×3 , cujo “determinante” será igual à expressão que define o produto entre dois vetores u e v .

Esta matriz pode ser expressa escrevendo na primeira linha a base canônica, na segunda linha as coordenadas de $u = (a_1, b_1, c_1)$ e na terceira linha as coordenadas de $v = (a_2, b_2, c_2)$.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \text{ onde } e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0) \text{ e } e_3 = (0, 0, 1) \text{ são as bases canônicas de } \mathbb{R}^3.$$

“Note que notação é apenas formal, desprovida de qualquer conteúdo, pois em princípio, não faz sentido considerar o determinante de uma matriz onde os elementos da primeira linha são vetores e os demais elementos das demais linhas são números reais.” (HEFEZ, 2012)⁴.

Exemplo 6.4

Vamos calcular o produto vetorial de $u = (1, 3, 5)$ e $v = (2, 1, 4)$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} u \times v &= \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow u \times v = \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot e_1 - \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot e_2 + \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot e_3 \\ &= 7 \cdot (1, 0, 0) + 6 \cdot (0, 1, 0) - 5 \cdot (0, 0, 1) = (7, 6, -5) \end{aligned}$$

6.2 Aplicações dos determinantes em Geometria Analítica

6.2.1 Condição de alinhamento de três pontos.

Um dos primeiros contatos dos alunos da terceira série do Ensino Médio com a Geometria Analítica é a condição de alinhamento de Três pontos.

Aplicação: Os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ em \mathbb{R}^2 , estão alinhados se, e somente se, o determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos com as unidades seja nulo, isto é,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prova:

\Rightarrow Os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados se satisfazem a seguinte relação:

⁴ Introdução a Álgebra Linear, 1ª edição, 2012, pag. 122-123.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Leftrightarrow (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_2 y_3 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + \cancel{x_1 y_1} - x_3 y_2 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - \cancel{x_1 y_1} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2 = 0 \end{aligned}$$

Que pode ser representado na forma de um determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Observação: Como as operações são reversíveis, temos que a recíproca é verdadeira.

Exemplo 6.5

Vamos verificar se os pontos $A(-1, -5)$, $B(3, 3)$ e $C(2, 1)$ estão alinhados.

Calculamos o determinante gerado pelas coordenadas de A , B e C .

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 3 - (6 - 1 - 15) = 0, \text{ logo } A, B \text{ e } C \text{ são colineares.}$$

6.2.2 Equação geral da reta determinada por dois pontos dados.

Como vimos no item anterior, três pontos estão alinhados, ou seja, pertencem a mesma reta se, e somente se, o determinante das coordenadas deste pontos com as unidades for igual a zero. A partir de dois pontos podemos traçar uma reta, ao considerarmos um ponto \mathbf{P} de coordenadas $\mathbf{P}(x, y)$ pertencente a esta reta, podemos escrever a equação geral da reta $ax + by + c = 0$.

Aplicação: Sejam dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, distintos, podemos escrever a equação da reta passando por estes pontos, tal que o ponto $\mathbf{P}(x, y)$ pertença a esta reta $ax + by + c = 0$, a partir da expressão:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Prova: Vamos escrever a equação da reta que passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ desenvolvendo o determinante pela primeira linha temos:}$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ que pode ser escrito na forma } ax + by + c = 0, \text{ onde}$$

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ simultaneamente não nulos.}$$

⇐ Recíproca

Toda equação do tipo $ax + by + c = 0$ representam uma reta se a e b não se anulam simultaneamente.

Vamos supor que $ax + by + c = 0$ represente uma curva qualquer. Tomemos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ que seja solução desta equação, logo:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Seja (x, y) um ponto qualquer da curva distinto de A e B , tal que $ax + by + c = 0$.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as duas primeiras linhas da terceira teremos:

$$\begin{cases} a(x_1 - x) + b(y_1 - y) = 0 & (I) \\ a(x_2 - x) + b(y_2 - y) = 0 & (II) \end{cases}$$

De (I) temos que $a = \frac{-b(y_1 - y)}{x_1 - x}$, com $x_1 - x \neq 0$, e substituindo em (II)

$$\frac{-b(y_1 - y)}{x_1 - x}(x_2 - x) + b(y_2 - y) = 0 \Rightarrow b[(y_2 - y)(x_1 - x) - (y_1 - y)(x_2 - x)] = 0.$$

Suponhamos $b = 0$, então $a(x_1 - x) = 0$, como $x_1 - x \neq 0$ implica $a = 0$, porém a e b , por hipótese, não podem ser simultaneamente nulos. Logo, devemos ter $b \neq 0$ e a expressão:

$$(y_2 - y)(x_1 - x) - (y_1 - y)(x_2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (x_1 - x) & (y_1 - y) \\ (x_2 - x) & (y_2 - y) \end{vmatrix} = 0$$

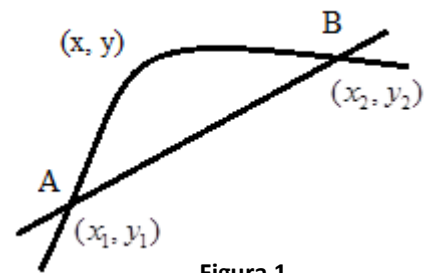


Figura 1

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, para qualquer ponto $\mathbf{P}(x, y)$ temos que a equação $ax + by + c = 0$ representa uma reta.

Exemplo 6.6

Vamos determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 6)$ e $B(2, -3)$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow 6x + 2y - 3 - 12 - 3x + y = 0 \\ \Rightarrow 3x + 3y - 15 = 0 &\Rightarrow x + y - 5 = 0 \end{aligned}$$

6.2.3 Área de um triângulo em função das coordenadas do vértice.

Vimos na seção anterior quando três pontos pertencem à mesma reta. Agora, veremos que quando três pontos não estão alinhados eles representam os vértices de uma região triangular e podemos expressar a área desta região na forma de determinantes.

Aplicação: A área de uma região triangular de um sistema de eixos ortogonais OXY , pode ser determinada a partir do determinante da matriz gerada pelas coordenadas dos seus vértices. Seja, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ as coordenadas dos vértices de um triângulo. Então, a área dessa região triangular é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|D| \quad \text{em que } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Prova: Vamos calcular a área do triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$.

Seja a base $b = d_{AC}$ e altura $h = d_{B, \text{reta } \overline{AC}}$, temos que:

$$s = \frac{1}{2} b \cdot h, \text{ onde}$$

$$b = d_{AC} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \text{ e}$$

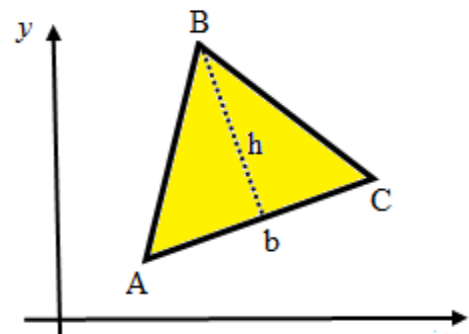


Figura 2 - Área da região triangular

$$h = \left| \frac{(y_3 - y_1)x_2 - (x_3 - x_1)y_2 + (x_3y_1 - x_1y_3)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \right| = \frac{|D|}{b}, \text{ em que}$$

$$D = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ logo o cálculo da área é:}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{|D|}{b} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 6.7

Vamos calcular a área do triângulo ABC , dados $A(-3, 2)$, $B(5, -4)$ e $C(2, 7)$.

Temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot (12 + 4 + 35 - (-8 - 21 + 10))$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 70 = 35 \text{ u.a.}$$

Exemplo 6.8

(PAPMEM_jan/2013) Use a matriz de Gram para obter uma expressão para a área do triângulo cujos lados medem a , b e c .

Solução: Representando os lados do triângulo pelos vetores $u, v, u - v$, os comprimentos dos seus lados são $a = |u|$, $b = |v|$ e $c = |u - v|$. Sua área S cumpre:

$$S^2 = \frac{\lambda}{4} \begin{vmatrix} |u|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & |v|^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Levando em conta que } |u - v|^2 = |u|^2 - 2\langle u, v \rangle + |v|^2 \Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2)$$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

Então, podemos escrever:

$$4S^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) & b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Logo, podemos concluir que:

$$S^2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2}.$$

6.2.4 Área do paralelogramo

Consideremos um paralelogramo $ABCD$ no plano. Seja os vetores $\overline{AB} = v$, $\overline{AD} = w$ e w' uma projeção ortogonal de w sobre a reta AB . Podemos escrever a área deste quadrilátero como determinante das coordenadas dos vetores w e v .

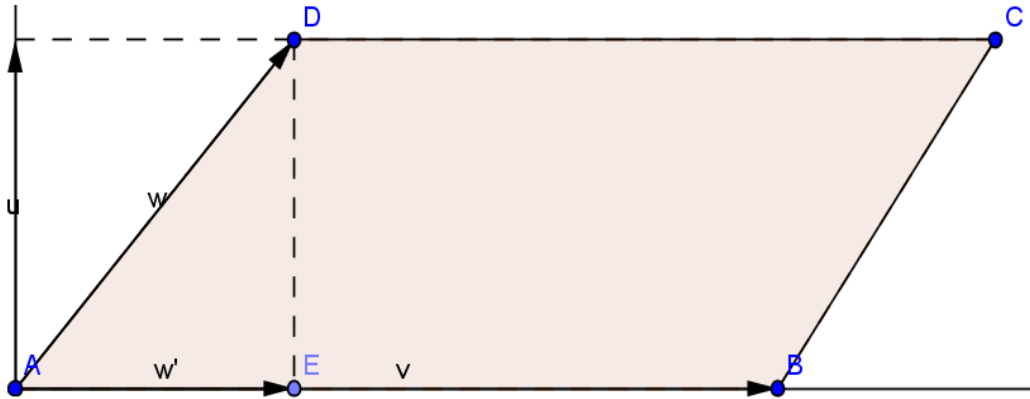


Figura 3- O paralelogramo construído sobre os vetores v e w

Aplicação: Seja o paralelogramo $ABCD$ construído sobre os vetores w e v , podemos escrever e calcular a sua área a partir do determinante das coordenadas de w e v .

$$S = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ onde } a, b, c \text{ e } d \text{ são as coordenadas de } v = (a, b) \text{ e } w = (c, d).$$

Prova: A área do quadrilátero $ABCD$ é dada por $S = |u| \cdot |v| \Leftrightarrow S^2 = |u|^2 \cdot |v|^2$, onde $u = w - w'$.

Como w' é uma projeção de w , podemos escrever $w' = \frac{\langle w, v \rangle \cdot v}{|v|^2}$ e pelo Teorema de

Pitágoras temos que $|w - w'|^2 = |w|^2 - |w'|^2$. Então, podemos concluir que:

$$S^2 = |w - w'|^2 \cdot |v|^2 = (|w|^2 - |w'|^2) \cdot |v|^2 \Rightarrow S^2 = \left(|w|^2 - \left| \frac{\langle w, v \rangle \cdot v}{|v|^2} \right|^2 \right) \cdot |v|^2$$

$$S^2 = |w|^2 \cdot |v|^2 - \frac{\langle w, v \rangle^2 \cdot v^2}{|v|^4} \cdot |v|^2, \text{ portanto a área do paralelogramo é:}$$

$$S^2 = |w|^2 \cdot |v|^2 - \langle w, v \rangle^2$$

Como $|v|^2 = \langle v, v \rangle$ e $|w|^2 = \langle w, w \rangle$, podemos escrever:

$$S^2 = \begin{vmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que:

$$|w|^2 \cdot |v|^2 \geq \langle w, v \rangle^2 \Leftrightarrow |w|^2 \cdot |v|^2 - \langle w, v \rangle^2 \geq 0, \forall \text{ vetores } u \text{ e } v.$$

Sejam as coordenadas dos vetores $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$. Podemos concluir que:

$$\begin{aligned} S^2 &= \begin{vmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a^2 + b^2) & (a.c + b.d) \\ (a.c + b.d) & (c^2 + d^2) \end{vmatrix} = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) - (a.c + b.d)^2 \\ &= \cancel{a^2 c^2} + a^2 d^2 + b^2 c^2 + \cancel{b^2 d^2} - \cancel{a^2 c^2} - 2(a.c.b.d) - \cancel{b^2 d^2} \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2(a.c.b.d) = (a.d - b.c)^2 \\ \therefore S^2 &= (a.d - b.c)^2 \Rightarrow S = a.d - b.c = \begin{vmatrix} a & c \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.9

Vamos determinar a área do paralelogramo construído sobre os vetores \overline{AB} e \overline{AC} , tal que $A(0,1), B(1,5)$ e $C(8,1)$.

Temos que $\overline{AB} = (1-0, 5-1)$ e $\overline{AC} = (8-0, 1-1)$, logo $\overline{AB} = (1, 4)$ e $\overline{AC} = (8, 0)$ e

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 32 \text{ u.a.}$$

6.2.5 Cálculo do volume do paralelepípedo

Considere três vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $w = (x_3, y_3, z_3)$ não nulos em \mathbb{R}^3 . Seja \mathbf{P} o paralelepípedo determinado por estes três vetores, onde h denota a altura do paralelepípedo e θ o ângulo entre u e $v \times w$.

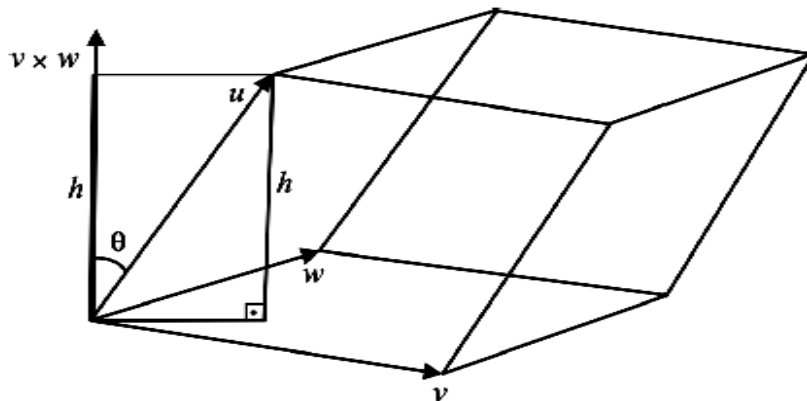


Figura 4 - Paralelepípedo no \mathbb{R}^3

⁵ Figura retirada do livro Introdução à Álgebra Linear. Hefez, Abramo. SBM, 2012. Pág. 126.

Aplicação: Podemos calcular o volume do paralelepípedo no \mathbb{R}^3 pela definição de produto escalar e produto vetorial a partir do produto misto dos vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$,

$$v = (x_2, y_2, z_2) \text{ e } w = (x_3, y_3, z_3)$$

$$u \cdot (v \times w) = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

Prova: Seja o volume do paralelepípedo construído sobre os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $w = (x_3, y_3, z_3)$ em \mathbb{R}^3 , dado pela fórmula $V = A_b \cdot h$, onde $h = \|u\| \cdot \cos \theta$ e a área da base do paralelogramo gerado pelos vetores v e w é dada, como vimos na seção anterior, por $\|v \times w\|$, portanto podemos escrever:

$$V = \|v \times w\| \cdot \|u\| \cdot \cos \theta \Rightarrow V = \|u \cdot (v \times w)\| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 6.10

Calcular o volume do paralelepípedo que tem por arestas os vetores $u = (1, 2, 0)$, $v = (-1, 4, 1)$ e $w = (2, 1, 1)$.

Solução

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 - (1 - 2) = 9$$

7 CONCLUSÃO

O estudo de determinantes é feito na segunda série do Ensino Médio, apesar de muitos professores e livros didáticos apresentarem este conteúdo de forma básica, sem muitas informações a respeito do surgimento e aplicações. Esperamos, com este trabalho, contribuir para o planejamento do professor de matemática no ensino de determinantes, uma vez que procuramos demonstrar as aplicações, que podem ser de fácil compreensão do aluno, instigando-o a pesquisar sobre os matemáticos que tiveram maior destaque no estudo de determinantes e conhecer as áreas em que eles são aplicados, o que poderá ajudá-lo em sua vida acadêmica.

Tão importante quanto estudar as suas aplicações é entender suas propriedades, por isso apresentamos doze propriedades que irão ajudar na aprendizagem de determinantes, pois é através delas que podemos compreender melhor o seu comportamento e diminuir nosso esforço em muitos exercícios e na demonstração de suas aplicações.

Os determinantes foram inicialmente descobertos pela necessidade de simplificar a resolução de sistemas lineares, porém acabou tornando-se uma ferramenta importante nas áreas de Geometria Analítica e Álgebra Linear. É necessário o bom senso do professor em esclarecer aos alunos que os determinantes e suas propriedades poderão contribuir com sua evolução no ensino superior. Além de que os determinantes não são um conteúdo isolado e associado a uma matriz, mas torna-se bastante útil no estudo de vetores, facilitando sua representação e cálculo.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011, matemática.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012, matemática.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.
- FILHO, Manoel Ferreira de Azevedo. **Geometria analítica e álgebra linear.** Fortaleza: Edições Livro Técnico, 2003.
- HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Sousa. **Introdução à álgebra linear.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- IEZZI, Gelson; HAZAM, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar.** 6ª ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 4.
- LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear.** Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios.** 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio.** 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3.
- LORETO, Ana Célia da Costa; SILVA, Aristóteles Antônio da; JUNIOR, Armando Pereira Loreto. **Álgebra linear e suas aplicações: resumo teórico e exercícios.** 2ª ed. São Paulo: LCTE, 2009.
- NETTO, F. A. Lacaz. **Teoria elementar dos determinantes.** 4ª ed. São Paulo: Livraria Nobel, 1958.
- OLIVA, Waldyr Muniz. **Geometria analítica determinantes.** São Paulo: [s. n.], 1953.
- OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigues da Costa. **Coleção elementos da matemática.** 2ª ed. Belém: GTR, 2009. v. 3.
- The MacTutor History of Mathematics archive.** Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Bibliography/index.html>>. Acesso em: 01 de fevereiro de 2014.