

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**O TEOREMA DE GAUSS-BONNET E SUA APLICAÇÃO
NO ENSINO BÁSICO**

Leonardo Lima de Araujo

Orientador: Prof. Dr. Claudiano Goulart

Feira de Santana

Julho de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**O TEOREMA DE GAUSS-BONNET E SUA APLICAÇÃO
NO ENSINO BÁSICO**

Leonardo Lima de Araujo

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Claudiano Goulart

Feira de Santana
18 de Julho de 2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

A69t Araujo, Leonardo Lima de
O Teorema de Gauss-Bonnet e sua aplicação no ensino básico / Leonardo
Lima Araujo. – Feira de Santana, 2014.
77 f. : il.

Orientador: Claudiano Goulart.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Geometria diferencial. 2. Teorema de Gauss -Bonnet. I. Goulart,
Claudiano, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III.
Titulo.

CDU: 514.7



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE LEONARDO LIMA DE ARAUJO DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos dezoito dias do mês de julho de dois mil e quatorze às 14:00 horas na Sala MT55, Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**O Teorema de Gauss-Bonnet e sua Aplicação no Ensino Básico**”, do discente **Leonardo Lima de Araujo**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Claudiano Goulart (Orientador, UEFS), Abílio Souza Costa Neto (UESB) e Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 18 de julho de 2014.

Prof. Dr. Claudiano Goulart (UEFS)
Orientador

Prof. Me. Abilio Souza Costa Neto (UESB)

Prof. Me. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

A Deus, nosso Pai todo poderoso, por todas as bênçãos derramadas em minha vida, por me dar a força necessária para seguir sempre em frente diante das dificuldades e pela sabedoria em me mostrar o melhor caminho a seguir.

A minha esposa Dayane e meus filhos Lucas e Laura pelo amor, carinho, compreensão, incentivo e por serem a minha fonte inspiradora. Sou infinitamente agradecido a Deus por tê-los em minha vida! Amo vocês!

Aos meus pais Edemilson e Derma e meus irmãos Thiago e Géssica por acreditarem em mim.

Aos familiares e amigos que muitas vezes deixei "de lado" por causa dos estudos, mas que mesmo assim sempre estiveram torcendo por mim.

Aos meus professores do PROFMAT pela dedicação, paciência e colaboração no meu crescimento intelectual.

Aos meus colegas de trabalho pela compreensão e estímulo para continuar em minhas atividades docentes e discentes.

Aos meus estimados colegas do PROFMAT. Passamos por muitos momentos de angústia juntos, mas com certeza os momentos de alegria e companherismo foram muito mais presentes e ficarão para sempre em minha memória!

À CAPES, pelo apoio financeiro (bolsa de estudos).

E em especial, ao meu professor orientador Claudiano Goulart pelas lições, ensinamentos, disponibilidade, compreensão, cobrança e sabedoria para ser instrumento de Deus e me ajudar a construir esse trabalho. Tenha certeza da minha admiração, respeito e meu eterno agradecimento.

Resumo

O principal objetivo desse trabalho é discutir o Teorema de Gauss-Bonnet e suas principais aplicações. Em especial, veremos como o Teorema de Gauss-Bonnet pode ser usado para mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 é π radianos.

Palavras-chave: Curvas, superfícies, curvaturas, geodésicas, teorema de Gauss-Bonnet.

Abstract

The main goal of this paper is discuss the Gauss-Bonnet theorem and its main applications. In particular, we will see how the Gauss-Bonnet theorem can be used to show that the sum of the interior angles of a triangle in Euclidean space \mathbb{R}^3 is π radians.

Keywords Curves, surfaces, curvatures, geodesics, Gauss-Bonnet theorem.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Introdução	1
1 Curvas no espaço	4
1.1 Parametrização de curvas; vetor tangente; mudança de parâmetros	4
1.2 Teoria local das curvas. Fórmulas de Frenet	7
2 Superfícies Regulares	11
2.1 Superfícies parametrizadas	11
2.2 Plano tangente. Primeira forma fundamental	18
2.3 Orientação de superfícies	25
2.4 A aplicação normal de Gauss. A segunda forma fundamental	29
2.5 A segunda forma fundamental em coordenadas locais. Curvaturas	34
3 Geodésicas	40
3.1 Introdução	40
3.2 Curvatura geodésica	43
4 O Teorema de Gauss-Bonnet	55
4.1 Introdução	55
4.2 O Teorema de Gauss-Bonnet	60
4.3 Aplicações	66

Introdução

A Geometria Diferencial de curvas e superfícies pode ser estudada sob dois aspectos: o primeiro é chamado Geometria Diferencial Clássica, resultante da aplicação do cálculo diferencial e integral em sua abordagem. Ela estuda o comportamento e fornece as principais características de curvas e superfícies de forma local, isto é, verifica suas características numa vizinhança de um ponto pertencente à curva ou à superfície. Para este estudo é necessário definir uma curva ou superfície por meio de funções que sejam diferenciáveis pelo menos uma quantidade necessária de vezes (funções C^k diferenciáveis). Em geral, admite-se que estas funções sejam de classe C^∞ . O outro aspecto da Geometria Diferencial é o que procura estabelecer as características de curvas e superfícies de forma global, examinando cada ente como um todo.

Os estudos de Geometria Diferencial começaram no início do século XVIII com a aplicação do cálculo diferencial e integral à Geometria Analítica. Em seguida, o matemático Gaspard Monge foi o primeiro a fazer um estudo sobre figuras além do plano euclidiano. Além de iniciar os estudos, Monge, que era professor, estimulava seus alunos a desenvolver esse novo ramo da Matemática. Destacaram-se figuras como J.B. Meusnier, O. Rodrigues, A. L. Cauchy, F. Frenet, J.A. Serret. Estes matemáticos encerraram o primeiro ciclo dos estudos dessa Geometria.

O segundo período começou com o matemático alemão Carl Friedrich Gauss, que foi o primeiro a estudar curvas e superfícies por meio de parametrizações que representavam estes entes geométricos. Resultados importantes foram obtidos, também nessa época, pelos matemáticos G. Mainardi, C.G.J. Jacobi, O. Bonnet, E.B. Christoffel, E. Beltrami e J.D. Darboux.

Outro grande momento da história da Geometria Diferencial foi iniciado com G. B. Riemann, já convergindo para a área da matemática mais moderna, procurou ser o mais generalista possível em seus estudos. Passou-se a pensar em termos de variedades m -dimensionais imersas em espaços n -dimensionais. Nesse momento, se fazia necessário o uso de uma notação muito bem elaborada e o desprendimento da idéia de sistemas de coordenadas. Esse estudo da Geometria é conhecido como Geometria Riemanniana.

Um importante conceito de curvatura em uma superfície foi dado por Gauss em 1827, a chamada curvatura gaussiana. Relacionado a ela, ele mostrou o seguinte fato: *deformando-*

se uma superfície (sem dilatar, vincar ou rasgar) a curvatura gaussiana, em cada ponto, permanece invariante. Por exemplo, o plano e o cilindro, localmente, tem a mesma geometria intrínseca. Intuitivamente, significa que cortando-se um cilindro ao longo de uma de suas geratrizes pode-se desenrolá-lo sobre uma parte do plano. Após mostrado esse fato, Gauss descobriu algo ainda mais notável: a curvatura gaussiana é uma propriedade absoluta em uma superfície. Esse é o importante resultado que é conhecido como Teorema Egregium de Gauss.

Nos conteúdos de geometria plana, durante o ensino básico, é estudado o seguinte resultado:

“A soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos.”

A título de curiosidade, lembremos que este resultado é uma proposição substitutiva do quinto postulado de Euclides, divulgado em sua obra **Os Elementos**, que afirma: *“Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos”*.

Relacionando a curvatura gaussiana com soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico, ou seja, um triângulo cujos lados são geodésicas de uma superfície S , Gauss generalizou este resultado. Mais precisamente, ele mostrou que se os ângulos internos e um triângulo geodésico são dados por $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ então

$$\int \int_R K d\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi,$$

onde σ é a área do triângulo. Se a curvatura total for constante, então

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi = K\sigma$$

e assim a soma dos ângulos internos será maior que π radianos se a superfície for uma esfera unitária, menor que π radianos se a superfície for a pseudo-esfera ou igual a π se a superfície for um plano. Esse resultado é obtido graças a um dos mais importantes teoremas da Geometria Diferencial, conhecido como Teorema de Gauss-Bonnet. Uma primeira versão foi apresentado por Gauss em um dos seus artigos. Este trabalho de Gauss pode ser encontrado em [1].

Nosso objetivo é analisar como o Teorema de Gauss-Bonnet, um dos resultados mais fortes dentro na geometria diferencial, pode nos fornece características de curvas e regiões em uma superfície orientável. Em geral, os autores de geometria diferencial apresentam duas versões deste teorema, uma local e outra global. Neste trabalho, iremos discutir detalhadamente a demonstração da versão local, apresentar uma idéia da demonstração da versão global e também apresentar algumas aplicações deste teorema. Dentre eles, destacaremos o resultado enunciado acima.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos. No capítulo 1, faremos um estudo de curvas parametrizadas no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 : a definição de vetor tangente, a reparametrização pelo comprimento de arco. Em seguida veremos os conceitos de curvatura e torção, definiremos os vetores normal e binormal para assim caracterizar o Triedro de Frenet.

No Capítulo 2, apresentaremos um estudo local de superfícies regulares em \mathbb{R}^3 . Discutiremos o importante conceito de plano tangente e definiremos, no plano tangente a superfície em um determinado ponto, uma forma bilinear simétrica, chamada **primeira forma fundamental**, a partir da qual tudo se mostrará mais interessante do ponto de vista de medirmos grandezas sobre a superfície; como a área, comprimento de curvas e ângulos entre curvas. Vamos definir o vetor normal a superfície e definir a aplicação normal de Gauss e a aplicação diferencial da aplicação normal de Gauss, que veremos que é uma aplicação auto adjunta. Associada a esta aplicação, definiremos uma forma quadrática, denominada **segunda forma fundamental**, onde veremos sua aplicação geométrica e estudaremos como esta forma quadrática está relacionada com os autovalores da matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss. Finalizaremos este capítulo estudando as curvaturas gaussianas e média.

No capítulo 3 trataremos de um tipo especial de curvas em uma superfície, chamadas **geodésicas**. Para tal, definiremos campo de vetores, trataremos dos símbolos de Christoffel para em seguida definir derivada covariante e, por fim, o que de fato vem a ser uma geodésica. Em seguida, vamos estudar algumas propriedades das geodésicas e definir a curvatura geodésica.

No capítulo 4, vamos estudar detalhadamente a versão local do teorema de Gauss-Bonnet e veremos uma idéia da demonstração da sua versão global, além de algumas de suas aplicações.

Capítulo 1

Curvas no espaço

Neste capítulo vamos estudar a teoria das curvas parametrizadas regulares no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Utilizando conteúdos trabalhados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, discutiremos conceitos como curvas regulares, vetor tangente e triedro de Frenet. Nosso maior interesse é um tipo especial de parametrização local de curvas denominada parametrização pelo comprimento de arco. Vale ressaltar que diversas aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet, que estudaremos no Capítulo 4, envolvem tipos especiais de curvas no espaço chamadas geodésicas.

1.1 Parametrização de curvas; vetor tangente; mudança de parâmetros

Definição 1.1. Uma curva parametrizada no espaço é uma aplicação diferenciável $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ . A variável $t \in I$ é o **parâmetro** da curva e o subconjunto de \mathbb{R}^3 , $\alpha(I)$, é chamado **traço** da curva (Figura 1.1).

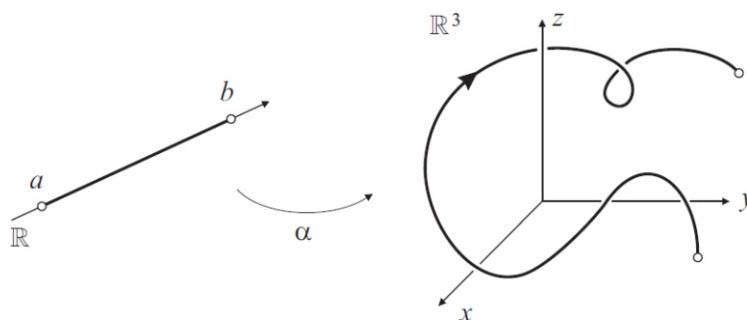


Figura 1.1: Parametrização de uma curva no espaço

Pela definição, devemos observar que uma curva parametrizada no espaço é uma aplicação $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, onde as funções $x(t), y(t)$ e $z(t)$ são de classe C^∞ .

Definição 1.2. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I \subset \mathbb{R}$ uma curva parametrizada diferenciável. O vetor tangente a α em t é o vetor

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

A curva α é dita **regular** se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ abertos, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável C^∞ sobrejetiva tal que $h'(t) \neq 0, \forall t \in J$. Então a função

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma curva regular, com mesmo traço de α . De fato,

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t) \neq 0, \forall t \in J$$

e

$$\beta(J) = \alpha(h(J)) = \alpha(I).$$

A aplicação β é chamada **reparametrização de α por h** e a função h é dita **mudança de parâmetro**.

Exemplo 1.3. A curva

$$\alpha(s) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

é uma reparametrização da curva

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

pela mudança de parâmetro $h(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$.

Definição 1.4. Seja $\alpha(t), t \in I$ uma curva regular no \mathbb{R}^3 . O comprimento do arco dessa curva de t_0 a t_1 é dada por

$$l = \Delta s = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = l(\alpha)$$

e a função comprimento de arco da curva a partir de t_0 é

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

Definição 1.5. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está **parametrizada pelo comprimento de arco** se, para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$, tivermos

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 1.6. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$.

Demonstração. Suponha que α esteja parametrizada pelo comprimento de arco e fixe $t_0 \in I$. Seja

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \quad (1.1)$$

a função comprimento de arco a partir de t_0 . Se $t_0 \leq t$ então, por hipótese

$$\int_t^{t_0} |\alpha'(t)| dt = t_0 - t$$

e assim $-s(t) = t_0 - t$, ou seja, $s(t) = t - t_0$. Se $t \leq t_0$, temos que

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt = t - t_0$$

e assim $s(t) = t - t_0$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que $|\alpha'(t)| = 1$. Desta forma, $\forall t \in I$ temos

$$s(t) = t - t_0,$$

e assim concluímos que $s'(t) = 1$.

Reciprocamente, se $|\alpha'(t)| = 1$, então

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

e assim pela Proposição 1.6, β está parametrizada pelo comprimento de arco. □

A seguinte proposição mostra que toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Proposição 1.7. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no aberto $J = s(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , de modo que β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco definida em (1.1). Então

$$s'(t) = |\alpha'(t)|$$

Como α é uma curva regular, então $s'(t) > 0$, $\forall t \in I$. Logo s é uma função estritamente crescente e, portanto, injetora. Segue que existe uma função $h : J \rightarrow I$, que é inversa de s . Como, para todo $t \in I$, $h(s(t)) = t$, temos, pela regra da cadeia, que $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$. Segue que

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

E assim, como $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$ é uma reparametrização de α e

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1$$

concluímos a demonstração da proposição. □

Exemplo 1.8. Considere a curva regular cuja parametrização é dada por

$$\alpha(t) = (at + n_1, bt + n_2, ct + n_3),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e a, b, c são números reais tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ e n_1, n_2, n_3 são números reais arbitrários. Vamos obter a reparametrização pelo comprimento de arco dessa curva.

Note que

$$\alpha'(t) = (a, b, c)$$

e assim

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Seja $s(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$ a t , ou seja,

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} t.$$

Como $s(t) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} t$, temos que a função h , inversa de s é dada por

$$h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Deste modo, uma reparametrização da curva α pelo comprimento de arco é a curva $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ definida por

$$\beta(s) = \left(a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + n_1, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + n_2, c \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + n_3 \right).$$

1.2 Teoria local das curvas. Fórmulas de Frenet

Nesta seção vamos definir curvatura, torção, o vetor normal e o vetor binormal de uma curva em um ponto. Definidos estes entes, junto com a já conhecida definição de vetor tangente a curva em um ponto, vamos definir o triedro de Frenet e obter, por fim, as Fórmulas de Frenet

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. A velocidade com que as retas tangentes mudam sua direção na vizinhança de um ponto s_0 é chamada **curvatura** da curva α em s_0 . Segue então a seguinte definição

Definição 1.9. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Chamamos **curvatura** de α em $s \in I$ ao número real

$$k(s) = |\alpha''(s)|.$$

Proposição 1.10. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e somente se, $k(s) = 0$, para todo s em I .*

Demonstração. Se $\alpha(I)$ é um segmento de reta, então existe $M \in \mathbb{R}^3$ e um vetor unitário v tal que $\alpha(s) = M + vs$. Assim, para todo s , $\alpha'(s) = v$ e $\alpha''(s) = 0$ e, portanto,

$$k(s) = |\alpha''(s)| = 0.$$

Por outro lado, se $|\alpha''(s)| = 0$, então $\alpha''(s) = 0$. Integrando, temos que $\alpha'(s) = v$ e $|v| = 1$. Integrando novamente, obtemos $\alpha(s) = M + vs, \forall s \in I$, que é a equação de um segmento de reta. □

Note que, se uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ no espaço está parametrizada pelo comprimento de arco s , então sabemos que o vetor tangente tem norma unitária, e assim $\alpha''(s)$ é ortogonal ao vetor tangente. De fato

$$\sqrt{\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle} = |\alpha'(s)| = 1.$$

Elevando ao quadrado e derivando com relação a s , obtemos

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

que nos fornece

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \forall s \in I.$$

Assim, para todo $s \in I$ tal que $\alpha''(s) \neq 0$, é possível definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$.

Definição 1.11. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura positiva. O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}$$

é chamado **vetor normal** a α em s .

Denotando por $t(s)$ o vetor unitário $\alpha'(s)$, temos que $t(s)$ e $n(s)$ são ortonormais e

$$t'(s) = \alpha''(s) = |\alpha''(s)| \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = k(s)n(s).$$

Definição 1.12. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura positiva. O vetor binormal a α em s é

$$b(s) = t(s) \times n(s). \tag{1.2}$$

A base ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é chamada **triedro de Frenet** da curva α em s .

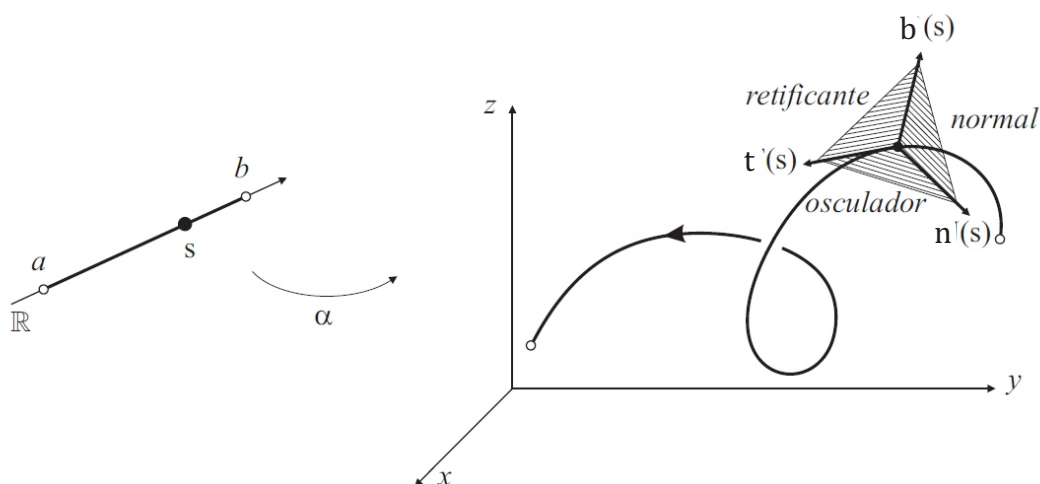


Figura 1.2: Planos osculador, normal e retificante

Note que cada par de vetores da base acima definida determina um plano no espaço. O plano que contém $\alpha(s)$ e é paralelo aos vetores $n(s)$ e $b(s)$ é o **plano normal** à curva α , o plano que passa por $\alpha(s)$ e é paralelo a $n(s)$ e $t(s)$ é o **plano osculador** e o plano que passa por $\alpha(s)$ e é paralelo a $t(s)$ e $b(s)$ é o **plano retificante** (Figura 1.2).

Vamos agora obter uma expressão que nos forneça $b'(s)$. Para tal, perceba que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. De fato $|b| = \sqrt{\langle b, b \rangle} = 1$ e deste modo, derivando com relação a s , temos $\langle b', b \rangle = 0$, o que mostra que b e b' são ortogonais. Por outro lado, derivando (1.2) com relação a s , temos

$$b' = t' \times n + t \times n'$$

mas como $t' = kn$, então $t' \times n = 0$ e, deste modo

$$b'(s) = t(s) \times n'(s).$$

Isto significa que $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Como $b'(s)$ também é ortogonal a $b(s)$, concluímos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, ou seja, existe $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$b'(s) = \tau(s)n(s).$$

Definição 1.13. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s e tal que $\alpha''(s) \neq 0, \forall s \in I$. O número real $\tau(s)$ tal que $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado **torção** de α em s .

Como as derivadas dos vetores $b(s)$ e $t(s)$ nos forneceram os entes geométricos curvatura e torção, nada mais natural procurar outro ente derivando o vetor $n(s)$. Como $n = b \times t$,

temos que:

$$\begin{aligned}n'(s) &= b' \times t + b \times t' \\ &= \tau n \times t + b \times kn \\ &= -\tau b - kt\end{aligned}$$

Deste modo, a derivada do vetor normal nos fornece entes já conhecidos. Assim, concluímos que o triedo de Frenet de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e com curvatura positiva são os vetores $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ que satisfazem as seguintes equações

$$\begin{aligned}t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -k(s)t(s) - \tau(s)b(s). \\ b'(s) &= \tau(s)n(s)\end{aligned}$$

Tais equações são ditas **Fórmulas de Frenet** de α em s . As fórmulas de Frenet nos fornece uma série de aplicações, caracterizando certas curvas através do conhecimento da curvatura e da torção. Por exemplo, uma curva é plana se, e somente se, a torção é nula. Outras aplicações podem ser vistas em [2].

Capítulo 2

Superfícies Regulares

Intuitivamente, podemos dizer que uma superfície é uma união contígua de partes de planos, caracterizando a bidimensionalidade de uma superfície. Outra forma equivalente de se caracterizar superfície é considerá-la como um subconjunto suave do \mathbb{R}^3 que tem dimensão dois. Euclides, na definição cinco da sua obra *Elementos*, fala-nos que uma superfície “é aquilo que tem comprimento e largura”. Também podemos imaginar superfície como sendo uma região do \mathbb{R}^3 onde, em cada um dos seus pontos, há um plano tangente bem definido.

Depois de todas essas definições intuitivas do que venha a ser uma superfície, cabe-nos apresentar a definição formal.

2.1 Superfícies parametrizadas

Definição 2.1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ que obedece as seguintes condições:

- i. X é diferenciável
- ii. X é um homeomorfismo.
- iii. Para cada ponto $q \in U$ a aplicação diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

A aplicação X é chamada parametrização local ou sistema de coordenadas locais em p (Figura 2.1). A vizinhança $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada vizinhança coordenada.

Perceba que X é da forma $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e que a condição (i) garante que as funções coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Considere $\{e_1, e_2\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ as bases canônicas, respectivamente, de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Seja $q = (u_0, v_0)$ um ponto de U e X uma parametrização local de S . O vetor e_1 é tangente à

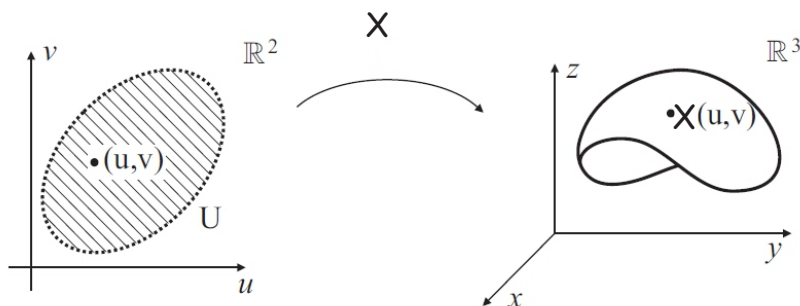


Figura 2.1: Parametrização de uma superfície regular

curva $u \rightarrow (u, v_0)$ cuja imagem por X é a curva

$$u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)). \quad (2.1)$$

Esta curva é chamada **curva coordenada** $v = v_0$ (Figura 2.2). Note que a curva está em S e tem em $X(u_0, v_0)$ o vetor tangente

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) (u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial u} (u_0, v_0),$$

onde o vetor é escrito na base canônica do \mathbb{R}^3 . Como e_1 é tangente a curva (2.1) no ponto q , pela definição de diferenciabilidade, temos que

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) (q) = \frac{\partial X}{\partial u} (q).$$

De forma análoga, usando a curva coordenada $u = u_0$ (Figura 2.2), o vetor e_2 é tangente a curva $v \rightarrow (u_0, v)$, cuja imagem por X é dada por

$$v \rightarrow (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

e cujo o vetor tangente no ponto $X(u_0, v_0)$ é

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) (u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial v} (u_0, v_0),$$

e assim

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) (q) = \frac{\partial X}{\partial v} (q).$$

Observação 2.2. Observemos que a terceira condição da Definição 2.1 é equivalente as seguintes afirmações:

- a. A matriz da aplicação linear $dX(q)$, com relação as bases canônicas de \mathbb{R}^2 e de \mathbb{R}^3 , ou seja,

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tem posto 2,

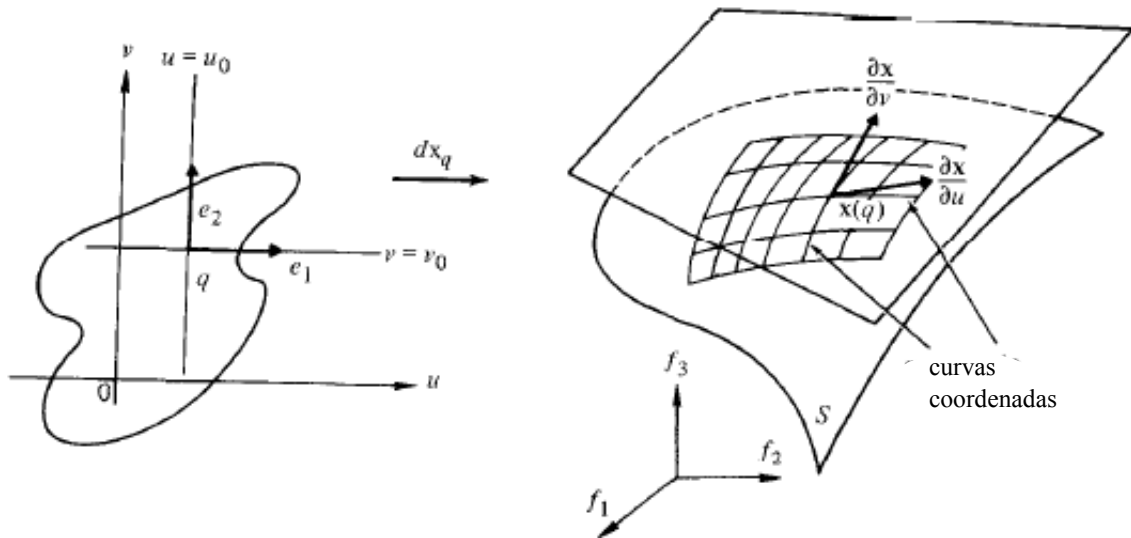


Figura 2.2: Curvas coordenadas

b. algum dos determinantes jacobianos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},$$

seja não nulo em q .

c. os vetores colunas da matriz dX_q sejam linearmente independentes, isto é, que o produto vetorial $\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}$ seja não nulo.

Exemplo 2.3. Considere a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Seja $N = (0, 0, 1) \in S^2$. Considere a aplicação:

$$\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que a cada $P \in S^2$, $P \neq N$, associa um ponto $Q \in \mathbb{R}^2$, dado pela interseção do plano xy com a reta que une N a P . Esta aplicação é chamada **Projeção estereográfica**. Agora seja

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$$

a aplicação que, a cada ponto $Q \in \mathbb{R}^2$ associa um ponto $P \in S^2 - \{N\}$ dado pela interseção da reta que une Q a N (Figura 2.3).

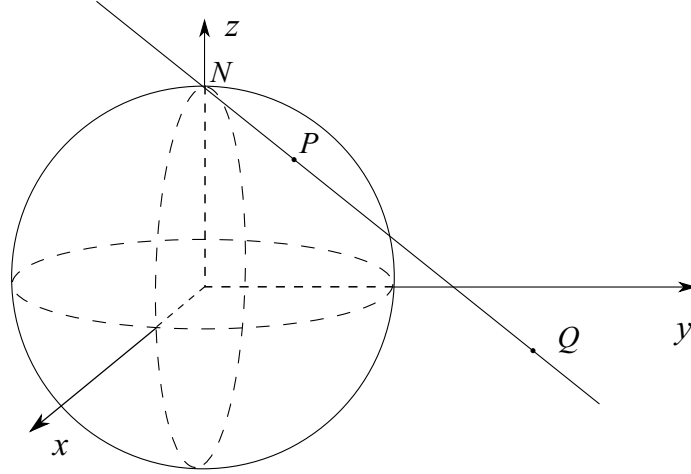


Figura 2.3: Projção estereográfica

Note que, dado um ponto $Q(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^2$, a reta que une Q a N tem como vetor diretor $NQ = (x_0, y_0, -1)$ e a reta terá por equação

$$\begin{cases} x = x_0 + tx_0 \\ y = y_0 + ty_0 \\ z = -t \end{cases}$$

Calculando a interseção com a esfera, obtemos

$$\begin{aligned} x_0^2(1+t)^2 + y_0^2(1+t)^2 + t^2 &= 1 \\ (x_0^2 + y_0^2)(1+t)^2 &= 1 - t^2 \\ x_0^2 + y_0^2 &= \frac{1-t^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t} \end{aligned}$$

simplificando, obtemos

$$t = \frac{1 - x_0^2 - y_0^2}{1 + x_0^2 + y_0^2}.$$

Assim, as coordenadas do ponto de interseção são dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 \left(1 + \frac{1-x_0^2-y_0^2}{1+x_0^2+y_0^2} \right) = \frac{2x_0}{1+x_0^2+y_0^2}, \\ y = y_0 \left(1 + \frac{1-x_0^2-y_0^2}{1+x_0^2+y_0^2} \right) = \frac{2y_0}{1+x_0^2+y_0^2}, \\ z = \frac{x_0^2+y_0^2-1}{1+x_0^2+y_0^2}. \end{cases}$$

Como $Q(x_0, y_0, 0)$ é um ponto qualquer do plano, temos que a aplicação φ é dada por

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right).$$

Pela definição da aplicação, $\pi = \varphi^{-1}$ é dada por

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Observe que $1 + u^2 + v^2 \neq 0$ e $1 - z \neq 0$ e, portanto, π e φ são diferenciáveis de classe C^∞ . Além disso, $d\varphi_Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, $\forall Q \in \mathbb{R}^2$, visto que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$. A aplicação φ cobre apenas o hemisfério norte da esfera. Para cobrir toda ela, podemos, de forma semelhante, construir a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{\tilde{N}\}$ que, a cada ponto $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^2$ associa um ponto $\tilde{P} \in S^2 - \{\tilde{N}\}$ dado pela interseção da reta que une \tilde{Q} a \tilde{N} , onde $\tilde{N} = (0, 0, -1)$. E, deste modo, a aplicação será dada por

$$\phi(u, v) = \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

Proposição 2.4. *Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função diferenciável, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 . O gráfico de f , ou seja, o conjunto*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

é uma superfície regular de \mathbb{R}^3 .

Demonstração. De fato, considere a parametrização de S dada por

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Como f é diferenciável, X é diferenciável. A aplicação

$$dX_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

possui colunas linearmente independentes, isto é, a aplicação dX é injetiva. Para verificar que X é um homeomorfismo, basta notar que existe a aplicação inversa $X^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $X^{-1}(u, v, f(u, v)) = (u, v)$. Como X^{-1} é a restrição à S da projeção sobre o plano xy , logo X^{-1} é contínua. □

Definição 2.5. Dada uma aplicação diferenciável $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que $q \in U$ é um ponto crítico de X se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é sobrejetiva. A imagem $X(q)$ de um ponto crítico é dita valor crítico de X . Um ponto de \mathbb{R}^m que não é um valor crítico é chamado valor regular de X .

Pensemos em um caso particular, em que $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Dado $q = (x_0, y_0, z_0)$, temos que dX_q aplicado ao vetor $(1, 0, 0)$ é obtida calculando-se o vetor tangente à curva em $X(q)$, usando as curvas coordenadas, fazendo

$$x \rightarrow X(x, y_0, z_0)$$

e assim, obtemos

$$dX_q(1, 0, 0) = \frac{\partial X}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = X_x.$$

Fazendo $y \rightarrow X(x_0, y, z_0)$ e $z \rightarrow X(x_0, y_0, z)$, de forma análoga, obtemos

$$dX_q(0, 1, 0) = \frac{\partial X}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = X_y \text{ e } dX_q(0, 0, 1) = \frac{\partial X}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = X_z.$$

Concluimos então que a matriz de dX_q na base canônica é dada por

$$dX_q = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{pmatrix}.$$

Note que, neste caso, dizer que dX_q não é sobrejetiva é equivalente a dizer que

$$X_x = X_y = X_z = 0.$$

De fato, se dX_q não é sobrejetiva, então, $\dim(\mathbb{R}) = 1 \neq \dim(\text{Im}(dX_q))$ que só pode ser zero, visto que $\dim(\text{Im}(dX_q)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Assim, $\text{Im}(dX_q) = \{(0, 0, 0)\}$, o que mostra o afirmado. Portanto, $a \in X(U)$ é um valor regular de $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, X_x, X_y e X_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$X^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U; X(x, y, z) = a\}.$$

Proposição 2.6. *Se $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável e $a \in X(U)$ é um valor regular de X , então a imagem inversa de a é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .*

Para demonstração dessa proposição, vamos usar o seguinte teorema. Uma demonstração detalhada deste teorema pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.7 (Teorema da Função inversa). *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável e suponha em $p \in U$ que a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança $V \subset U$ de p e uma vizinhança W de $F(p)$ em \mathbb{R}^m tal que $F : V \rightarrow W$ tem inversa diferenciável $F^{-1} : W \rightarrow V$.*

Demonstração. (Proposição 2.6)

Seja $q = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $X^{-1}(a)$. Como a é valor regular de X , podemos admitir em particular que $X_z \neq 0$ em q . Defina a aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, X(x, y, z)),$$

onde indicaremos por (u, v, w) as coordenadas de um ponto do \mathbb{R}^3 onde F toma seus valores. A diferencial de F em q é dada por

$$dF_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X_x & X_y & X_z \end{pmatrix},$$

e, claramente

$$\det(dF_q) = X_z \neq 0.$$

Segue, do Teorema 2.7 que as funções coordenadas $x = u$, $y = v$, $z = X(u, v, w)$ são diferenciáveis. Em particular, $z = X(u, v, w) = h(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de $X^{-1}(a)$ no plano xy . Como

$$F(X^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, w); w = a\}$$

concluimos que o gráfico de h é $X^{-1}(a) \cap V$. Pela Proposição 2.4, $X^{-1}(a) \cap V$ é uma vizinhança coordenada de q . Consequentemente, todo $q \in X^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada e podemos concluir que $X^{-1}(a)$ é uma superfície regular. \square

Exemplo 2.8. A esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular. De fato, considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Note que a $S^2 = f^{-1}(0)$. Como f é uma função polinomial então f é diferenciável. Além disso, 0 é valor regular de f , pois as derivadas parciais $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $f_z = 2z$ se anulam simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, que não pertence a $f^{-1}(0)$.

Proposição 2.9. *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação local com $p \in X(U)$ tal que as condições (i) e (iii) da Definição 2.1 sejam satisfeitas. Se X é bijetiva, então X^{-1} é contínua (Figura 2.4).*

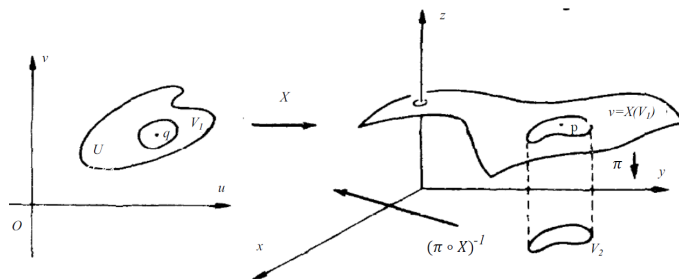


Figura 2.4: Continuidade da inversa de X

Demonstração. Seja $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, e $q \in U$. Pelas condições (i) e (iii) podemos garantir, sem perda de generalidade, que $\partial(x, y)/\partial(u, v) \neq 0$. Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Pelo Teorema 2.7 obtemos $V_1 \subset U$ de q e V_2 de $\pi \circ X(q)$ em \mathbb{R}^2 tais que a aplicação $\pi \circ X : V_1 \rightarrow V_2$ é um difeomorfismo. Então, restrita a $X(V_1)$,

$$X^{-1} = X^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi.$$

Assim, X^{-1} , sendo a composição de aplicações contínuas, é contínua. □

Exemplo 2.10. Considere a esfera E de raio a e a parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada dada por

$$X(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \cos u),$$

onde $(u, v) \in U$ e $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$. Mostremos que esta é uma superfície regular. De fato, a condição (i) da Definição 2.1 é satisfeita, pois as funções coordenadas

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v$$

$$y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$z = a \cos u$$

possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens. A condição (iii) também se verifica, visto que

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a \cos u \cos v & -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ -a \operatorname{sen} u & 0 \end{vmatrix} = -a^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \neq 0$$

visto que $0 < u, v < \pi$. Já para a condição (ii) note que dado $(x, y, z) \in E - C$, onde C é o semi-círculo $C = \{(x, y, z) \in E; y = 0, x \geq 0\}$, u fica inteiramente determinado por $u = \cos^{-1}(z/a)$. Conhecido o valor de u , determinamos $\operatorname{sen} v$ e $\cos v$ de maneira única por meio das coordenadas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$ e $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$. Segue então que X tem inversa que, pela Proposição 2.9 é contínua. Mas essa aplicação não parametriza toda a esfera unitária.

Definição 2.11. Seja $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, definida em um subconjunto V de uma superfície regular S que está parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, com $p \in X(u) \subset V$. A função f é dita diferenciável em $p \in V$ se a composição $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $X^{-1}(p)$. A função f é diferenciável em V se for diferenciável em todos os pontos de V .

2.2 Plano tangente. Primeira forma fundamental

Um importante ente geométrico, que pode ser pensado como a melhor aproximação linear de uma superfície em um ponto, é o plano tangente. Vamos iniciar definindo um vetor tangente a uma superfície. Em seguida, obteremos o espaço tangente a uma superfície em um ponto.

Definição 2.12. Seja S uma superfície regular e $p \in S$. O vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é dito **tangente** a S em p se existir uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.

Definição 2.13. Seja S uma superfície regular e $p \in S$. O **espaço tangente** que será denotado por $T_p S$, é o conjunto formado pelos vetores tangentes a S em p .

Proposição 2.14. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de uma superfície S . Seja $q = (u_0, v_0) \in U$ e $p \in S$ tal que $X(q) = p$. O espaço tangente a S no ponto p é o subespaço vetorial $dX_q(\mathbb{R}^2)$ de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores X_u e X_v . Em particular, esse subespaço não depende da parametrização X .

Demonstração. Inicialmente observe que $dX_q(\mathbb{R}^2)$ é subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 pois dX_q é linear. Seja α uma curva suave em S dada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Derivando com relação a t e usando a regra da cadeia, temos

$$\alpha'(t) = \frac{\partial X}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial X}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$$

Assim $\alpha'(t)$ é combinação linear de X_u e X_v . Por outro lado, como $dX_q(\mathbb{R}^2)$ é gerado por X_u e X_v , então qualquer vetor deste subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 é da forma $k_1 X_u + k_2 X_v$, para algum escalar k_i , $i = 1, 2$. Defina $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = X(u_0 + k_1 t, v_0 + k_2 t)$, onde $\varepsilon > 0$ e $(u_0 + k_1 t, v_0 + k_2 t) \in U$. Note que α é uma curva suave em S e no ponto $t = 0$, ou seja, em $p \in S$, temos

$$k_1 X_u + k_2 X_v = \alpha'(0)$$

O que nos mostra que cada vetor do plano gerado por X_u e X_v é tangente, em p , a alguma curva em S . □

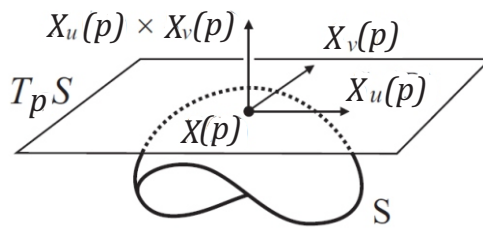


Figura 2.5: O plano tangente $T_p S$

Note que a proposição mostra que o plano tangente independe da escolha da parametrização em p . Além disso, uma vez fixada uma parametrização, as coordenadas do vetor tangente a p são $(u'(0), v'(0))$.

Proposição 2.15. Sejam S_1 e S_2 duas superfícies regulares e $\phi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável de um aberto V de S_1 em S_2 . Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ uma curva parametrizada diferenciável com $\alpha(0) = p, p \in V$ e $\alpha'(0) \in T_p S_1$. Considere a curva

$\beta = \phi \circ \alpha$ tal que $\beta(0) = \phi(p)$ e tal que $\beta'(0) \in T_p S_2$. Nestas condições, dado $\alpha'(0)$, o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de α . A aplicação

$$d\phi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\phi(p)} S_2, \quad d\phi_p(\alpha'(0)) = \beta'(0)$$

é linear (Figura 2.6).

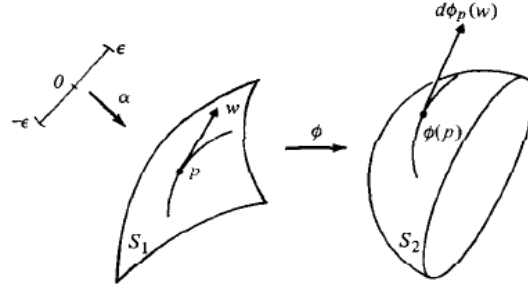


Figura 2.6: A diferencial $d\phi_p$

Demonstração. Sejam $X(u, v)$ e $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$ parametrizações na vizinhança de p e $\phi(p)$ respectivamente. Denotando, nestas coordenadas

$$(\bar{X}^{-1} \circ \phi \circ X)(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$$

e

$$\alpha(t) = (u(t), v(t))$$

então

$$\beta(t) = (\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$$

e assim a expressão de $\beta'(0)$ na base $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ é dada por

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \phi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} v'(0) \right)$$

o que mostra que β' depende apenas da aplicação ϕ e das coordenadas $(u'(0), v'(0))$ de $\alpha'(0)$ na base $\{X_u, X_v\}$ e, assim, β' independe de α . Note também que

$$d\phi_p(\alpha'(0)) = \beta'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

ou seja, $d\phi_p$ é uma aplicação linear de $T_p S_1$ em $T_{\phi(p)} S_2$ cuja matriz com relação às bases $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S_1$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}\}$ de $T_{\phi(p)} S_2$ é

$$d\phi_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

□

Uma ferramenta fundamental no estudo das superfícies é obtida ao calcularmos o produto interno entre dois elementos do plano tangente. Sua principal aplicação está relacionada a questões métricas, como cálculo do comprimento de uma curva contida em uma superfície, cálculo da área de uma região limitada de uma superfície e cálculo do ângulo entre duas curvas que se intersectam.

Definição 2.16. Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Dado $p \in S$, o produto interno usual de \mathbb{R}^3 induz em $T_p S$ o seguinte produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle.$$

Como o produto interno é uma forma bilinear e simétrica então podemos associar a ela uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$$

chamada **primeira forma fundamental** de S em p .

Observe que a primeira forma fundamental de S em p independe da parametrização escolhida. Mas, uma vez fixada uma parametrização local de S em p , podemos expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ do plano tangente. Seja $w \in T_p S$. Por definição, existe uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, então

$$w = u'(0)X_u(u(0), v(0)) + v'(0)X_v(u(0), v(0)).$$

Assim

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle w, w \rangle \\ &= \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= (u')^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle X_u, X_v \rangle + (v')^2 \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

onde cada derivada está calculada em $t = 0$. Fazendo

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

temos

$$I_p(\alpha'(0)) = (u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G$$

Os números E , F e G são chamados coeficientes da primeira forma fundamental de S na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$.

Exemplo 2.17. Vamos obter a primeira forma fundamental de uma esfera unitária S^2 . Consideremos a parametrização local de S^2 dada por

$$X : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } X(\psi, \theta) = (\cos \psi \sin \theta, \sin \psi \sin \theta, \cos \theta).$$

Temos então

$$X_\psi = (-\sin \psi \sin \theta, \cos \psi \sin \theta, 0) \quad \text{e} \quad X_\theta = (\cos \psi \cos \theta, \sin \psi \cos \theta, -\sin \theta).$$

Logo

$$\begin{aligned} E &= \langle X_\psi, X_\psi \rangle = \sin^2 \psi \sin^2 \theta + \cos^2 \psi \sin^2 \theta = \sin^2 \theta, \\ F &= \langle X_\psi, X_\theta \rangle = -\sin \psi \sin \theta \cos \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta \cos \psi \sin \theta = 0, \\ G &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \cos^2 \psi \cos^2 \theta + \sin^2 \psi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \end{aligned}$$

E assim, se $w = u'X_\psi + v'X_\theta$, então a sua primeira forma fundamental é

$$I_p(w) = (u')^2 \sin^2 \theta + (v')^2.$$

O conhecimento dos coeficientes da primeira forma fundamental associados a uma parametrização possibilita o estudo das questões métricas sobre a superfície na vizinhança do ponto p . Sabemos que o comprimento de uma curva α de 0 a t é dado por

$$s = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))} dt,$$

logo, se a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ está contida em alguma vizinhança coordenada de S determinada pela parametrização local X de S em p , então o comprimento dessa curva de 0 a t , é dado por

$$s = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{(u')^2 E + 2u'v'F + (v')^2 G} dt.$$

A primeira forma fundamental nos permite ainda calcular o ângulo θ entre curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow S$, que se intersectam. Sabemos que se α e β se intersectam no ponto $t = t_0 \in I$, então θ é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|} = \frac{I_p(\alpha'(t_0) + \beta'(t_0)) - I_p(\alpha'(t_0) - \beta'(t_0))}{4\sqrt{I_p(\alpha'(t_0))}\sqrt{I_p(\beta'(t_0))}}.$$

Em particular, se α e β são curvas coordenadas

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

visto que $\sqrt{E} = |X_u|$ e $\sqrt{G} = |X_v|$.

Finalmente, vamos analisar como a primeira forma fundamental pode ser usada para calcular a área de uma região R contida em uma superfície S . Inicialmente, observemos

que se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização local de S e E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental associados a X , então

$$EG - F^2 = |X_u|^2|X_v|^2 - (\langle X_u, X_v \rangle)^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0, \quad (2.3)$$

onde a última igualdade é verdadeira pela Identidade de Lagrange.

Definição 2.18. Um **domínio (regular)** de S é um subconjunto aberto e conexo de S cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular exceto em um número finito de pontos. Uma **região** de S é a união de um domínio com a sua fronteira (Figura 2.7).

Definição 2.19. Uma região R em uma superfície S é dita limitada se R está contida em alguma bola de raio finito em \mathbb{R}^3 .

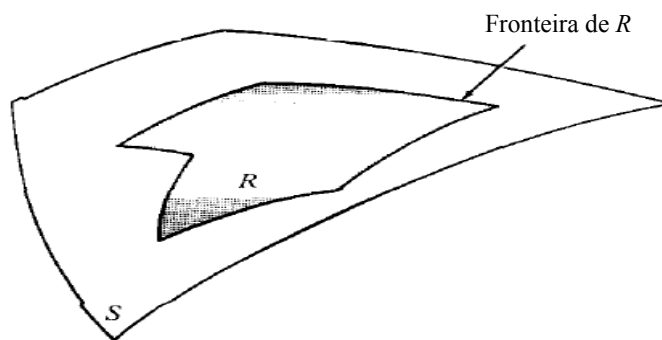


Figura 2.7: Região em uma superfície regular

Seja Q uma região limitada em \mathbb{R}^2 tal que $Q \subset U$ e seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização local de uma superfície regular S . A imagem de Q pela aplicação X está contida em S e também é uma região limitada.

Definição 2.20. Suponha que S seja uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja a parametrização local de S . Se R é uma região limitada em S tal que $R \subset X(U)$, então o número real positivo

$$A(R) = \int \int_Q |X_u \times X_v| dudv, \quad Q = X^{-1}(R)$$

é chamado a área da região R

Note que, pela identidade (2.3), a área da região pode ser escrita, em função dos coeficientes da primeira forma fundamental, na forma

$$A(R) = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

É importante salientar que, conhecidos os coeficientes da primeira forma fundamental de S , a área da região R , que está no espaço \mathbb{R}^3 , pode ser obtida no plano pelo cálculo da

integral dupla de sua imagem inversa. Informações mais detalhadas são encontradas em [4].

Teorema 2.21. *Dadas as transformações $X = X(u, v)$ e $Y = Y(\tilde{u}, \tilde{v})$ no plano de modo que o Jacobiano de mudança de coordenada $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}$, que é o determinante da matriz de mudança de base que obtemos ao trocar a base $\{X_u, X_v\}$ pela base $\{Y_{\tilde{u}}, Y_{\tilde{v}}\}$, seja diferente de zero, então*

$$dA = dudv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u}d\tilde{v}$$

Teorema 2.22. *A área de uma região independe da parametrização.*

Demonstração. Considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{X} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas parametrizações locais de S , onde $R \subset X(U)$ e $R \subset \tilde{X}(\tilde{U})$. Vamos considerar $Q = X^{-1}(R)$ e $\tilde{Q} = \tilde{X}^{-1}(R)$ e $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}$ o Jacobiano da mudança de coordenada (\tilde{u}, \tilde{v}) para (u, v) . Assim

$$\int \int_{\tilde{Q}} |\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}| d\tilde{u}d\tilde{v} = \int \int_{\tilde{Q}} |X_u \times X_v| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u}d\tilde{v} = \int \int_Q |X_u \times X_v| dudv,$$

que mostra que a área de uma região não depende da parametrização. □

Exemplo 2.23. A área do hemisfério superior da esfera é igual a 2π .

Como afirmado no teorema anterior, a área da uma superfície independe da escolha da parametrização, então podemos parametrizar S^2 por

$$X : (0, 1) \times (0, 2\pi) \rightarrow S^2 \quad \text{com} \quad X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1 - r^2}).$$

Nesse sistema de coordenadas, as coordenadas dos vetores tangentes as curvas coordenadas são dados por

$$X_r = (\cos \theta, \sin \theta, -\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}) \quad \text{e} \quad X_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

Segue de (2.2) que os coeficientes da primeira forma fundamental de S na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$ são

$$E = \frac{1}{1 - r^2}, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = r^2.$$

Considere a região $R = X(Q)$, onde

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \epsilon \leq u \leq 1 - \epsilon, 0 + \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}.$$

Logo a área do hemisfério é dada por

$$\begin{aligned}
\int \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} \, drd\theta &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \int_{\epsilon}^{1 - \epsilon} \sqrt{EG - F^2} \, drd\theta \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \int_{\epsilon}^{1 - \epsilon} \sqrt{\frac{1}{1 - r^2} \cdot r^2 - 0^2} \, drd\theta \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\theta \Big|_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \cdot (\sqrt{1 - r^2}) \Big|_{\epsilon}^{1 - \epsilon} \right] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[(2\pi - 2\epsilon) (\sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2} - \sqrt{1 - \epsilon^2}) \right] \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

2.3 Orientação de superfícies

Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^2 . Dado $p \in S$, podemos escolher uma orientação para o plano tangente $T_p S$. Tal orientação nos permite introduzir a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto de uma vizinhança coordenada contendo p , ou seja, a orientação de $T_p S$ induz uma orientação nesta vizinhança coordenada. A questão é: podemos escolher uma orientação de $T_p S$ de modo que na interseção de duas vizinhanças coordenadas, as orientações coincidam? Mais precisamente, dada uma parametrização local de uma superfície regular podemos definir uma direção normal a $T_p S$, dado por $|X_u \times X_v|$.

Definição 2.24. Definimos vetor normal à superfície S no ponto p como

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

Inicialmente vamos verificar que esse vetor está bem definido e não depende da parametrização.

Proposição 2.25. Se p é um ponto em uma superfície regular S e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ são duas parametrizações locais de S em p , então, neste ponto, temos

$$\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \pm \frac{Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}}{|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}|}$$

Demonstração. Seja $W = X(U) \cap Y(V)$ (Figura 2.8). Os subconjuntos

$$X^{-1}(W) \subset U \quad \text{e} \quad Y^{-1}(W) \subset V$$

estão relacionados pelo difeomorfismo

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W), \quad Y^{-1} \circ X(u, v) = (\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v)).$$

Logo, temos que $X(u, v) = Y(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$. Assim, os vetores tangentes são

$$X_u = Y_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + Y_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \quad \text{e} \quad X_v = Y_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + Y_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}.$$

Calculando $X_u \times X_v$, obtemos

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \left(Y_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + Y_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \right) \times \left(Y_{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + Y_{\tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \right) Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}} \\ &= \det J(Y^{-1} \circ X) Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}, \end{aligned}$$

onde

$$J(Y^{-1} \circ X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

é a matriz Jacobiana da aplicação $Y^{-1} \circ X$. Assim

$$\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{\det J(Y^{-1} \circ X)}{|\det J(Y^{-1} \circ X)|} \frac{Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}}{|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}|} = \pm \frac{Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}}{|Y_{\tilde{u}} \times Y_{\tilde{v}}|}.$$

□

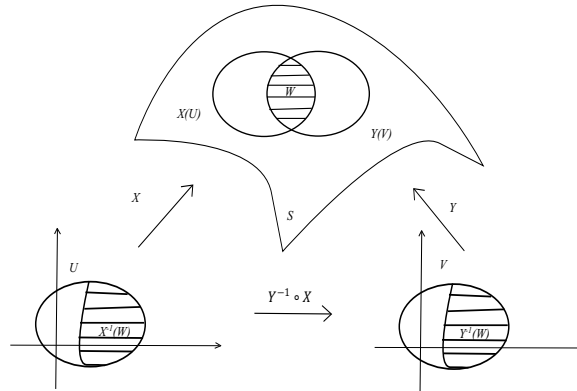


Figura 2.8: Interseção entre $X(U)$ e $Y(U)$

A proposição anterior nos permite concluir que o máximo que ocorre com a mudança de parametrização é a mudança do sentido do vetor normal. Assim, a partir de então, consideraremos sempre o vetor normal como

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

onde $X : U \rightarrow S$ é uma parametrização local de S em p .

Definição 2.26. Dizemos que uma superfície S é **orientável** se existe uma coleção de parametrizações $\{X_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \mid \beta \in A\}$ que cobre S , isto é, $S = \bigcup_{\beta \in A} X_\beta(U_\beta)$, e se $p \in S$ encontra-se em sobreposição de duas parametrizações, isto é, $p \in X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\theta(U_\theta)$, então a matriz Jacobiana $J(X_\theta^{-1} \circ X_\alpha)$ em p tem determinante positivo.

A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S e, neste caso, S é dita orientada.

Se não for possível fazer uma tal escolha, a superfície é não orientável.

Se a superfície é orientada, uma parametrização local X é dita compatível com a orientação de S se $X_u \times X_v$ tem o mesmo sentido do vetor normal a superfície (Figura 2.9).

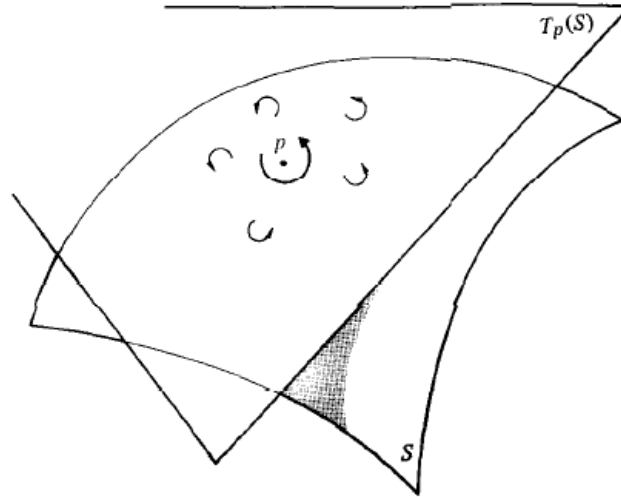


Figura 2.9: Superfície orientada

Definição 2.27. Chamamos de *campo diferenciável de vetores normais* em um aberto $U \subset S$ a uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in U$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a S em q .

Proposição 2.28. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .*

A seguinte proposição fornece uma condição suficiente para que uma superfície seja orientável. Uma demonstração pode ser obtida em [5].

Proposição 2.29. *Se uma superfície regular pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então a superfície é orientável.*

Vejamos alguns exemplos de superfícies orientáveis e não orientáveis:

Exemplo 2.30. Superfícies cobertas por uma única vizinhança coordenada, como superfícies dadas pelo gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são trivialmente orientáveis.

Exemplo 2.31. Vimos, no Exemplo 2.3 que a esfera S^2 é coberta por duas vizinhanças coordenadas. Como a interseção $S^2 - \{N, \tilde{N}\}$ é um conexo, então pela Proposição 2.29, a esfera S^2 é orientável.

Exemplo 2.32. Vamos verificar que a superfície chamada **faixa de Mobius** (Figura 2.10) não é orientável. Essa superfície é obtida da seguinte forma: Consideremos um segmento aberto AB no plano yz dado por $y = 2$ e $|z| < 1$, de modo que o centro de AB esteja sobre o eixo Oy e um círculo no plano xy de equação $x^2 + y^2 = 4$. A faixa é obtida quando deslocamos o centro de AB ao longo da circunferência e giramos AB em torno do seu centro de valor sendo metade do ângulo de deslocamento do centro em torno da circunferência. Assim, quando o centro voltar a sua posição inicial, os extremos do segmento estarão invertidos.

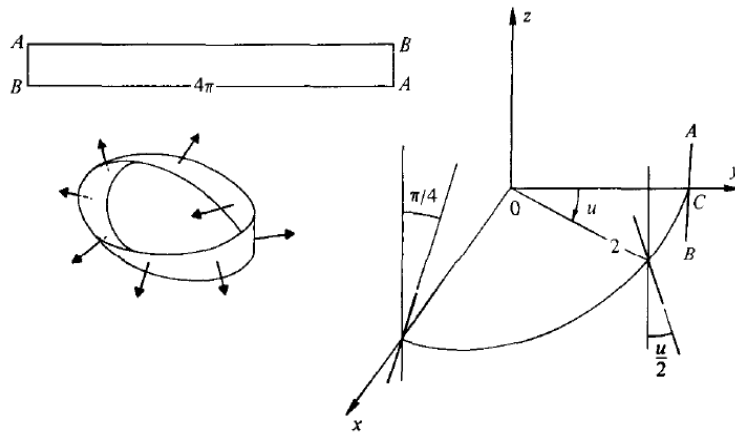


Figura 2.10: Faixa de Mobius

Note que, se a faixa de Mobius M fosse orientável, existiria um campo diferenciável de vetores normais unitários $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tomando esses vetores ao longo do círculo, veremos que depois de uma volta completa, N voltaria a sua posição inicial com sentido oposto, o que é uma contradição.

Exemplo 2.33. Uma superfície regular S dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad f(x, y, z) = a$$

onde f é diferenciável e a é um valor regular de f é orientável.

De fato, seja $p \in S$. Considere uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha(t_0) = p$, para algum $t_0 \in I$. Como a curva está na superfície, podemos escrever

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad \forall t \in I.$$

Derivando ambos os membros, temos, em $t = t_0$

$$f_x(p) \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + f_y(p) \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t_0} + f_z(p) \left(\frac{dz}{dt} \right)_{t_0} = \langle (f_x, f_y, f_z), \alpha'(t_0) \rangle = 0,$$

isto é

$$\langle \nabla f(p), \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Isto mostra que o vetor tangente a curva em $t = t_0$ é perpendicular ao vetor (f_x, f_y, f_z) em p . Pela curva e o ponto serem arbitrários, concluímos que

$$N(x, y, z) = \left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \right)$$

é um campo diferenciável de vetores unitários em S . Pela Proposição 2.28 temos que S é orientável.

2.4 A aplicação normal de Gauss. A segunda forma fundamental

Nessa seção vamos definir e obter uma interpretação geométrica para a segunda forma fundamental de uma superfície. Vamos discutir um dos mais importantes conceitos da geometria diferencial que é a curvatura gaussiana.

Definição 2.34. Seja S uma superfície orientada. Chama-se **aplicação de Gauss** a aplicação $N : S \rightarrow S^2$, onde S^2 é a esfera de raio unitário centrada na origem do \mathbb{R}^3 , que toma cada vetor normal no ponto p de S e leva na esfera S^2 (Figura 2.11).

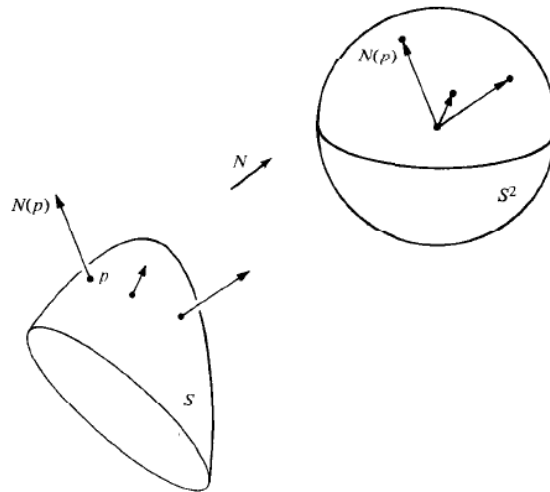


Figura 2.11: Aplicação normal de Gauss

Usando a Definição 2.11 percebemos que aplicação de Gauss é diferenciável. De acordo com a Definição 2.13 podemos encarar a diferencial de N da seguinte forma: para cada curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$, considere a curva parametrizada $N(t) = (N \circ \alpha)(t)$. Então a diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S^2$ é definida por

$$dN_p(\alpha'(0)) = N'(0).$$

Isso significa que a diferencial da aplicação de Gauss mede a taxa de variação do vetor normal ao longo da superfície S restrita a curva $\alpha(t)$.

Exemplo 2.35. Considere a superfície em forma de sela, de gráfico $z(u, v) = u^2 - v^2$ (Figura 2.12). Seja $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ uma parametrização dessa superfície. Assim

$$X_u = (1, 0, 2u) \quad \text{e} \quad X_v = (0, 1, -2v)$$

Segue que

$$N(p) = N(u_0, v_0) = \frac{(-2u_0, 2v_0, 1)}{\sqrt{4u_0^2 + 4v_0^2 + 1}}$$

Restringindo a superfície à curva $\alpha(t) = (u(t), v(t), u^2(t) - v^2(t))$, com $\alpha(0) = (0, 0, 0)$, temos

$$(N \circ \alpha)(t) = \frac{(-2u(t), 2v(t), 1)}{\sqrt{4u^2(t) + 4v^2(t) + 1}}$$

Calculando a derivada em $t = 0$

$$(N \circ \alpha)'(t) = \left(\frac{-8v^2u' + 8uvv' - 2u'}{\sqrt{(4u^2 + 4v^2 + 1)^3}}, \frac{8u^2v' - 8uvv' + 2v'}{\sqrt{(4u^2 + 4v^2 + 1)^3}}, \frac{8uu' + 8vv'}{2\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right)$$

Como $\alpha'(0) = (u'(0), v'(0), 0)$, temos que

$$dN_{(0,0,0)}(v) = dN_{(0,0,0)}((u'(0), v'(0), 0)) = (-2u'(0), 2v'(0), 0)$$

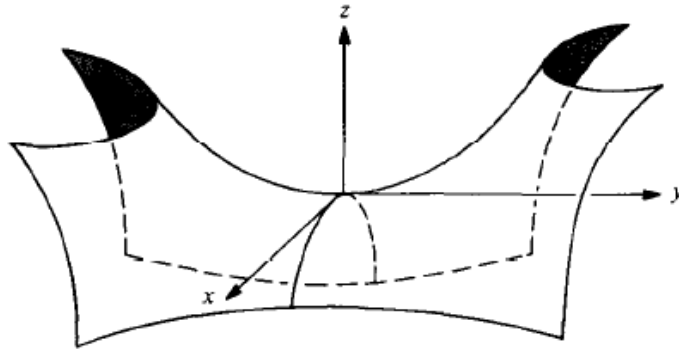


Figura 2.12: Sela

Definição 2.36. Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Se $A : V \rightarrow V$ é uma aplicação linear então A é dita **auto-adjunta** se, para todo $v, w \in V$,

$$\langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle.$$

Como $T_p S$ é paralelo a $T_{N(p)} S^2$, podemos entender a aplicação dN_p como um operador linear. Deste modo, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.37. A diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração. Pela Proposição 2.15 dN_p é linear. Então basta verificar que

$$\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle,$$

onde $\{v, w\}$ é base do plano tangente. Se $X(u, v)$ é uma parametrização local da superfície S em p . Então $\{X_u, X_v\}$ é base de T_pS . Portanto é suficiente mostrar que

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle.$$

Considere agora uma curva $\alpha(t)$ que passa por p de forma que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p$. Como $\alpha'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$, então

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(u'(0)X_u + v'(0)X_v) \\ &= u'(0)dN_p(X_u) + v'(0)dN_p(X_v) \\ &= \left. \frac{d}{dt}(N \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

Fazendo $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$, basta mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

De fato, como N é perpendicular ao plano tangente, então $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$. Derivando as expressões, respectivamente, com relação a v e a u temos:

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0$$

Subtraindo estas últimas expressões e lembrando que $X_{uv} = X_{vu}$ e que o produto interno é comutativo, temos:

$$\langle N_v, X_u \rangle - \langle N_u, X_v \rangle = 0 \quad \text{e portanto} \quad \langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

□

Observação 2.38. Como consequência desta proposição e da teoria de Álgebra Linear, observamos que

- Existem dois autovalores λ_1 e λ_2 reais (não necessariamente distintos) associados a dN_p ,
- se os autovalores λ_1 e λ_2 são distintos, então os autovetores e_1 e e_2 associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente, são perpendiculares,

- quando λ_1 e λ_2 são distintos (digamos $\lambda_1 > \lambda_2$), podemos tomar e_1 e e_2 tal que $|e_1| = |e_2| = 1$. Dado um vetor v do domínio da aplicação, ele pode ser escrito como $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre v e e_1 . Assim $\langle A(v), v \rangle = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta$. Além disso $\langle A(v), v \rangle$ atinge seu máximo quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ e atinge seu mínimo quando $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$,
- à aplicação dN_p está associada a uma forma quadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$.

A demonstração desses resultados pode ser obtida em [6].

Definição 2.39. Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 e $p \in S$. Chamamos **Segunda forma fundamental** de S em p à forma quadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$$

A noção de curvatura normal, que definiremos a seguir, nos permite obter uma interpretação geométrica para a segunda forma fundamental de uma superfície S .

Definição 2.40. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a curva e N o vetor normal a superfície no ponto p . O número $k_n = k \cos \theta = k \langle n, N \rangle$ é chamado **curvatura normal** de $C \subset S$ em p (Figura 2.13).

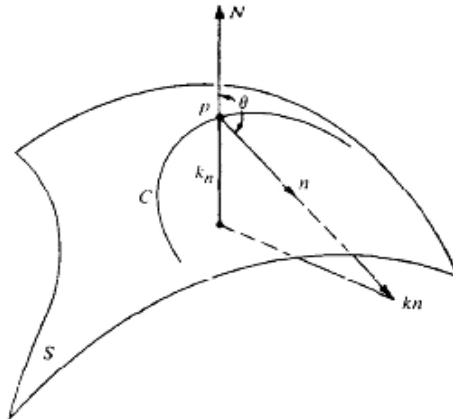


Figura 2.13: Curvatura normal

Considere uma curva C , parametrizada por $\alpha(s)$, sendo que s é o comprimento do arco de C , e um ponto p em S de modo que $\alpha(0) = p$. Vamos indicar $N(s)$ a restrição da normal a curva C , isto é, $N(s) = N(\alpha(s))$. Então, como $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)} S$ e $N(s)$ é normal a S em $\alpha(s)$, temos que $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$. Derivando, temos

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

isto é

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle N(s), \alpha''(s) \rangle, \quad \forall N(\alpha(s)).$$

Logo

$$II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle.$$

Mas por definição de curvatura de uma curva α dada em (1.9), temos que $\alpha''(0) = k(0)n(0)$.

Assim

$$II_p(\alpha'(0)) = \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = \langle N(0), k(0)n(0) \rangle = k(0)\langle N(0), n(0) \rangle$$

Chegamos, então, a seguinte conclusão

$$II_p(\alpha'(0)) = k_n(p).$$

Perceba que, geometricamente, a segunda forma fundamental em um vetor unitário tangente, $v \in T_pS$, corresponde ao valor numérico da curvatura normal de uma curva regular passando por p cujo vetor tangente é v .

Um outro tópico muito importante dentro da teoria da Geometria Diferencial é a noção de curvaturas. Em particular, estamos interessados na chamada curvatura gaussiana.

Sabemos da Proposição 2.37 que $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é uma aplicação auto-adjunta. Assim existem números reais k_1 e k_2 reais, com $k_1 \geq k_2$, e vetores unitários e_1 e e_2 tais que $dN_p(e_i) = -k_i e_i$, com $i = 1, 2$. Além disso, k_1 e k_2 são, respectivamente, o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental, isto é, são o os extremantes da curvatura normal em p . Portanto, a matriz do diferencial da aplicação normal de Gauss com relação a base $\{e_1, e_2\}$ é dada por

$$dN_p = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$$

Definição 2.41. Os números reais k_1 e k_2 são chamados curvaturas principais em p e os vetores e_1 e e_2 são chamados direções principais em p .

Observação 2.42. Como dN_p é uma aplicação auto-adjunta, as curvaturas principais podem ser obtidas pela equação

$$II_p = k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

onde θ é o ângulo de e_1 e $v \in T_pS$, com $|v| = 1$.

Definição 2.43. A curvatura gaussiana de S em p é dada por

$$K = \det(dN_p) = k_1 k_2$$

Definição 2.44. A curvatura média de S em p é dada por

$$H = -\frac{1}{2} \text{tr}(dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

A curvatura gaussiana e média nos permite fazer uma classificação dos pontos de uma superfície conforme a definição abaixo. Tal classificação nos permite estudar o comportamento de curvas na vizinhança de um ponto. Além disso, nos permite também a escolha de parametrizações locais adequadas. Não abordaremos estes fatos com mais detalhes pois não fazem parte do objetivo do trabalho. Maiores detalhes podem ser vistos em [2] e [5].

Definição 2.45. Um ponto de uma superfície S é chamado

1. Elíptico, se $K > 0$.
2. Hiperbólico, se $K < 0$.
3. Parabólico, se $K = 0$, com $dN_p \neq 0$
4. Planar, se $K = 0$.

2.5 A segunda forma fundamental em coordenadas locais. Curvaturas

Vejamos como expressar a segunda forma fundamental e a diferencial da aplicação normal de Gauss em coordenadas locais. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável, localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, parametrização esta compatível com a orientação N de S , ou seja, $N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$. Consideremos também uma curva α em S com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Seja $w = \alpha'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$. Temos então

$$dN(w) = \left. \frac{d}{dt} N \circ X(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = dN(X_u)u'(0) + dN(X_v)v'(0) = u'(0)N_u + v'(0)N_v \quad (2.4)$$

Observação 2.46. N_u e N_v são vetores de $T_p S$.

De fato, como N é unitário então

$$\langle N, N \rangle = 1.$$

Derivando com relação a u , obtemos

$$\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0,$$

e assim

$$\langle N_u, N \rangle = 0.$$

Analogamente, $\langle N_v, N \rangle = 0$. Portanto, N_u e N_v são perpendiculares a N e, deste modo, estão em $T_p S$.

Assim, existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$ tais que

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \quad \text{e} \quad N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

e então, voltando a expressão (2.4), temos

$$dN(w) = u'(a_{11}X_u + a_{21}X_v) + v'(a_{12}X_u + a_{22}X_v) = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v.$$

Desta forma, a matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$ é a matriz (a_{ij}) tal que

$$dN(w) = dN \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Segue da Definição 2.39 que $II_p(w) = -\langle dN(w), w \rangle$, que a segunda forma fundamental, em coordenadas locais, em $w \in T_pS$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle u'N_u + v'N_v, u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) u'v' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2. \end{aligned}$$

Lembrando que $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ (Proposição 2.37) e definindo

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

obtemos a seguinte expressão para a segunda forma fundamental

$$II_p(w) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2. \quad (2.5)$$

Vamos agora, a partir da segunda forma fundamental, obter as entradas da matriz dN na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS . Note que

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -\langle dN(w), w \rangle = \langle (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v, u'X_u + v'X_v \rangle \\ &= -(u')^2(a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_u, X_v \rangle) - (v')^2(a_{12}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle) + \\ &\quad -u'v'(a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_u, X_v \rangle + a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle) \\ &= -(u')^2(a_{11}E + a_{21}F) - u'v'(a_{12}E + a_{22}F + a_{11}F + a_{21}G) - (v')^2(a_{12}F + a_{22}G), \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. Tomando $w = X_u$, ou seja, fazendo $u' = 1$ e $v' = 0$ e então, comparando os termos desta última equação com os termos da equação obtida em (2.5), obtemos

$$a_{11}E + a_{21}F = -e.$$

Analogamente, fazendo $u' = 0$ e $v' = 1$ teremos,

$$a_{12}F + a_{22}G = -g.$$

E como $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$ e $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$, temos

$$a_{11}F + a_{21}G = -f = a_{12}E + a_{22}F.$$

Todas essas equações resultam na seguinte equação matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

E assim

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

E, deste modo, os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Corolário 2.47. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Seja $N : T_pS \rightarrow T_pS$ sua aplicação normal. Considere E, F, G os coeficientes da primeira forma fundamental de S na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS e sejam e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental de S na base $\{X_u, X_v\}$. Então a curvatura gaussiana é dada por*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

e a curvatura média é

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EF - F^2}.$$

Demonstração. Como $K = \det(dN)$ e $dN = (a_{ij})_{2 \times 2}$ segue por (2.6) que

$$\begin{aligned} K &= \det \left[-\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right]^t \\ &= \left(-\frac{1}{EG - F^2} \right)^2 (eg - f^2)(EG - F^2) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Além disso, como $H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$, então por (2.7) temos

$$H = -\left(\frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EF - F^2}.$$

□

Exemplo 2.48. Considere o plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que passa por $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e que contenha os vetores ortonormais w_1, w_2 . Uma parametrização para o plano é dada por

$$X(u, v) = p_0 + w_1u + w_2v, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim a curvatura gaussiana do plano é $K = 0$. De fato, note que

$$X_u = w_1 \text{ e } X_v = w_2,$$

que são ortonormais por hipótese. Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad \langle X_v, X_v \rangle = 1.$$

Visto que

$$X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = 0$$

temos

$$\begin{aligned} e &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \\ f &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \\ g &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \end{aligned}$$

onde (\cdot, \cdot, \cdot) representa o produto misto. Concluimos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Exemplo 2.49. Vamos calcular curvatura gaussiana da esfera S^2 definida no exemplo 2.17. Vimos que, nas coordenadas u e v , S^2 pode ser parametrizada por

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

de onde obtivemos

$$X_u = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0) \text{ e } X_v = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v),$$

e, conseqüentemente, obtivemos

$$E = \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Passemos aos cálculos dos coeficientes da segunda forma fundamental. Perceba que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (-\cos usenv, -\text{sen}usenv, 0), \\ X_{uv} &= (-\text{sen}u \cos v, \cos u \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-\cos usenv, -\text{sen}usenv, -\cos v). \end{aligned}$$

Deste modo

$$\begin{aligned} e &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\text{sen}^3 v}{\text{sen}v} = \text{sen}^2 v, \\ f &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{0}{\text{sen}v} = 0, \\ g &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\text{sen}v}{\text{sen}v} = 1. \end{aligned}$$

Note $E = e$, $F = f$, $G = g$. Portanto

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 1.$$

Exemplo 2.50. Considere a superfície regular chamada pseudo-esfera dada pela parametrização

$$X(u, v) = (\text{sechu} \cos v, \text{sech}usenv, \tanh u - u), \quad u \neq 0.$$

Vamos verificar que a curvatura gaussiana dessa superfície é constante e vale $K = -1$.

De fato, derivando com relação a u e a v , obtemos

$$\begin{aligned} X_u &= (-\text{sechu} \tanh u \cos v, -\text{sechu} \tanh usenv, -\tanh^2 u), \\ X_v &= (-\text{sech}usenv, \text{sechu} \cos v, 0). \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= \text{sech}^2 u \tanh^2 u \cos^2 v + \text{sech}^2 u \tanh^2 usenv^2 + \tanh^4 u = \tanh^2 u \\ F = \langle X_u, X_v \rangle &= \text{sech}^2 u \tanh u \cos v \text{sen}v - \text{sech}^2 u \tanh u \cos v \text{sen}v = 0 \\ G = \langle X_v, X_v \rangle &= \text{sech}^2 u \text{sen}^2 v + \text{sech}^2 u \cos^2 v = \text{sech}^2 u \end{aligned}$$

Para os coeficientes da segunda forma fundamental, precisamos das derivadas

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \text{sechu}((\tanh^2 u - \text{sech}^2 u) \cos v, (\tanh^2 u - \text{sech}^2 u) \text{sen}v, -2 \tanh u \text{sechu}), \\ X_{uv} &= (\text{sechu} \tanh usenv, -\text{sechu} \tanh u \cos v, 0), \\ X_{vv} &= (-\text{sechu} \cos v, -\text{sech}usenv, 0). \end{aligned}$$

De forma que obtemos

$$\begin{aligned} e &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\text{sech}^2 u \tanh^2 u}{\text{sechu} \tanh u} = \text{sechu} \tanh u, \\ f &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{0}{\text{sechu} \tanh u} = 0, \\ g &= \left\langle \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-\text{sech}^2 u \tanh^2 u}{\text{sechu} \tanh u} = -\text{sechu} \tanh u. \end{aligned}$$

E, finalmente, obtemos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\operatorname{sech}^2 u \tanh^2 u}{\operatorname{sech}^2 u \tanh^2 u} = -1.$$

Capítulo 3

Geodésicas

3.1 Introdução

Neste capítulo, iremos estudar a geometria intrínseca da superfície, que é obter resultados sobre a superfície em termos da primeira forma fundamental. Veremos o conceito de derivada covariante e a definição de geodésica e curvatura geodésica, pontos fundamentais para o desenvolver do trabalho. Intuitivamente as geodésicas sobre uma superfície regular S desempenham o mesmo papel que as retas no espaço euclidiano. Em um certo sentido as geodésicas minimizam distâncias entre dois pontos de uma superfície.

Definição 3.1. Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Dizemos que um campo $w : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo de vetores se

- i. $\forall p \in S, w(p) \in T_p S$,
- ii. para toda parametrização $X : U \rightarrow S$ de S em p , a função $w \circ X : U \rightarrow T_p S$ é diferenciável.

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável e orientada e seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização local compatível com a orientação de S . Assim, X_u, X_v, N , com $N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$, é uma base de \mathbb{R}^3 orientada positivamente. Desta forma, podemos expressar a derivada de cada um dos vetores dessa base com relação a u e a v como combinação linear destes vetores, ou seja, existem $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}; i, j, k = 1, 2$ e $L_1, L_2, \tilde{L}_1, L_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \tilde{L}_2 N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v. \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde os a_{ij} são as entradas da matriz de dN dada em (2.7). As funções Γ_{ij}^k , $i = 1, 2$ são ditos símbolos de Christoffel. Sejam E, F, G, e, f, g os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na base X_u, X_v de T_pS . Note que

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, N \rangle &= e = \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, N \rangle = L_1 \\ \langle X_{uv}, N \rangle &= f = \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, N \rangle = L_2 \\ \langle X_{vv}, N \rangle &= g = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, N \rangle = L_3\end{aligned}$$

Como $X_{uv} = X_{vu}$, e a base é ordenada, temos que $L_2 = \tilde{L}_2$ e que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Vejamos como obter os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas.

$$\begin{aligned}E_u &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle = 2 \langle X_{uu}, X_u \rangle \\ E_v &= \frac{\partial}{\partial v} \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = 2 \langle X_{uv}, X_u \rangle \\ F_u &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_{uv}, X_u \rangle \\ F_v &= \frac{\partial}{\partial v} \langle X_u, X_v \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_{vv}, X_u \rangle \\ G_u &= \frac{\partial}{\partial u} \langle X_v, X_v \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_{uv}, X_v \rangle = 2 \langle X_{uv}, X_v \rangle \\ G_v &= \frac{\partial}{\partial v} \langle X_v, X_v \rangle = \langle X_{vv}, X_v \rangle + \langle X_{vv}, X_v \rangle = 2 \langle X_{vv}, X_v \rangle\end{aligned}\tag{3.2}$$

Das duas primeiras e das duas últimas equações, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_u &= \langle X_{uu}, X_u \rangle \\ \frac{1}{2}E_v &= \langle X_{uv}, X_u \rangle \\ \frac{1}{2}G_u &= \langle X_{uv}, X_v \rangle \\ \frac{1}{2}G_v &= \langle X_{vv}, X_v \rangle\end{aligned}$$

Efetuada os produtos internos com X_u e X_v em ambos os membros das equações 3.1 temos, como consequência destas identidades que os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k podem ser obtidos resolvendo os sistemas lineares

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_u \end{cases}\tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Note que a matriz principal associada a cada um destes sistemas é

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

cujos determinantes são $EG - F^2$. Além disso, $EG - F^2 = |X_u \times X_v| \neq 0$, visto que X é uma parametrização de uma superfície regular S .

Definição 3.2. Sejam w um campo diferenciável de vetores em um aberto U contido na superfície e um ponto p desse aberto. Seja $v \in T_p S$. Considere a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ e seja $w(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a restrição do campo de vetores à curva α . O vetor obtido pela projeção de $\frac{dw}{dt}(0)$ no plano tangente é chamado **derivada covariante em p do campo de vetores w em relação ao vetor v** . Ela será denotada por $\frac{Dw}{dt}(0)$ (Figura 3.1).

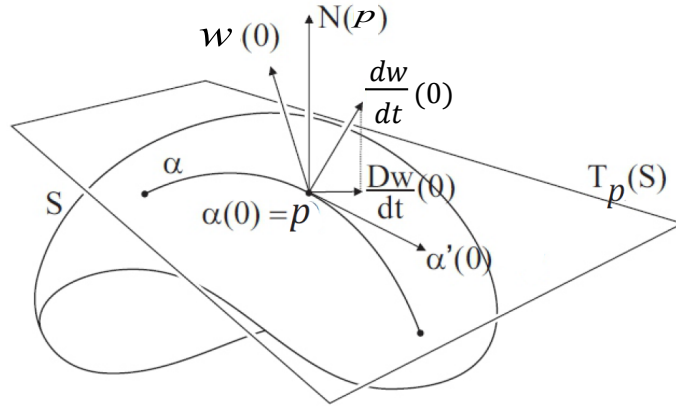


Figura 3.1: Representação geométrica da derivada covariante

Definição 3.3. Um campo de vetores w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é chamado **paralelo** se $\frac{Dw}{dt}(t) = 0$, para todo $t \in I$.

Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p . Considere $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Se w é um campo de vetores definidos em um aberto $U \subset S$, então

$$w(t) = a(u(t), v(t))X_u + b(u(t), v(t))X_v,$$

uma vez que $w(t) \in T_{w(t)}S$. Derivando em t , obtemos

$$\frac{dw}{dt} = a'X_u + a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b'X_v + b(X_{vu}u' + X_{vv}v').$$

Como $\frac{Dw}{dt}$ é a projeção da derivada do campo de vetores no plano tangente, podemos utilizar as expressões (3.1) para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} = & a'X_u + a[(\Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v)u' + (\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v)v'] + \\ & + b'X_v + b[(\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v)u' + (\Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v)v'], \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} = & (a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1)X_u + \\ & + (b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2)X_v. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Essa expressão mostra que a derivada covariante depende apenas de $v = \alpha'(t) = (u'(t), v'(t))$. Note também que ela é dada em termos dos símbolos de Christoffel, o que mostra que a definição de derivada covariante é um conceito da geometria intrínseca.

3.2 Curvatura geodésica

O estudo das curvas sobre uma superfície conhecidas como geodésicas merece destaque por sua propriedade de minimizar distâncias. No plano euclidiano, elas são as retas. Na esfera são os círculos máximos. A existência e unicidade dessas curvas se dá pelo teorema de Picard para soluções de equações diferenciais ordinárias.

Definição 3.4. Uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ é chamada uma **geodésica** em $t \in I$ de S quando seu campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é paralelo ao longo de α em t , ou seja, $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0$. A curva α é uma geodésica parametrizada se for geodésica em todo $t \in I$.

Essa definição nos diz que o vetor velocidade $\alpha''(t)$ é paralelo ao vetor normal a superfície, em p . Note que se $\alpha''(t) \neq 0$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $n(t) = \frac{\alpha''(t)}{|\alpha''(t)|}$ é o vetor normal a curva α em t . Assim, se α é uma geodésica então $n(t)$ é paralelo a $N(u(t), v(t))$.

Proposição 3.5. *Seja S uma superfície regular localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é uma geodésica, então $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$. Em particular, $|\alpha'(t)|$ é constante.*

Demonstração. Seja N o vetor normal a S no ponto $\alpha(t)$. Como α é uma geodésica, então α'' é paralelo a N . Segue que α'' é ortogonal ao vetor tangente α' . Consequentemente, temos

$$\frac{d}{dt}|\alpha'|^2 = \frac{d}{dt}\langle \alpha', \alpha' \rangle = 2\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$$

o que mostra que $|\alpha'(t)|$ é constante. □

A proposição anterior nos permite escolher, sem perda de generalidade, uma parametrização por comprimento de arco para uma geodésica α .

Definição 3.6. Seja S uma superfície regular orientável e orientada w um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$. Como $w(t)$, $t \in I$ é um campo de vetores unitários, então $\frac{dw}{dt}(t)$ é normal a $w(t)$, e portanto

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)). \quad (3.5)$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $\left[\frac{Dw}{dt} \right]$ é chamado valor algébrico da derivada covariante.

Observação 3.7. Note que o sinal de $\left[\frac{Dw}{dt} \right]$ depende da orientação da superfície.

Definição 3.8. Considere uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S . Seja $\alpha(s)$ uma parametrização da curva pelo comprimento de arco s . O valor algébrico da derivada covariante de $\alpha'(s)$ é chamado **curvatura geodésica** da curva em p e será denotada por k_g .

Segue da definição de geodésica e da equação (3.5) que se uma curva é uma geodésica, então $k_g = 0$. Dada uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ em uma superfície regular S , podemos falar em curvatura da curva (Definição 1.9), curvatura normal (Definição 2.40) e curvatura geodésica (Definição 3.8). Veremos uma proposição que relaciona estas três curvaturas. Para a sua demonstração iremos precisar do seguinte lema

Lema 3.9. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientável com orientação N e seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva em S , parametrizada pelo comprimento de arco. Então*

$$\alpha'' = k_n N + k_g (N \times \alpha')$$

onde k_n é a curvatura normal de α e k_g é a sua curvatura geodésica.

Demonstração. Considere a curva $C \subset S$ parametrizada pelo comprimento de arco em uma superfície regular S . Deste modo α' é unitário e, por definição, pertence a $T_p S$. Assim α' é perpendicular ao vetor normal unitário N . Deste modo, os vetores α' , N e $N \times \alpha'$ são unitários e dois a dois ortogonais. Como a curva é parametrizada pelo comprimento de arco, α' é ortogonal a α'' e assim α'' pode ser escrito como combinação linear de N e $N \times \alpha'$, a saber

$$\alpha'' = aN + b(N \times \alpha').$$

Agora, efetuando o produto interno em ambos os membros por N , temos

$$\langle \alpha'', N \rangle = \langle aN, N \rangle + \langle b(N \times \alpha'), N \rangle.$$

Mas, por definição, $\alpha'' = kn$ e, portanto

$$a = k\langle n, N \rangle = k_n.$$

Tomando o produto interno com $N \times \alpha'$, obtemos

$$\langle \alpha'', N \times \alpha' \rangle = \langle aN, N \times \alpha' \rangle + \langle b(N \times \alpha'), N \times \alpha' \rangle.$$

e assim podemos escrever

$$\left\langle \frac{d}{dt} \alpha', N \times \alpha' \right\rangle = b.$$

Como $\frac{d}{dt} \alpha' = \frac{D}{dt} \alpha' + \mu N$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$b = \left\langle \frac{D}{dt} \alpha' + \mu N, N \times \alpha' \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \alpha', N \times \alpha' \right\rangle = k_g.$$

Concluimos então que

$$\alpha'' = k_n N + k_g (N \times \alpha'). \quad (3.6)$$

□

Proposição 3.10. *Considere uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ parametrizada pelo comprimento de arco contida em superfície S . Se k, k_n, k_g são, respectivamente, a curvatura da curva, a curvatura normal e a curvatura geodésica, então*

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2.$$

Além disso,

$$k_g = \pm k \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é o ângulo formado entre o vetor normal a curva e o vetor normal a superfície.

Demonstração. Usando o lema anterior, obtemos

$$|\alpha''|^2 = \langle \alpha'', \alpha'' \rangle = \langle k_n N + k_g N \times \alpha', k_n N + k_g N \times \alpha' \rangle$$

Como N e $N \times \alpha'$ são ortogonais e $k = |\alpha''|$, então

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2.$$

Pela Definição 2.40, se n é o vetor normal a curva α , então

$$k_n = k \cos \theta.$$

Desta forma

$$k^2 = k^2 \cos^2 \theta + k_g^2.$$

Logo

$$k_g^2 = k^2 \text{sen}^2 \theta$$

ou seja

$$k_g = \pm k \text{sen} \theta.$$

□

Vamos agora expressar o valor da curvatura geodésica por meio da primeira forma fundamental e suas derivadas.

Lema 3.11. *Sejam v e w dois campos diferenciáveis de vetores unitários ao longo da curva $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, e seja φ o ângulo entre v e w . Então*

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração desse lema em dois casos:

- Caso 1: $\varphi \neq 0$.

Temos que $\cos \varphi = \langle v, w \rangle$. Derivando em relação a t , obtemos

$$\langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle = -\varphi' \text{sen} \varphi.$$

Como v e w são campos tangentes à superfície então esta equação pode ser escrita na forma

$$\left[\left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle \right] + \left[\left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle \right] = -\varphi' \text{sen} \varphi$$

Usando a Definição 3.5, temos

$$\left[\frac{Dv}{dt} \right] \langle N \times v, w \rangle + \left[\frac{Dw}{dt} \right] \langle v, N \times w \rangle = -\varphi' \text{sen} \varphi.$$

Logo

$$\left(\left[\frac{Dv}{dt} \right] - \left[\frac{Dw}{dt} \right] \right) \langle N \times v, w \rangle = -\varphi' \text{sen} \varphi.$$

Seja agora θ o ângulo entre $N \times v$ e w . Assim $\cos \theta = \frac{\langle N \times v, w \rangle}{|N \times v| |w|}$. Como w , v e N são unitários e $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, temos que $\langle N \times v, w \rangle = \text{sen} \varphi$. Concluimos então que

$$-\varphi' \text{sen} \varphi = \left(\left[\frac{Dv}{dt} \right] - \left[\frac{Dw}{dt} \right] \right) \langle N \times v, w \rangle = \left(\left[\frac{Dv}{dt} \right] - \left[\frac{Dw}{dt} \right] \right) \text{sen} \varphi.$$

Ao simplificar, temos

$$\left(\left[\frac{Dv}{dt} \right] - \left[\frac{Dw}{dt} \right] \right) = -\varphi', \text{ pois } \varphi \neq 0.$$

Portanto

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}.$$

- Caso 2: $\varphi = 0$

Neste caso, trivialmente, $w = v$ e o resultado é o esperado. □

Proposição 3.12. *Sejam $X(u, v)$ uma parametrização ortogonal ($F = 0$) de uma superfície orientada S em uma vizinhança de um ponto $p \in S$ e $w(t)$ um campo de vetores unitário e diferenciável ao longo da curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Então*

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $\varphi(t)$ é o ângulo entre X_u e $w(t)$ na orientação dada.

Demonstração. Como X é uma parametrização ortogonal, então $\left\{ e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\}$ é uma base ortonormal do plano tangente. É claro que $e_1 \times e_2 = N$. Utilizando o Lema 3.11, temos que

$$\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \left[\frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

onde $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$ é o campo de vetores e_1 restrito a curva α . Usando (3.5), obtemos

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}.$$

Mas como $F = 0$, temos que $\langle X_u, X_v \rangle = F = 0$ e, portanto $\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_{uv}, X_u \rangle$. Por (3.2), $\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_{uv}, X_u \rangle = -\frac{1}{2}E_v$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_u, e_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{X_{uu}\sqrt{E} - X_u(\sqrt{E})_u}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{X_{uu}E - X_uE_u}{E\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{X_uE_u}{E\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{\langle X_{uu}, X_v \rangle}{\sqrt{EG}} - \frac{E_u \langle X_u, X_v \rangle}{E\sqrt{EG}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}
\langle (e_1)_v, e_2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_v, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{X_{uv}\sqrt{E} - X_u(\sqrt{E})_v}{E}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{X_{uv}E - X_uE_v}{E\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}} - \frac{X_uE_v}{E\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\
&= \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v \langle X_u, X_v \rangle}{E\sqrt{EG}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.
\end{aligned}$$

E assim, temos

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

□

Proposição 3.13. *Seja $X(u, v)$ uma parametrização ortogonal de uma superfície orientada S em uma vizinhança de um ponto $p \in S$ e seja $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e φ o ângulo que vai de X_u a $\alpha'(s)$. Então*

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

onde $(k_g)_1$ e $(k_g)_2$ são, respectivamente, as curvaturas geodésicas das curvas coordenadas a $v = v_0$ e $u = u_0$.

Demonstração. Se tomarmos $w = \alpha'(s)$, pela proposição 3.12, temos que

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Como $\alpha'(s)$ é um vetor unitário e pertence ao plano tangente $T_p S$, podemos escrevê-lo na forma

$$\alpha'(s) = u'X_u + v'X_v = u'\sqrt{E}e_1 + v'\sqrt{G}e_2,$$

pois a parametrização X é ortogonal e, deste modo, $\left\{ e_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\}$ é uma base ortonormal do plano tangente.

Fazendo $v = v_0$ e $u = u(s)$, temos $\frac{dv}{ds} = 0$ e $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}$ visto que, neste caso, $\alpha'(s) = e_1$, pois ambos são paralelos, de mesmo sentido e de norma unitária e

$$1 = \langle \alpha'(s), e_1 \rangle = \langle u'\sqrt{E}e_1, e_1 \rangle = u'\sqrt{E}$$

e assim

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

Fazendo $u = u_0$ e $v = v(s)$, temos $\frac{du}{ds} = 0$ e $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}$ visto que, neste caso, $\alpha'(s) = e_2$, pois ambos são paralelos, de mesmo sentido e de norma unitária e

$$1 = \langle \alpha'(s), e_2 \rangle = \langle v'\sqrt{G}e_2, e_2 \rangle = v'\sqrt{G}$$

e assim

$$(k_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Note que, de qualquer modo, φ é constante, visto que quando $u = u(s)$, temos $\varphi = 0$ e quando $u = u(s)$, temos $\varphi = \pi/2$. Concluimos então que

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \\ &= \frac{G_u}{2E\sqrt{G}} \sqrt{E} \frac{dv}{ds} + \frac{E_v}{2G\sqrt{E}} \sqrt{G} \frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \\ &= (k_g)_1 \sqrt{E} \frac{dv}{ds} + (k_g)_2 \sqrt{G} \frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \\ &= (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned}$$

visto que

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left\langle \alpha'(s), \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \sqrt{E} \frac{du}{ds}, \\ \sin \varphi &= \left\langle \alpha'(s), \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}. \end{aligned}$$

□

A seguinte proposição informa que determinar geodésicas de uma superfície S é equivalente a resolver um sistema de equações diferenciais de segunda ordem.

Proposição 3.14. *Seja S uma superfície regular orientável, com orientação N localmente parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Seja Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ os símbolos de Christoffel associados a X . Então a curva $\alpha : I \rightarrow S$ parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ é uma geodésica se, e somente se*

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Pela expressão (3.4) temos que, em coordenadas locais, a derivada covariante de um campo de vetores diferenciável w é dada por

$$\frac{Dw}{dt} = (a' + au' \Gamma_{11}^1 + av' \Gamma_{12}^1 + bu' \Gamma_{12}^1 + bv' \Gamma_{22}^1) X_u + (b' + au' \Gamma_{11}^2 + av' \Gamma_{12}^2 + bu' \Gamma_{12}^2 + bv' \Gamma_{22}^2) X_v$$

e que uma curva é uma geodésica se sua curvatura geodésica for nula. Para tal, precisamos que $\frac{Dw}{dt} = 0$. Deste modo, se $\alpha'(t) = X(u(t), v(t))$, então $\alpha'(t) = u' X_u + v' X_v$. Portanto,

a derivada covariante será nula se, e somente se

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

□

O sistema de equações diferenciais dado na Proposição 3.14 é conhecido como *equações diferenciais das geodésicas de S*.

Como consequência desta proposição e do teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.15. *Seja S uma superfície regular orientada. Dado um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_pS$ não nulo, existe um $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Exemplo 3.16. Considere o cilindro dado pela parametrização (Figura 3.2)

$$X(u, v) = (\cos u, \text{senu}, v), \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Afirmção 1: Todos as geratrizes são geodésicas.

Note que

$$\begin{aligned} X_u &= (-\text{senu}, \cos u, 0), \\ X_v &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Calculando o produto vetorial $X_u \times X_v = (\cos u, \text{senu}, 0)$, obtemos o vetor normal $N = (\cos u, \text{senu}, 0)$, visto que $|X_u \times X_v| = 1$. Agora considere o meridiano $g = X \circ r$, sendo r uma reta geratriz do cilindro que passa pelo ponto $(u, v, 1)$ e tem direção $(0, 0, 1)$. Assim

$$g(t) = (\cos u, \text{senu}, t + 1)$$

Deste modo,

$$g''(t) = (0, 0, 0)$$

o que mostra o afirmado, visto que o vetor normal principal da curva é paralelo ao vetor normal da superfície em cada ponto.

Afirmção 2: Os círculos obtidos pela interseção do cilindro com planos normais ao eixo também são geodésicas.

De fato, seja $\alpha(t) = X(t, c) = (\cos t, \text{sent}, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Note que $\alpha''(t) = (-\cos t, -\text{sent}, 0)$. Já o vetor normal é dado por

$$N(u(t), v(t)) = (\cos u, \text{senu}, 0)$$

consequentemente

$$N(t, c) = (\cos t, \text{sent}, 0)$$

e assim, $\alpha''(t)$ é paralelo a $N(t, c)$. Agora, vejamos as demais curvas que são geodésicas no cilindro. Como, no plano, as geodésicas são retas, vamos fazer $\alpha(t) = X(at, bt) = (\cos(at), \sin(at), bt)$, e assim $\alpha''(t) = (-a^2 \cos(at), -a^2 \sin(at), 0)$. Já o vetor normal da superfície é dado por

$$N(u(t), v(t)) = (\cos u, \sin u, 0)$$

logo

$$N(at, bt) = (\cos(at), \sin(at), 0)$$

o que mostra que $\alpha(t)$ é uma geodésica.

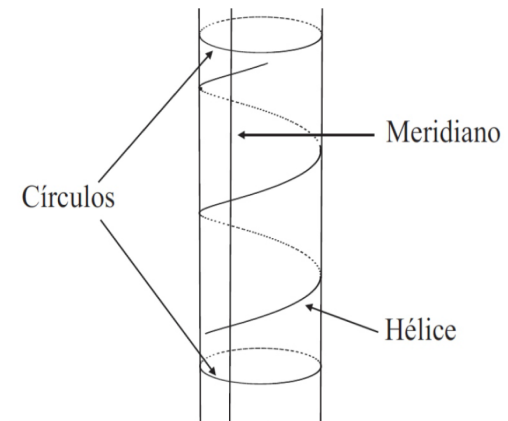


Figura 3.2: Geodésicas do cilindro

Exemplo 3.17. Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva no plano xy parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, $g(v) > 0$. Seja S a superfície de revolução obtida pela rotação de α em torno do eixo Oz . Assim, S pode ser parametrizada por $X(0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)).$$

Então os meridianos de S , isto é, as curvas $u = u_0$ e $v = v(s)$ são geodésicas. Os paralelos de S são geodésicas se, e somente se, $f'(v) = 0$ (Figura 3.3).

Inicialmente, calculemos os símbolos de Christoffel. Para tanto, precisamos obter os coeficientes da primeira forma fundamental. Note que

$$X_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \quad X_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$$

e assim

$$E = (f(v))^2, \quad F = 0, \quad G = (f'(v))^2 + (g'(v))^2.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v &= 2f(v)f'(v) \\ F_u &= F_v = 0, \\ G_u &= 0, & G_v &= 2f'(v)f''(v) + 2g'(v)g''(v). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.3), obtemos os seguintes resultados para os símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{ff'}{f^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}.\end{aligned}$$

Substituindo nas equações obtidas na Proposição 3.14, obtemos as seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned}u'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' &= 0, \\ v'' - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 &= 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

cujas soluções determinam as geodésicas de S . Note que:

- Os meridianos $u = u_0$ e $v = v(s)$ são geodésicas. A primeira equação é satisfeita, pois $u' = u'' = 0$. A segunda igualdade fica na forma

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = 0.$$

Como a primeira forma fundamental de S é dada por

$$I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle = (u')^2E + 2u'v'F + (v')^2G$$

temos que

$$1 = ((f')^2 + (g')^2)(v')^2$$

visto que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco e, deste modo, $\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \sqrt{|\alpha'(0)|} = 1$. Assim

$$(v')^2 = \frac{1}{(f')^2 + (g')^2}.$$

Derivando esta última expressão usando a regra da cadeia nos nos termos $f(v(s))$ e $g(v(s))$, obtemos

$$2v'v'' = -\frac{2f'f'' + 2g''}{((f')^2 + (g')^2)^2}v' = -\frac{2(f'f'' + g'')}{(f')^2 + (g')^2}(v')^3$$

e, portanto, como $v' \neq 0$, temos

$$v'' = -\frac{(f'f'' + g'')}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2$$

e, portanto

$$v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = -\frac{(f'f'' + g'')}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}(v')^2 = 0.$$

- Vejamos quais paralelos, com $u = u(s)$ e $v = v_0$ são geodésicas. Como $v' = v'' = 0$, então usando a primeira das equações (3.7), temos que

$$u'' = 0 \quad \text{ou seja,} \quad u' = c,$$

c uma constante. Na segunda das equações (3.7), temos

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}(u')^2 = 0.$$

Vamos, portanto, analisar esta última equação. Como $u = u(s)$, temos que $u' \neq 0$. Por hipótese, $f(v) > 0$ e também temos que $(f')^2 + (g')^2 \neq 0$. Deste modo a única forma desta equação resultar em zero é que $f'(v) = 0$. Isto nos quer dizer que os paralelos que são geodésicas são aqueles que são gerados por um ponto da curva C tais que a derivada da curva naquele ponto seja uma reta paralela ao eixo de rotação.

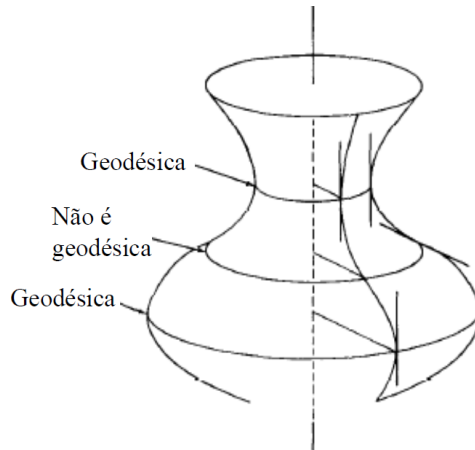


Figura 3.3: Geodésicas de uma superfície de revolução

Definição 3.18. Considere uma superfície regular S e uma curva $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p S$ seja unitário. Seja $N(p)$ o vetor normal a superfície no ponto $p \in S$. A interseção de S com o plano que contém v e $N(p)$ é chamada **seção normal** de S em p segundo v (Figura 3.4).

Proposição 3.19. *Qualquer seção normal a superfície é uma geodésica.*

Demonstração. Uma seção normal a uma superfície é a interseção $\alpha : I \rightarrow S$ da superfície com um plano Π , plano este que é perpendicular a superfície em cada ponto da curva. Como $\alpha = \Pi \cap S$, temos que o vetor normal a curva $n \in \Pi$ e, deste modo, N e n são ambos ortogonais ao plano tangente, conseqüentemente ortogonais ao vetor α' . Como sabemos que $k_g = \pm k \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre $\alpha'' = kn$ e N , temos que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. De toda sorte, $k_g = 0$.

□

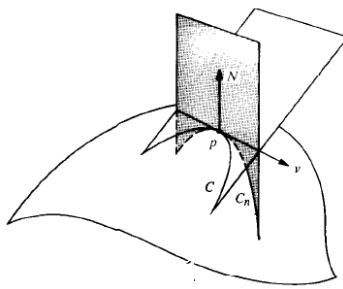


Figura 3.4: Seção normal em uma superfície

Capítulo 4

O Teorema de Gauss-Bonnet

4.1 Introdução

Neste capítulo iremos analisar o Teorema de Gauss-Bonnet em suas versões local e global e mostrar algumas de suas aplicações. Provavelmente este teorema seja o mais notável quando se trata de superfícies. De forma mais simples, ele nos mostra que o excesso em relação a π da soma dos ângulos internos de um triângulo T , cujos lados são geodésicas, é igual integral da curvatura Gaussiana K sobre a superfícies T , ou seja,

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \int \int_T K d\sigma$$

onde φ_i , $i = 1, 2, 3$ são os ângulos internos de T .

Estudaremos com detalhes a versão local e apresentaremos a idéia da demonstração da versão global deste Teorema. Vamos iniciar apresentando algumas definições importantes.

Definição 4.1. Sejam S uma superfície com uma parametrização local $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\alpha : [0, l] \rightarrow S(U)$ uma curva parametrizada. Dizemos que α é uma **curva simples, fechada e regular por partes** quando:

- i. $\alpha(0) = \alpha(l)$, (condição de fechamento da curva)
- ii. se $t_1, t_2 \in [0, l]$, $t_1 \neq t_2$, então $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, (condição de injetividade)
- iii. existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$ de $[0, l]$ tal que α seja regular em cada (t_i, t_{i+1}) , com $i = 1, 2, \dots, k$. (condição de regularidade por partes)

Cada $\alpha(t_i)$ é chamado de *vértice* de α e $\alpha((t_i, t_{i+1}))$ é chamado *arco regular* de α .

Definição 4.2. Seja $R \subset S$ um subconjunto aberto conexo unido com sua fronteira. Dizemos que R é uma *região simples* se R é homeomorfa a um disco e sua fronteira é uma curva α simples fechada e regular por partes. Dizemos que α é orientada positivamente

quando em cada $\alpha'(t)$ temos uma base $\{\alpha'(t), h(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}S$ com a mesma orientação de $\{X_u, X_v\}$. Isso significa que o vetor $h(t)$ aponta para dentro da região R (Figura 4.1).

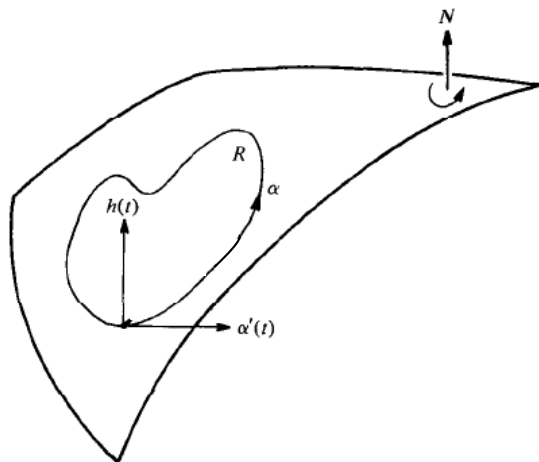


Figura 4.1: Curva orientada positivamente

Vamos denotar $\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'_-(t_i)$ o vetor tangente a α em t_i pela esquerda e $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'_+(t_i)$ o vetor tangente a α em t_i pela direita. Seja θ_i a medida em radianos do ângulo entre $\alpha'_-(t_i)$ e $\alpha'_+(t_i)$, $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$, orientada conforme a orientação da superfície. O ângulo θ_i é chamado ângulo externo a α no vértice $\alpha(t_i)$ (Figura 4.2).

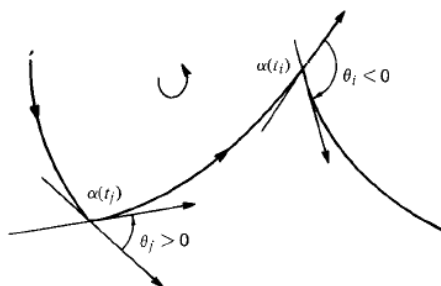


Figura 4.2: Ângulo externo

Se por acaso o ponto $\alpha(t_i)$ for uma cúspide, ou seja, $|\theta_i| = \pi$, a orientação de θ_i é dada pela orientação de $\bar{\theta}$, ângulo entre $\alpha'(t_i - \varepsilon)$ e $\alpha'(t_i + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, ou seja, $\alpha(t_i - \varepsilon) \in \alpha(t_{i-1}, t_i)$ e $\alpha(t_i + \varepsilon) \in \alpha(t_i, t_{i+1})$ (Figura 4.3).

Antes de enunciarmos o teorema de Gauss-Bonnet em sua versão local precisamos de alguns resultados já conhecidos de Análise e Topologia.

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local de uma superfície S compatível com a sua orientação, ou seja, o vetor normal tem o mesmo sentido de $X_u \times X_v$, e R uma região simples contida em S . Seja $K(u, v)$ a curvatura gaussiana e E, F, G os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície S na parametrização X . De acordo com o

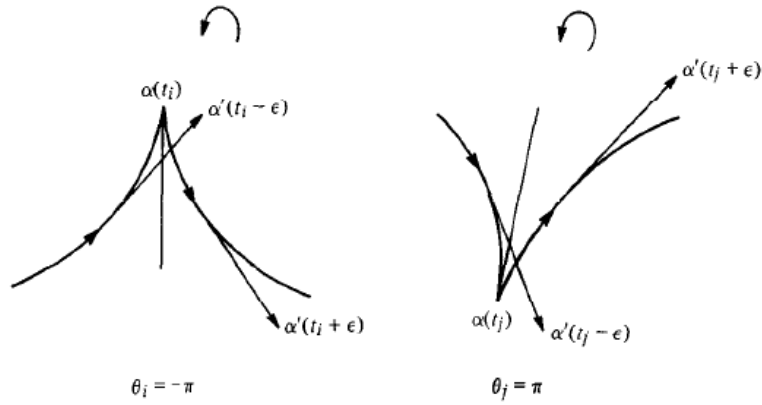


Figura 4.3: Cúspide

Teorema 2.22 a integral da superfície $\int \int_R K d\sigma$ é definida por

$$\int \int_R K d\sigma = \int \int_{X^{-1}(R)} K(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

e não depende da parametrização X .

O teorema abaixo afirma que a variação total do ângulo do vetor tangente a curva α com uma direção estabelecida acrescida as mudanças nos vértices é igual a $\pm 2\pi$, a depender da orientação. Uma demonstração desse resultado pode ser obtida em *Composition Math 2* de H. Hopf.

Teorema 4.3 (Índice de rotação). *Com a notação apresentada acima, temos que*

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi,$$

onde $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções que medem, em cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$, o ângulo positivo entre X_u e $\alpha'(t)$.

O Teorema de Gauss-Green que veremos a seguir é comumente estudado nos cursos de Cálculo e uma demonstração pode ser encontrada em [4].

Teorema 4.4 (Teorema de Gauss-Green). *Sejam M e N funções de duas variáveis reais x e y que tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um disco aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Se $C : [0, l] \rightarrow S$ for uma curva fechada, simples e regular por partes, contida inteiramente em U e R for a região limitada por C . Considere a partição $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k+1}$ de $[0, l]$ tal que a curva seja regular em cada intervalo s_i, s_{i+1} . Então*

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(M(x, y) \frac{dx}{ds} + N(x, y) \frac{dy}{ds} \right) ds = \int \int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

Já mostramos no Corolário 2.47 que a curvatura gaussiana pode ser expressa em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental. No entanto, Gauss mostra que a curvatura gaussiana depende apenas dos coeficientes da primeira forma fundamental e suas derivadas, ou seja, é intrínseca a superfície. Apresentaremos o resultado na proposição seguinte.

Teorema 4.5. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local de S . Considere Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ os símbolos de Christoffel de S na parametrização X definidos em (3.1). Sejam K a curvatura de S , E, F, G e os coeficientes da primeira e e, f, g os coeficientes da segunda forma fundamental de S na parametrização X . Então*

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$$

Demonstração. Inicialmente, observemos que

$$(X_{uu})_v - (X_{uv})_u = 0.$$

Deste modo, segue de (3.1) que

$$(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN)_u = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & [(\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + eN_v] + \\ & - [(\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{uv} + f_u N + fN_u] = 0 \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} & [(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u] X_u + [\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2] X_{uv} + [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u] X_v + \\ & + (e_v - f_u)N + \Gamma_{11}^2 X_{vv} - \Gamma_{12}^1 X_{uu} + eN_v - fN_u = 0. \end{aligned}$$

Usando novamente expressões de X_u , X_v e N dadas pelas equações (3.1), temos:

$$\begin{aligned} & [(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u] X_u + [(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u] X_v + (e_v - f_u)N = \\ & = \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) - \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + f (a_{11} X_u + a_{21} X_v) + \\ & - e (a_{12} X_u + a_{22} X_v) + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) \\ & = (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 + a_{11} f - a_{12} e + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1) X_u + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + a_{21} f - a_{22} e + \\ & + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2) X_v + (e \Gamma_{12}^1 - g \Gamma_{11}^2 + f (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)) N, \end{aligned}$$

onde a_{ij} , $i, j = 1, 2$ dadas por são as entradas da matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss obtidas em (2.6). Como $\{X_u, X_v, N\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 , comparando o coeficiente de X_v na expressão acima, temos

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = a_{22} e - a_{21} f.$$

Usando (2.7) temos que $a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$ e $a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$, portanto

$$\begin{aligned} a_{22}e - a_{21}f &= e \left(\frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - f \left(\frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{efF - egE - efF + f^2E}{EG - F^2} \\ &= -E \left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right) \end{aligned}$$

Usando a expressão da curvatura Gaussiana dadas em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental obtidas em (2.47) obtemos

$$a_{22}e - a_{21}f = -EK.$$

Desta forma, podemos concluir que

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$$

□

Proposição 4.6. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e seja X uma parametrização ortogonal de S , isto é, $F = 0$, então*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\},$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental de X e K é a curvatura Gaussiana de S .

Demonstração. Pelo Teorema 4.5, temos que

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2.$$

Como a parametrização é ortogonal, usando os sistemas lineares (3.3) podem ser escritos da forma

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E &= \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^2 G &= \frac{1}{2} E_v \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E &= \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_u \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E &= \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Desta forma, os símbolos de Christoffel de S associados a parametrização X são dados por:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-E_v}{2G}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-G_u}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v}{2GE}.\end{aligned}$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned}-KE &= \left(\frac{G_u}{2G}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2G}\right)_v + \left(\frac{E_v}{2E}\right) - \left(\frac{E_v}{2G}\right) + \left(\frac{G_u}{2G}\right)^2 - \left(-\frac{E_v}{2G}\right)\left(\frac{G_v}{2GE}\right) - \left(\frac{E_u}{2E}\right)\left(\frac{G_u}{2G}\right) \\ &= \frac{G_{uu}G - G_u^2}{2G^2} + \frac{E_{vv}G - E_vG_v}{2G^2} - \frac{E_v^2}{4EG} + \frac{G_u^2}{4G^2} + \frac{E_vG_v}{4G^2} - \frac{E_uG_u}{4EG}.\end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}K &= \frac{G_u^2 - G_{uu}G}{2EG^2} + \frac{E_vG_v - E_{vv}G}{2EG^2} + \frac{E_v^2}{4E^2G} - \frac{G_u^2}{4EG^2} - \frac{E_vG_v}{4EG^2} + \frac{E_uG_u}{4E^2G} \\ &= \frac{2E(G_u^2 - G_{uu}G) + 2E(E_vG_v - E_{vv}G) + GE_v^2 - EG_u^2 - EE_vG_v + GE_uG_u}{4E^2G^2} \\ &= \frac{E(G_u^2 + E_vG_v) - 2EG(G_{uu} + E_{vv}) + G(E_v^2 + E_uG_u)}{4E^2G^2} \\ &= \frac{-2E_{vv}EG + E_v^2G + EE_vG_v}{4E^2G^2} + \frac{-2G_{uu}EG + G_u^2E + GE_uG_u}{4E^2G^2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\frac{2E_{vv}EG}{2\sqrt{EG}} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}}(E_vG + EG_v)}{EG} \right) - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\frac{2G_{uu}EG}{2\sqrt{EG}} - \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}(G_uE + EG_u)}{EG} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.\end{aligned}$$

□

4.2 O Teorema de Gauss-Bonnet

Após discutidos algumas propriedades e teoremas importantes, como a definição de região, índice de rotação, Teorema de Green e uma das relações que fornece a curvatura Gaussiana em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, vamos agora enunciar e demonstrar o Teorema de Gauss-Bonnet na sua versão local.

Teorema 4.7 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Sejam S uma superfície parametrizada regular de parametrização ortogonal $X : U \rightarrow S$ e $R \subset S$ uma região simples de fronteira α orientada positivamente e parametrizada pelo comprimento de arco. Sejam $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$*

vértices de α e $\theta_0, \dots, \theta_k$ as medidas dos seus respectivos ângulos externos em radianos. Então

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

sendo k_g acurvatura geodésica dos arcos regulares de α e K a curvatura gaussiana de S .

Demonstração. Seja C uma curva em S dada por $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$. Utilizando a Proposição 3.12 temos que

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i}{ds},$$

onde $\varphi_i = \varphi_i(s)$ é a função que mede o ângulo positivo entre X_u e $\alpha'(s)$ em $[s_i, s_{i+1}]$. Integrando esta expressão e em todos os intervalos e somando os resultados, temos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds$$

usando o Teorema 4.4 temos

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \int \int_{X^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds$$

mas, pela Proposição 4.6 e pelo Teorema 4.3, temos que

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = - \int \int_{X^{-1}(R)} 2K\sqrt{EG} dudv \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$$

como a curva α é orientada positivamente, temos o resultado

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

□

Seja S uma superfície parametrizada regular e $R \subset S$ um conexo. Dizemos que R é uma **região regular** se R for compacta e sua fronteira ∂R é uma reunião finita de curvas fechadas simples regulares por partes que não se intesectam. Iremos considerar uma superfície compacta como sendo uma região regular cuja fronteira é um conjunto vazio.

Dizemos que uma região simples com apenas três vértices com ângulos externos $\theta_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, é um triângulo. Uma triangulação de uma região $R \subset S$ é uma família finita τ de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que

a) $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.

b) se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum a T_i e T_j .

Dada uma triangulação τ de uma região regular $R \subset S$, denotaremos por F o número de triângulos (faces), E o número de lados (arestas) e V o número de vértices da triangulação. O número

$$\chi = F - E + V \quad (4.2)$$

é chamado **característica de Euler-Poincaré** da triangulação.

Iremos apresentar alguns resultados topológicos que serão usados no decorrer do texto. As demonstrações deles podem ser encontradas em [7].

Proposição 4.8. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Proposição 4.9. *Se $R \subset S$ é uma região regular de uma superfície S , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação da região. Assim, denotaremos a característica por $\chi(R)$.*

Proposição 4.10. *Seja S uma superfície orientada e $\{X_\alpha\}, \alpha \in A$ uma família de parametrizações compatíveis com a orientação da superfície. Seja R uma região regular de S . Então existe uma triangulação Υ de R tal que todo triângulo $T \in \Upsilon$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{X_\alpha\}$. Além disso, se a fronteira for orientada positivamente, então triângulos adjacentes determinam orientações opostas nas arestas comum a eles (Figura 4.4).*



Figura 4.4: Triangulação de R

Proposição 4.11. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e conexa. Um dos valores $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$ é assumido pela característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$. Além disso, se $S' \subset \mathbb{R}^3$ é outra superfície compacta e conexa tal que $\chi(S') = \chi(S)$, então S é homeomorfa a S' .*

Esta proposição nos diz, topologicamente, que as únicas superfícies compactas em \mathbb{R}^3 são a esfera ($\chi(S) = 2$), a esfera com uma asa ($\chi(S) = 0$), a esfera com duas asas ($\chi(S) = -2$) e assim por diante (Figura 4.5). O número g de alças dado por

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

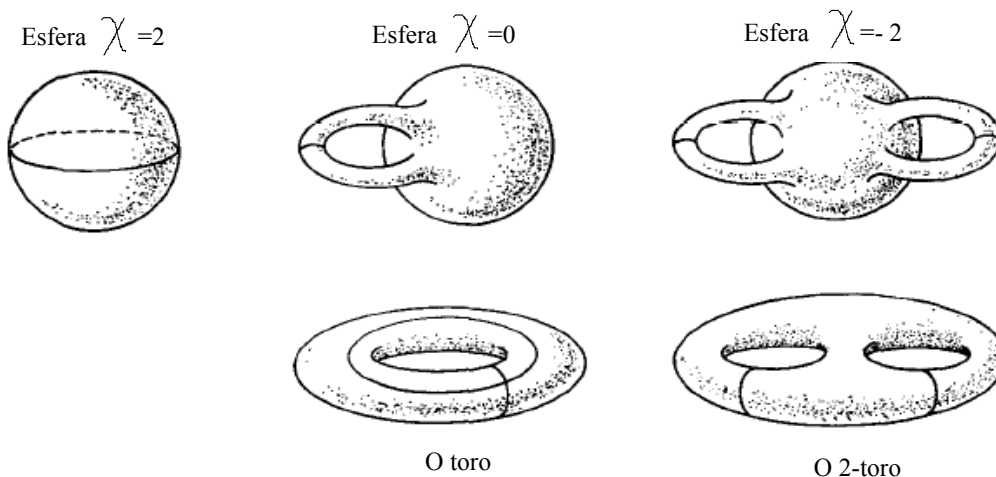


Figura 4.5: Característica de Euler-Poincaré de superfícies compactas conexas

é chamado de gênero de S . Desta forma, toda superfície conexa e compacta em \mathbb{R}^3 é homeomorfa a uma esfera com g alças.

Proposição 4.12. *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada S e seja Υ uma triangulação de R tal que todo triângulo $T_j \in \Upsilon$, $j = 1, 2, \dots, k$ esteja contido em uma vizinhança coordenada $X_j(U_j)$ de uma família de parametrizações $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatíveis com a orientação de S . Seja f uma função diferenciável em S . Assim, a soma*

$$\sum_{j=1}^k \int \int_{X_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$$

não depende da triangulação Υ nem da família $\{X_\alpha\}$ de parametrizações de S

Observação 4.13. Em particular, esta proposição afirma que faz sentido falar da integral de f sobre a região $R \subset S$. Por isto, denotaremos esta integral por $\int \int_R f d\sigma$.

Enfim temos todos os conhecimentos necessários para enunciar a versão global do Teorema de Gauss-Bonnet, cuja idéia da sua demonstração será discutida no texto. As aplicações desse teorema são os principais resultados do nosso trabalho.

Teorema 4.14 (Teorema de Gauss-Bonnet Global). *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externo das curvas C_i . Então*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R), \quad (4.3)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral em C_i representa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Demonstração. Usando a Proposição 4.10, podemos considerar uma triangulação Υ tal que todo triângulo $T \in \Upsilon$ está contido em alguma vizinhança coordenada da família $\{X_\alpha\}$. Aplicando o teorema de Gauss-Bonnet local a cada triângulo T_j e somando os resultados, obtemos

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F, \quad (4.4)$$

onde F denota o número de triângulos de Υ , θ_{jk} , $k = 1, 2, 3$ são ângulos externos do triângulo T_j . Convém perceber que o resultado é obtido usando a proposição 4.12 e que a integral calculada em cada aresta interna comum dos triângulos se anula visto que possuem orientações opostas. Denotando por $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ os ângulos internos de um triângulo T_j , obtemos

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = \sum_{j,k=1}^{F,3} \pi - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk}.$$

Denotando por

$$\begin{aligned} E_e &= \text{número de arestas externas de } \tau \\ E_i &= \text{número de arestas internas de } \tau \\ V_e &= \text{número de vértices internas de } \tau \\ V_i &= \text{número de vértices externas de } \tau \end{aligned}$$

e observando que, como as curvas C_i são fechadas, temos que $E_e = V_e$. Além disso, mostra-se que $3F = 2E_i + E_e$ e, assim,

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = \pi(2E_i + E_e) - \sum_{j,k=1}^{F,3} \varphi_{jk}.$$

Observando que esses vértices externos podem ser vértices de alguma curva C_i ou vértices intruduzidos pela triangulação, considerando $V_e = V_{ec} + V_{et}$, onde V_{ec} é o número de vértices das curvas C_i e V_{et} é o número de vértices externos a triangulação que não são vértices de alguma curva C_i e lembrando do fato que em torno de cada vértice interno a soma dos ângulos é 2π , temos

$$\sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_l (\pi - \theta_l).$$

Somando e subtraindo πE_e na última expressão e lembrando que $E_e = V_e$, concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_l \theta_l \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_l \theta_l \end{aligned}$$

e assim, substituindo em (4.4), obtemos

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + 2\pi E - 2\pi V + \sum_l \theta_l = 2\pi \cdot F$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_l \theta_l &= 2\pi F - 2\pi E + 2\pi V \\ &= 2\pi(F - E + V). \end{aligned}$$

Usando a característica de Euler-Poincaré definida em (4.2) vamos obter

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_l \theta_l = 2\pi\chi(R).$$

□

Os dois próximos corolários nos informa as expressões obtidas nos casos em que R é uma região simples e para o caso de superfícies compactas.

Corolário 4.15. *Se R é uma região simples de uma superfície S , então*

$$\sum_{i=1}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \int \int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi$$

Demonstração. Como R é uma região simples, então $\chi(R) = 1$. Desta forma, o resultado é consequência direta de (4.3). □

Corolário 4.16. *Seja S uma superfície compacta (considerada como uma região de fronteira vazia) e orientável. Então*

$$\int \int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S)$$

Demonstração. Sendo S compacta, então sua fronteira é vazia e, pelo mesmo motivo, $\sum_{i=1}^k \theta_i = 0$. Desta forma, basta usar (4.3) para obter o resultado desejado. □

Exemplo 4.17. Se R for uma região limitada por um triângulo geodésico, então $k_g(s) = 0, \forall s \in (s_i, s_{i+1})$ e $\sum_{i=0}^2 \theta_i = \sum_{i=0}^2 (\pi - \phi_i)$, onde ϕ_i é a medida dos ângulos internos do triângulo. Logo, pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\int \int_{X^{-1}(R)} K d\sigma + \sum_{i=0}^2 (\pi - \phi_i) = 2\pi.$$

Assim, analisemos os seguintes casos:

i) Se $K(u, v) = 0, \forall (u, v) \in U$, ou seja, se S é uma região planar, então R é um triângulo euclidiano. E assim

$$\sum_{i=0}^2 (\phi_i) = \pi$$

que é a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano.

ii) Se $K(u, v) = 1, \forall (u, v) \in U$, isto é, se S é uma esfera de raio unitário, então $\int \int_{x^{-1}(R)} 1 d\sigma$ é a área da região, ou seja

$$A(R) = \sum_{i=0}^2 (\phi_i) - \pi.$$

iii) Se $K(u, v) = -1, \forall (u, v) \in U$, isto é, se S é uma pseudo-esfera, então a área da região é dada por

$$A(R) = \pi - \sum_{i=0}^2 (\phi_i).$$

4.3 Aplicações

Apresentaremos a seguir uma série de aplicações do Teorema de Gauss-Bonnet. Em particular, destacamos o Corolário 4.21, pois é nele que vamos encontrar o resultado, por meio da Geometria Diferencial, que é uma proposição substitutiva ao quinto postulado que foi enunciado por Euclides na geometria plana, resultado extremamente conhecido e utilizado no ensino de Matemática na educação básica.

Corolário 4.18. *Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.*

Demonstração. Como a curvatura de S é positiva, então

$$\int \int_S K d\sigma > 0.$$

Sendo S uma superfície compacta, segue do Corolário 4.16 que

$$2\pi\chi(S) = \int \int_S K d\sigma > 0$$

ou seja

$$\chi(S) > 0.$$

Portanto, usando a Proposição (4.11), temos que $\chi(S) = 2$ e que S é homeomorfa a esfera. \square

Corolário 4.19. *Seja S uma superfície orientável com curvatura $K \leq 0$. Deste modo duas geodésicas γ_1 e γ_2 que partam de um mesmo ponto $p \in S$ não podem se encontrar novamente em um ponto $q \in S$ de forma que os traços de γ_1 e γ_2 formem a fronteira de uma região simples R de S .*

Demonstração. Façamos por contradição. Primeiro suponha que γ_1 e γ_2 são geodésicas de direções distintas tais que seus traços gerem a fronteira de uma região simples de S . Pelo Teorema de Gauss-Bonnet, Como R é simples, temos

$$\int \int_S K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

sendo θ_i , $i = 1, 2$ os ângulos externos da região R . Como elas não são tangentes, temos que $\theta_i < \pi$ e assim $2\pi - \theta_1 - \theta_2 > 0$ o que acarreta que $\int \int_S K d\sigma > 0$. Absurdo. Agora, se $\theta_i = 0$, $i = 1, 2$, ou seja, as geodésicas γ_1 e γ_2 e ambas partem de $p \in S$, então são a mesma geodésica e constituem uma geodésica simples e fechada e, de forma análoga, ocorre a contradição. Segue que nenhuma geodésica fechada e simples é fronteira de uma região simples R de S . \square

Corolário 4.20. *Se existem duas geodésicas simples γ_1 e γ_2 em uma superfície S compacta, conexa e com curvatura positiva, então γ_1 e γ_2 se intersectam.*

Demonstração. Pela Corolário 4.18, S é homeomorfa a uma esfera de g alças. Se γ_1 e γ_2 não se intersectam, então podemos encarar a superfície, por meio de um homeomorfismo (que preserva a característica de Euler-Poincaré), como na esfera de uma alça $\chi(S) = 0$,

$$\int \int_S K d\sigma = 0$$

o que é uma contradição, visto que por hipótese $K > 0$. \square

Corolário 4.21. *Seja T um triângulo cujos lados são geodésicas em uma superfície orientada S . A soma dos ângulos internos desse triângulo é:*

1. Igual a π , se $K = 0$ (Figura 4.6).
2. Maior do que π , se $K > 0$ (Figura 4.7).
3. Menor do que π , se $K < 0$ (Figura 4.8).

Onde K é a curvatura Gaussiana de S .

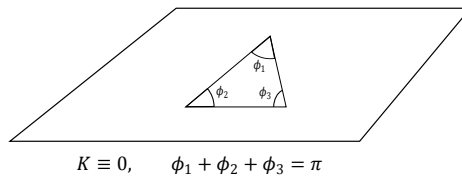


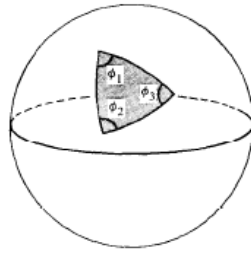
Figura 4.6: Triângulo geodésico no plano

Demonstração. De fato, sejam θ_i , $i = 1, 2, 3$ os ângulos externos de T e $\varphi_i = \pi - \theta_i$, $i = 1, 2, 3$ os ângulos internos. Por se tratarem de geodésicas, $k_g = 0$ por se tratar de um triângulo (região simples), $\chi(R) = 1$. Pelo teorema de Gauss-Bonnet

$$\int \int_T K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi$$

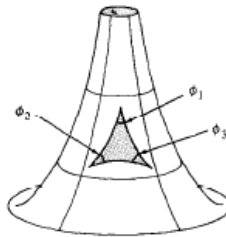
e assim

$$\int \int_T K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = 2\pi - 3\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i$$



$$K \equiv 1, \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 > \pi$$

Figura 4.7: Triângulo geodésico na esfera



$$K \equiv -1, \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 < \pi$$

Figura 4.8: Triângulo geodésico na pseudo-esfera

logo

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi + \int \int_T K d\sigma$$

Como $\int \int_T K d\sigma$ tem o mesmo sinal de K e é nula se $K = 0$, então concluímos a demonstração do corolário.

□

Referências Bibliográficas

- [1] GAUSS, K.F., *General Investigations of Curved Surfaces*. Raven Press, New York, 1965.
- [2] TENENBLAT, Ketí. *Introdução à Geometria Diferencial*. ed. Brasília: UnB, 1988.
- [3] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Volume 2*, 11^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [4] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2*. 3^a ed. São Paulo: Editora Habra LTDA, 1994.
- [5] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] BUENO, Hamilton Prado. *Álgebra Linear: um segundo curso*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [7] L. Ahlfors e L. Sario, *Rieman Surfaces*, Princeton University Press, N.J., 1960, Cap.I