UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática -
PROFMAT

Trabalho de Conclusão de Curso

APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES À GEOMETRIA

Rozivaldo Freitas dos Santos

Feira de Santana
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas
Colegiado de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Trabalho de Conclusão de Curso

APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES À GEOMETRIA

Rozivaldo Freitas dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros.

Feira de Santana
2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Santos, Rozivaldo Freitas dos

S238a Aplicações dos determinantes à geometria / Rozivaldo Freitas dos Santos. – Feira de Santana, 2014.

70 f. : il.

Orientador: Jean Fernandes Barros.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Determinantes (Matemática). 2. Matrizes (Matemática). 3. Geometria. I. Barros, Jean Fernandes, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 512.643

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE ROZIVALDO FREITAS DOS SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e seis dias do mês de agosto de dois mil e quatorze às 8:00 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS . ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Aplicações dos Determinantes à Geometria"**, do discente **Rozivaldo Freitas dos Santos**. do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Evandro C. F. dos Santos (UFBA) e Claudiano Goulart (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO. ______.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 26 de agosto de 2014.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)
Orientador

Prof. Dr. Evandro C. F. dos Santos (UFBA)

Prof. Dr. Claudiano Goulart (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Parece até um paradigma ao agradecermos primeiro a Deus pelo êxito logrado nesse mestrado, mas certamente negaria a Fé se tão somente exaltasse a minha capacidade intelectual e ocultasse o Grande Nome que me projetou nessa conquista. Portanto dou Louvores ao Deus Eterno pelas inúmeras bençãos, as quais me possibilita no epílogo dessa jornada, poder defender essa tese do mestrado Profissional em matemática.

Quero elencar em agradecimento minha esposa Luciene de Almeida dos Santos, pela sensatez e apoio incondicional dispensado a mim durante esses dois anos, nos quias, parcialmente, me ausentei do seio familiar suprimindo os momentos de convivência em detrimento da construção de conhecimento. E o meu Filho Samuel de Almeida dos Santos, o qual chamo de meu Heroí e Campeão, pela compreensão, apesar da pouca idade, teve seus programas de fim de semana (teatro, cinema,...) reduzidos, bem como não ter a figura paterna inteiramente a sua disposição para desenvolver as mais variadas atividades sociais e educativas em conjunto.

Minha mãe, Antonieta Freitas dos Santos, a qual tributo as minhas conquistas, agradeço pelo cuidado, as orações, e a estada durante esse tempo em sua aconchegate casa. E a todos os meus irmaos, pela colaboração particular de cada um, com intuito de me proporcionar um âmbiente saudável e dias trânquilos de modo que eu pudesse, paulatinamente, ir transformando o projeto em realidade de tornar-me um Mestre.

Agradeço também aos professores do curso, ao meu orientador Jean Fernandes Barros, aos Excepcionais colegas da turma do profmat 2012, que em particular são pessoas magistrais e não posso deixar de registrar a pessoa do colega Adelmo e seus pais, agradeco-os pelos momentos em que conviví com esta nobre família e permitiram que sua residência fosse para mim um polo cultural, gastronômico, de construção e reconstrução de conhecimento.

Agradeço aos responsáveis pela criação deste programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional, em particular aos professores idealizadores Eduardo Wagner, Elon Lages Lima, e Paulo César Pinto Carvalho. Aos que defendem os mestrandos nas unidades federativas desse país, dialogando sempre com os secretários estuduais de educação a fim de convencerem do salto ascendente que dará a educação em tempo breve com a implantação do programa e formação dos mestrandos. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho abordaremos alguns tópicos sobre matrizes e determinantes e sua aplicação geométrica com ênfase no Ensino Médio. Nesta perspectiva previamente escreví sobre matrizes suas operações e propriedades, determinantes de ordem 2 e ordem 3, neste último abordamos a teoria da expansão em linhas e colunas, solução de equações lineares pela regra de Crammer. E em especial falamos sobre a aplicação das matrizes e determinantes em tópicos da geometria, em particular equações de retas, planos e circulos, área de triângulos volume de tetraedros.

Palavras-chave: Determinantes, Expansão de Laplace, Geometria.

Abstract

In this paper we discuss some topics and determinants matrix and its geometrical application with emphasis in high school. In this perspective matrices previously wrote about its operations and properties, determinants of order 2 and order 3 in the latter approach the theory of expansion in rows and columns, solution of linear equations by Crammer rule. And in particular talked about the application of matrices and determinants topics in geometry, in particular equations of lines, planes and circles, area of triangles volume tetrahedron.

Keywords: Determinants, Laplace Theorem, Geometry.

Sumário

Introdução

A gênese da teoria das matrizes e determinantes remontam ao século II a.c. e se estende pelo século XIX d.c. Esta teoria está intimamente ligada com o estudo dos sistemas de equações lineares. Os babilônios lhe davam com problemas de sistemas de equações lineares e seu legado foi preservado em tabletas de argila.

Os chineses também tiveram suas conjecturas em sistemas de equações lineares, mas pensadores como **Cramer** com a regra que leva seu nome, **Laplace** com a teoria da expansão, **Bézout** que apresentou o determinante de **Vandermonde**, **Cauchy** com sua teoria moderna de determinantes provando a multiplicação de determinantes, todos esses e outros pensadores construiram os pilares dessa eminente teoria.

No ensino médio o estudo dos determinantes tem aplicações importantes na resolução de sistemas de equações lineares e na inversão de matrizes. Contudo, outras aplicações como na geometria são possíveis e a teoria dos determinantes nos credencia a modelar soluções para problemas utilizando este tópico tão importante da matemática.

O introíto deste trabalho remonta à álgebra de matrizes idealizada por James Victor Uspensky, constituindo o capitulo 1 pela F-algebra de matrizes e segue O capitulo 2 onde mencionei o determinante de ordem 2, muito ministrado no ensino médio, sua origem e suas propriedades.

O capítulo 3 foi dedicado ao determinante de ordem 3, também muito ministrado. Quero destacar a escrita neste capítulo da regra de Sarrus, a definição geral de determinante, a grandiosa expansão de Laplace, Determinante do produto de matrizes e a matriz recíproca ou matriz inversa que é muito aplicável. No capitulo 4 elenquei a resolução de determinantes para solucionar sistemas de equações lineares via a regra de Cramer e a discussão geral de um sistema de equação.

E a seção que traz o título dessa dissertação, **Aplicações dos Determinantes a Geometria**, escrevi sobre equações de retas, planos e circulos na forma determinantal, área de triangulo no plano, volume do tetraedro que é até comum ser apresentado no ensino médio, mas também foi mencionado acerca da potência de um ponto relativo a um circulo, quero deixar elucidado que as proposições, teoremas e demais fórmulas foram baseadas por [3]. A escrita do capítulo 6 é direcionada a atividades como proposta a ser implementada nas aulas ministradas acerca dos determinantes focando a geometria no ensino médio.

Capítulo 1

A Álgebra de Matrizes

Para o que se segue, seja $\mathbb{F}$ um corpo. Consideremos $\mathbb{A}$ um conjunto munido de três operações, indicadas por $+, \times$ e $\cdot$, e denominadas, respectivamente, de adição, multiplicação e multiplicação por escalar. Dizemos que $(\mathbb{A}, +, \times, \cdot)$ é uma *álgebra sobre o corpo* $\mathbb{F}$, ou simplesmente, uma $\mathbb{F}$-*álgebra*, se,

- $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$;
- a multiplicação é associativa;
- a multiplicação é distributiva com respeito à adição;
- para cada $\alpha \in \mathbb{F}$ e para todos $a, b \in \mathbb{A}$, $\alpha \cdot (a \times b) = (\alpha \cdot a) \times b = a \times (\alpha \cdot b)$.

Além disso, se existir $e \in \mathbb{A}$ tal que $e \times a = a \times e = a$, para todo $a \in \mathbb{A}$, dizemos que $(\mathbb{A}, +, \times, \cdot)$ é uma $\mathbb{F}$-*álgebra com identidade*. É imediato verificar que este elemento, dito identidade, se existe, é único. De fato, se existe um outro elemento identidade, digamos, e', temos que $e' = e' \times e = e$. E mais, se $a \times b = b \times a$, para todos $a, b \in \mathbb{A}$, dizemos que $(\mathbb{A}, +, \times, \cdot)$ é uma $\mathbb{F}$-*álgebra comutativa*. Não havendo dúvidas sobre as operações envolvidas, ao invês de dizer que $(\mathbb{A}, +, \times, \cdot)$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra, diremos, simplesmente, que $\mathbb{A}$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra. A seguir, veremos um exemplo importante de uma $\mathbb{F}$-álgebra com identidade.

1.1 A $\mathbb{F}$-Álgebra de Matrizes

Neste contexto, consideraremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e trabalharemos com matrizes quadradas, isto é, matrizes em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Uma matriz de n^2 elementos é chamada matriz de ordem n. Sendo assim, para cada $n = 2, 3, 4, \ldots$, falamos de matrizes de ordem $2, 3, 4, \ldots$. Com isso, como é habitual, denotaremos uma matriz por uma letra maiúscula do nosso alfabeto ou por (a_{ij}), onde $a_{ij} \in \mathbb{F}$ é o elemento que ocupa a i-ésima linha e j-ésima coluna. Desta forma, considerando duas matrizes de mesma ordem, dizemos que elas são iguais se, os elementos correspondentes, isto é, elementos que pertencem a mesma linha e mesma coluna, são iguais. Em símbolos, considerando as matrizes (a_{ij}) e (b_{ij}), ambas de ordem n, $(a_{ij}) = (b_{ij})$ se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 7^0 & 6 & 4 \\ \sqrt{9} & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Mas,
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & \frac{2}{5} \\ \sqrt{9} & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$
Sobre o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, que passamos a denotar por $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$, podemos definir operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, denotadas como acima. Considerando as matrizes (a_{ij}) e (b_{ij}) em $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$, definimos a adição delas, indicada por $(a_{ij})+(b_{ij})$ como a matriz cujo elemento que ocupa a i-ésima linha e j-ésima coluna é $a_{ij}+b_{ij}$, para todos $i,j=1,2,\dots,n$. Também, dados $\alpha \in \mathbb{F}$ e (a_{ij}), definimos o produto $\alpha \cdot (a_{ij})$, denominado de produto por escalar, por $(\alpha \cdot a_{ij})$. Por exemplo, dadas as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix},$$
temos que
$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix} \quad e \quad 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 \\ 10 & 0 & 4 \\ 2 & 14 & -10 \end{pmatrix}.$$
É fácil ver $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$, munido das operações acima, é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial, tendo a matriz nula 0 como elemento neutro da adição, isto é, a matriz em que todas as suas entradas são nulas.

Identificando as filas de uma matriz, linha ou coluna, como uma n-úpla de elementos em $\mathbb{F}$, ou, como é mais comum, um n-vetor, podemos definir a multiplicação de matrizes baseando-se na noção de produto escalar de dois vetores. O produto escalar dos vetores, digamos, $R=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ e $S=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, é dado por
$$< R,S >= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n.$$
Agora, sejam as matrizes (a_{ij}) e (b_{ij}), ambas de ordem n. Denotemos por $A_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$, a i-ésima linha da matriz (a_{ij}), e por $B^j=(b_{1j},b_{2j},\dots,a_{nj})$, a j-ésima coluna da matriz (b_{ij}). Sendo assim, definamos
$$(a_{ij}) \times (b_{ij}) = \begin{pmatrix} < A_1,B^1 > & < A_1,B^2 > & \dots & < A_1,B^n > \\ < A_2,B^1 > & < A_2,B^2 > & \dots & < A_2,B^n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < A_n,B^1 > & < A_n,B^2 > & \dots & < A_n,B^n > \end{pmatrix}.$$
É fácil ver que a multiplicação de matrizes é associativa, distributiva com respeito à adição e satisfaz para cada $\alpha \in \mathbb{F}$ e para todos $(a_{ij}),(b_{ij})$,
$$\alpha \cdot [(a_{ij}) \times (b_{ij})] = [\alpha \cdot (a_{ij})] \times (b_{ij}) = (a_{ij}) \times [\alpha \cdot (b_{ij})].$$
Com maior razão, podemos mostrar que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra com identidade I. Em geral, esta álgebra não é comutativa. De fato, como
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mas,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

temos que, em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, existem $(a_{ij}), (b_{ij})$ tais que $(a_{ij}) \times (b_{ij}) \neq (b_{ij}) \times (a_{ij})$. Para o que se segue, para fins de simplicidade, indicaremos o produto $(a_{ij}) \times (b_{ij})$ por $(a_{ij})(b_{ij})$. E mais, indicaremos o elemento identidade, denominado de matriz identidade de ordem n, por

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma matriz (a_{ij}) é dita *escalar* se, $a_{ii} = a$, para um certo $a \in \mathbb{F}$, e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Denotemo-na por (a). Observemos que o produto das matrizes escalares (a) e (b) é a matriz escalar (ab) e a adição destas matrizes é a matriz escalar $(a+b)$. Agora, consideremos uma matriz quadrada em que uma, e somente uma, das colunas não é nula, dita *matriz coluna*. Por permutações de colunas, podemos admitir que a coluna não nula é a primeira. Sendo assim, uma matriz coluna de ordem n é da forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

É imediato que podemos considerar uma tal matriz como a n-úpla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O produto da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem n, pela matriz coluna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a matriz coluna $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, onde

$$\begin{array}{rcl} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & a_{nn}x_n. \end{array}$$

Estas relações são equivalentes a equação matricial

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n).$$

Na realidade, podemos considerar uma matriz de ordem n como uma n^2-úpla de elementos de $\mathbb{F}$. Esta identificação faz com que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$ e $\mathbb{F}^{n^2}$ sejam indistinguíveis como F-álgebras. Com isso, identificaremos indistintamente uma matriz (a_{ij}) com uma n-úpla $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ de elementos de $\mathbb{F}^n$, onde $R_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$, que é a k-ésima, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Capítulo 2

O Determinante de Ordem 2

Neste capítulo trataremos de uma função especial de $\mathbb{F}$-álgebra $\mathfrak{M}_n(\mathbb{F})$ em $\mathbb{F}$. Esta função é dita determinante de ordem n, ou simplesmente, quando não há dúvida sobre a dimensão n, determinante. Veremos que sua origem está associada à resolução de sistemas lineares de n equações e n incógnitas. Na realidade, estaremos interessados no caso em que $n = 2$. De fato, em todo este trabalho, estaremos interessados nos casos bi e tridimensionais. Inicialmente, daremos uma definição explícita, ou seja, uma definição em termos dos elementos da matriz, e depois, considerando uma coleção mínima de propriedades, que caracterizam o determinante. Como veremos, esta coleção de propriedades não depende da ordem n.

2.1 A Origem do Determinante

O determinante tem origem na resolução de sistemas de equações lineares. Suponhamos o seguinte sistema de equações nas variáveis x e y:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right.$$

Para resolver este sistema, eliminamos as variáveis x ou y. Multiplicando cada equação acima, primeiramente, por b_2 e b_1, respectivamente, e depois, por a_2 e a_1, respectivamente, chegamos ao sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2 \end{array}\right.$$

Em ambas as equações, temos o mesmo fator $a_1b_2 - a_2b_1$. Se este fator é diferente de zero, então o sistema tem uma única solução dada por:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Através de uma susbtituição direta, podemos verificar que estes valores de x e y satisfazem o sistema original. O denominador comum, $a_1b_2 - a_2b_1$, é denominado de *o determinante do sistema*, e é denotado por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

De forma análoga, podemos expressar os numeradores como os determinantes:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \quad e \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Consequentemente, podemos expressar x e y como os quocientes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad e \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

em x (ou y), o determinante que aparece no numerador é obtido do determinante do sistema, substituindo os elementos da primeira (ou segunda) coluna por c_1 e c_2, respectivamente. Observemos que para o cálculo de x e y o determinante que aparece no denominador, de ambas expressões, tem que ser não nulo. O que estabelecemos acima, é a *regra de Cramer* para o caso $n = 2$. Mais adiante, estenderemos esta regra para o caso $n > 2$.

Exemplo 2.1.1 *Resolvamos o sistema*

$$\begin{cases} 6x & + & 2y & = & 25 \\ 7x & + & 3y & = & 20 \end{cases}$$

Observemos que o determinante do sistema é

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6.3 - 2.7 = 18 - 14 = 4.$$

Calculando os determinantes que aparecem nos numeradores, obtemos

$$\begin{vmatrix} 25 & 2 \\ 20 & 3 \end{vmatrix} = 25.3 - 20.2 = 75 - 60 = 15 \quad e \quad \begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} = 6.20 - 7.25 = 120 - 175 = 55.$$

Segue-se que x e y são

$$\frac{\begin{vmatrix} 25 & 2 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{25.3 - 20.2 = 75 - 60}{6.3 - 2.7 = 18 - 14} = \frac{15}{4} \quad e \quad \frac{\begin{vmatrix} 6 & 25 \\ 7 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6.20 - 7.25 = 120 - 175}{6.3 - 2.7 = 18 - 14} = \frac{55}{4},$$

respectivamente.

Finalizando esta seção, podemos abstrair a definição de determinante, vendo-o como uma função de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{F})$ em $\mathbb{F}$, em termos dos elementos de uma matriz expressa por

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Basta definirmos

$$detX = |X| = a_1b_2 - a_2b_1,$$

onde, $detX$ representa o determinante da matriz X.

2.2 Polinômios em Várias Variáveis

Nesta seção, fixamos uma terminologia que aplicaremos mais adiante. Inicialmente, considerando as letras a_1, b_1, a_2, b_2 como indeterminadas ou variáveis, nós vemos que o determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

é um polinômio nas variáveis a_1, a_2, b_1, b_2.

O polinômio descrito acima é constituido por dois monômios. Chamamos de *monômio nas variáveis* $x, y, z, \ldots$, uma expressão da forma $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$, onde $x, y, z, \ldots$ são as variáveis, A é um número constante, denominado de coeficiente, e os expoentes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ são números inteiros não negativos. Nós dizemos que dois monômios são *semelhantes* se os expoentes das mesmas variáveis são iguais. Uma expressão formada por vários monômios nas variáveis $x, y, z, \ldots$ unidos por adições $(+)$ e/ou subtrações $(-)$ é chamada de *polinômio nas variáveis* $x, y, z, \ldots$. Cada um dos monômios que compõe um polinômio, também, é dito um *termo*. Todo polinômio pode ser escrito por monômios que não sejam semelhantes dois a dois. Esta forma de escrita é dita *reduzida*. Por exemplo, os seguintes polinômios estão na forma reduzida:

$$3x - 4y, \qquad 6x^2 - 8y + 5y^2, \qquad -3x^4 + 3xy^3 + y^4 - x^2y^2.$$

Já o polinômio $xy - 2xy + x^2 + y^2 + z^3 - 2z^3 + 5z^3$ não está na forma reduzida. Todos os polinômios que trataremos estarão na forma reduzida.

Dizemos que dois polinômios nas mesmas variáveis que possuem os mesmos monômios são *iguais*. Isto significa que os monômios semelhantes têm o mesmo coeficiente. Se um polinômio tem todos os seus coeficientes nulos, ele é dito *identicamente nulo*. Da matemática elementar, nós sabemos adicionar, substrair, multiplicar e dividir polinômios. Dado um monômio, chamamos de sua *dimensão* a soma dos expoentes de suas variáveis. E daí, definimos o *grau* de um polinômio como a maior dimensão dos seus monômios de coeficientes não nulos. A seguir, vemos polinômios de graus 3 e 6, respectivamente.

$$xy^2 + y^3 - 7x + 8, \qquad x^2y + z^2x^3 - x^2yz^3 + 9.$$

Um polinômio é definido como homogêneo de dimensão n se todos os seus monômios têm a mesma dimensão n. A seguir, vemos exemplos de polinômios homogêneos de graus 1,2 e 5, respectivamente.

$$x + 7y + 8z, \qquad z^2 - 4zy + y^2, \qquad xz^4 + 5x^2y^3 - 6x^2y^2z.$$

Os polinômios homogêneos são também chamados de *formas*. Por exemplo, os polinômios homogêneos de dimensão 1 são chamados de *formas lineares*, os de dimensão 2 são chamados de *formas quadráticas* e os de dimensão 3 são chamados de *formas cúbicas*. A forma linear nas variáveis $x, y, z, \ldots, w$ é expressa por

$$ax + by + cz + \ldots + kw,$$

onde $a, b, c, \ldots, k$ são constantes.

Dado um polinômio nas variáveis $x, y, z, \ldots$, podemos considerá-lo como um polinômio em certas variáveis, cujos coeficientes são polinômios nas demais. Por exemplo, podemos considerar o polinômio $xz + yt$ como linear, tanto nas variáveis x e y, como nas variáveis z

e t. Também, podemos ver o polinômio $xz + yt$ como uma forma quadrática. Em relação ao polinômio $xyz + t^2x^2 + (z^2 + t^2)y^2$, podemos enxergá-lo como uma forma quadrática em x e y, ou como um polinômio do segundo grau em z e t, não homogêneo. De fato, basta reescrevê-lo como $y^2z^2 + (x^2 + y^2)t^2 + xyz$. No decorrer do trabalho, passamos a considerar $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

2.3 Propriedade dos Determinantes de Segunda Ordem

Nesta seção, veremos as propriedades que caracterizam completamente o determinante de ordem 2. Lembremos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

É imediato verificar que o determinante, dado pela expressão acima, satisfaz as seguintes propriedades:

1. o determinante é uma forma linear de cada fila, linha ou coluna, de uma matriz. Neste caso, em que $n = 2$, dizemos que o determinante é uma *forma bilinear*. Mais precisamente, isto significa que

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha c_1 & b_1 \\ a_2 + \alpha c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 + \alpha c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2. O determinante de uma matriz que possui linhas ou colunas iguais é zero. Neste caso, dizemos que o determinante é uma *forma alternada*;

3. O determinante da matriz identidade é um.

A seguir, veremos que estas propriedades caracterizam completamente a função determinante, que designaremos por F. Vejamos, por (1), a função tem a forma $Aa_1 + Bb_1 = F(a_1, b_1, a_2, b_2)$, onde A e B são formas lineares e homogêneas de a_2 e b_2. Dessa forma, podemos considerar $A := A(a_2, b_2) = C_1a_2 + C_2b_2$ e $B := B(a_2, b_2) = D_1a_2 + D_2b_2$. Sendo assim,

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = (C_1a_2 + C_2b_2)a_1 + (D_1a_2 + D_2b_2)b_1,$$

onde C_1, C_2, D_1 e D_2 são independentes de a_1, b_1, a_2 e b_2. Substituindo a_1, b_1, a_2 e b_2, respectivamente, por $a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_2 + a_1$ e $b_2 + b_1$. Pela propriedade (2), segue-se que

$$F(a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1) = 0,$$

já que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \end{pmatrix}$$

tem linhas iguais. Por outro lado, usando a bilinearidade de F, segue-se que

$$\begin{aligned} F(a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1) &= F(a_1, b_1, a_2 + a_1, b_2 + b_1) + F(a_2, b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1) \\ &= F(a_1, b_1, a_2, b_2) + F(a_2, b_2, a_1, b_1). \end{aligned}$$

E assim,

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = -F(a_2, b_2, a_1, b_1).$$

Isto significa que F muda de sinal quando duas linhas são trocadas entre si. Ou equivalentemente, dizemos que F é *anti-simétrica.* Na realidade, podemos demonstrar que

Proposição 2.3.1 *Uma forma bilinear é alternada se, e somente se, é uma forma anti-simétrica.*

De fato, basta observar que $F(a_1, b_1, a_1, b_1) = -F(a_1, b_1, a_1, b_1)$.

Agora, como

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = (C_1 a_2 + C_2 b_2)a_1 + (D_1 a_2 + D_2 b_2)b_1$$

e

$$F(a_2, b_2, a_1, b_1) = (C_1 a_1 + C_2 b_1)a_2 + (D_1 a_1 + D_2 b_1)b_2,$$

temos que

$$(C_1 a_2 + C_2 b_2)a_1 + (D_1 a_2 + D_2 b_2)b_1 = -[(C_1 a_1 + C_2 b_1)a_2 + (D_1 a_1 + D_2 b_1)b_2].$$

Desta identidade, vemos que

$$C_1 = 0, D_2 = 0 \text{ e } C_2 = -D_1.$$

Substituindo $C_1 = 0, D_2 = 0, C_2 = C, D_1 = -C$ na expressão de F temos

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = C(a_1 b_2 - a_2 b_1) = C \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Agora, por (3), chegamos a $C = 1$. E assim, reobtemos a definição inicial, que é dada em termos dos elementos de uma matriz. E assim, demonstramos que as propriedades acima caracterizam completamente o determinante de segunda ordem.

Para finalizarmos este capítulo, usando as ideias aqui delineadas, apresentaremos uma propriedade importante da teoria de determinantes. Para tanto, sejam as matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, denotemos por

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad e \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

os determinantes associados às matrizes A_1 e A_2, respectivamente. Considerando o produto destas matrizes e o determinante associado a este produto, chegamos ao determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{vmatrix}.$$

Agora, nossa intenção é demonstrar que

Proposição 2.3.2 $D = D_1 D_2$.

Demonstração. Consideremos D como um polinômio nas variáveis a_1, b_1, a_2 e b_2. Ou seja, podemos ver D como uma função da matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Como vimos acima, chegamos a $D = CD_1$, onde C não depende das variáveis a_1, b_1, a_2 e b_2. Por um lado, calculando D, diretamente da expressão acima, em

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$D = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = D_2.$$

Por outro lado, da igualdade $D = CD_1$, aplicada em E_2, chegamos a

$$D_2 = C \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = C.$$

Logo, $D = D_1 D_2$, como queríamos. $\square$

Capítulo 3

O Determinante de Ordem 3

Neste capítulo, mostraremos a regra para o cálculo do determinante de ordem 3, mais conhecida como *a regra de Sarrus*, e suas propriedades. Além disso, estabeleceremos o determinante através da expansão em linhas ou colunas.

Nosso ponto de partida é a seguinte questão, bem mais geral: *quantas e quais são as funções*

$$F : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

1. *para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\begin{aligned} F(R_1, R_2, \ldots, R_i + \alpha S_i, \ldots, R_n) &= F(R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_n) \\ &+ \alpha F(R_1, R_2, \ldots, S_i, \ldots, R_n), \end{aligned}$$

   onde R_k indica a k-ésima linha de uma matriz. Neste caso, dizemos que F é uma forma n-linear;

2. *$F(R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = 0$. Neste caso, dizemos que F é uma forma alternada;*

3. *$F(E_n) = 1$?, onde E_n é a matriz identidade de ordem n.*

3.1 Determinante como Função de Matrizes

Antes de passarmos ao próximo resultado, definamos

Definição 3.1.1 *Uma forma n-linear F é dita anti-simétrica se,*

$$F(R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_n) = -F(R_1, R_2, \ldots, R_j, \ldots, R_i, \ldots, R_n)$$

$(*)$*, para todos $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$.*

Observação 3.1.1 *Por simplicidade, na definição acima, como estamos transpondo somente as entradas i e j-ésimas, mantendo as demais fixas, podemos escrever*

$$F(R_i, R_j) = -F(R_j, R_i).$$

De forma análoga à proposição 2.3.1, vemos que

Proposição 3.1.1 *F é uma forma alternada se, e somente se, F é anti-simétrica.*

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que F é uma forma alternada. Isto significa que $F(R_i + R_j, R_j + R_i) = 0$. Usando a n-linearidade, e, novamente, a alternância, temos que

$$0 = F(R_i, R_j + R_i) + F(R_j, R_j + R_i) = F(R_i, R_j) + F(R_j, R_i).$$

Logo, $F(R_i, R_j) = -F(R_j, R_i)$. Portanto, mostramos que a alternância é uma condição suficiente. Agora, mostremos que ela é necessária. Para tanto, suponhamos que F é anti-simétrica. Desta forma, $F(R_i, R_i) = -F(R_i, R_i)$. Logo, fazendo $i = j$ em $(*)$ temos:

$$F(R_1, R_2, \ldots, R_i, \ldots, R_i, \ldots, R_n) = 0.$$

□

No momento, interessa-nos o caso $n = 3$. Sendo assim, estaremos trabalhando com a função $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}$. Pela proposiçao que acabamos de demonstrar, segue-se que

$$\begin{aligned} F(R_1, R_2, R_3) &= -F(R_1, R_3, R_2) \\ &= -F(R_3, R_2, R_1) \\ &= -F(R_2, R_1, R_3) \end{aligned}$$

Como F é linear em cada linha de $(a_{ij}) = (R_1, R_2, R_3)$, onde $R_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3})$, temos que cada termo de F é da forma

$$A_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma},$$

onde $A_{\alpha\beta\gamma}$ independe dos elementos das linhas da matriz (a_{ij}), e os índices α, β, γ variam em $\{1, 2, 3\}$. Sendo assim, F é expresso como

$$F(R_1, R_2, R_3) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}.$$

Vejamos as consequências da alternância de F sobre os coeficientes $A_{\alpha\beta\gamma}$, quando os índices α, β e γ variam. Observemos que

$$F(R_2, R_1, R_3) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} a_{2\alpha} a_{1\beta} a_{3\gamma} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\beta\alpha\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}.$$

A última igualdade é possível, já que α, β e γ variam no mesmo conjunto. Como $F(R_1, R_2, R_3) = -F(R_2, R_1, R_3)$, temos que

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} = -\sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\beta\alpha\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma},$$

que é válida para todos elementos a_{ij}. Disto, segue-se que

$$A_{\alpha\beta\gamma} = -A_{\beta\alpha\gamma}.$$

Analogamente, chegamos a

$$A_{\gamma\beta\alpha} = -A_{\alpha\beta\gamma} \text{ e } A_{\alpha\gamma\beta} = -A_{\alpha\beta\gamma}.$$

E assim, se dois dos índices são iguais, o coeficiente correspondente é zero. Por exemplo, se $\alpha = \beta$, então $A_{\alpha\alpha\gamma} = -A_{\alpha\alpha\gamma}$. Logo, $A_{\alpha\alpha\gamma} = 0$.

E assim, na expressão de F os termos, efetivamente, presentes são os correspondentes aos valores dos índices α, β e γ, dois a dois distintos, ou seja, são os índices associados às permutações

$$123 \qquad 132 \qquad 213 \qquad 231 \qquad 312 \qquad 321.$$

Do cálculo destes coeficientes, obtemos as relações

$$\begin{aligned} A_{213} &= -A_{123}; \\ A_{321} &= -A_{231} = -A_{123}; \\ A_{231} &= -A_{213} = A_{123}; \\ A_{312} &= -A_{321} = A_{123}; \\ A_{132} &= -A_{123}. \end{aligned}$$

Estas relações mostram que os cinco coeficientes à direita são expressos através do sexto, que é $A_{1,2,3}$. Considerando $A_{123} = C$, temos que

$$\begin{aligned} A_{123} &= A_{321} = A_{231} = C; \\ A_{312} &= A_{213} = A_{132} = -C. \end{aligned}$$

Disto, segue-se que

$$F(R_1, R_2, R_3) = C(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Esta é a definição geral de uma função $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades (1) e (2). Usando a propriedade (3), podemos calcular explicitamente o valor de C, já que $F(E_3) = 1$. Neste caso, $C = 1$. Consequentemente,

$$F(R_1, R_2, R_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

é a única definição possível para uma função $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades (1), (2) e (3). Esta função é denominada de *o determinante de ordem 3*, e é representada por

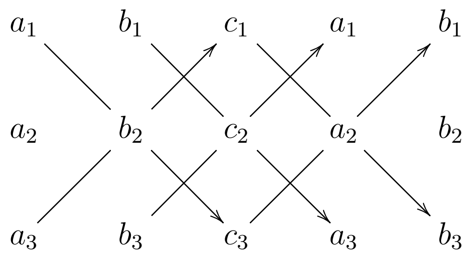
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3.2 A Regra de Sarrus

Existe uma regra que nos proporciona lembrarmos, facilmente, da expressão

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1b_3a_2 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3b_1a_2.$$

Consideremos o quadro



Este exprime a seguinte regra:

1. repita as duas primeiras colunas à direita da matriz, preservando a ordem;
2. multiplique diagonalmente os fatores descendentes, conservando o mesmo sinal do produto;
3. multiplique diagonalmente os fatores ascendentes, trocando o sinal do produto.

No ensino médio, esta regra é conhecida como *a regra de Sarrus.*

Exemplo 3.2.1 *O determinante da matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é

$$1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 3 = -12.$$

Finalizando esta seção, apresentamos a seguinte definição:

Definição 3.2.1 *Seja uma matriz (a_{ij}) de ordem n. A matriz transposta de (a_{ij}), denotada por $(a_{ij})^t$, é a matriz (a_{ji}).*

Para o caso $n = 3$, temos que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Usando a regra de Sarrus, é imediato que

Proposição 3.2.1 $|A^t| = |A|$, *onde $|A|$ denota o determinante de A.*

3.3 A Definição Geral de Determinantes

De forma análoga ao que fizemos na seção anterior, podemos definir o determinante de ordem n, para $n > 3$. Seguindo o mesmo procedimento, considerando

$$F(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} A_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

onde $A_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ independem dos elementos das linhas da matriza_{ij}, chegamos a

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n} = -A_{i_1 i_2 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n}.$$

Disto, segue-se que se $\alpha = \beta$,

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\alpha \ldots i_n} = 0.$$

Consequentemente, os termos que efetivamente aparecem em F são aqueles associados a alguma permutação de $1, 2, \ldots, n$.

Neste momento, lembremos de alguns fatos relativos a permutações. Dada uma permutação, digamos, $i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n$, de $1, 2, \ldots, n$, dizemos que *existe uma inversão* *de* i_α *relativa a* i_β se, $i_\alpha > i_\beta$. Por exemplo, para $n = 5$, na permutação 34251, temos que 3 é uma inversão relativa a 2, e também, a 1, 4 é uma inversão relativa 2, e também, a 1, 2 é uma inversão relativa a 1 e 5 é uma inversão relativa a 1. Observemos que não existe inversão relativa a 1. Sendo assim, existem duas inversões relativas a 3, duas inversões relativas a 4 e uma inversão relativa a 5. Desta forma, definimos como *índice* de uma permutação $i_1 i_2 \ldots i_n$, denotado por $\mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_n)$, o número de inversões relativas a todos os elementos da permutação. Por exemplo, na permutação acima, $\mathfrak{I}(34251) = 2+2+1+1 = 6$. É imediato que $\mathfrak{I}(12\ldots n) = 0$. Pode-se mostrar que

$$\mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n) - \mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n)$$

é um número ímpar. Disto, segue-se, imediatamente, que

$$(-1)^{\mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n)} = -(-1)^{\mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n)}.$$

Uma permutação $i_1 i_2 \ldots i_n$ é dita *par* (*ímpar*) se, $\mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_n)$ é par (ímpar). É fácil ver que o número de permutações pares e ímpares são iguais. Como o número total de permutações de $1, 2, \ldots, n$ é $n!$, temos que existem $\dfrac{n!}{2}$ permutações pares e ímpares. Agora, retornemos aos coeficientes da expressão de F. Da relação

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n} = -A_{i_1 i_2 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n},$$

temos que

$$\frac{A_{i_1 i_2 \ldots i_n}}{(-1)^{\mathfrak{I}(i_1 i_2 \ldots i_n)}}$$

é constante, digamos, de valor C. Logo, $A_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \pm C$, onde o sinal é + ou -, se a permutação $i_1 i_2 \ldots i_n$ é par ou ímpar, respectivamente. Desta forma,

$$F(R_1, R_2, \ldots, R_n) = C \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

Para chegarmos a esta expressão de F, usamos apenas a sua n-linearidade e a sua alternância, ou anti-simetria. Agora, usando o fato de que $F(E_n) = 1$, obtemos

$$F(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

a qual possui $n!$ termos, dos quais uma metade é precedida de sinal +, e a outra metade, de sinal -, conforme a permutação $i_1 i_2 \ldots i_n$ seja par ou ímpar. Esta expressão mostra-nos que existe uma única função $F : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ que é n-linear alternada tal que $F(E_n) = 1$. Esta função é o determinante de ordem n, que denotaremos por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Reciprocamente, podemos mostrar que a expressão $\displaystyle\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ satisfaz as propriedades de n-linearidade, alternância e de que vale 1 na matriz identidade de ordem n. É claro que a definição acima não é muito prática para o cálculo do determinante, quando n cresce. Na próxima seção, recorreremos a uma certa expansão que torna o cálculo do determinante mais razoável.

Como na proposição 3.2.1, vê-se que

Proposição 3.3.1 $|A| = |A^t|$.

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})$ e $\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n1_n}$ um termo da expressão do determinante de ordem n. Como estamos num corpo, podemos arrumar os fatores a_{ki_k} de tal forma que

$$\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n1_n} = \pm a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

Observemos que os sinais se correspondem, já que as permutações $i_1 i_2 \dots i_n$ e $j_1 j_2 \dots j_n$ têm a mesma paridade. De fato, as mesmas transposições usadas na passagem de $12\dots n$ para $i_1 i_2 \dots i_n$, restaram a permutação $i_1 i_2 \dots i_n$ à $12\dots, n$, enquanto que, usando estas transposições, a permutação $12\dots n$ passa a ser $j_1 j_2 \dots j_n$. Sendo assim,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \pm a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}.$$

Portanto, $|A| = |A^t|$. □

Este resultado mostra-nos que, na construção da definição de determinante, ao invês de usarmos as linhas, poderíamos ter usado as colunas.

A seguir, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3.1 *Seja o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}.$$

Mostremos que $D = 0$. Para tanto, adicionemos a segunda e a terceira colunas à quarta, obtendo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix}.$$

Usando a linearidade e a alternância, chegamos a

$$D = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\cdot 0 = 0.$$

Exemplo 3.3.2 *Seja o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira, a segunda e a terceira linhas por a, b e c, respectivamente, temos que

$$(abc)D = \begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix}.$$

Usando a linearidade, obtemos

$$(abc)D = (abc)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Supondo que a, b e c não são nulos, chegamos a

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

E assim,

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3.3.3 *Vamos calcular o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Subtraindo a primeira linha da segunda, e a segunda da terceira, obtemos

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & (a+b)(a-b) \\ 0 & b-c & (b+c)(b-c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & (a+b) \\ 0 & 1 & (b+c) \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Mais uma vez, subtraindo a primeira linha da segunda, temos que

$$D = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Pela regra de Sarrus, chegamos a

$$D = (a-c)(a-b)(b-c).(-1) = -(a-c)(a-b)(b-c).$$

3.4 A Expansão de Laplace

Como vimos na seção anterior, o determinante de ordem n é a forma n-linear alternada $D : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $D(E_n) = 1$. Já vimos que é indiferente na definição de D utilizarmos linhas ou colunas. Porém, por uma questão de escolha, desde o ínicio, utilizamos os elementos das linhas como variáveis.

Partindo da n-linearidade, podemos considerar D como uma forma linear em relação a uma determinada linha, digamos, da i-ésima linha, cujos coeficientes são formas $n-1$-lineares nas demais variáveis, como segue

$$D = A_{i1}a_{i1} + \ldots + A_{ij}a_{ij} + \ldots + A_{in}a_{in},$$

onde os coeficientes A_{ij} são independentes de $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. O coeficiente A_{ij} de a_{ij}, nesta expansão, é denominado de *o complemento ou o cofator* do elemento a_{ij}. Este complemento está diretamente ligado ao determinante de ordem $n-1$, obtido de D eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna, sem alterar a ordem das outras linhas e colunas. Este determinante D_{ij} de ordem $n-1$ é denominado de *o menor* correspondente ao elemento a_{ij}. Por exemplo, para $n=3$, os menores correspondentes aos elementos a_1, b_1 e c_1 relativos ao determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

são

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad e \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

respectivamente. Vejamos, a relação existente entre o complemento A_{ij} e o menor D_{ij}. Afirmamos que

Proposição 3.4.1 $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$.

Demonstração. Inicialmente, mostremos a relação para $i=1$. Sendo assim,

$$D = A_{11}a_{11} + A_{12}a_{12} + \ldots + A_{1n}a_{1n}.$$

Como os A_{1j} não dependem dos a_{1j}, tomando $a_{11}=1$ e $a_{1j}=0$, para $j \neq 1$, temos que

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Usando a n-linearidade deste determinante, substituindo a linha $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, para cada $i \geq 2$, pela linha $R_i - a_{ij}R_1$, sucessivamente, para $j = 1, 2, \ldots, n$, onde $R_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, obtemos

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que depende, exclusivamente, da matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como A_{11} é uma função $n-1$-linear alternada dos elementos de B, e que, para $B = E_{n-1}$, assume o valor 1, pela unicidade de uma tal função, concluímos que

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_{11}.$$

Para estabelecermos a relação para um elemento arbitrário a_{ij}, transpomos a j-ésima coluna de D j vezes, fazendo-a ocupar a primeira coluna, e, também, transpomos a i-ésima linha de D i vezes, fazendo-a ocupar a primeira linha. Com isso, para este novo determinante, digamos, F, o elemento a_{ij} ocupa a primeira linha e a primeira coluna. Como antes, chegamos a $A_{ij} = F_{ij}$. Mas, como $F = (-1)^{i+j}D$, temos que

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}.$$

□

Ao invês da expansão em linhas, poderíamos ter adotado a expansão em colunas, já que o determinante de uma matriz é igual ao da sua transposta. Sendo assim, podemos considerar a expansão relativa à j-ésima coluna

$$D = A_{1j}a_{1j} + A_{2j}a_{2j} + \cdots + A_{nj}a_{nj}.$$

A seguir, vemos uma importante propriedade dos complementos. Se na expansão

$$D = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \cdots + A_{in}a_{in},$$

trocarmos os elementos da i-ésima linha pelos elementos de uma alguma outra linha, digamos, $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$, com $k \neq i$, concluímos que

$$A_{i1}a_{k1} + A_{i2}a_{k2} + \ldots + A_{in}a_{kn} = 0,$$

pois, neste caso, estamos calculando o determinante de uma matriz cuja i-ésima linha é igual a k-ésima linha. Analogamente, se $k \neq j$,

$$A_{1j}a_{1k} + A_{2j}a_{2k} + \ldots + A_{nj}a_{nk} = 0.$$

Exemplo 3.4.1 *Calculemos o valor do determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Para tanto, usaremos operações sobre colunas e a expansão pelos elementos de alguma fila, linha e coluna. Inicialmente, subtraindo a primeira e a quarta colunas do dobro da segunda coluna, chegamos a

$$D = \begin{vmatrix} -11 & 7 & 1 & -12 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & -8 & 2 \\ -6 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Expandindo D pelos elementos da quinta linha, obtemos

$$D = -\begin{vmatrix} -11 & 1 & -12 & 5 \\ -2 & 3 & -8 & 2 \\ -6 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Novamente, expandindo D pelos elementos da terceira linha,

$$D = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -12 & 5 \\ 3 & -8 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 5 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 1 & -12 \\ -2 & 3 & -8 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$D = 6 \cdot 245 + 5 \cdot (-34) + 2 \cdot (-511) = 278.$$

Exemplo 3.4.2 *Calculemos o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Subtraindo a primeira coluna da segunda, obtemos

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ -b & 1+b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+c & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Expandindo D pelos elementos da primeira coluna, chegamos a

$$D = a \cdot \begin{vmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Mais uma vez, subtraindo a primeira coluna da segunda, em cada uma das matrizes, na última expressão de D, temos que

$$D = a \cdot \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ -c & 1+c & 1 \\ 0 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \cdot b \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -c & 1+c & 1 \\ 0 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Disto, segue-se, tal como antes, que

$$D = ab \begin{vmatrix} 1+c & 1 \\ 1 & 1+d \end{vmatrix} + ac \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+d \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$D = abcd + abc + abd + acd + bcd = abcd\Big(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\Big).$$

Exemplo 3.4.3 *Alexandre Vandermonde, músico e matemático francês, que nasceu no século XVIII, desenvolveu uma teoria para calcular um certo tipo de determinante de ordem n, conhecido como determinante de Vandermonde. Este determinante é do tipo*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Mostraremos que o determinante de Vandermonde é dado

$$D = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Demonstraremos este fato por indução sobre n. O caso $n = 2$, é imediato, já que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Por hipótese de indução, suponhamos que a expressão é válida para a ordem $n-1$. Nosso objetivo é mostrar que a expresão é válida para ordem n. Multiplicando a primeira linha por -1, e adicionando a todas as demais linhas, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Agora, para zerarmos todos os elementos da primeira linha, a partir da segunda coluna, multiplicamos cada coluna por $-x_1$, e adicionamona à próxima coluna. E assim,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Expandindo o determinante do lado direito pelos elementos da primeira linha, chegamos a

$$D = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Observando que o determinante do lado direito da última igualdade é de Vandemonde de ordem $n-1$, e usando a hipótese de indução, temos que

$$D = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\leq i<j}(x_j - x_i) = \prod_{1\leq i<j}(x_j - x_i).$$

3.5 O Determinante do Produto de Matrizes

Muitos livros didáticos não trazem a demonstração do determinante de um produto de matrizes, e é colocado como um simples resultado. Em [2], encontramos a afirmação:

> "O fato de que o determinante do produto de duas matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes dessa matriz é mencionado praticamente em todos os livros didáticos de matemática usados no ensino médio mas não é provado em nenhum deles".

Nossa intenção é dá uma demonstração deste fato. Para tanto, consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A esta matriz associamos o determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que, também, podemos indicar por $\det A$.

Teorema 3.5.1 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Demonstração. Lembremos que dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

o produto de A por B é a matriz

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

onde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

Considerando o determinante de C como uma função nas variáveis a_{ij}, temos que esta função é n-linear alternada. Segue-se que o determinante de C difere do determinanate de A por um fator λ, que independe dos elementos a_{ij} da matriz A. Ou seja, $\det C = \lambda \det A$. Em particular, tomando $A = E_n$, temos que

$$\det B = \det C = \lambda \det E_n = \lambda.$$

Desta forma, para qualquer matriz A de ordem n tem-se:

$$\det C = \det AB = \det A \cdot \det B.$$

□

Exemplo 3.5.2 *Sejam os determinantes*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \quad e \quad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix},$$

onde ω é uma raiz cúbica imaginária da unidade, isto é, $\omega^3 = 1$ e $\omega \neq 1$. Sendo assim,

$$d.D = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+a+b \\ a+\omega b+\omega^2 c & b+\omega c+\omega^2 a & c+\omega a+\omega^2 b \\ a+\omega^2 b+\omega c & b+\omega^2 c+\omega a & c+\omega^2 a+\omega b \end{vmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} b+\omega c+\omega^2 a &= \omega^2(a+\omega b+\omega^2 c); \\ c+\omega a+\omega^2 b &= \omega(a+\omega b+\omega^2 c); \\ b+\omega^2 c+\omega a &= \omega(a+\omega^2 b+\omega c); \\ c+\omega^2 a+\omega b &= \omega^2(a+\omega^2 b+\omega c), \end{aligned}$$

usando a homogeneidade e a alternância, temos que

$$d.D = -d(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

É fácil ver que $d = 3\omega(\omega-1) \neq 0$. Este d é o determinante de Vandermonde de ordem 3. Logo, cancelando d, obtemos

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

O determinante D é denominado de cíclico de ordem 3, já que a segunda e a terceira linhas são obtidas por permutação cíclica dos elementos da primeira linha. Analogamente, podemos calcular os determinantes ciclicos de todas as ordens.

Antes de passarmos para o próximo exemplo, demonstremos o seguinte teorema:

Teorema 3.5.3 *Se o produto de dois polinômios F e ϕ, nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$, é o polinômio identicamente, então F ou ϕ é o polinômio identicamente nulo .*

Demonstração. Demonstremos este teorema por indução sobre n. É imediato que o teorema é para $n = 1$. Por hipótese de indução, suponhamos que o teorema é válido para $n-1$, com $n > 2$. Por absurdo, suponhamos que nem F, e nem ϕ, são identicamente nulos. Escrevamos F e ϕ como polinômios em x_1 cujos coeficientes são polinômios nas demais variáveis, como segue

$$\begin{aligned} F &= F_p x_1^p + F_{p-1} x_1^{p-1} + \ldots + F_1 x + F_0; \\ \phi &= \phi_m x_1^m + \phi_{m-1} x_1^{m-1} + \ldots + \phi_1 x + \phi_0, \end{aligned}$$

onde os F_i e ϕ_j são polinômios nas $n-1$ variáveis $x_2, x_3, \ldots, x_n$, e F_p e ϕ_m não são identicamente nulos. Mas, a igualdade

$$F \cdot \phi = \sum_{0 \leq j \leq p+m} \psi_j x^j = 0,$$

onde $\psi_j = F_j \cdot \phi_0 + F_{j-1} \cdot \phi_1 + \ldots + F_1 \cdot \phi_{j-1} + F_0 \cdot \phi_j$, implica que $F_p \cdot \phi_m = 0$. Por hipótese de indução, segue-se que F_p ou ϕ_m é identicamente nulo, que é uma contradição. □

Para o que se segue, denominamos de *a matriz adjunta de* (a_{ij}) a matriz (A_{ij}), cujos elementos são os complementos dos elementos de (a_{ij}). O determinante da matriz adjunta de (a_{ij}) é denominado de *o determinante adjunto de* (a_{ij}).

Exemplo 3.5.4 *Seja o determinante*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

O determinante adjunto da matriz (a_{ij}) *é*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sendo assim, o produto destes é o determinante

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

onde $c_{ij} = a_{i1}A_{1j} + a_{i2}A_{2j} + \cdots + a_{in}A_{nj}$. *Do final da última seção, temos que* $c_{ij} = 0$, *se* $i \neq j$, *e* $c_{ii} = D$. *E assim,*

$$D \cdot \Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{vmatrix} = D^n.$$

Donde, $D(\Delta - D^{n-1}) = 0$. *Supondo que* D *e* Δ *são polinômios nas variáveis* a_{ij}, *e que* $D \neq 0$, *segue-se, pelo teorema 3.5.3, que* $\Delta - D^{n-1} = 0$. *Logo,* $\Delta = D^{n-1}$.

Observação 3.5.1 *Seja a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

tal que a s*-ésima e a* t*-ésima colunas são iguais, com* $s < t$. *A menos do fator* $(-1)^{s+t-1}$, *podemos supor que* $s = 1$ *e* $t = 2$. *Disto, segue-se que* $D = \det A = 0$. *Agora, calculemos o determinante adjunto, que continuamos denotando por* Δ. *Vejamos, expandindo-o em relação a primeira linha, obtemos*

$$\Delta = A_{11}a_{11} + A_{12}a_{12} + \ldots + A_{1n}a_{1n}.$$

Como $a_{11} = a_{12}$, $A_{11} = -A_{12}$ *e* $A_{1j} = 0$, *para* $j > 2$, *já que, a partir de tal índice os menores têm as duas primeira colunas iguais, temos que* $\Delta = 0$. *Isto mostra-nos que a igualdade* $\Delta = D^{n-1}$ *pode acontecer mesmo quando* $D = 0$.

3.6 A Matriz Recíproca

Dada uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dizemos que A é *singular (não singular)* se, $\det A = 0$ ($\det A \neq 0$). Suponhamos que a matriz A é não singular. Como antes, A_{ij} é o complemento de a_{ij} e $D = \det A$. Seja

$$X = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$AX = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } XA = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1n} \\ c'_{21} & c'_{22} & \cdots & c'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \cdots & c'_{nn} \end{pmatrix},$$

onde $c_{ij} = a_{i1}A_{1j} + a_{i2}A_{2j} + \ldots + a_{in}A_{nj}$ e $c'_{ij} = A_{i1}a_{1j} + A_{i2}a_{2j} + \ldots + A_{in}a_{nj}$. Como $c_{ij} = c'_{ij} = 0$, se $j \neq i$, e $c_{ii} = c'_{ii} = D$, temos que

$$XA = AX = E_n.$$

A matriz X é dita *a recíproca ou inversa de* A, e é denotada por A^{-1}. Afirmamos que quando uma tal matriz existe, ela é única. De fato, se existisse outra, digamos, Y, tal que $YA = AY = E_n$, teríamos

$$Y = YE_n = Y(AX) = (YA)E_n = A^{-1}E_n = A^{-1},$$

como queríamos. Sendo assim, dada uma matriz A não singular, temos que existe uma única matriz, dita recíproca, definida por

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$.

Dadas as matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_k$, digamos, de ordem n, o determinante do produto $\displaystyle\prod_{s=1}^{k} A_s$ é dado por

$$\det \prod_{s=1}^{k} A_s = \prod_{s=1}^{k} \det A_s.$$

Sendo assim, se, para cada $s = 1, 2, \ldots, k,\ A_s$ é não singular, o produto $\prod_{s=1}^{k} A_s$ é não singular. Lembremos que, pela associatividade da multiplicação de matrizes, aquele produto pode ser realizado segundo qualquer combinação dos fatores, desde que seja preservada a ordem dos mesmos, já que a multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa. Por exemplo, para as matrizes, A, B, C e D, temos que

$$ABCD = [(AB)C]D = A[(BC)D] = A(BCD) = (AB)(CD).$$

Desta forma, se, para cada $s = 1, 2, \ldots, k,\ A_s$ é não singular, já sabemos que o produto $\prod_{s=1}^{k} A_s$ é não singular, e sua recíproca é a matriz $\prod_{s=1}^{k} A_{k-s+1}$, como é fácil ver.

Observação 3.6.1 *Em particular, se $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, o produto $\prod_{s=1}^{k} A$ é denotado por A^k, e é denominado a k-ésima potência de A. Da associatividade, temos que $A^k A^p = A^p A^k = A^{k+p}$, para todos k e p inteiros positivos. Por definição, consideremos que $A^0 = E_n$. E também, se A é não singular, definimos $A^{-k} = (A^{-1})^k$. Com isso, estendemos a definição de potência para expoentes inteiros quaisquer. Segue-se que $A^k.A^p = A^{k+p}$ e $(A^k)^p = A^{kp}$, para todos k e p inteiros quaisquer.*

A seguir, veremos alguns fatos importantes. Para tanto, seja A uma matriz não singular. Dada uma matriz B, afirmamos que a equação matricial $AX = B$ tem uma única solução. Demonstremos este fato. Por um lado, é fácil ver que $X = A^{-1}B$ é uma solução de $AX = B$. Por outro lado,

$$X = E_n X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Logo, $X = A^{-1}B$ é a única solução de $AX = B$. Analogamente, vê-se que a única solução de equação $XA = B$ é $X = BA^{-1}$.

Analisemos o caso em que A é singular. Se as equações

$$XA = B \text{ e } AX = B$$

tem uma solução, necessariamente, $\det B = 0$, já que, neste caso, $\det B = \det A {\cdot} \det X = 0$. Em particular, uma matriz singular não tem recíproca.

Capítulo 4

Utilizando Determinantes para Resolver Equações Lineares

Neste capitulo, resolveremos equações lineares usando a famosa *regra de Cramer*.

4.1 A Regra de Cramer

Dentre as mais variadas aplicações dos determinantes, a resolução de sistema de n equações lineares e n incógnitas é, sem dúvida, a mais conhecida. Na realidade, a teoria de determinantes surgiu para resolver este tipo de sistema, dito *quadrados*, já que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Os primeiros a proporem a utilização de determinantes para resolver os sistemas quadrados foram Leibniz e Cramer.

Consideremos o sistema quadrado

$$\begin{aligned} f_1 := a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ f_2 := a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ f_n := a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Seja o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

formado pelos coeficientes do sistema. Multiplicando a primeira equação por A_{11}, a segunda equação por A_{21}, e assim, sucessivamente, e depois, adicionando-as obtemos

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{k1}\Big)x_1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{k2}\Big)x_2 + \ldots + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{kn} = 0\Big)x_n = \sum_{k=1}^{n} A_{k1}b_k.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{kj} = 0$, se $j \neq 1$, e $\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{k1} = D$, temos que

$$Dx_1 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n.$$

Analogamente, chegamos a

$$Dx_j = A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \ldots + A_{nj}b_n,$$

para $j > 1$. Sendo assim, estas últimas equações são consequências das primeiras. Supondo que $D \neq 0$, podemos mostrar que, reciprocamente, as primeiras equações são consequências destas últimas. Para mostrarmos isto, multipliquemos as últimas equações, respectivamente, por $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$. Após adicionarmos as equações resultantes, obtemos

$$D(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = Db_1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{2k}a_{1k}\Big)b_2 + \ldots + \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{nk}a_{1k}\Big)b_n.$$

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{kj} = 0$, se $j \neq 1$, e $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{k1}a_{k1} = D$, temos que

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

já que $D \neq 0$. Analogamente, mostra-se que

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

para $i > 1$. Isto diz-nos que os sistemas das primeiras equações e das últimas equações são equivalentes, já que possuem as mesmas soluções. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, a solução do sistema das últimas equações, para o caso em que $D \neq 0$, é dada por

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

onde

$$D_i = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$$

é a expansão pelos elementos da i-ésima coluna do determinante que resulta de D trocando a i-ésima coluna por $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. E assim, chegamos a

Teorema 4.1.1 *(Regra de Cramer) Se o determinante D de um sistema de n equações lineares e n incógnitas, digamos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é não nulo, então o sistema tem uma única solução dada por*

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, onde D_i resulta de D substituindo a i-ésima coluna de D por $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Exemplo 4.1.2 *Usando a regra de Cramer, resolvamos o sistema*

$$\begin{cases} 5x + 4z + 2t & = & 3 \\ x - y + 2z + t & = & 1 \\ 4x + y + 2z & = & 1 \\ x + y + z + t & = & 0 \end{cases}$$

O determinante do sistema é

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Observando-se que

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \ , \ D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \ e \ D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7,$$

temos que

$$x = \frac{-7}{-7} = 1, \ y = \frac{7}{-7} = -1, \ z = \frac{7}{-7} = -1 \ e \ t = \frac{-7}{-7} = 1.$$

4.2 Equações Lineares Homogêneas

Dizemos que a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ é *homogênea* se, $b = 0$. Sendo assim, considerando a forma linear $f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, as soluções da equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ são as n-úplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que anulam a forma linear f. Estas n-úplas são chamadas de *zeros de* f. Toda equação homogênea tem, pelo menos, a solução $(0, 0, \ldots, 0)$, dita *trivial*. Pela regra de Cramer, se o sistema de equações lineares homogêneas

$$\begin{aligned} f_1 := a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ f_2 := a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\cdots \\ f_n := a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

tem determinante diferente de zero, sua única solução é a trivial. Refraseando, a solução trivial é a única solução simultânea das formas $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Agora, nosso objetivo é demonstrar que

Teorema 4.2.1 *Um sistema de n equações lineares homogêneas e n incógnitas admite soluções não triviais se, e somente se, seu determinante é zero.*

Demonstração. A implicação direta, por contraposição, está demonstrada. De fato, se o determinante não é zero, a única solução do sistema é a trivial, como observamos acima. Para a implicação inversa, a demonstração será por indução sobre n. O caso $n = 1$ é imediato, já que, neste caso, a forma linear é definida por $f = ax$, para um certo $a \in \mathbb{R}$. Para o caso $n = 2$, consideremos o sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0. \end{aligned}$$

É imediato que se todos os coeficientes $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ são nulos, o sistema é satisfeito por todos os valores de x_1 e x_2. Caso contrário, se existe algum coeficiente não nulo, digamos, a_{11}, temos que $x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2$. Substituindo esta expressão na segunda equação do sistema, obtemos

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 = 0.$$

Agora, como o determinante do sistema é zero, a igualdade $0.x_2 = 0$ é satisfeita qualquer que seja o valor de x_2. Se escolhemos $x_2 = -a_{11} \neq 0$, então $x_1 = a_{12}$. Ou seja, para $n = 2$, existem soluções não triviais para o sistema, caso o seu determinante seja zero. Para completar a demonstração, suponhamos que o teorema é verdadeiro para todo sistema de $n-1$ equações lineares homogêneas e $n-1$ incógnitas, com $n \geq 3$. Não há nada a provar se os coeficientes a_{ij} são nulos. Caso contrário, suponhamos que exista um coeficiente que não seja nulo, digamos, a_{11}. Observemos que o sistema

$$\begin{array}{rcl}
f_1 := a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\
f_2 := a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\
\cdots & & \\
f_n := a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & 0
\end{array}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{array}{rcl}
f_1 & = & 0 \\
f_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}f_1 & = & 0 \\
\cdots & & \\
f_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}f_1 & = & 0
\end{array}$$

já que pela n-linearidade, para ambos os sistemas os determinantes têm o mesmo valor. Observemos que o determinante do segundo sistema é

$$D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{2n} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{n2} - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{nn} - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}a_{1n}
\end{vmatrix}.$$

Expandindo-o pelos elementos da primeira coluna, obtemos $D = a_{11}\Delta$, onde Δ é o determinante do sistema

$$\begin{array}{rcl}
f_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}f_1 & = & 0 \\
\cdots & & \\
f_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}f_1 & = & 0,
\end{array}$$

que não contém a incógnita x_1. Disto, segue-se que $\Delta = 0$, já que $D = 0$ e $a_{11} \neq 0$. Como Δ é o determinante de um sistema de $n-1$ equações lineares homogêneas e $n-1$ incógnitas, temos, pela hipótese de indução, que este último sistema tem soluções não triviais. Seja $(x_2, \ldots, x_n)$ uma solução não trivial deste sistema. Usando a equação

$f_1 = 0$, conseguimos uma solução $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ não trivial do segundo sistema. Pela equivalência dos sistemas, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ também é uma solução não trivial do primeiro sistema, como queríamos. $\square$

Vejamos, uma consequência do teorema acima.

Corolário 4.2.2 *Um sistema de n equações lineares homogêneas e $n+p$ incógnitas, com p inteiro positivo, tem solução não trivial.*

De fato, adicionando a este sistema p equações lineares homogênes da forma

$$0.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_n = 0,$$

obtemos um novo sistema, quadrado, cujo determinante é zero, já que possui, pelo menos, uma linha nula. Logo, pelo teorema acima, este novo sistema tem soluções não triviais. E assim, o sistema original tem soluções não triviais, como queríamos demonstrar.

4.3 O Posto de uma Matriz e a Independência Linear

Seja o sistema

$$\begin{array}{rcl} f_1 := a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ f_2 := a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \cdots & \\ f_m := a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

de m equações lineares homogêneas e n incógnitas. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

é denominada de *a matriz dos coeficientes do sistema*, que é uma matriz composta por m linhas (número de equações) e n colunas (número de incógnitas). Seja $r \leq \min\{m, n\}$. Escolhendo r linhas, dentre as m linhas, e r colunas, dentre as n colunas, formamos uma matriz de ordem r. Desta forma, podemos gerar vários determinantes de ordem r, para cada $r \leq \min\{n, m\}$, denominados de *os menores de ordem r da matriz A*. Os elementos da matriz A podem ser vistos como menores de ordem 1. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

tem 20 menores de ordem 3, 45 menores de ordem 2 e 18 menores de ordem 1. Em geral, dada uma matriz A de ordem $m \times n$, isto significa que A tem m linhas e n colunas, e dado $r \leq \min\{m, n\}$, pelo princípio multiplicativo, existem $\dfrac{m!}{r!(m-r)!} \cdot \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ menores de ordem r. Quando $n = m$, a matriz é quadrada. Neste caso, dizemos, apenas, matriz de ordem n.

Por definição, uma matriz $A = (a_{ij})$ tem *posto* ρ, com $\rho \leq \min\{n, m\}$, se, existem menores de ordem ρ diferente de zero, enquanto que todos os menores de ordem $\rho + 1$, se existem, são nulos. Equivalentemente, o posto de uma matriz $A = (a_{ij})$ é o máximo dentre todas as ordens dos menores não nulos de A. Observe que se existe um menor de A de ordem $\min\{m, n\}$ diferente de zero, então o posto de A é $\min\{m, n\}$.

O fato de que todos os menores de ordem $\rho + 1$ são nulos implica que os menores de ordem r, com $r > \rho + 1$, caso existam, também são nulos. De fato, basta lembrar a relação $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, e que todo menor de ordem r, com $r > \rho + 1$, o qual indicaremos por D_r, pode ser expandido através de qualquer de suas filas, digamos, de sua i-ésima linha, como segue

$$D_r = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} \ldots + A_{in}a_{in}.$$

Por exemplo, a matriz A acima, tem posto 3, já que o menor de ordem 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

é diferente de zero e $3 = \min\{3, 4\}$.

As formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$, correspondentes à matriz A, são ditas *linearemente independentes*, ou, abreviadamente, LI, se, a única solução da equação

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0, \text{ for } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Caso contrário, dizemos que as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são *linearmente dependentes*, ou abreviadamente, LD. Ou seja, se, a equação $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0$ é satisfeita para uma m-úpla $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ não nula, isto é, algum dos λ_j é não nulo. Observemos que se alguma das formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$ é nula, elas são linearmente dependentes. De fato, digamos que f_1 é a forma linear nula, então

$$\lambda \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + 0 \cdot f_m = 0,$$

para qualquer que seja λ. Além disso, consideremos as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Então,

- se elas são LI, para todo $s \leq m$, quaisquer das s formas lineares dentre estas, também, são LI;
- se elas são LD, $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_t}$, com t inteiro positivo, também, são LD.

Seja σ o número máximo de formas linearmente independente dentre as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Existe uma relação entre σ e o posto ρ da matriz A correspondente às formas lineares $f_1, f_2, \cdots, f_m$, conforme o teorema abaixo.

Teorema 4.3.1 *Se a matriz correspondente às formas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ tem posto ρ, então, dentre todas estas formas lineares existem ρ que são linearmente independentes, e que quaisquer $\rho + 1$ destas formas lineares são linearmente dependentes. Deste modo, conclui-se que $\sigma = \rho$.*

Demonstração. Salvo uma eventual mudança na notação das variaveis, e uma reindexação das formas, podemos assumir que o menor de ordem ρ, que é diferente de zero, é

$$D_\rho = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} \end{vmatrix}.$$

Isto corresponde a permutar as filas da matriz A, correspondente às formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$, de tal maneira que o menor de ordem ρ seja como acima. Disto, segue-se que as formas $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ são linearmente independentes. Demonstremos este fato, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_\rho f_\rho = 0.$$

Igualando os coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ a zero, chegamos ao sistema

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_\rho a_{\rho 1} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_\rho a_{\rho 2} &= 0 \\ &\cdots \\ \lambda_1 a_{1\rho} + \lambda_2 a_{2\rho} + \ldots + \lambda_\rho a_{\rho\rho} &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema fornece-nos os possíveis valores dos λ_k, usando, para esta finalidade, o determinante D_ρ. Observemos que o determinante da matriz dos coeficientes deste último sistema é igual a D_ρ, já que esta matriz é a transposta da matriz que vemos em D_ρ. Como D_ρ é diferente de zero, temos que o determinante da matriz dos coeficientes deste último sistema é diferente de zero. Desta forma, pelo teorema 4.2.1, segue-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_\rho = 0$. Isto mostra-nos que as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ são LI. Em particular, vemos que $\sigma \geq \rho$. Agora, mostraremos que as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_\rho, f_k$, para $k > \rho$ são LD. Para tanto, consideremos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & f_\rho \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k\rho} & f_k \end{vmatrix}.$$

Substituindo a última coluna $f_1, f_2, \ldots, f_k$ pelas suas expressões nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o determinante Δ expressa-se como uma soma de termos do tipo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & a_{1s}x_s \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & a_{2s}x_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & a_{\rho s}x_s \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k\rho} & a_{ks}x_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & a_{\rho s} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k\rho} & a_{ks} \end{vmatrix} x_s.$$

Para o caso em que $s \leq \rho$, os termos correspondentes são nulos, já que, nestes casos, a matriz no determinante tem duas colunas iguais. Também, os $n - \rho$ termos restantes são nulos, já que os seus coeficientes são menores de ordem $\rho + 1$, derivados da matriz A, que tem posto ρ. Consequentemente, $\Delta = 0$. Expandindo Δ pelos elementos da última coluna, nós chegamos à identidade

$$X_{1(\rho+1)}f_1 + X_{2(\rho+1)}f_2 + \ldots + X_{\rho(\rho+1)}f_\rho + X_{(\rho+1)(\rho+1)}f_k = 0,$$

onde X_{ij} são os complementos dos elementos correspondentes da matriz

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & f_\rho \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{k\rho} & f_k \end{pmatrix}.$$

Como $X_{(\rho+1)(\rho+1)} = (-1)^{2(\rho+1)}D_\rho = D_\rho$ é diferente de zero, temos que as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_\rho, f_k$ são linearmente dependentes. E mais, para todo $k > \rho$,

$$f_k = -\Big[\frac{X_{1(\rho+1)}}{D_\rho}f_1 + \frac{X_{2(\rho+1)}}{D_\rho}f_2 + \ldots + \frac{X_{\rho(\rho+1)}}{D_\rho}f_\rho\Big].$$

Sejam $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_{\rho+1}}$ formas lineares dentre as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Pelo que vimos acima, e pelo fato de que

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + 0 \cdot f_\rho \\ f_2 & = & 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + \ldots + 0 \cdot f_\rho \\ \cdots & & \\ f_\rho & = & 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + 1 \cdot f_\rho, \end{array}$$

temos que, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, podemos escrever

$$f_j = B_{1j}f_1 + B_{2j}f_2 + \ldots + B_{\rho j}f_\rho,$$

para certos B_j, nem todos nulos. Em particular,

$$\begin{array}{rcl} f_{\alpha_1} & = & B_{1\alpha_1}f_1 + B_{2\alpha_1}f_2 + \ldots + B_{\rho\alpha_1}f_\rho \\ f_{\alpha_2} & = & B_{1\alpha_2}f_1 + B_{2\alpha_2}f_2 + \ldots + B_{\rho\alpha_2}f_\rho \\ \cdots & & \\ f_{\alpha_{\rho+1}} & = & B_{1\alpha_{\rho+1}}f_1 + B_{2\alpha_{\rho+1}}f_2 + \ldots + B_{\rho\alpha_{\rho+1}}f_\rho. \end{array}$$

Sendo assim, considerando a equação

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \lambda_{\alpha_2} f_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_{\alpha_{\rho+1}} f_{\alpha_{\rho+1}} = 0,$$

e considerando a independência linear de $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$, chegamos ao sistema

$$\begin{array}{rcl} B_{1\alpha_1}\lambda_1 + B_{1\alpha_2}\lambda_2 + \ldots + B_{1\alpha_{\rho+1}}\lambda_{\alpha_{\rho+1}} & = & 0 \\ B_{2\alpha_1}\lambda_1 + B_{2\alpha_2}\lambda_2 + \ldots + B_{2\alpha_{\rho+1}}\lambda_{\alpha_{\rho+1}} & = & 0 \\ \cdots & & \\ B_{\rho\alpha_1}\lambda_1 + B_{\rho\alpha_2}\lambda_2 + \ldots + B_{\rho\alpha_{\rho+1}}\lambda_{\alpha_{\rho+1}} & = & ,0 \end{array}$$

que possui ρ equações lineares homogêneas e $\rho + 1$ incógnitas. Pelo corolário 4.2.2, este sistema tem soluções não triviais. Isto mostra-nos que as formas lineares $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_{\rho+1}}$ são LD. Logo, quaisquer $\rho + 1$ formas lineares dentre as $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são LD. Em particular, isto mostra-nos que $\sigma \leq \rho$. Logo, concluímos que $\sigma = \rho$. □

Como uma consequência imediata do resultado acima, temos que

Corolário 4.3.2 *Quaisquer $n+1$ formas lineares em n variáveis são linearmente dependentes.*

De fato, como a matriz correspondente tem posto $\rho \leq n = \min\{n+1, n\}$, temos que $\sigma = \rho \leq n$. E assim, pelo teorema, estas $n+1$ formas lineares são LD.

Exemplo 4.3.3 *Consideremos as formas lineares*

$$\begin{aligned} f_1 &= y \\ f_2 &= x + 2y + 3z \\ f_3 &= -x - y - 3z \\ f_4 &= x + 4y + 3z, \end{aligned}$$

nas variáveis x, y, z. A matriz correspondente destas formas é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

cujo posto é 2. E assim, dentre as formas f_1, f_2, f_3, f_4 existem apenas duas que são linearmente independentes. É fácil ver que as f_1 e f_2 são LI. Seguindo o método descrito no teorema 4.3.1, expressaremos f_3 e f_4 em função de f_1 e f_2. Como no teorema mencionado, consideramos os determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ 1 & 2 & f_2 \\ -1 & -1 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ 1 & 2 & f_2 \\ 1 & 4 & f_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Expandindo-os, encontramos

$$-f_3 - f_2 + f_1 = 0 \ e \ -f_4 + f_2 + 2f_1 = 0.$$

Logo, $f_3 = f_1 - f_2$ e $f_4 = 2f_1 + f_2$.

4.4 Encontrando o Posto de uma Matriz

Nesta seção, descreveremos um método para encontrar o posto de uma matriz. Utilizando certas operações, às vezes, denominadas de *operações elementares*, sobre as filas da matriz, de tal modo que o posto não se altera, pode-se reduzir a matriz original a uma certa forma, denominada de *normal*, a qual é mais simples de identificar o posto da matriz. Estas operações são as seguintes:

1. trocar a posição de duas filas (linhas ou colunas);

2. adiciona aos elementos de uma fila (linha ou coluna), os elementos de outra (linha ou coluna), que foram multiplicados por um fator arbitrário.

Observemos que a verificação de que estas operações não alteram o posto, pode ser feita apenas para as linhas, já que o posto de uma matriz é o mesmo da sua transposta. Sendo assim, a partir deste momento, passemos a considerar as operações elementares sobre as linhas. Mostremos que as operações elementares não alteram o posto da matriz. Para tanto, introduziremos as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$, nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que correspondem as linhas da matriz (a_{ij}), que assumiremos de ordem $m \times n$. Já sabemos, pelo teorema 4.3.1, que o número máximo de formas linearmente independentes dentre estas é o posto da matriz (a_{ij}). Observemos que a troca de duas linhas entre si, simplesmente, altera a ordem das formas. Mas, obviamente, não altera o número de formas independentes no sistema, cuja a matriz dos coeficentes é (a_{ij}). Desta forma, a operação 1 não altera o posto. Agora, monstraremos que a operação 2 não altera o posto da matriz (a_{ij}). Por aplicações sucessivas da operação 1, podemos supor que as linhas envolvidas são a primeira e segunda linhas. Depois que executamos as operações mencionadas, e dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a nova matriz corresponde às formas lineares

$$\begin{aligned} \phi_1 &= f_1 + \lambda f_2 \\ \phi_2 &= f_2 \\ \ldots & \\ \phi_m &= f_m. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi_1 - \lambda \phi_2 \\ f_2 &= \phi_2 \\ \ldots & \\ f_m &= \phi_m. \end{aligned}$$

O próximo resultado conclui a demonstração.

Proposição 4.4.1 *Se as formas lineares $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ podem ser dadas linearmente em função de $f_1, f_2, \ldots, f_m$, e que ρ destas formas lineares são linearmente independentes, então o número ρ' de formas linearmente independentes, dentre as formas lineares $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, não é maior do que ρ.*

Demonstração. A demonstração segue um procedimento descrito no teorema 4.3.1. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ são as formas linearmente independentes dentre as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Sendo assim, dado $s \geq \rho + 1$, consideremos as s formas lineares $\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \ldots, \phi_{\alpha_s}$ dentre as formas lineares $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, as quais podem ser expressas por

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha_1} &= c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \ldots + c_{1\rho} f_\rho \\ \phi_{\alpha_2} &= c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \ldots + c_{2\rho} f_\rho \\ & \qquad \ldots \\ \phi_{\alpha_s} &= c_{s1} f_1 + c_{s2} f_2 + \ldots + c_{s\rho} f_\rho. \end{aligned}$$

Da equação

$$\lambda_1 \phi_{\alpha_1} + \lambda_2 \phi_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_s \phi_{\alpha_s} = 0,$$

chegamos ao sistema

$$\begin{aligned} c_{11}\lambda_1 + c_{21}\lambda_2 + \ldots + c_{s1}\lambda_s &= 0 \\ c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \ldots + c_{s2}\lambda_s &= 0 \\ \ldots & \\ c_{1\rho}\lambda_1 + c_{2\rho}\lambda_2 + \ldots + c_{s\rho}\lambda_s &= 0. \end{aligned}$$

Pelo corolário 4.2.2, segue-se que este sistema tem uma solução $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ não nula. Logo, a igualdade

$$\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \ldots + \lambda_s\phi_s = 0,$$

é verificada para uma s-úpla não nula. Isto, mostra-nos que $\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \ldots, \phi_{\alpha_s}$ são linearmente dependentes, para cada $s > \rho$. Portanto, $\rho' \leq \rho$. □

Retornando às formas lineares

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= f_1 + \lambda_2 \\
\phi_2 &= f_2 \\
\cdots & \\
\phi_m &= f_m,
\end{aligned}$$

e chamando de ρ' o número máximo de formas linearmente independentes entre estas, concluímos, analogamente, como vimos acima, que $\rho' \leq \rho$. Logo, $\rho = \rho'$. Portanto, mostramos que o posto da matriz não muda pela operação 2.

Para o que se segue, dizemos que uma matriz (d_{ij}) é *diagonal* se, $d_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Os elementos da forma d_{ii} compõem o que se denomina de *diagonal* da matriz diagonal. Agora, vejamos como obter a forma normal da matriz (a_{ij}). Para evitar trivialidades, assumamos que a matriz (a_{ij}) contém elementos não nulos. Por um número finito de sucessivas operações do tipo 1 sobre as linhas, podemos colocar o primeiro elemento não nulo na primeira linha. Agora, procedendo do mesmo modo sobre as colunas, podemos considerar o primeiro elemento não nulo na interseção da primeira linha e da primeira coluna. A seguir, multiplicamos cada elemento da primeira coluna por fatores, adequadamente, escolhidos, e somando-o às colunas restantes, faremos com que todos os elementos da primeira linha, a partir do segundo, anulem-se. Analogamente, podemos reduzir a zero todos os elementos da primeira coluna pertecentes às linhas $2, 3, \ldots, m$. Daí, a matriz, após as operações elementares mencionadas, tem, na primeira linha e na primeira coluna, o primeiro elemento não nulo da matriz, e os demais elementos destas filas, todos nulos. Se existir outros elementos não nulos, considerando o primeiro destes, de forma completamente análoga ao que fizemos acima, nós o colocamos na segunda linha e segunda coluna. Em seguida, anulamos todos os demais elementos, da segunda linha e da segunda coluna. E assim, sucessivamente, reduzimos a matriz $(a_{ij}$ a uma matriz diagonal, que é a sua normal, tal que os ρ primeiros elementos da giagonal são não nulos. A seguir, vemos uma matriz na forma normal.

$$\begin{pmatrix}
d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & d_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & d_\rho & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Exemplo 4.4.1 *Seja a matriz*

$$\begin{pmatrix}
2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
14 & 15 & 16 & 17 & 18
\end{pmatrix}.$$

Vamos reduzí-la à forma normal para sabermos seu posto. Subtraindo cada coluna, a partir da segunda, da primeira, obtemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

A partir das colunas $1, 3, 4, 5$, *subtraindo-as da segunda coluna, multiplicada por* $2, 2, 3, 4$, *respectivamente, chegamos a*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trocando a primeira coluna com a segunda coluna, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtraindo, cada linha a partir da segunda, da primeira linha, chegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, subtraindo a segunda linha, multiplicada por $2, 7, 12$, *das linhas* $3, 4, 5$, *respectivamente, chegamos ao nosso destina, a forma normal da matriz acima,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, o posto da matriz é 2. *Como tais operações não altera o posto, temos que o posto da matriz original. Além disso, como as linhas da matriz original não foram trocadas na redução, e considerando as formas lineares, correspondentes à matriz original,*

$$\begin{aligned} f_1 &= 2x + 3y + 4z + 5t + 6u \\ f_2 &= 3x + 4y + 5z + 6t + 7u \\ f_3 &= 4x + 5y + 6z + 7t + 8u \\ f_4 &= 9x + 10y + 11z + 12t + 13u \\ f_5 &= 14x + 15y + 16z + 17t + 18u \end{aligned}$$

temos que as formas f_1 *e* f_2 *são linearmente independentes. Consequentemente, as formas lineares* f_3, f_4, f_5 *podem ser expressas em função das formas lineares* f_1 *e* f_2, *usando o mesmo procedimento do exemplo 4.3.3.*

4.5 Discussão Geral sobre Sistema Linear

Voltemos a situação geral, discutindo a resolução de sistemas tais como

$$\begin{aligned} f_1 &:= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ f_2 &:= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots & \\ f_m &:= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned}$$

Suponhamos que o posto da matriz dos coeficientes do sistema é ρ. Segue-se que o número máximo de formas lineares independentes é ρ. Sem perda de generalidade, podemos considerar que as formas lineares $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ são LI. Isto implica que

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Para cada $s = \rho+1, \rho+2, \ldots, m$, temos que

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & f_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & f_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & f_\rho - b_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & f_s - b_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & f_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & f_s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & b_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & b_s \end{vmatrix}.$$

Da alternância do determinante e da independência linear das formas lineares $f_1, f_2. \ldots, f_\rho$, concluímos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & f_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & f_s \end{vmatrix} = 0.$$

Disto, segue-se que

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & f_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & f_2 - b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & f_\rho - b_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & f_s - b_s \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & b_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & b_s \end{vmatrix}.$$

Suponhamos que o sistema acima é solúvel, e que a n-úpla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma solução de tal sistema. Então, $f_1 - b_1 = 0, f_2 - b_2 = 0, \ldots, f_m - b_m = 0$. Donde, obtemos D_s=0, para $s = \rho+1, \rho+2, \ldots, m$. Sendo assim, se o sistema acima é solúvel, então as seguintes condições, ditas *condições de compatibilidade*:

$$\Delta_s := -D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} & b_\rho \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s\rho} & b_s \end{vmatrix} = 0,$$

são satisfeitas, para cada $s = \rho + 1, \rho + 2, \ldots, m$.

Reciprocamente, se as condições de compatibilidade são satisfeitas, então $D_s = -\Delta_s = 0$, para cada $s = \rho + 1, \rho + 2, \ldots, m$. Expandindo D_s pelos elementos da última coluna, chegamos à identidade

$$d(f_s - b_s) + d_1(f_1 - b_1) + \ldots + d_\rho(f_\rho - b_\rho) = 0.$$

Como $d \neq 0$, podemos escrever

$$f_s - b_s = -\Big[\frac{d_1}{d}(f_1 - b_1) + \frac{d_2}{d}(f_2 - b_2) + \ldots + \frac{d_\rho}{d}(f_\rho - b_\rho)\Big],$$

para cada $s = \rho + 1, \rho + 2, \ldots, m$. Isto, mostra-nos que todas as equações do sistema são satisfeitas se,

$$f_1 - b_1 = 0, f_2 - b_2 = 0, \ldots, f_\rho - b_\rho = 0.$$

Sendo assim, atribuindo valores arbitários às incógnitas $x_{\rho+1}, x_{\rho+2}, \ldots, x_n$, desde que $\rho < n$), e resolvendo o sistema resultante destas substituições, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, usando a regra de Cramer, já que o determinante deste sistema é

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdots & a_{\rho\rho} \end{vmatrix} \neq 0,$$

concluímos que o sistema

$$\begin{aligned} f_1 &:= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ f_2 &:= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots & \\ f_m &:= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned}$$

é solúvel. Isto, mostra-nos que

Proposição 4.5.1 *O sistema acima tem solução se, e somente se, as condições de compatibilidade são satisfeitas.*

A proposição mostra-nos que se a matriz de um sistema de m equações lineares e n incógnitas tem posto ρ, e as condições de compatibilidade $\Delta_s = 0$, para cada $s = \rho + 1, \rho + 2, \ldots, m$, não são satisfeitas, então o sistema não tem solução ou é incompatível. Reciprocamente, se as condições de compatibilidade são satisfeitas, então o sistema é solúvel, e $n - \rho$ das incógnitas podem ter valores arbitrários, e as demais ρ incógnitas são determinadas.

Existe outro modo de caracterizarmos a solubilidade de um sistema de m equações lineares e de n incógnitas. Ao invês de trabalharmos com a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

trabalharemos com a matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

que é denominada de *a matriz aumentada do sistema*. Observemos que todos os menores de A são menores de B. Sendo assim, o posto de B é maior do que ou igual ao posto de A, que é ρ. Agora, os únicos menores de B de ordem $\rho+1$ que não são menores de A são os Δ_s. Consequentemente, o anulamento destes implica que o posto de B, também, é ρ. Logo, conseguimos a seguinte caracterização

Proposição 4.5.2 *Uma condição necessária e suficiente para a solubilidade de um sistema de m equações lineares e de n incógnitas é que o posto da matriz aumentada seja igual ao posto da matriz dos coeficientes do sistema.*

Exemplo 4.5.1 *Consideremos o sistema*

$$\begin{aligned} f_1 &:= 3x + 2y + 5z + 4t = 0 \\ f_2 &:= 5x + 3y + 2z + t = 1 \\ f_3 &:= 11x + 7y + 12z + 9t = k \\ f_4 &:= 4x + 3y + 13z + 11t = l. \end{aligned}$$

A matriz do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 11 & 7 & 12 & 9 \\ 4 & 3 & 13 & 11 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que A tem posto 2, e que as formas lineares f_1 e f_2 são linearmente independentes. Além disso,

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

As duas condições de compatibilidade são

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 7 & k \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & l \end{vmatrix} = 0.$$

Destas, encontramos $k = 1$ e $l = -1$. A menos que $k = 1$, $l = -1$, o sistema proposto não tem solução. Para o caso em que $k = 1$, $l = -1$, tomando as duas primeiras equações, podemos escrever

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -5z - 4t \\ 5x + 3y &= -2z - t + 1. \end{aligned}$$

Escrevendo x e y em função de z e t, obtemos

$$\begin{aligned} x &= 11z + 10t + 2 \\ y &= -19z - 17t - 3. \end{aligned}$$

Para valores arbitrários de z e t, determinamos x, y.

Capítulo 5

Aplicações de Determinantes à Geometria

Neste capítulo mostraremos como são construídas as equações de retas, planos, circulos esferas e cálculo das áreas de triângulos e volume de tetraedros.

5.1 Equações de Retas, Planos e Circulos na forma de Determinantes

No caso planar, utilizemos determinantes na obtenção da equação de uma reta que passa por dois pontos distintos, $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$, onde as coordenadas são tomadas em relação a um sistema de eixos ortogonais, tais coordenadas são ditas *retangulares*. Consideremos a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Quando expandimos o determinante à esquerda pelos elementos da primeira linha, encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Como os coeficientes de x e y não são simultâneamente nulos, temos que uma tal equação representa uma reta no plano que passa pelos pontos A_1 e A_2. Sendo assim, usando a alternância, concluímos que

Proposição 5.1.1 *Os pontos $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ são colineares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração.

$\Rightarrow$ Suponha que os pontos $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$ sejam colineares. Seja $r : ax + by + c = 0$ uma reta que contenha A_1, A_2 e A_3, portanto o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \\ ax_3 + by_3 + c &= 0 \end{cases}$$

tem solução não trivial uma vez que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Logo

$$det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

ou seja,

$$det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

$\Leftarrow$ Imediato. $\square$

Exemplo 5.1.1 *Consideremos os pontos* $A_1 = (1, 7), A_2 = (-2, 1)$. *A equação da reta* r, *definida por* A_1 *e* A_2, *é*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 15 + 6x - 3y = 0.$$

Verifiquemos se os pontos A_1, A_2 *e* $A_3 = (3, 9)$ *são colineares. Observando que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 21 - 18 - 9 - 3 + 14 = 6 \neq 0,$$

temos que os postos A_1, A_2, A_3 *não são colineares. A seguir, vê-se graficamente a disposição destes pontos no sistema de eixos ortogonais.*

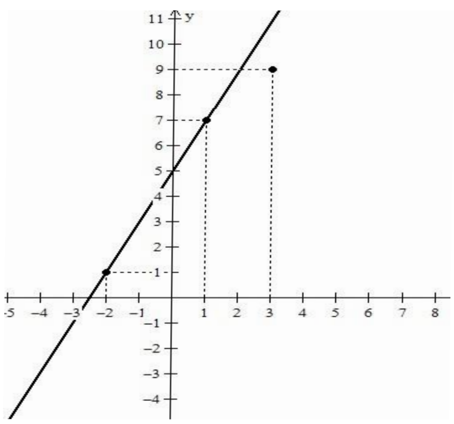


Figura 5.1: reta r

No caso espacial, consideremos os pontos $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $A_3 = (x_3, y_3, z_3)$, onde as coordenadas são tomadas relativas a um sistema de eixos ortogonais. Suponhamos que eles não são colineares. Seja a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Expandindo o lado esquerdo pelos elementos da primeira linha, encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Como os coeficientes de x, y e z não são simultaneamente nulos, já que o anulamento deles significaria que as projeções de A_1, A_2, A_3 sobre os planos coordenados, YOZ, ZOX, XOY, seriam colineares, e então, os pontos A_1, A_2, A_3 seriam colineares. Sendo assim, uma tal equação representa um plano no espaço que passa pelos pontos A_1, A_2, A_3. Pela alternância, concluímos que

Proposição 5.1.2 *Os pontos A_1, A_2, A_3 e $A_4 = (x_4, y_4, z_4)$ são coplanares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração.
A prova segue construções similares da demonstração de 5.1.1.

A seguir, vemos uma representação gráfica da situação acima na figura 5.2.

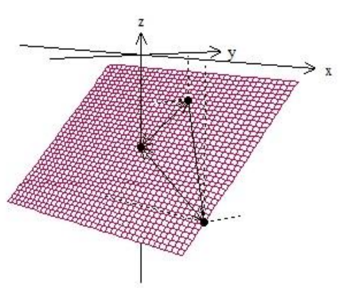


Figura 5.2: plano

Para o caso circular, consideremos os pontos $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$. Suponhamos que estes não são colineares. Seja a equação

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Expandindo o lado esquerdo pelos elementos da primeira linha, encontramos uma equação da forma

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

onde A é dado por

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Como A_1, A_2 e A_3 não são colineares, temos que $A \neq 0$. E assim, uma tal equação representa um circulo que passa pelos pontosA_1, A_2, A_3. Sendo assim, concluímos que

Proposição 5.1.3 *Os pontos A_1, A_2, A_3 e $A_4 = (x_4, y_4)$ são cocirculares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração.

A prova segue construções similares da demonstração de 5.1.1.

Exemplo 5.1.2 *Sejam os pontos $A = (2, 0), B = (-2, 0)$ e $C = (0, 2)$. A equação do círculo que passa por estes pontos é*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8(x^2+y^2) + 32 = 0.$$

Donde, obtemos

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

A seguir, vemos a curva que representa esta equação.

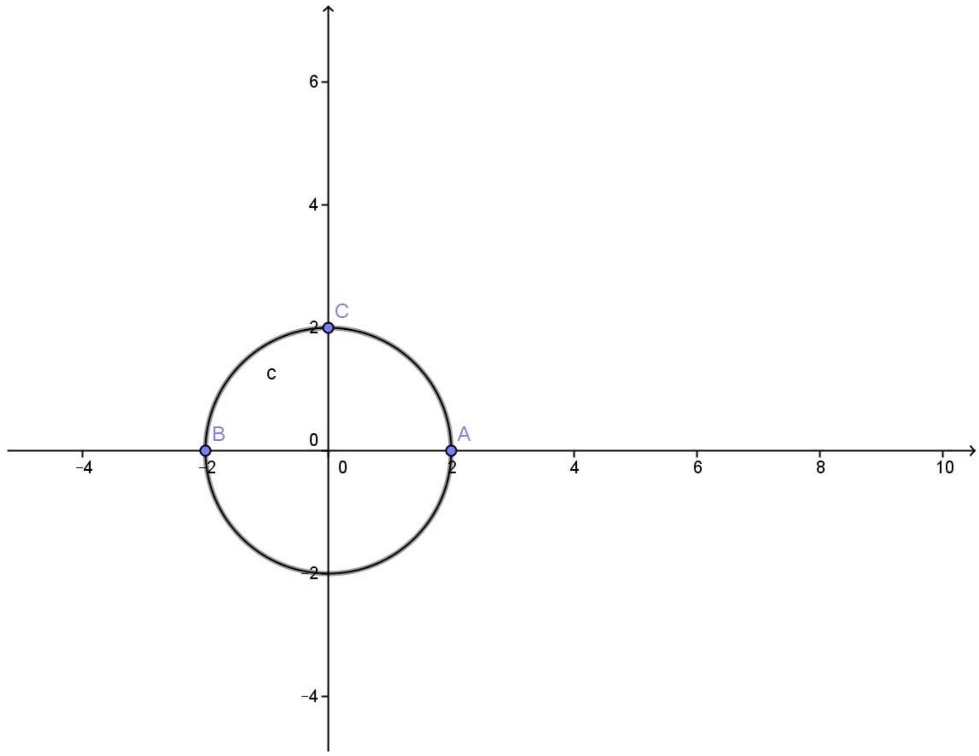


Figura 5.3: circulo

Consideremos os pontos $A_1 = (x_1, y_1, z_1), A_2 = (x_2, y_2, z_2), A_3 = (x_3, y_3, z_3)$ e $A_4 = (x_4, y_4, z_4)$. Suponhamos que estes não são coplanares. Analogamente, vê-se que a equação

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

é a equação da esfera que passa pelos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4. E também, conclui-se que

Proposição 5.1.4 *Os pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e $A_5 = (x_5, y_5, z_5)$ estão sobre uma mesma esfera se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração.

A prova segue construções similares da demonstração de 5.1.1.

A superfície descrita em 5.4 é uma esfera.

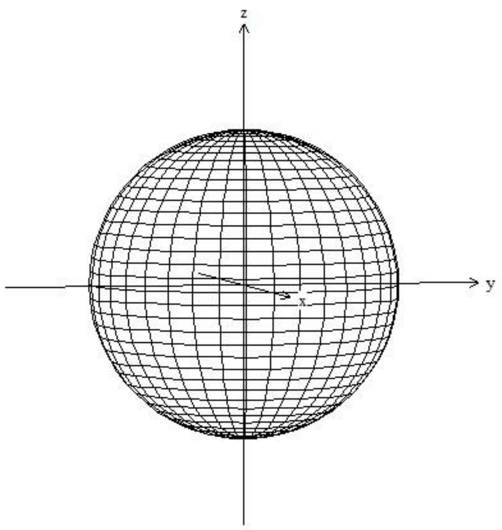


Figura 5.4: esfera

5.2 A Área de um Triângulo e o Volume de um Tetraedro.

Lembremos que se $Ax + By + C = 0$ é a equação da reta r e $P = (X, Y)$ é um ponto arbitrário, então, a expressão

$$d = \frac{|AX + BY + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, (**)$$

é a distância do ponto P à reta r, veja a figura 5.5.

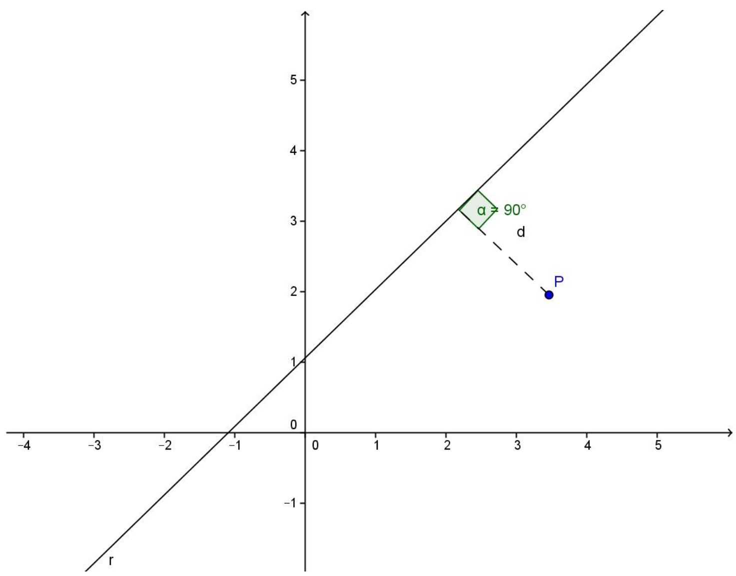


Figura 5.5: Dist.(P,r)

Seja o triângulo de vértices $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$. sabemos da proposição [5.1.1] que a equação do lado A_1A_2 pode ser escrita na forma

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.(*)$$

Segue-se que os coeficientes A e B são dados por

$$A = y_1 - y_2 \text{ e } B = x_2 - x_1.$$

Observemos que

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l_{12}$$

é o comprimento do lado A_1A_2. Sendo assim, usando $(*)$ e $(**)$

$$d = \frac{|\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}|}{l_{12}}$$

é a altura relativa ao vértice A_3, conforme mostra-nos a figura 5.6.

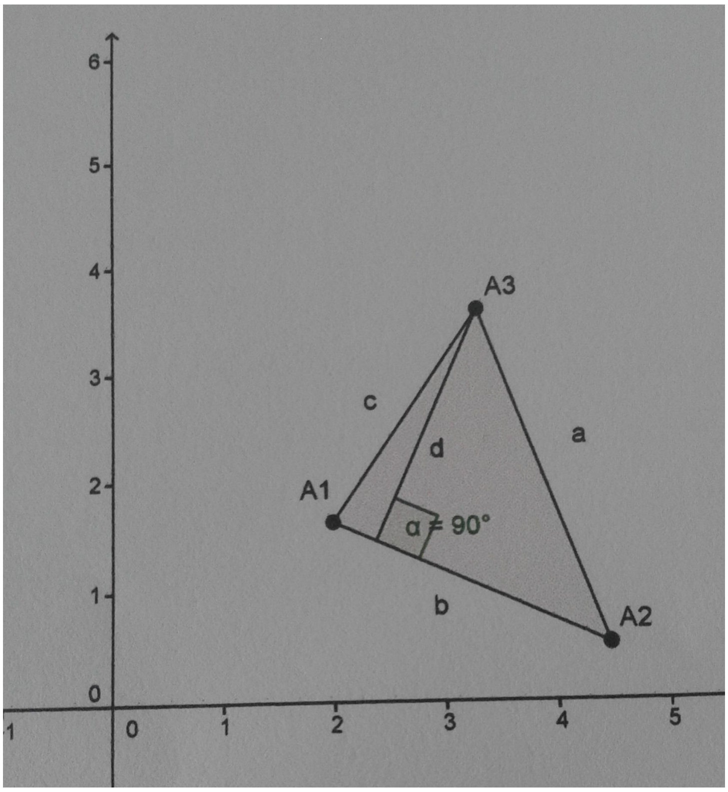


Figura 5.6: Triângulo

E então,

$$|\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}|$$

é o dobro da área do triângulo de vértices A_1, A_2, A_3. Denotando a área deste triângulo por A, chegamos a

$$2A = \left| \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right|.$$

A distância de um ponto $P = (X, Y, Z)$ a um plano $Ax + By + Cz + D = 0$ é dada pela fórmula

$$d = \frac{|AX + BY + CZ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Consideremos os pontos $A_1 = (x_1, y_1, z_1), A_2 = (x_2, y_2, z_2), A_3 = (x_3, y_3, z_3), A_4 = (x_4, y_4, z_4)$ como os quatro vértices de um tetraedro, conforme a figura 5.7.

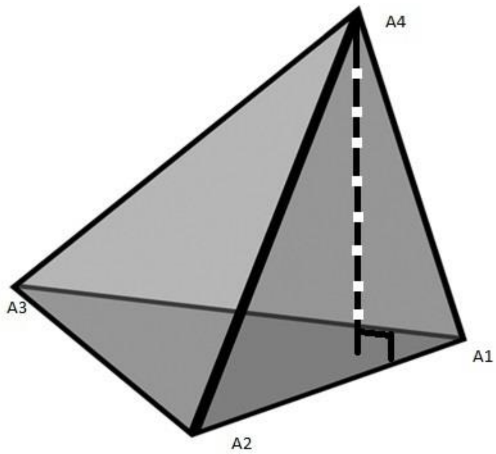


Figura 5.7: tetraedro

A equação do plano que passa pelos pontos A_1, A_2, A_3 é dada por

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

onde os coeficientes em x, y e z são dados por

$$A = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad e \quad C = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

respectivamente.

Observemos que A, B e C representam em valor absoluto o dobro da área das projeções do triângulo de vértices A_1, A_2, A_3 sobre os planos coordenados YOZ, XOZ e XOY, respectivamente. Da geometria analítica, sabe-se que a soma dos quadrados destas áreas é igual ao quadrado da área do triângulo de vértices A_1, A_2, A_3. Vejamos uma demonstração deste fato. Considerando os vetores $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Lembremos que

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot |\sin(u, v)|,$$

que é, numericamente, igual à área do paralelogramo definido pelos vetores u e v, onde $\times$ indica o produto vetorial e $(\cdot,\cdot)$, o ângulo entre os vetores discriminados. Elevando, ambos os membros desta última igualdade, ao quadrado, chegamos a

$$|u \times v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot |\sin(u,v)|^2,$$

$$|u \times v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot |1 - \cos^2(u,v)|,$$

$$|u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 - < u, v >^2 .$$

Desenvolvendo em termos das coordenadas de u e v, obtemos

$$|u \times v|^2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 .$$

Observando que

$$A = -\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \; e \; C = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

que, em valores absolutos, são as áreas das projeções do paralelogramo definido por u e v sobre os planos coordenados, temos que

$$4\Delta^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

onde Δ denota a área do triângulo definido pelos vetores u e v, como queríamos.

Agora, como a distância do vértice A_4 do tetraedro à face oposta é dada por

$$d = \frac{1}{2\Delta} | \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} |,$$

e o volume do tetraedro é expresso por

$$V = \frac{1}{3}\Delta d,$$

temos que

$$V = \frac{1}{6} | \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} |.$$

5.3 A Potência de um Ponto relativo a um Circulo.

Consideremos o círculo C de centro O e raio $R > 0$. Seja um ponto arbitrário P que dista d do centro O, segundo a figura 5.8.

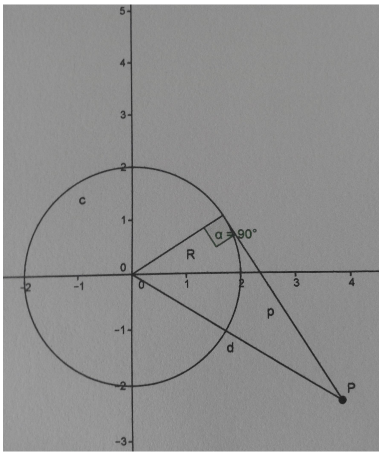


Figura 5.8: Potência de P

A expressão

$$p = d^2 - R^2$$

é denominada de *potência de P em relação à C*. Observemos que $p > 0$, se P está fora da região limitada pelo círculo C, $p = 0$, se P está sobre C, e $p < 0$, se P está dentro da região limitada por C. Além disso, se P está no centro de C, $p = -R^2$. Na forma geral, a equação de C é do tipo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + D = 0,$$

para certos A, B e D. Mas, usando as coordenadas $O = (a, b)$, temos que a equação de C pode ser escrita como

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Além disso, a distância de $P = (X, Y)$ a $O = (a, b)$ é dada por

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = d^2.$$

E assim,

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 - R^2 = p,$$

ou seja, a potência do ponto P em relação ao circulo C é dada por

$$p = X^2 + Y^2 + AX + BY + D.$$

Consideremos a equação

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que é a equação do circulo que passa pelos pontos $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$. Isto, também, significa que A_1, A_2 e A_3 satisfaz uma equação do tipo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + D = 0.$$

Expandindo o determinante do lado esquerdo da equação pelos elementos da primeira linha, vemos que o coeficiente do termo em $x^2 + y^2$ é

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

que representa o dobro da área orientada, isto é, que leva em consideração a orientação dos vértices, do triângulo $A_1A_2A_3$. O coeficiente do termo em x é

$$-\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

que, devido à linearidade e à alternância, bem como, ao fato de que os vértices pertencem ao círculo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + D = 0,$$

reduz-se a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} A.$$

Já o coeficiente do termo em y, pelos mesmos motivos, reduz-se a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} B.$$

E o termo independente, também, pelos mesmos motivos, reduz-se a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} D.$$

Desta forma, denotando por A a área do triângulo $A_1A_2A_3$, concluímos que o determinante acima é o produto de $\pm 2A$ pela potência p de um ponto arbitrário $A_4 = (x_4, y_4)$ em relação ao circulo circunscrito ao triângulo mencionado. Sendo assim,

$$\mp 2Ap = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

visto em [3] Na próxima seção, veremos aplicações interessantes desta fórmula, conjuntamente com a fórmula do produto de determinantes, conforme teorema 3.5.1.

5.4 Corolários Geométricos

Da seção anterior, usando a alternância do determinante, chegamos à fórmula

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = 2Ap,$$

onde A é área do triângulo de vértices $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$ e p é a potência do ponto $A_4 = (x_4, y_4)$ relativa ao círculo circunscrito a este triângulo. Consideremos a matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{pmatrix},$$

Multiplicando-se a segunda e a terceira colunas da matriz X por -2, e trocando a primeira coluna com a quarta, obtemos, usando a linearidade e a alternância,

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)^2 \det X = -8Ap.$$

Multiplicando este último determinante pelo determinante de X^t, que é igual ao $\det X = 2Ap$, chegamos a

$$-16A^2p^2 = \begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

onde $l_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$, que é *a distância mútua relativa aos pontos A_i e A_j*. Esta é uma relação entre a área A do triângulo $A_1A_2A_3$, a potência do ponto A_4 em relação ao circulo circunscrito ao triângulo $A_1A_2A_3$ e as seis distâncias relativas aos pontos A_i e A_j, para todos $1 \leq i < j \leq 4$, lembrando que $l_{ij} = l_{ji}$. Disto, segue-se, imediatamente, que

Proposição 5.4.1 *Os pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 são cocirculares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Agora, supondo que A_4 está no centro do círculo circunscrito ao triângulo $A_1A_2A_3$, temos que $p = -R^2$ e $l_{14} = l_{24} = l_{34} = R$. Cancelando o fator R^4 em ambos os lados da última equação, chegamos à relação

$$16A^2 = -\begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & 1 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & 1 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 \\ 1 & l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 \\ 1 & l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

que relaciona os lados e a área do triângulo $A_1A_2A_3$.

Por simplicidade, consideremos $l_{12} = a$, $l_{13} = b$, $l_{23} = c$. Sendo assim, reescrevemos a relação acima como

$$16A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Expandindo o determinante do lado direito, obtemos a relação

$$16A^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Sendo assim, demonstramos que

Proposição 5.4.2 *(Fórmula de Herão) Seja um triângulo cujos lados medem a, b e c. Então, a sua área é dada por*

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Multiplicando as colunas $2, 3, 4$ do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

por $(l_{13}l_{14})^2$, $(l_{12}l_{14})^2$, $(l_{12}l_{13})^2$, respectivamente, obtemos

$$-16A^2p^2(l_{12}l_{13}l_{14})^4 = \begin{vmatrix} 0 & (l_{12}l_{13}l_{14})^2 & (l_{12}l_{13}l_{14})^2 & (l_{12}l_{13}l_{14})^2 \\ l_{12}^2 & 0 & (l_{12}l_{23}l_{14})^2 & (l_{12}l_{13}l_{24})^2 \\ l_{13}^2 & (l_{13}l_{14}l_{23})^2 & 0 & (l_{12}l_{13}l_{34})^2 \\ l_{14} & (l_{13}l_{14}l_{24})^2 & (l_{12}l_{14}l_{34})^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Donde, pela linearidade,

$$-16A^2p^2(l_{12}l_{13}l_{14})^4 = (l_{12}l_{13}l_{14})^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (l_{14}l_{23})^2 & (l_{13}l_{24})^2 \\ 1 & (l_{14}l_{23})^2 & 0 & (l_{12}l_{34})^2 \\ 1 & (l_{13}l_{24})^2 & (l_{12}l_{34})^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Usando a não colinearidade dos pontos A_1, A_2 e A_3, chegamos a

$$-16A^2p^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (l_{14}l_{23})^2 & (l_{13}l_{24})^2 \\ 1 & (l_{14}l_{23})^2 & 0 & (l_{12}l_{34})^2 \\ 1 & (l_{13}l_{24})^2 & (l_{12}l_{34})^2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & (l_{14}l_{23})^2 & (l_{13}l_{24})^2 \\ 1 & (l_{14}l_{23})^2 & 0 & (l_{12}l_{34})^2 \\ 1 & (l_{13}l_{24})^2 & (l_{12}l_{34})^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Por expansão do determinante na última igualdade, conseguimos a fórmula

$$16A^2p^2 = (l_{23}l_{14}+l_{13}l_{24}+l_{12}l_{34})(l_{23}l_{14}+l_{13}l_{24}-l_{12}l_{34})(l_{23}l_{14}+l_{12}l_{34}-l_{13}l_{24})(l_{13}l_{24}+l_{12}l_{34}-l_{23}l_{14}).$$

Suponhamos que os quatro pontos A_1, A_2, A_3, A_4 são cocirculares. Desta forma, como $p = 0$ e $l_{23}l_{14} + l_{13}l_{24} + l_{12}l_{34} > 0$, temos a seguinte relação

$$(l_{23}l_{14} + l_{13}l_{24} - l_{12}l_{34})(l_{23}l_{14} + l_{12}l_{34} - l_{13}l_{24})(l_{13}l_{24} + l_{12}l_{34} - l_{23}l_{14}) = 0.$$

Por simplicidade, consideremos $l_{12} = a, l_{23} = b, l_{34} = c, l_{14} = d, l_{13} = e$ e $l_{24} = f$. E assim, podemos reescrevê-la como

$$(bd + ef - ac)(bd + ac - ef)(ef + ac - bd) = 0.$$

Nosso próximo passo é demonstrar a proposição

Proposição 5.4.3 *(Teorema de Ptolomeu) Se o quadrilátero convexo de vértices A_1, A_2, A_3 e A_4 tem lados e diagonais medindo a, b, c, d, e e f. Então, $ac + bd = ef$.*

Demonstração. Da relação

$$(bd + ef - ac)(bd + ac - ef)(ef + ac - bd) = 0,$$

basta mostrarmos que os fatores $bd + ef - ac$ e $ef + ac - bd$ não são nulos.

Por um lado, como no quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$, que está inscrito em um circulo, a soma dos ângulos opostos é 180^0, existe um lado, digamos, A_2A_3, tal que os seus ângulos adjacentes são obtusos. Sendo assim, usando o fato de que ao maior ãngulo interno de um triângulo opõe-se o maior lado, temos que $e > a, e > b, f > b, f > c$. Disto, segue-se que $ef > ac$. E assim, $bd + ef - ac > 0$.

Antes de passarmos ao próximo passo, que é mostrar que $ef + ac - bd >$, lembremos que a soma das diagonais de um quadrilátero é maior do que a soma de dois lados opostos, isto é, $e + f > b + d$. Retornando ao nosso interesse. Como $ef - bd = e(f - b) - b(d - e)$, se $d < e$, então $ef - bd > 0$, já que $f > b$. Agora, se $d > e$, resulta da desigualdade $e + f > b + d$ que $f - b > d - e$. Consequentemente, em todos os casos, tem-se que $ef - bd > (d - e)(e - b) > 0$. Logo, $ef + ac - bd > 0$. Portanto, $ac + bd = ef$.

□

5.5 Extensão à Terceira Dimensão

Analogamente, podemos estender as considerações da seção anterior para o caso tridimensional. Em primeiro lugar, a equação da esfera E circunscrita ao tetraedro de vértices

$$A_1 = (x_1, y_1, z_1), A_2 = (x_2, y_2, z_2), A_3 = (x_3, y_3, z_3), A_4 = (x_4, y_4, z_4)$$

pode ser vista como

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Além disso, se R representa o raio de E e d a distância de $A_5 = (x_5 y_5 z_5)$ ao centro de E, então $p = d^2 - R^2$ é *a potência de A_5 em relação à E*. Como procedemos anteriormente, chegamos à

$$6Vp = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 \end{vmatrix},$$

onde V é o volume do tetraedro $A_1A_2A_3A_4$. Consideremos a matriz

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando o determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & -2z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 & 1 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & 1 \end{vmatrix} = 48Vp$$

pelo determinante de X^t, que é igual ao $\det X$, obtemos

$$288V^2p^2 = \begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 & l_{15}^2 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 & l_{25}^2 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 & l_{35}^2 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & l_0^2 & l_{45}^2 \\ l_{15}^2 & l_{25}^2 & l_{35}^2 & l_{45}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

onde l_{ij} é *a distância mútua relativa aos pontos* A_i *e* A_j, para todos $1 \leq i < j \leq 5$, e é tal que

$$l_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

Disto, segue-se que

Proposição 5.5.1 *Os pontos* A_1, A_2, A_3, A_4 *e* A_5 *estão sobre a mesma esfera se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 & l_{15}^2 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 & l_{25}^2 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 & l_{35}^2 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & l_0^2 & l_{45}^2 \\ l_{15}^2 & l_{25}^2 & l_{35}^2 & l_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Além disso, considerando que A_5 está localizado no centro de E, circunscrita ao tetraedro A_1, A_2, A_3,A_4, temos que $p = -R^2$ e $l_{15} = l_{25} = l_{35} = l_{45} = R$. Desta forma, pela linearidade do determinante, chegamos a

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 & 1 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 & 1 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 & 1 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & l_0^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

que nos fornece o volume de um tetraedro em termos das suas arestas. Uma outra consequência da última expressão é que

Proposição 5.5.2 *Os pontos* A_1, A_2, A_3 *e* A_4 *são coplanares se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 & 1 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 & 1 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 & 1 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & l_0^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Finalizando, acrescentamos a informação de que os determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & 1 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & 1 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad e \quad \begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 & 1 \\ l_{12}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 & 1 \\ l_{13}^2 & l_{23}^2 & 0 & l_{34}^2 & 1 \\ l_{14}^2 & l_{24}^2 & l_{34}^2 & l_0^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

são conhecidos como *os determinantes de Cayley-Menger de dimensões* 2 *e* 3, respectivamente.

Capítulo 6

Atividade Proposta

É importante na ministração dos tópicos de geometria analítica, o docente selecionar questões de um nível mais fácil para a compreensão imediata do estudante, mas, também, selecionar problemas com grau de dificuldade mais elevado. As avaliações externas, a exemplo dos vestibulares, trazem questões inéditas, e com um nível de ráciocínio bastante diversificado. Por isso, precisamos de um planejamento, que vislumbre a interdisciplinaridade, das aulas para atenuar o descompasso entre o que se ministra e o que se cobra, aproximando-se ao máximo o que se aprende na escola com a realidade cotidiana dos estudantes. Nesta tentativa, a seleção dos materiais e dos problemas é uma da ações mais adequadas para conseguir-se tal contextualização, que promove o desenvolvimento cognitivo do discente. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do Ensino Médio justificam este procedimento, como vê-se a seguir.

> "A falta de sintonia entre realidade escolar e necessidades formativas, reflete-se nos projetos pedagógicos das escolas, frequentemente inadequados, raramente explicitados ou objeto de reflexão consciente da comunidade escolar. A reflexão sobre o projeto pedagógico permite que cada professor conheça as razões da opção por determinado conjunto de atividades, quais competências se busca desenvolver com elas e que prioridades norteiam o uso dos recursos materiais e a distribuição da carga horária. Permite, sobretudo, que o professor compreenda o sentido e a relevância de seu trabalho, em sua disciplina, para que as metas formativas gerais definidas para os alunos da escola sejam atingidas. Sem essa reflexão, pode faltar clareza sobre como conduzir o aprendizado de modo a promover, junto ao alunado, as qualificações humanas pretendidas pelo novo ensino médio." (PCN's, p.8).

O docente, tendo essa clareza de objetivos, procurará o que é essencial e relevante ao aluno para seu desenvolvimento intelectual, pois, em um mundo de céleres transformações está em consonância com tais mudanças é de suma importância como, por exemplo, expressa os PCN's do ensino médio, como vê-se a seguir.

> "Num mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa: saber informar-se, comunicar-se, argumentar, compreender e agir; enfrentar problemas de diferentes naturezas; participar socialmente, de forma prática e solidária; ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e, especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado." (PCN's,p.9)

É imprescindível que na ministração de um tópico matemático, seja mostrado a fundamentação do assunto em estudo, e tenham exercícios contextualizados, de modo que o discente possa construir um modelo a fim de resolver tais exercícios. Não basta apenas colocar simples exercícios, pois os concursos, tais como o ENEM e os Vestibulares, exigem do condidato a capacidade de pensar em construir suas próprias soluções, sem a utilização de métodos prontos, que fazem parte de um receituário, o que pouco desenvolve a capacidade de resolver problemas. Portanto, no estudo dos determinantes e sistemas lineares pode-se implementar questões de nível mais elevado como revela os PCN's relativos à Matemática do Ensino Médio.

> "Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola". (PCN's, p.122)

Neste trabalho, usamos os determinantes um objeto algébrico para obtermos as definições de retas, planos, círculo e de esfera, objetos geométricos, bem como certas propriedades geométricas que caracterizam, por exemplo, colinearidade, cocircularidade e coplanaridade. Neste contexto, vemos a importância da geometria analítica na construção do conhecimento, pois habilita o discente a enxergar as conexões entre os diversos conteúdos, tais como, as matrizes, determinantes e sistemas lineares, o que nos parece bastante natural. A seguir, vemos que os PCN's do Ensino Médio justificam esta atitude.

> "A unidade Geometria analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações." (PCN's, p.124)

6.1 Seleção de Questões Contextualizadas

A seguir, vemos algumas questões que se enquadram na proposta deste trabalho. É claro que este trabalho vai além do que comumente encontra-se nos atuais livros didáticos, por exemplo, a definição de determinante que utilizamos, vendo-o como uma forma n-linear alternada, que tem valor um na matriz identidade, é a caracterização adequada para a generalização da definição a outras dimensões, do que, simplesmente, 2 e 3. E mais, quando vemos, no capítulo anterior, a partir da seção 5.4, as definições de área de um triângulo e volume de um tetraedro em função das distâncias mútuas, com maior razão, dos seus quadrados, percebemos que podemos calcular estes elementos sem recorrermos às coordenadas retangulares dos seus vértices, simplesmente, precisamos das medidas dos seus lados ou arestas. Isto, também, acontece com as caraterizações de certas propriedades geométricas, por exemplo, auqelas listadas acima. Por isso, trazemos esta proposta para que seja inserida, pelo menos, na pauta do treinamentos dos colegas professores, fazendo-os refletir sobre as diferentes abordagens.

1. Mostrar que no determinante de Vandermonde vale:
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a).$$

2. A projeção ortogonal de T sobre o plano xy é outro triângulo cujos vértices são $(x_1, y_1, 0)$,$(x_2, y_2, 0)$,$(x_3, y_3, 0)$ e
$$A_z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1),$$
mostra-nos essa área. Mostrar semelhantemente o determinante para A_x e A_y.

3. Determinar o volume do tetraedro cujos vértives são $A = (-4, 6, 3)$, $B = (8, -3, 5)$, $C = (4, 0, -1)$, $D = (5, 3, 9)$.

4. Provar que se t é o comprimento do segmento de tangência traçado desde um ponto externo dado $P_1 = (x_1, y_1)$ a uma circunferência dada $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, então
$$t^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2$$
.

5. utilize a expressão obtida da questão anterior para determinar o comprimento do segmento de reta tangente traçada desde o ponto$(-3, 2)$ à circunferência $9x^2 + 9y^2 - 30x - 18y - 2 = 0$.

6. Sejam os pontos $A = (4, -1), B = (0, -7), C = (-2, -3)$ e $D = (\frac{11}{7}, \frac{-26}{7})$ verificar as proposições:

   (a) O que se pode concluir quando se calcula as distâncias DA, DB e DC?

   (b) Caso estas distâncias sejam constantes, Use o determinante de Cayley-Menger para determinar a área do triângulo ABC.

7. (Uefs 2011.1) Considerando-se o triângulo cujos vértices são $A(9, 1)$, $B(4, 11)$ e $C(1, 5)$, tem-se que a medida do raio da circunferência inscrita nesse triângulo é igual a?

8. (Enem 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros. A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P(-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de mode que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5km. Atendendo o pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automáticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto
$$(a)(-5, 0) \qquad (b)(-3, 1) \qquad (c)(-2, 1) \qquad (d)(0, 4) \qquad (e)(2, 6).$$

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, G.. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 7, Geometria Analítica.* 5^a edição. Atual Editora, Rio de Janeiro, 2005.

[2] LIMA, E. L.. *Matemática e ensino.* 2^a edição. SBM, Rio de Janeiro, 2002.

[3] USPENSKY, J. V.. *Theory of Equations.* McGraw-Hill, New York, 1948.

[4] WINTERLE, P.. *Vetores e Geometria Analítica.* Pearson, São Paulo, 2000.