

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR  
MEIO DE GRAFOS: APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO**

Jose Fabio de Araujo Lima

**Orientador:** Prof<sup>o</sup> Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

Agosto de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR  
MEIO DE GRAFOS: APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO**

Jose Fabio de Araujo Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

**Orientador: Profº Dr. Haroldo Gonçalves Benatti**

Feira de Santana

08 de Agosto de 2014

### **Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado**

L698m Lima, Jose Fabio de Araujo  
Modelagem e resolução de problemas por meio de grafos : aplicações  
no ensino básico / Jose Fabio de Araujo Lima. – Feira de Santana, 2014.  
77 f. : il.

Orientador: Haroldo Gonçalves Benatti.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Feira de  
Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Teoria dos grafos. I. Benatti, Haroldo Gonçalves, orient. II.  
Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 519.17



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE JOSE FABIO DE ARAUJO LIMA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos oito dias do mês de agosto de dois mil e quatorze às 14:00 horas no Auditório PPGM - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE GRAFOS: APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO**”, do discente **Jose Fabio de Araujo Lima**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Haroldo Gonçalves Benatti (Orientador, UEFS), Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UESB) e Ana Carla Percontini da Paixão (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 8 de agosto de 2014.

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)

Orientador

Profa. Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UESB)

Profa. Dra. Ana Carla Percontini da Paixão (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira  
Coordenador do PROFMAT / UEFS

*Dedico este trabalho aos meus pais: Jose Irlando e Ana Maria; aos meus irmãos: Leone, Adelson e Fabia; a minha esposa Maiana e aos meus filhos Murilo e Pedro (que está chegando).*

# Agradecimentos

A Deus, pela vida, por possibilitar que eu cresça a cada dia, por iluminar e abençoar minha trajetória.

Aos meus pais, José Irlando e Ana Maria, pelo apoio constante em todas as etapas da minha vida, por me ensinarem a lutar com determinação.

À minha esposa, Maiana pelo amor, paciência, conselhos, força, incentivo, compreensão nas ausências em virtude dos estudos, principalmente no decorrer da dissertação.

Ao meu filho Murilo, pela compreensão nas minhas ausências.

Aos meus irmãos, pela compreensão nas minhas ausências, pelo apoio, por estarmos juntos nos bons e nos maus momentos.

À Minha avó, Epifânia, pelo apoio e por ter me proporcionado a chance de realizar alguns de meus sonhos.

Ao Professor Dr. Haroldo Gonçalves Benatti, pela orientação, paciência, incentivo e sabedoria que muito me auxiliou na realização deste trabalho.

A todos os professores que participaram da minha vida acadêmica.

Aos professores do PROFMAT - UEFS, que contribuíram com nosso desenvolvimento e enriqueceram nossos conhecimentos durante o percurso acadêmico.

À UEFS, por ter abraçado o programa PROFMAT.

A CAPES, pelo apoio financeiro. Certamente, sem este apoio eu não teria chegado até aqui.

Aos colegas do PROFMAT - UEFS da turma 2012, pelo companheirismo, pelos momentos de estudo e aprendizado que foram tão importantes para todos e, principalmente, pela amizade construída durante o curso.

Enfim, a todos aqui citados e aqueles cujos nomes não aparecem, que me ensinaram, incentivaram e ajudaram, direta ou indiretamente, contribuindo assim, para que eu pudesse crescer; meu muito obrigado.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos as noções básicas da Teoria dos Grafos, destacando emparelhamentos em grafos bipartidos. Além disso, apresentamos vários problemas que foram modelados e resolvidos por meio de grafos. Buscamos oferecer ao professor do Ensino Básico exemplos envolvendo grafos que possam ser utilizados em sala de aula através de pequenas oficinas.

Analisamos livros, artigos, provas, principalmente de Olimpíadas de Matemática, no sentido de elaborar um texto básico sobre o tema, bem como selecionar problemas interessantes que possam ser trabalhados com alunos do Ensino Básico. Esperamos que, em pouco tempo, este conteúdo possa figurar na grade de conteúdos do Ensino Básico.

## **Palavras-chave**

Grafos, Grafos no Brasil, Árvores, Emparelhamentos em Grafos Bipartidos, Resolução de Problemas.

# Abstract

In this work we present the basic notions of Graph Theory as well as pointing out matching in bipartite graphs. Besides, we present several problems that were modeled and solved by means of graphs. We decided to offer High and Fundamental School teachers examples containing graphs which may be used in the classroom environment during small workshops. We analyzed books, articles, examinations, especially from the Mathematical Olympics with the intention of preparing a basic text towards the theme as well as selecting interesting math problems which may be worked with, Fundamental and High School students. We hope that it may be integrated to the contents table of Fundamental and High School as soon as possible.

## **Keywords**

Graphs, graphs in Brazil, Trees, Matching in bipartite graphs, Solving Problems.

# Lista de Figuras

1.1	Pontes de Königsberg . . . . .	5
2.1	Grafo dos divisores . . . . .	13
2.2	Grau máximo e grau mínimo . . . . .	14
2.3	Jogos na escola . . . . .	15
2.4	(a) Grafo $G$ . (b) Remoção do vértice $v$ . (c) Remoção da aresta $e$ . (d) Adição da aresta $z = uv$ . . . . .	15
2.5	União e Interseção de dois grafos. . . . .	16
2.6	Grafo $G$ . Subgrafo $G_1$ . Subgrafo induzido $G_2$ . Subgrafo gerador $G_3$ . . . . .	16
2.7	Grafo Orientado . . . . .	17
2.8	Grafo DNA (a) . . . . .	18
2.9	Grafo DNA (solução) . . . . .	19
2.10	Grafo DNA (b) . . . . .	19
2.11	Apertos de mão . . . . .	20
2.12	Sequência de graus (a) . . . . .	22
2.13	Sequência de graus (b) . . . . .	23
2.14	Grafo Petersonlândia . . . . .	24
2.15	Grafo das cidades . . . . .	25
2.16	Grafos Isomorfos . . . . .	26
2.17	Grafos não isomorfos . . . . .	26
2.18	Grafo para matrizes de Incidência e Adjacência. . . . .	28
2.19	Matriz de Adjacência . . . . .	28
2.20	Grafos completos e regulares . . . . .	30
2.21	(a) Grafo $G$ . (b) Subgrafo induzido (Clique). (c) Subgrafo que não é induzido. . . . .	30
2.22	(a) Um grafo $G$ . (b) O seu complemento $\overline{G}$ . . . . .	31
2.23	Passeios . . . . .	31
2.24	Ciclo . . . . .	32

2.25	Terra do Oz para cinco castelos. . . . .	33
2.26	Grafo Terra do Oz . . . . .	33
2.27	Subgrafo Terra do Oz . . . . .	33
2.28	Grafo Conexo . . . . .	35
2.29	Grafos desconexos. . . . .	35
2.30	Três Árvores . . . . .	36
2.31	Grafo Polícia e Ladrão (a) . . . . .	38
2.32	Grafo Polícia e Ladrão (b) . . . . .	39
2.33	Árvore Polícia e Ladrão . . . . .	39
2.34	Árvore Polícia e Ladrão (Solução) . . . . .	40
2.35	Mapa Reino da Kruskalândia . . . . .	41
2.36	Grafo Reino da Kruskalândia . . . . .	42
2.37	(a) Grafo Bipartido. (b) Grafo Bipartido Completo ( $K_{3,4}$ ) . . . . .	44
2.38	Festa de Casamento . . . . .	45
2.39	Grafo Planar . . . . .	46
3.1	Subconjuntos de Vértices Independentes . . . . .	50
3.2	Cobertura . . . . .	51
3.3	Cobertura Mínima . . . . .	51
3.4	Arestas Independentes . . . . .	52
3.5	Emparelhamento Maximal . . . . .	53
3.6	Emparelhamento Máximo e Perfeito . . . . .	53
3.7	Caminho Alternante e Caminho Aumentante . . . . .	54
3.8	Grafo bipartido que não possui emparelhamento perfeito. . . . .	56
3.9	Mapa Tribos e Tartarugas . . . . .	56
3.10	Tribos e Tartarugas . . . . .	57
3.11	Emparelhamento tribos e tartarugas . . . . .	58
3.12	Teorema de Hall . . . . .	59

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	vii
Introdução	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Breve Histórico . . . . .	4
1.1.1 Teoria dos Grafos no Brasil . . . . .	7
1.2 Modelo, Modelagem e Resolução de Problemas . . . . .	9
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>12</b>
2.1 Noções Básicas . . . . .	12
2.2 Tipos de Grafos ou Família de Grafos . . . . .	29
<b>3 Emparelhamentos</b>	<b>49</b>
3.1 Conjuntos Independentes . . . . .	49
3.2 Emparelhamentos . . . . .	52
<b>4 Considerações Finais</b>	<b>62</b>

# Introdução

Relatos sobre o desinteresse dos alunos nas aulas de Matemática do Ensino Básico são frequentes nos discursos dos professores. Perguntas como “Para que serve isso?”, “Onde irei utilizar determinado conteúdo?” são muito comuns nas aulas de matemática, principalmente, pelos alunos que apresentam dificuldade nesta disciplina. Esse comportamento dos alunos pode estar relacionado ao fato de trabalharem com situações que não têm relação com o seu cotidiano. Também é comum observar que esses alunos se interessam cada vez mais por tecnologia.

Com o atual avanço da tecnologia, os alunos, que são nativos digitais, estão cada vez mais imersos nesse mundo tecnológico. Diante disso, cabe à escola oferecer subsídios para atender às demandas dessa sociedade pós-moderna. Hoje, as tecnologias, principalmente da informação, desempenham um papel fundamental na sociedade onde o trabalho mecânico tem ficado à margem e dado espaço a atividades que exijam o senso crítico, a criatividade e o raciocínio lógico. Assim, a formação escolar do indivíduo deve ser pautada na construção do pensamento, na formalização de ideias, na criação e intervenção de inúmeras situações, no desenvolvimento humano, cultural, social, pessoal, lúdico, profissional dentre outros, visando atender a essa nova demanda.

Em virtude dessa metamorfose no cenário geral da sociedade e, conseqüentemente, da educação, torna-se cada vez mais necessário incluir nas aulas, em particular, de Matemática, atividades que sejam interessantes, desafiadoras e que estejam conectadas ou tenham aplicações na área da tecnologia.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) indicam que estas atividades desenvolvem no aluno o espírito argumentativo, o senso crítico, a interpretação, dentre outras habilidades. Dessa maneira, o professor precisa ser capaz de relacionar o conteúdo com o cotidiano dos alunos, através de situações problemas que envolvam a Matemática. Com isso, o papel do professor passa de detentor e transmissor do conhecimento para mediador onde uma de suas funções é orientar o aluno na construção do conhecimento.

Neste sentido, o ensino/aprendizagem da Matemática não deve ser caracterizado por um único

caminho a ser seguido. Existem diversas alternativas que podem ser utilizadas para enriquecer e favorecer seu ensino/aprendizagem, dentre as quais, destacamos a participação em olimpíadas de matemática, em gincanas, inclusão de atividades desafiadoras por meio de pequenas oficinas, entre outras.

O surgimento de uma sociedade virtual nos faz refletir sobre os rumos da educação, especialmente, da Educação Básica. A escola, que é o principal agente transformador de uma sociedade, precisa incluir em seus currículos (ou, pelo menos, em suas aulas) temas que envolvam tratamento e interpretação da informação. As exigências do mundo do trabalho estão cada vez mais relacionadas a decidir, escolher o melhor e menor caminho, minimizar gastos, enfim, otimizar em tudo. Essas atividades estão diretamente relacionadas ao uso do computador e ao desenvolvimento de softwares.

Para atender a essa demanda do século XXI, a Matemática deve também oferecer sua contribuição no sentido de desenvolver nos alunos essas novas competências e habilidades. Assim, na construção dos currículos atuais do Ensino Básico, especialmente de matemática, deve haver reflexões no sentido de oferecer conceitos que forneçam à sociedade resultados práticos para soluções de problemas diários, bem como bases sólidas que forneçam ao aluno subsídios para ingressar no campo do desenvolvimento científico e tecnológico.

Desta forma, visando atender algumas das necessidades atuais do ensino da Matemática no Ensino Básico, sugerimos introduzir nesse nível de ensino atividades de matemática discreta especialmente ligadas à Teoria dos Grafos. Essa é uma ferramenta didático-pedagógica poderosíssima que está em ascendência e diretamente ligada à resolução de diversos problemas atuais na informática, na engenharia, na química, na psicologia, na indústria, e em outras áreas do conhecimento. Apesar disso, pouco tem sido estudada nos cursos de licenciatura em matemática e no Ensino Básico das escolas brasileiras.

Além disso, os problemas que envolvem grafos são extremamente contextualizados, interdisciplinares, e atendem ao que propõem os PCNs. Os problemas mais antigos são bastante conhecidos por demandarem bastante desafio intelectual e proporcionarem discussões interessantes que são pertinentes ao ensino fundamental e médio.

A partir dessa realidade, a Teoria dos Grafos contribui significativamente para um ensino de Matemática que privilegia a construção do conhecimento matemático através da investigação, desenvolvendo no aluno habilidades como explorar, conjecturar, analisar, generalizar, decidir, dentre outras. Neste trabalho, analisamos livros, artigos, dissertações, e outros materiais, buscando oferecer ao leitor, especialmente ao professor de matemática do Ensino Básico, um material que permita uma aproximação com este tema, além de uma gama de atividades que

podem ser aplicadas nesta modalidade de ensino, através de pequenas oficinas.

Este texto é dedicado a professores e alunos do Ensino Básico (especialmente do ensino médio). Nosso objetivo é, principalmente, semear algumas ideias sobre a parte introdutória da Teoria dos Grafos, enfatizando emparelhamentos. Assim, procuramos disponibilizar ao professor do Ensino Básico exemplos envolvendo grafos que proporcionem ao aluno do ensino médio maior interesse pela matemática buscando atender as novas exigências do mundo atual.

Vale a pena ressaltar que a inclusão deste conteúdo já vem acontecendo em provas de olimpíadas de matemática como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - (OBMEP), a Olimpíada Brasileira de Matemática - (OBM), a Olimpíada Paulista de Matemática - (OPM), dentre outras; também estão aparecendo em provas de concursos vestibulares como o Exame Nacional do Ensino Médio - (ENEM). Nos últimos anos, estas provas vêm incluindo problemas que podem ser modelados e resolvidos por meio de grafos. No caso da OPM, nas últimas 10 edições, houve pelo menos um problema que envolvia grafos em cada uma delas.

O tópico grafo possibilita a apresentação de problemas atuais envolvendo matemática discreta que são desafiadores, interessantes, que motivam discussão interdisciplinar e permitem abordagem computacional. Muitos desses problemas oportunizam o aluno criar, tomar decisões, hábito de investigação, enfrentar situações novas e aperfeiçoar conhecimentos. Essas competências e habilidades são recomendados pelos PCNs para que o indivíduo possa se orientar nesse mundo de conhecimento em constante movimento. Por tudo isso, a Teoria dos Grafos possui características importantes e merecem estar figurando no currículo do Ensino Básico.

Para dar conta do objetivo proposto, o trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1, apresentamos um breve histórico da teoria dos grafos e uma pequena discussão sobre modelo, modelagem e resolução de problemas. No capítulo 2, apresentamos os principais conceitos sobre grafos, bem como alguns exemplos de aplicações que podem ser utilizados no Ensino Básico. No capítulo 3, destacamos o tópico emparelhamentos e alguns exemplos de aplicações que podem ser trabalhados no Ensino Básico. No capítulo 4, as considerações finais. Por fim, trazemos as referências bibliográficas que subsidiaram o presente trabalho. As maioria das figuras que constam no trabalho foram construídas com o software Winfig.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico da Teoria dos Grafos. Para obter mais informações sobre a parte histórica, sugerimos Boaventura Netto [5], Moreira [24], Boaventura Netto e Jurkiewicz [7].

### 1.1 Breve Histórico

A Teoria dos Grafos é relativamente recente na história da matemática. De acordo com Moreira [24], o termo grafo foi usado pela primeira vez por Sylvester em 1877, no artigo *Chemistry and Algebra*, publicado em uma das mais antigas revistas científicas do mundo, a *Nature*. No artigo, Sylvester representa compostos químicos com pontos e linhas onde os pontos representavam os elementos químicos e as linhas, as ligações entre eles. Outro relato importante, este bem mais conhecido, de utilização de Grafos acontece no século XVIII, é o problema das sete pontes de Königsberg, o qual foi resolvido por Leonardo Euler. Desde então, a teoria foi se desenvolvendo e, atualmente, é uma das áreas mais importantes e estudadas na matemática aplicada, com aplicações em áreas como engenharia, ciência da computação, engenharia elétrica. Tal crescimento deve-se ao fato de ser uma poderosa ferramenta para modelagem de diversas situações reais em física, biologia, engenharia, pesquisa operacional, química, entre outras.

Um grafo é uma estrutura matemática relativamente simples, muito útil na modelagem e resolução de diversos problemas. A Teoria dos Grafos nasceu de um problema prático e deu seus primeiros passos no final do século XVIII na cidade de Königsberg, na Rússia (hoje Kaliningrado). Essa teoria teve um caminho inverso da maioria dos ramos da matemática que nasceram abstratos e somente muitos anos depois vieram a ter aplicações práticas. De acordo com a história da matemática, o marco fundador da teoria dos grafos foi o clássico problema

das Sete Pontes Königsberg, o qual apresentamos a seguir.

*Na cidade de Königsberg, o Rio Pregel atravessa o centro da cidade e se ramifica formando uma ilha (Kneiphof) que está ligada à parte restante da cidade por sete pontes conforme a figura 1.1. Dizia-se que os habitantes da cidade tentavam efetuar um percurso que, partindo da margem, passasse uma única vez por cada uma das sete pontes, retornando à margem de partida.*

Após diversas tentativas, muitos acreditavam que tal percurso não era possível. Porém, isso só foi confirmado em 1736. Com argumentos simples, e uma modelagem por meio de grafos, Euler mostrou que não era possível tal proeza, e ainda desenvolveu um método geral para resolver problemas do mesmo tipo.

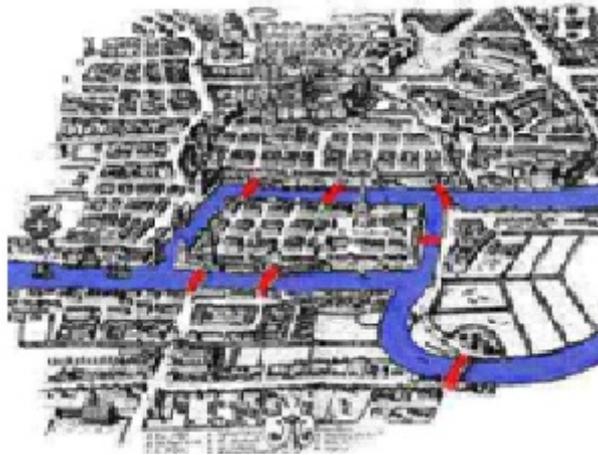


Figura 1.1: Pontes de Königsberg

Para Euler, o problema das sete pontes era de geometria e não de grafos, como sabemos atualmente. Oficialmente, a definição formal de grafos surgiu no século XX. A Teoria dos Grafos é um ramo da matemática discreta relativamente novo que tem forte influência da Análise Combinatória.

Apesar de ter oficialmente seu início com Euler, a Teoria dos Grafos remete aos tempos dos antigos gregos com o estudo dos sólidos regulares platônicos, mas só recebeu esse nome com o problema das sete pontes de Königsberg.

Inicialmente, a teoria não teve muita importância e o assunto chegou a ser considerado “um campo morto”, muitos diziam que a solução de Euler não passava de uma charada matemática, somente um século depois surgiram aplicações em áreas bastante disjuntas. Euler descobriu também a fórmula  $V + F - A = 2$ , invariante que relaciona número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo e, posteriormente, de um grafo planar. Na segunda metade do século XX, a teoria dos grafos ganhou um forte impulso com aplicações em problemas de otimização

organizacional. A seguir, apresentamos alguns fatos que foram importantes para o desenvolvimento dessa teoria.

Em 1847, o físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) utilizou modelos de grafos para estudar circuitos elétricos dando início à teoria das árvores, um subtópico importante da Teoria dos Grafos. Dez anos depois, em 1857, o britânico Arthur Cayley (1821-1895) dando continuidade as ideias de Kirchhoff, no estudo das árvores, dedicou-se a aplicá-los na enumeração de isômeros de hidrocarbonetos alifáticos.

Existem problemas em teoria dos grafos que surgiram apenas da abstração. O matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), em 1859, inventou um jogo que tinha por objetivo encontrar um circuito envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular de forma que cada um deles fosse visitado apenas uma vez. Apesar de nascer apenas na abstração, o problema teve aplicação prática dois séculos depois, na otimização organizacional.

Por volta de 1850, Frederick Guthrie (1833-1886), um estudante de matemática britânico, descobriu um problema importante que tem aplicação prática na cartografia. Seu irmão Francis Guthrie (1831-1899), que trabalhava com mapas, disse que todo cartógrafo não precisava de mais de quatro cores diferentes para colorir seus mapas de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas. Tal conjectura ficou conhecida como problema das quatro cores. Várias foram as tentativas no sentido de provar a conjectura, muitas delas erradas. Importantes Matemáticos se dedicaram por mais de 100 anos e não conseguiram uma prova correta para o problema. Na tentativa de demonstrá-lo, diversos trabalhos foram publicados, alguns deles com erros que posteriormente foram identificados. Apesar desses erros, a Teoria dos Grafos se desenvolveu bastante durante o percurso de tentativas no sentido de provar tal conjectura. Com isso, as várias tentativas enriqueceram a teoria e deram um forte impulso para seu desenvolvimento. Em 1890, o britânico Percy John Heawood (1861-1955) obteve uma demonstração válida para 5 cores e somente em 1976 o problema das quatro cores foi provado. O desenvolvimento da teoria dos grafos sofreu a influência de várias escolas. Algumas escolas deram maior ênfase às aplicações práticas, outras aos grafos orientados, outras aos grafos não-orientados, enfim, cada uma seguiu um caminho diferente.

Os primeiros resultados da Teoria dos Grafos surgiram na europa, especificamente na Hungria, através do matemático Dénes König (1884-1944) e deram origem à primeira escola (escola húngara). Seu trabalho foi continuado por Pál Turán, Paul Erdos, András Hajnal, dentre outros. Na escola húngara, a maioria dos autores trabalham com grafos não-orientados e se dedicaram à teoria extremal, que é um campo da teoria dos grafos que trabalha com determinação de parâmetros (máximos e mínimos).

A escola francesa tem Claude Jacques Roger Berge (1926-2002) como autor mais influente. Para Berge, todo grafo é orientado e, eventualmente, podemos desconsiderar a orientação. A escola francesa foi a que mais desenvolveu aplicações na área de pesquisa operacional. Os pesquisadores notáveis por divulgar a teoria e suas aplicações são Alain Ghouila-Houri (1939-1966), Arnold Kaufmann, C. Roucairol, R. Faure e M. Minoux.

A escola americana priorizava o estudo de grafos não-orientados e foi bastante influenciada por Frank Harary (1921-2005). Outros pesquisadores de destaque nessa escola são Gary Theodore Chartrand (1936-), Hassler Whitney (1907-1989), Oystein Ore (1899-1968), T. C. Hu e Delbert Ray Fulkerson (1924-1976).

Há outros acontecimentos importantes, não relatados neste texto, que são destaques na história da Teoria dos Grafos. Estes podem ser encontrados em Boaventura Netto [5], Moreira [24], dentre outros.

### 1.1.1 Teoria dos Grafos no Brasil

Conforme citado anteriormente, a Teoria dos Grafos é relativamente recente na história da matemática. Assim, são poucos os trabalhos que abordam a história da Teoria dos Grafos no Brasil, sendo pequeno o número de livros publicados sobre o assunto. Dessa forma, destacaremos fatos, autores e publicações sobre grafos que conseguiram notoriedade. De acordo com Boaventura Netto [5], os primeiros trabalhos que envolviam grafos no Brasil foram apresentados no **I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional** em 1968, que aconteceu na cidade São José dos Campos, São Paulo. Desde então, diversos trabalhos que envolvem grafos têm sido apresentados neste simpósio. Analisando os trabalhos publicados de 2002 a 2013, em todas as edições há, pelo menos, um trabalho relacionado a Teoria dos Grafos ou alguma variação de problemas como, por exemplo, o do *caixeiro viajante*.

Antônio Luz Furtado, professor emérito da PUC-Rio, trabalha com ensino e pesquisa na área da Ciência da Computação, especialmente com banco de dados, sistema da informação e programação lógica. Possui dezenas de trabalhos publicados em periódicos, orientou dezenas de dissertações de mestrado e algumas teses de doutorado. Publicou alguns livros, dentre eles, *Teoria dos Grafos - Algoritmos* (1973).

O livro *Combinatória e Grafos*, volume 1 (1974) e volume 2 (1975), de Ruy Madsen Barbosa, nos primeiros capítulos do volume 1 trata de combinatória e posteriormente faz uma pequena introdução à Teoria dos Grafos. No volume 2, o autor dedica dois capítulos a esse tópico. O livro *Aspectos Teóricos da Computação*, publicado pelo IMPA em 1979, através do projeto euclides, que tem como autores Cláudio Leonardo Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon, Janos

Simon e Tomasz Kowaltowski, trata inicialmente de programação e, posteriormente, se dedica à Teoria dos Grafos. O livro apresenta os resultados básicos da Teoria dos Grafos, vários problemas e alguns algoritmos para solucionar os problemas. Inre Simon foi professor da USP e da UNICAMP e faleceu em 2009. Claudio Lucchesi é professor emérito da UNICAMP, atualmente, é professor visitante na UFMS.

Paulo Oswaldo Boaventura Netto, professor do COPPE/UFRJ, trabalha há décadas com Teoria dos Grafos. Já publicou diversos trabalhos sobre matemática discreta. Dentre essas publicações, diversas em Teoria dos Grafos. As mais conhecidas são *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos* (1996), *Teoria e Modelos de Grafos* (1979).

Manuel Caetano Queiroz de Andrade, ex-professor da UFPE, em 1980 publicou o livro *A criação no processo decisório: o grafo como opção metodológica*. O livro está dividido em 13 capítulos, que têm como objetivo apresentar uma abordagem aplicada da teoria dos grafos.

Jayme Luiz Szwarcfter, professor emérito da UFRJ, escreveu vários artigos sobre grafos ou temas relacionados à matemática discreta. Jayme escreveu artigos em parceria com renomados autores internacionais como Donald Knuth. Um de seus livros mais conhecidos é *Grafos e Algoritmos Computacionais* (1986), publicado pela editora Campus. O texto é um curso introdutório de algoritmos e grafos. No livro, o autor destaca um capítulo para algoritmos, e os demais para grafos, sendo que o assunto é abordado sob um enfoque computacional.

Ruy Eduardo Campello e Nelson Maculan publicaram o livro *Algoritmos e Heurísticas - Desenvolvimento e avaliação de performance* (1994). Campello trabalhou na PUC-Rio, no IME, na UFRN e, atualmente, é engenheiro em Furnas. Maculan é professor da UFRJ, possui dezenas de trabalhos publicados em periódicos, orientou dezenas de dissertações de mestrado e teses de doutorado, inclusive, Campello teve seu doutorado orientado por Maculan. Seus trabalhos envolvem, entre outros temas, programação linear e problema de Steiner em grafos.

Samuel Jurkiewicz, também professor do COPPE/UFRJ, publicou e orientou diversos trabalhos sobre matemática discreta, especialmente, sugerindo aplicações ao Ensino Básico. Algumas publicações são *Grafos: Uma Introdução* livro publicado para os alunos premiados na OBMEP, e recentemente, em parceria com Boaventura Netto, o livro *Grafos: Introdução e Prática* (2009). Este livro é voltado para estudantes de graduação que tenham interesse no tema, mostra os resultados básicos da Teoria dos Grafos com diversos exemplos e apresenta alguns algoritmos.

O livro *Grafos: Conceitos, Algoritmos e Aplicações* (2012), publicado pela editora Campus tem como autores os professores da UFRN, Marco Cesar Goldbarg e Elizabeth Ferreira Gouvêa Goldbarg. O livro também apresenta os resultados básicos da Teoria dos Grafos,

estudos de algoritmos e desenvolve diversas aplicações reais. Marco Cesar Goldberg teve como orientador de doutorado Ruy Eduardo Campello. Elizabeth foi orientada por Marco Cesar Goldberg e co-orientada por Paulo Oswaldo Boaventura Netto.

Um dos últimos livros publicado no Brasil sobre o assunto foi *Grafos e redes: teoria e algoritmos básicos*, escrito por J. M. S. Simões-Pereira. O autor é professor catedrático no departamento de matemática da Universidade de Coimbra. Este livro tem 6 capítulos dedicados a uma introdução à Teoria dos Grafos e Redes. O mesmo, é parte de um livro maior que foi publicado em português intitulado *Matemática Discreta: Grafos, Redes, Aplicações*. No livro publicado em português são tratados temas avançados como relações entre grafos e espaços vetoriais, dentre outros.

Embora sejam poucos os livros envolvendo grafos no Brasil, o mesmo não se pode dizer em relação aos textos científicos. Centenas de trabalhos como artigos, dissertações de mestrado, teses de doutorado foram e estão sendo publicados. A maioria dedica parte importante do texto para os conceitos básicos de grafos seguidos de aplicações em pesquisa operacional, biomatemática, sistema de informação, dentre outras áreas.

Na próxima seção, faremos uma breve discussão sobre modelo, modelagem e resolução de problemas.

## 1.2 Modelo, Modelagem e Resolução de Problemas

Em nossas atividades diárias estamos trabalhando o tempo inteiro com modelo. O professor de história trabalha, por exemplo, com mapas conceituais; o professor de educação física ao elaborar, por exemplo, um torneio de futebol relaciona as equipes e seus respectivos jogos; um mapa rodoviário indicando as possíveis rotas; o professor de química ao fazer ligações químicas com átomos, dentre outros. Estamos envolvidos por modelos.

Um modelo é uma representação simplificada de uma situação que possui maior complexidade. Normalmente, para estudar fenômenos complexos cria-se modelos que, na maioria das vezes, envolvem matemática. Os modelos estão em praticamente todas as áreas científicas, por exemplo, temos modelos na engenharia, astronomia, em história, na língua portuguesa e na própria matemática.

Geralmente, cria-se um modelo com o objetivo de obter respostas a ele associado. Por exemplo, quando queremos saber qual é a probabilidade de um casal ter quatro filhos, todos com o mesmo sexo, podemos resolvê-lo utilizando o modelo da árvore de decisão em probabilidade. Modelos desse tipo são resolvidos utilizando métodos combinatórios. Os célebres problemas da Teoria dos Grafos como, por exemplo, o das sete pontes de Königsberg,

da coloração de mapas, de circuitos elétricos, foram modelados e resolvidos por meio de simplificações da realidade e argumentos de análise combinatória.

A modelagem matemática tem várias definições e não entraremos neste mérito de discussão.

Em linhas gerais, entendemos como uma estratégia de ensino/aprendizagem que visa transformar problemas da realidade em problemas matemáticos com o propósito de obter respostas a ele associado.

As primeiras informações revelam que a modelagem matemática no Brasil começou na UNICAMP, na década de 80, com um grupo de professores coordenados por Rodney Carlos Bassanezi- IMECC. Desse trabalho, Bassanezi começou a escrever um livro cujo título é *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia* [2]. No livro, o autor inicia com as bases teóricas da modelagem e, posteriormente, dedica 4 capítulos para modelagem de fenômenos reais. Os problemas tratados no livro são, na grande maioria, ligados à biologia e utilizam desde estatística básica como coleta de dados até equações diferenciais ordinárias.

Uma outra importante estratégia de ensino-aprendizagem é a resolução de problemas. De acordo com os PCNs, a resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance.

A atividade de resolver problemas é constante na vida das pessoas. Para Polya [26], as principais etapas na resolução de um problema são: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação. Nos problemas envolvendo grafos, é extremamente importante que os professores trabalhem esta metodologia, a fim de desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações desafiadoras, verificar regularidades, usar os próprios erros para buscar novas alternativas, validar soluções, desenvolver auto-confiança e o senso crítico.

Os livros-textos de matemática e as aulas dos professores de matemática são quase sempre ilustrados com modelagem e resolução de problemas de matemática contínua. Isso acontece porque, na maioria das vezes, foi o único modelo que tivemos durante nosso percurso acadêmico.

Geralmente, há muitas aplicações da matemática em outras áreas das ciências com Física, Biologia, Química. Áreas como bioinformática, processamentos de dados, engenharia genética, ciências da computação, algoritmos e otimização estão repletas de problemas cuja solução envolve modelagem com matemática discreta.

Por conta das constantes mudanças sofridas pela sociedade, principalmente tecnológicas, já existem discussões no sentido de modificar o currículo escolar de matemática. Especialmente,

no sentido de valorizar determinados conteúdos em detrimento de outros. Para os PCNs, o currículo deve proporcionar por exemplo, contextualização, interdisciplinaridade, transdisciplinaridade. Com isso, a modelagem e resolução de problemas de tópicos de matemática discreta, principalmente grafos, irão contribuir significativamente para um ensino de matemática sintonizado com o atual desenvolvimento tecnológico.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos noções básicas de Teoria dos Grafos e algumas aplicações ao ensino fundamental e médio. A notação adotada se aproxima à de Bondy e Murty [9], salvo pequenas variações que coincidem com outros textos sobre grafos como Diestel [15], Chartrand [12], Bollobás [8] e Lucchesi [23].

### 2.1 Noções Básicas

A Teoria dos Grafos é um ramo relativamente recente da matemática discreta. No entanto, têm sido crescente os estudos nesta área da matemática, a qual apresenta uma grande variedade de aplicações práticas.

Um *grafo simples não-orientado*  $G$  é um par de conjuntos finitos<sup>1</sup>  $V$  e  $E$  denotado por  $G = (V, E)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  ( $V \neq \emptyset$ ) é denominado conjunto dos vértices e  $E$  é o conjunto das arestas, onde  $E \subset \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V\}$  com  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq n$  ( $i \neq j$ ). Para facilitar a linguagem, quando não houver risco de ambiguidades, denotaremos o número de vértices por  $n$  e o número de arestas por  $m$ .

Convém observar que  $E$  é uma relação binária simétrica sobre  $G$ , isto é,  $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ . Em geral, indicamos uma aresta  $e$  de  $G$  por  $\{v_i, v_j\}$  ou simplesmente  $v_i v_j$ . Ocasionalmente, denotamos o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de um grafo  $G$  por  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente,. Essa notação é muito usada quando consideramos dois ou mais grafos diferentes. Ainda, se um grafo possui apenas um vértice é classificado como *trivial*. Um grafo que não possui aresta é chamado *grafo nulo*.

Para fazer referência a grafos, recorreremos a diagramas, nos quais os vértices são representados por pontos ou pequenos círculos e as arestas por segmentos ou curvas que ligam

---

<sup>1</sup>Existem grafos infinitos, ou seja, com número infinito de vértices e arestas.

dois desses vértices. Um par de vértices que determina uma aresta são chamados *extremidades* dessa aresta. Por exemplo, os vértices  $u$  e  $v$  são os extremos da aresta  $uv$ .

Há outras versões de grafos que admitem que uma aresta incida em um único vértice. Neste caso, estas arestas são denominadas *laços*. Também há versões de grafos que admitem mais de uma aresta, incidindo no mesmo par de vértices. Tais arestas são denominadas arestas *múltiplas* ou *paralelas*. Nos grafos simples não há laços nem arestas paralelas.

O número de vértices de um grafo  $|V|$ <sup>2</sup> é chamado *ordem do grafo*. Já o número de arestas, denotado por  $|E|$ , é chamado *tamanho* do grafo. Uma aresta é *incidente* em um vértice  $u$  se possui uma extremidade em  $u$ . O número de arestas incidentes num vértice  $v$  é chamado *grau* de  $v$  e denotamos por  $d(v)$ . Ocasionalmente, denotamos o grau de um vértice em um grafo  $G$  por  $d_G(v)$ . Se um vértice tem grau zero ele é dito *isolado*.

Na figura 2.1, temos um grafo onde o conjunto  $V = \{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$ . O conjunto  $E$  é formado por pares de vértices distintos de  $V$ , que possuem um divisor comum (divisores próprios).

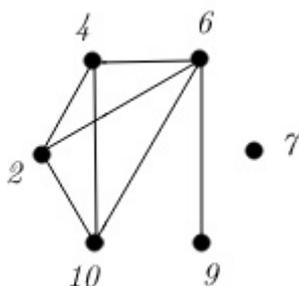


Figura 2.1: Grafo dos divisores

Observe que o vértice 7 não está ligado a nenhum dos outros, pois 7 é primo e não há vértice em  $V$  cujo número associado é múltiplo de 7. A soma dos graus de todos os vértices é 14 que é o dobro do número de arestas (um número par).

Em um grafo  $G = (V, E)$ , dois vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* (ou *vizinhos*) se existe uma aresta ligando  $u$  a  $v$ , ou seja,  $u$  e  $v$  são adjacentes se  $uv \in E$ . Duas *arestas*  $e$  e  $f$  são *adjacentes* se possuem uma extremidade em comum.

O conjunto de vértices adjacentes a  $v_i$  é chamado *vizinhança aberta* de  $v_i$  e denotamos por  $N(v_i)$ . Uma *vizinhança fechada* de  $v_i$  é dada por  $N[v_i] = N(v_i) \cup \{v_i\}$ , assim, na vizinhança fechada além dos vizinhos, inclui o próprio vértice. Note que  $|N(v_i)|$  é o grau de  $v$ . O menor grau dos vértices de um grafo  $G$  é o *grau mínimo* e denotamos por  $\delta(G) = \min\{d(v_i) : v_i \in V\}$ .

Já o maior grau é o *grau máximo* e denotamos por  $\Delta(G) = \max\{d(v_i) : v_i \in V\}$ . Na figura

<sup>2</sup>Sua notação é semelhante a  $|X|$  que é utilizada para cardinalidade, ou seja, representa o número de elementos de um conjunto  $X$ . Assim, se  $X$  representa um conjunto de vértices,  $|X|$  é a quantidade de vértices de  $X$ ; se  $X$  representa um conjunto de arestas,  $|X|$  é a quantidade de arestas de  $X$ .

2.2 temos  $d(u) = d(v) = 2$ ,  $d(w) = 3$ ,  $d(x) = 4$  e  $d(y) = 1$ . Assim,  $\delta(G) = d(y) = 1$  e

$$\Delta(G) = d(x) = 4.$$

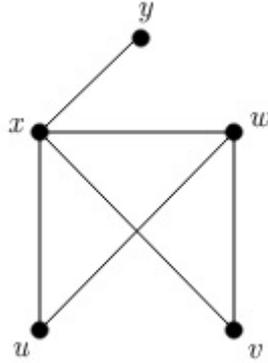


Figura 2.2: Grau máximo e grau mínimo

Vejam os exemplos a seguir e, a partir deles, exploraremos alguns dos conceitos trabalhados anteriormente.

**Exemplo 1** *Uma escola resolveu realizar um campeonato de futebol. Participaram do campeonato as seis turmas do 1º ano que denotamos por A, B, C, D, E e F. Até o presente momento somente alguns dos jogos foram realizados. Vejamos:*

*A turma do 1º A jogou com as turmas B, C, D e E.*

*A turma do 1º B jogou com as turmas A, C e D.*

*A turma do 1º C jogou com as turmas A e B.*

*A turma do 1º D jogou com as turmas A, B e E.*

*A turma do 1º E jogou com as turmas A e D.*

*A turma do 1º F ainda não jogou.*

Podemos representar a situação descrita acima por meio de um grafo no qual as equipes (ou as turmas) são os vértices e os jogos entre essas equipes são as arestas, conforme a figura 2.3.

Note que  $d(A) = 4$ ,  $d(B) = d(D) = 3$ ,  $d(C) = d(E) = 2$  e  $d(F) = 0$ , assim, temos

$$d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) + d(F) = 14 \text{ que é um número par.}$$

Na teoria dos grafos é possível construir grafos a partir de outros grafos. Para isso, podemos fazer operações como adição e subtração envolvendo conceitos de grafos, conforme definiremos a seguir.

Seja  $G = (V, E)$  e  $e \in E$ , denota-se por  $G - e$  o grafo obtido pela remoção (exclusão) da aresta  $e$  do grafo  $G$ . Analogamente,  $v \in V$ , denota-se  $G - v$  o grafo obtido pela remoção do vértice  $v$  do grafo  $G$ . De maneira semelhante, podemos incluir uma aresta e/ou vértice em um grafo.

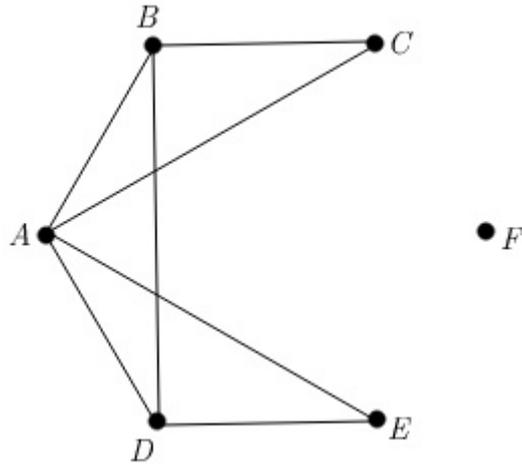


Figura 2.3: Jogos na escola

Assim, denota-se por  $G + e$  o grafo obtido pela inclusão da aresta  $e$  ao grafo  $G$ ; da mesma forma, denota-se  $G + v$  o grafo obtido pela inclusão do vértice  $v$  ao grafo  $G$ .

Na figura 2.4, temos um grafo  $G$  e outros grafos que foram produzidos pela remoção ou adição de vértices e/ou arestas ao grafo  $G$ . Note que a remoção de um vértice exclui automaticamente todas as arestas que incidem nele, visto que uma aresta é determinada por seus dois vértices extremos.

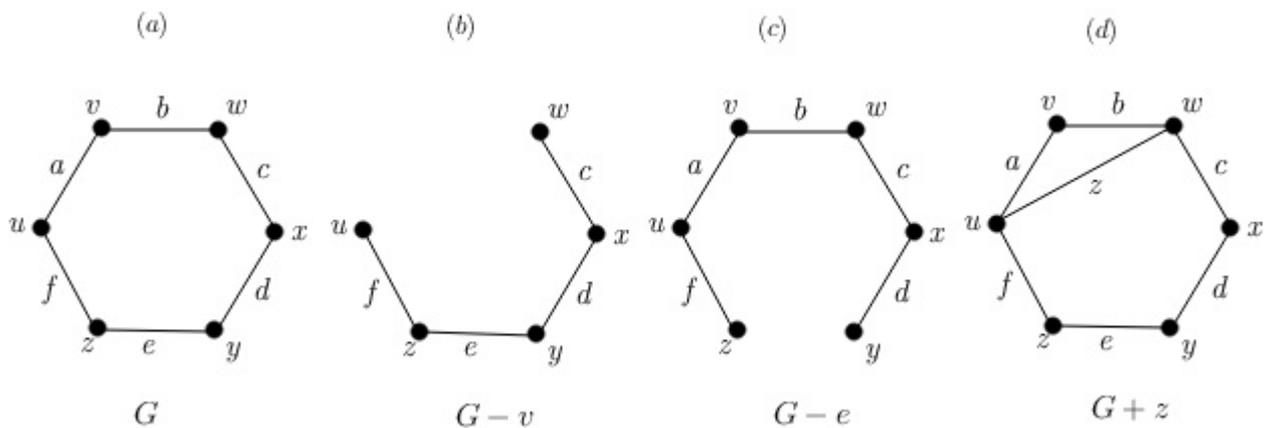


Figura 2.4: (a) Grafo  $G$ . (b) Remoção do vértice  $v$ . (c) Remoção da aresta  $e$ . (d) Adição da aresta  $z = uw$ .

A união de dois grafos simples  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo  $G = G_1 \cup G_2$  onde o conjunto dos vértices é  $V(G_1) \cup V(G_2)$  e o conjunto das arestas é  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . Se  $G_1$  e  $G_2$  são disjuntos a união é chamada união disjunta. A interseção de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  é definida de maneira análoga.

Além destas operações, há outras operações envolvendo grafos, por exemplo produto cartesiano, dentre outras, que podem ser encontradas em [9], [15], [19] e [18]. A figura 2.5

mostra a união e a interseção de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ .

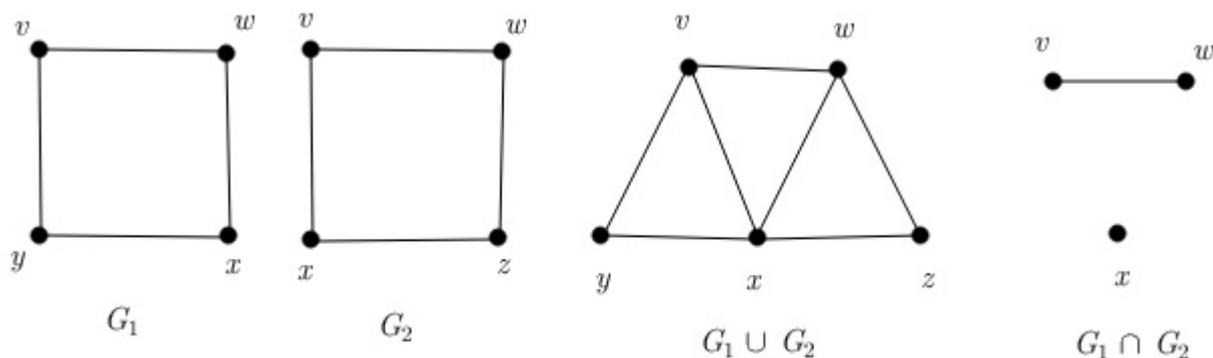


Figura 2.5: União e Interseção de dois grafos.

Dentre os grafos da figura 2.4, dizemos que os grafos  $G - v$  e  $G - e$  são subgrafos de  $G$ , uma vez que um grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  é dito *subgrafo* de  $G = (V, E)$  se  $V_1 \subseteq V$  e  $E_1 \subseteq E$ . Em outras palavras,  $G_1$  é subgrafo de  $G$  se ele pode ser obtido através da remoção de arestas ou da remoção de vértices de  $G$ . Se  $V = V_1$  o subgrafo  $G_1$  é dito *subgrafo gerador* de  $G$ . Se  $V_1 \subseteq V$  denotamos por  $G[V_1] = (V_1, \{v_i v_j \in E | v_i v_j \in V_1\})$  o *subgrafo de  $G$  induzido* por  $V_1$ . O subgrafo  $G[V_1]$  de  $G$  possui exatamente as arestas de  $E$  que tem as duas extremidades em  $V_1$ . Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é dito *próprio* se  $V(H) \neq V(G)$  ou  $E(H) \neq E(G)$ .

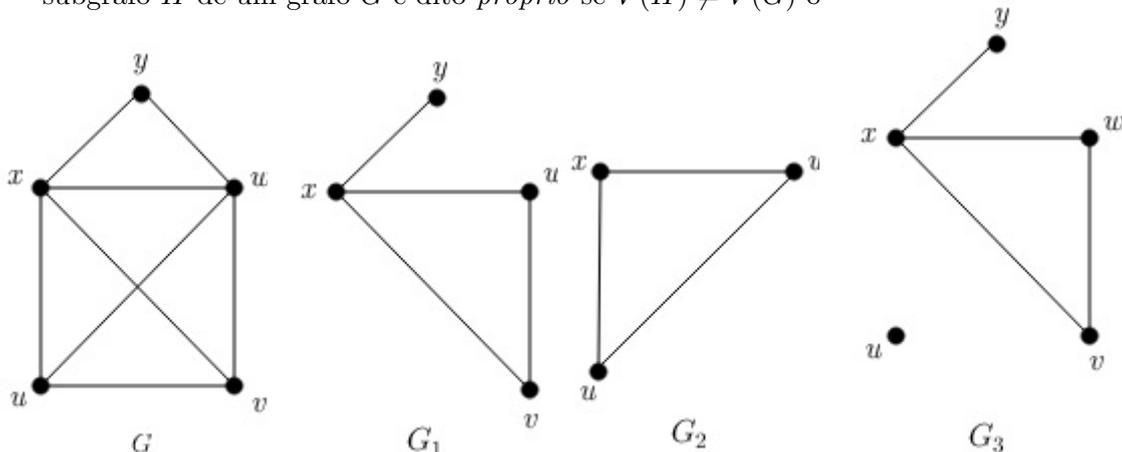


Figura 2.6: Grafo  $G$ . Subgrafo  $G_1$ . Subgrafo induzido  $G_2$ . Subgrafo gerador  $G_3$

Na figura 2.6 temos no item (a) um grafo, no (b) temos um subgrafo desse grafo que foi obtido pela remoção de vértices e arestas. No item (c) temos um subgrafo induzido pelos vértices  $u, w$  e  $x$ . Já no item (d), temos um subgrafo gerador, pois contém todos os vértices do grafo do item (a).

Um *grafo orientado* ou *digrafo*  $G = (V, E)$  é definido de forma semelhante a um grafo não-orientado, exceto pelo fato de que não vale simetria em relação ao par  $(u, v)$ , isto é, o  $\text{arco}(u, v) \neq (v, u)$ . Nos grafos orientados as arestas são chamadas de arcos. Um arco  $(u, v)$  (ou

simplesmente  $uv$ ) sai de  $u$  e entra em  $v$ . Em um grafo orientado, os vértices têm *grau de saída* e *grau de entrada*. O grau de saída é o número de arcos que sai de um determinado vértice. O grau de entrada é o número de arcos que entra em determinado vértice. Em um vértice  $v$  denotamos o grau de entrada por  $d^+(v)$  e o grau de saída por  $d^-(v)$ .

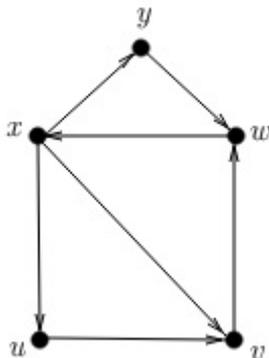


Figura 2.7: Grafo Orientado

Por exemplo, na figura 2.7 temos  $d^+(v) = 2$  e  $d^-(v) = 1$ .

No próximo exemplo temos uma situação que envolve grafo orientado que pode ser trabalhado no Ensino Básico. Esse problema está relacionado com a disciplina Biologia e foi retirado da prova da Olimpíada Paulista de Matemática - OPM.

**Exemplo 2** (OPM - 2012) *O DNA é feito de uma sequência de quatro nucleobases (A, C, T, G) como, por exemplo, TCATCTGTCACGTCGAT. Os padrões nas cadeias de DNA são usados para identificar criminosos, testes de paternidade, estudar doenças e criar curas para elas. É fácil obter DNA de qualquer parte do corpo humano, como saliva ou cabelo. Sendo as cadeias de DNA longas, é difícil ler a sequência, e cientistas procuram constantemente técnicas para realizar essa tarefa.*

*Uma das técnicas é baseada na placa sequenciadora de DNA. Ela interage com a amostra de DNA e destaca as sequências de tamanho três que aparecem. Por exemplo, considere a placa a seguir, que exibe todas as sequências de três letras, de AAA a TTT. As casas destacadas indicam que as três letras aparecem consecutivamente na amostra:*

AAA	ACA	AGA	ATA	AAC	ACC	AGC	ATC
<b>AAG</b>	ACG	AGG	<b>ATG</b>	AAT	<b>ACT</b>	<b>AGT</b>	ATT
<b>CAA</b>	<b>CCA</b>	CGA	CTA	CAC	CCC	CGC	<b>CTC</b>
CAG	CCG	CGG	CTG	CAT	CCT	CGT	CTT
GAA	GCA	GGA	<b>GTA</b>	GAC	GCC	<b>GGC</b>	GTC
GAG	GCG	GGG	GTG	GAT	GCT	GGT	GTT
TAA	TCA	TGA	TTA	TAC	<b>TCC</b>	TGC	TTC
TAG	TCG	<b>TGG</b>	TTG	<b>TAT</b>	TCT	TGT	TTT

a) Para ajudar a descobrir a sequência, usamos um diagrama chamado grafo. Nele marcamos pontos, que representam as sequências de duas letras, e ligamos XY a YZ com uma flecha quando XYZ aparece destacado na placa (X, Y, Z não precisam ser distintos). Por exemplo, como AAG e AGT estão destacadas, fazemos uma flecha ligando AA a AG e outra ligando AG a GT.

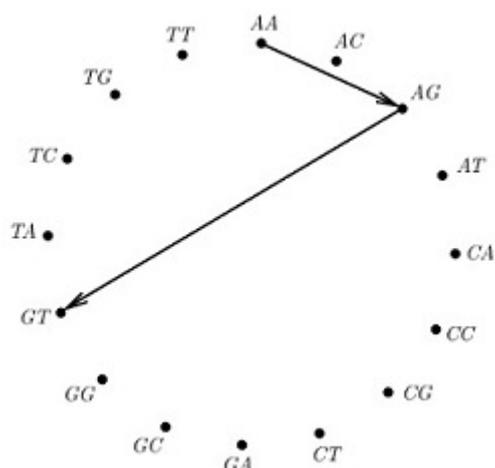


Figura 2.8: Grafo DNA (a)

Agora é a sua vez! Complete o grafo da figura 2.8.

**Solução:**

Note que o grafo utiliza apenas as sequências de três letras que estão destacadas na placa. O grafo solução segue abaixo na figura 2.9.

b) As flechas determinam um percurso formado por flechas consecutivas. Por exemplo, no grafo as flechas (2.10) formam o percurso TA-AG-GA-AA-AT-TG, e a sequência de DNA é TAGAATG.

Determine a sequência de DNA descrita na placa.

**Solução:**

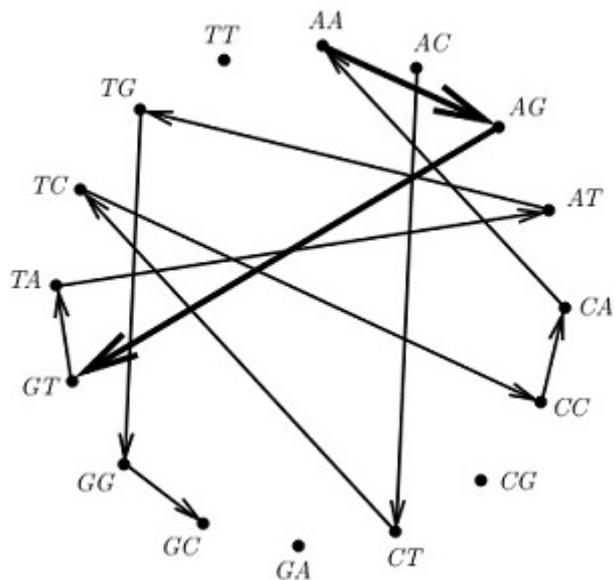


Figura 2.9: Grafo DNA (solução)

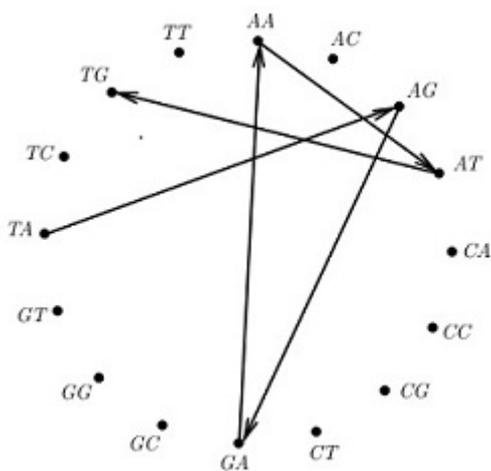


Figura 2.10: Grafo DNA (b)

De acordo com o item a, as flechas do grafo formam o percurso  $AC-CT-TC-CC-CA-AA-AG-GT-TA-AT-TG-GG-GC$ , cuja sequência de DNA é  $ACTCCAAGTATGGC$ .

Neste trabalho, temos como foco o estudo de grafos simples não-orientados. Assim, a partir desse ponto, quando utilizarmos o termo grafo, estamos nos referindo a grafo simples e não-orientado.

O exemplo seguinte ilustra uma situação em que é possível utilizar a ideia de grafos simples e não-orientados.

**Exemplo 3** Numa festa com 10 pessoas, algumas delas trocam apertos de mão. É possível que o número de apertos de mão tenha sido, em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7 e 8?

*Sugestão: Represente a situação considerando que cada pessoa corresponde a um vértice e ligue os vértices associados a pessoas que trocaram aperto de mão.*

**Solução:**

*Podemos modelar essa situação por meio de um grafo onde cada pessoa é representada por um vértice e cada aperto de mão entre duas pessoas é representado por uma aresta. Agora, é possível existir um grafo simples com 10 vértices de modo que os graus dos vértices, em determinada ordem, sejam iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7 e 8?*

*Vamos tentar construir esse grafo. Denotando os vértices por  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ , sem perda de generalidade, vamos fixar  $d(v_9) = 7$  e  $d(v_{10}) = 8$  (ver figura 2.11). Traçando as 8 arestas do  $v_{10}$  (linhas contínuas) temos que escolher um dos 9 vértices restantes para ter grau 7, digamos  $v_9$ . Dessa forma, pelo menos 7 vértices tem grau maior ou igual a 2. Agora vamos escolher o vértice que terá grau 6, digamos  $v_3$  (de acordo com a construção não poderia ser  $v_1, v_2, v_8, v_9$  e  $v_{10}$  pois três vértices devem ter grau 1). Com isso restam 4 vértices com grau 3 e dentre esses teríamos que escolher um para ter grau 4. Absurdo, pois os demais vértices não poderão receber mais arestas. Portanto, a situação descrita acima não é possível. Após o próximo teorema, faremos uma solução mais simples para esse problema.*

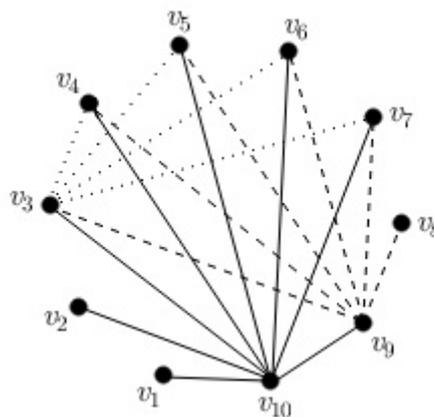


Figura 2.11: Apertos de mão

Vimos no grafo da figura 2.3 que soma dos graus de todos os vértices é 14, assim como no grafo da figura 2.1, a soma também é 14, ambos com um número par representando a soma dos graus. Isso não é uma simples coincidência, conforme mostra o teorema a seguir.

**Teorema 2.1.1**  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$  para todo grafo  $G = (V, E)$ .

**Prova:**

*Cada aresta possui duas extremidades, portanto ao somarmos os graus de todos os vértices contamos cada aresta duas vezes. Assim, a soma de todos os graus de um grafo é o dobro do*

número de arestas.

Agora, de maneira mais simples, podemos responder que não é possível a situação do exemplo

3 . Basta observar que a soma dos graus de todos os vértices é

$1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 37$ . Absurdo, pois pelo teorema 2.1.1 essa soma tem que ser par.

**Corolário 1** *Em qualquer grafo  $G$  o número de vértices com grau ímpar é par.*

**Prova:**

*Seja  $G$  um grafo. Se  $G$  tem apenas vértices com grau par o resultado é imediatamente verdadeiro.*

*Suponha que  $G$  tem  $k$  vértices ( $k \geq 1$ ) com grau ímpar denotados por  $u_1, u_2, \dots, u_k$  e  $p$  vértices de grau par denotados por  $v_1, v_2, \dots, v_p$ . Observe que cada um dos números  $d(u_1), d(u_2), \dots, d(u_k)$  é ímpar e cada um dos números  $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)$  é par. Assim, pelo teorema 2.1.1 temos que:*

$$(d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_k)) + (d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_p)) = 2m$$

$$(d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_k)) = 2m - (d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_p))$$

$$\text{como } (d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_p)) = 2q \quad (q \in \mathbb{N}) \text{ segue que}$$

$$(d(u_1) + d(u_2) + \dots + d(u_k)) = 2m - 2q = 2(m - q)$$

*Donde concluímos que a soma de todos os graus dos vértices de grau ímpar é par. Portanto,  $k$  é par. Assim, o número de vértices com grau ímpar é par.*

Vejamos a seguir um exemplo que ilustra o Corolário 1.

**Exemplo 4** *Uma turma tem 30 alunos. É possível que 9 deles tenham 3 amigos cada (na turma), onze tenham 4 amigos e dez tenham 5 amigos?*

**Solução:**

*Se a situação descrita acima existir, podemos representá-la por meio de um grafo com 30 vértices, representando os alunos e as arestas representando a relação de amizade entre esses alunos.*

*Assim, 9 desses vértices teria grau 3, onze teria grau 4 e 10 teria grau 5. Porém, teríamos 19 vértices todos com grau ímpar contradizendo o corolário 1. Logo, essa situação não existe.*

Os objetos matemáticos discutidos até aqui são relativamente simples e bastante úteis na solução de vários problemas que, em geral, não parecem estar relacionados com grafos. Essas ideias elementares mostram como esses problemas podem ser modelados e resolvidos por meio de grafos. Na sala de aula é interessante que o professor primeiro discuta com os alunos a

solução desses problemas (sem usar grafos) e, posteriormente, introduza conceito de grafo bem como o teorema 2.1.1.

Em alguns casos, os alunos conjecturam o teorema 2.1.1 logo após conhecerem o conceito de grafo e resolverem alguns problemas relacionados ao mesmo. Dessa forma, conforme preconizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, os alunos serão estimulados a formular hipóteses, prever resultados, fazer e validar conjecturas, discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Sempre que possível, é interessante o professor voltar à demonstração do teorema 2.1.1 na solução dos problemas, em vez de simplesmente usá-lo, esse conceito é muito útil na solução de diversos problemas envolvendo grafos.

Outro conceito que contribui de maneira significativa na solução de diversos problemas que envolvem grafos é a sequência de graus de um grafo. A *sequência de graus* de um grafo simples é a lista dos graus dos vértices de  $G$  em ordem não-crescente. A figura 2.12 tem a sequência de graus  $(4, 4, 3, 3, 2)$ .

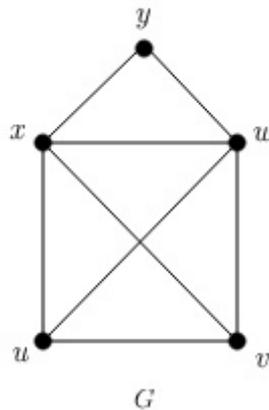


Figura 2.12: Sequência de graus (a)

Nem sempre uma sequência de inteiros não-negativos representa uma sequência de graus de um grafo simples. Por exemplo, a sequência  $(6, 5, 3, 2, 1)$  não é sequência de graus de um grafo simples pois tem três vértices com grau ímpar e não satisfaz ao corolário 1. Já a sequência  $(3, 3, 3, 2, 1, 0)$  representa uma sequência de graus de um grafo simples (ver o grafo na figura 2.13).

Assim, podemos questionar: Qual ou quais são as condições necessárias para que uma sequência de inteiros não negativos represente uma sequência de graus de um grafos simples?

O teorema a seguir responde a essa questão.

**Teorema 2.1.2** *Dado um grafo simples  $G = (V, E)$  onde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$  é uma sequência de graus de  $G$ . São condições necessárias para que uma sequência de números*

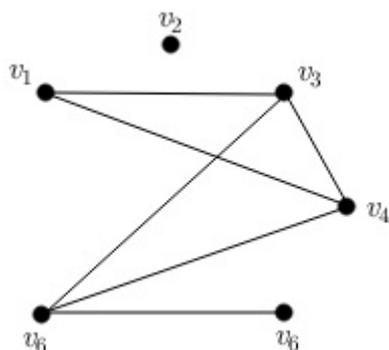


Figura 2.13: Sequência de graus (b)

naturais represente uma sequência de graus de um grafo:

1.  $\sum_{i=1}^n d_i$  é par.
2.  $d(v_i) \leq n - 1$  para  $1 \leq i \leq n$
3. Pelo menos dois vértices tem o mesmo grau.

**Prova:**

1. Pelo teorema 2.1.1
2. Em um grafo simples cada vértice está ligado a, no máximo,  $n - 1$  outros vértices. Isso porque não há laços nem arestas múltiplas.
3. O grafo tem  $n$  vértices. Vamos supor que dois desses vértices não tenham o mesmo grau. Por 2, temos que os graus dos vértices devem ser  $(n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 3, 2, 1, 0)$ . Assim, o vértice de grau  $n - 1$  deve estar ligado a todos os outros vértices, inclusive ao vértice de grau 0. Absurdo!

É importante destacar que essas condições não são suficientes. Podemos ter uma sequência de graus que atenda a todas as condições do teorema 2.1.2 mas que não representa a sequência de graus de um grafo. Por exemplo, a sequência  $(5, 3, 4, 2, 2, 0)$  atende às condições do teorema 2.1.2, mas não representa a sequência de graus de um grafo, pois o grafo tem 6 vértices sendo que um deles tem grau 5 e outro tem grau 0. O vértice que tem grau 5 será adjacente de todos os outros, mas um dos outros vértices tem grau zero. Absurdo.

Esse teorema é importante para mostrar que determinada situação-problema não é possível.

As duas situações-problemas seguintes foram adaptadas do livro do Fomin (ver [17]) e são facilmente resolvidas utilizando o teorema 2.1.2.

**Exemplo 5** Uma sala de aula tem 15 alunos. É possível que cada um deles seja amigo de 7 colegas de turma?

**Solução:**

*Resposta: Não. Modelando a situação por meio de um grafo onde cada vértice representa um aluno e cada aresta a amizade entre dois alunos, temos que cada um dos 15 vértices tem grau 7 e a sequência de graus do grafo é (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7). Daí, a soma dos graus é  $15 \cdot 7 = 105$ , que é ímpar. Absurdo, pois contraria o item 1 do teorema 2.1.2 ou o teorema 2.1.1.*

**Exemplo 6** *Em um determinado mapa há 9 cidades e algumas estradas interligando somente algumas dessas 9 cidades. É possível uma cidade estar conectada a 8 outras, uma a 7 outras, uma a 6 outras, uma a 5 outras, uma a 4 outras, uma a 3 outras, uma a 2 outras, uma a 1 outra e uma a nenhuma das outras?*

**Solução:**

*Resposta: Não. Modelando a situação por meio de um grafo onde cada vértice representa uma cidade e cada aresta uma estrada que liga duas dessas cidades temos que a sequência de graus do grafo é (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0). A sequência de graus do grafo atende aos itens 1 e 2 mas não atende ao item 3 do teorema 2.1.2. Portanto, a situação descrita acima não existe.*

O próximo exemplo foi retirado da OPM. Para resolvê-lo necessitamos dos conceitos básicos de grafos e um pouco de criatividade.

**Exemplo 7 (OPM)** *Na Petersonlândia, o sistema de linhas aéreas está distribuído de tal forma que de qualquer cidade saem vôos diretos para três outras cidades e de cada cidade é possível viajar para qualquer outra fazendo no máximo uma escala. A empresa Alfa-Tur é quem organiza os vôos e utiliza o seguinte mapa:*

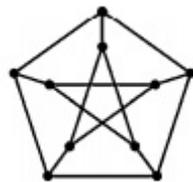


Figura 2.14: Grafo Petersonlândia

*É possível adotar o mesmo sistema de linha aéreas para onze ou mais cidades?*

**Solução:**

*Vamos modelar a situação por meio de um grafo onde os vértices representam as onze cidades e as arestas representam as linhas aéreas (vôos). Assim, todo vértice desse grafo tem grau 3. Como o grafo teria onze vértices cuja soma dos graus seria 33. Absurdo, pois pelo teorema 2.1.1 essa soma tem que ser par. Logo, o sistema não é possível para onze cidades.*

*Note que o sistema também não é possível para uma quantidade ímpar de cidades, pois a soma dos graus de todos os vértices seria sempre ímpar. Para concluir a solução bastaria testar para*

todas as quantidades pares de cidades (maiores que 11). Porém, testar todas as quantidades pares de cidades maiores que 11 não parece uma boa estratégia. Assim, vamos modelar o problema por meio de um grafo onde cada vértice representa uma cidade e cada aresta um vôo entre duas cidades, conforme a figura 2.15. Note que os vértices  $u$ ,  $v$ ,  $x$  e  $w$  tem grau 3. Assim, para incluir outro vértice, digamos  $z$ , este tem que estar ligado a um dos vértices que estão na elipse pontilhada (pois são os únicos que não têm grau 3). Dessa forma, para viajar de  $u$  até  $z$  teríamos que fazer, no mínimo, duas escalas. Absurdo. Logo, o sistema não é possível para onze ou mais cidades.

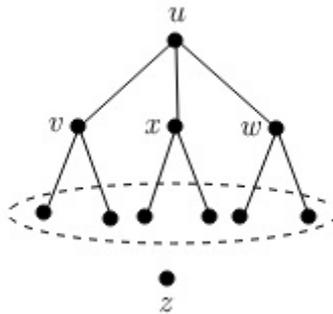


Figura 2.15: Grafo das cidades

Após os conceitos iniciais de grafos e a resolução de alguns problemas, vamos avançar um pouco mais na teoria com o conceito de isomorfismo.

Em quase todos os ramos da matemática é importante saber quando dois objetos são “iguais”.

Por exemplo, as frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{10}{20}$ ,  $\frac{50}{100}$ , são “iguais” ou pertencem a uma mesma classe de equivalência. Em grafos não é diferente, existem condições para que dois grafos sejam “iguais”. Dois grafos que representam uma mesma situação são formalmente chamados *grafos isomorfos*.

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos, e denotamos por  $G_1 \cong G_2$ , se existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos de vértices que preserva a relação de adjacência (isto é, dois vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $G_1$ , se e somente se, suas imagens são adjacentes em  $G_2$ ). Ou

seja, dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  são isomorfos, se existe uma bijeção  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ , tal que  $v_i v_j$  é uma aresta de  $G_1$  se, e somente se,  $\phi(v_i) \phi(v_j)$  é uma aresta de  $G_2$ .

Esta bijeção  $\phi$  é chamada isomorfismo de  $G_1$  em  $G_2$ . Um *automorfismo* de um grafo é um isomorfismo do grafo nele mesmo. Nos grafos simples, um automorfismo é apenas uma permutação do conjunto de vértices que preserva adjacência. Note que grafos isomorfos podem ter vértices (e arestas) com nomes distintos. Deste modo, de fato, não são iguais. Isto explica o uso das aspas anteriormente.

Na figura 2.16 verifique que os grafos de vértices  $(u, v, w, x, y)$  e  $(1, 2, 3, 4, 5)$  não são idênticos, mas representam estruturas idênticas, pois têm a mesma quantidade de vértices, de arestas e

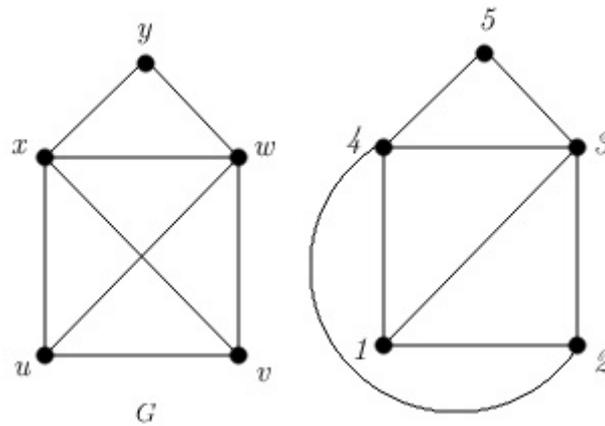


Figura 2.16: Grafos Isomorfos

preserva a adjacência. Portanto, são isomorfos.

Claramente, dois grafos isomorfos têm mesma ordem e mesmo tamanho, ou seja, têm o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas. Além disso, os vértices correspondentes têm o mesmo grau. Condições que não se alternam entre grafos isomorfos são denominadas invariantes sob isomorfismo. Convém observar que essas condições são necessárias, mas não são suficientes para garantir que dois grafos sejam isomorfos. Na literatura atual não há uma lista de invariantes suficientes para garantir que dois grafos sejam isomorfos.

Podemos observar na figura 2.17 que os grafos  $G_1$  e  $G_2$  têm mesmo número de vértices, mesmo número de arestas, mesma sequência de graus, mas não são isomorfos. Note que, em  $G_1$ , os vértices que têm grau 3 ( $v_4$  e  $v_5$ ) são adjacentes, mas não são adjacentes em  $G_2$  ( $x_3$  e  $x_7$ ).

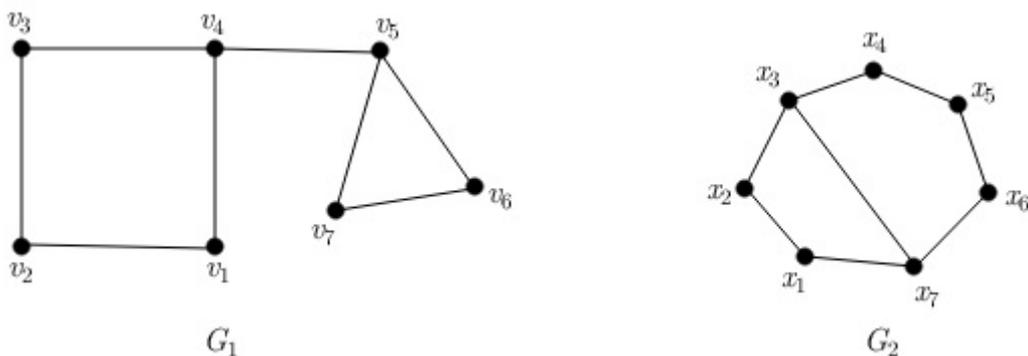


Figura 2.17: Grafos não isomorfos

Concluir se dois grafos são isomorfos, em geral, requer testar uma quantidade muito grande de possibilidades. Se o grafo tem um número elevado de vértices e arestas, essas possibilidades chegam rapidamente a números astronômicos. Dessa forma, necessitamos do auxílio do computador para resolvê-los.

Porém, os grafos usualmente são representados por desenhos que ao serem introduzidos em um

software como imagem perdemos as relações entre arestas e vértices, o que gera a necessidade de usar outros mecanismos para que os grafos sejam reconhecidos pelo software. Diante disso, podemos utilizar matrizes para introduzir nos softwares as informações contidas nos desenhos que representam os grafos uma vez que esses são completamente determinados por seu conjunto de vértices e pelo conhecimento dos pares de vértices adjacentes. Assim, apesar de perdermos o aspecto visual dos grafos ao trabalharmos com matrizes, pois a representação não é por meio de diagramas, destacamos as matrizes como importante ferramenta no estudos dos grafos.

As informações dos desenhos que representam os grafos podem ser dadas facilmente através de matrizes visto que um grafo é completamente determinado por seu conjunto de vértices e pelo conhecimento dos pares de vértices adjacentes. Muitos problemas da Teoria dos Grafos podem ser investigados com esse importante objeto matemático que são as matrizes. Aqui usamos dois tipos de matrizes: matriz de adjacência e matriz de incidência.

A *matriz de adjacência* de um grafo de ordem  $n$  é a representação matricial de sua relação de adjacência. Ou seja, em um grafo  $G = (V, E)$  a matriz de adjacência  $A_G := a_{uv}$ ,  $n \times n$ , onde  $a_{uv}$  é o número de arestas que une os vértices  $u$  e  $v$ , ou seja,

$$a_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se existe aresta entre } u \text{ e } v, \text{ e} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A *matriz de incidência* de um grafo é a representação matricial de sua relação de incidência.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $V = v_1, v_2, \dots, v_n$  e  $E = e_1, e_2, \dots, e_m$ . Então a matriz de incidência de  $G$  é uma matriz  $M_G$ ,  $n \times m$ , tal que  $M_G := m_{ve}$ , onde  $m_{ve}$  é o número de vezes que um vértice  $v$  e uma aresta  $e$  são incidentes, ou seja,

$$m_{ve} = \begin{cases} 0, & \text{se } v \text{ não é incidente em } e, \\ 1, & \text{se } v \text{ incide em } e. \end{cases}$$

A seguir temos um grafo  $G$ , figura 2.18, e matrizes de incidência e adjacência associadas a  $G$ .

	a	b	c	d			u	v	x	w
u	1	0	1	1		u	0	1	1	1
v	1	1	1	0	e	v	1	0	1	1
x	0	1	1	0		x	1	1	0	0
w	0	0	1	1		w	1	1	0	0

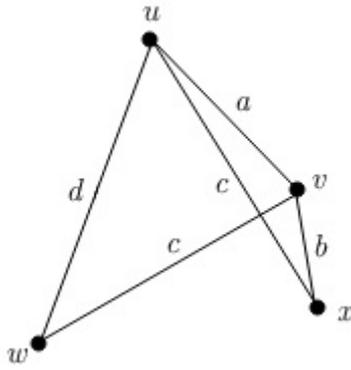


Figura 2.18: Grafo para matrizes de Incidência e Adjacência.

Assim, uma das matrizes de incidência e adjacência, respectivamente, são:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ocasionalmente, quando não houver ambiguidades, denotamos a matriz de adjacência por  $A$  e a matriz de incidência por  $M$ . Como a maioria dos grafos tem a quantidade de arestas bem maior que a quantidade de vértices, as matrizes de adjacência geralmente são menores que as matrizes de incidência. Na figura 2.19, temos dois grafos  $G$  e  $H$  e uma de suas respectivas matrizes de adjacência. Note que em um grafo simples todos os elementos da diagonal principal da matriz de adjacência são iguais a zero.

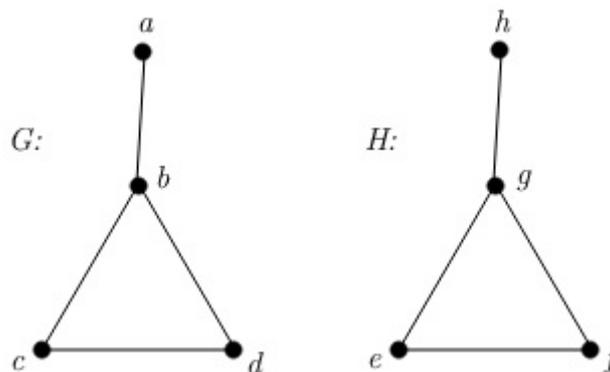


Figura 2.19: Matriz de Adjacência

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que um grafo qualquer pode ter várias matrizes de adjacência e de incidência, cada uma delas para cada ordem estabelecida para vértices e arestas do grafo. Se mudamos a ordem dos vértices podemos ter matrizes de adjacência e incidência diferentes, por exemplo, na figura 2.19 o grafo  $G$  é isomorfo ao grafo  $H$ . Porém, temos duas matrizes diferentes para  $A_G$  e  $A_H$ .

Nos grafos simples as matrizes de adjacência são simétricas.

É fácil verificar que, em um grafo qualquer, permutações diferentes nos vértices leva a troca de linhas na matriz de adjacência, enquanto que permutações diferentes nas arestas leva à troca de colunas na matriz de adjacência.

## 2.2 Tipos de Grafos ou Família de Grafos

Alguns tipos de grafos aparecem com bastante frequência em diversos problemas. Convém conhecê-los um pouco mais.

Um grafo é dito *completo* se todo par de vértices é ligado por uma aresta. Denotamos um grafo completo com  $n$  vértices por  $K_n$  ou  $n$ -*completo*. Em um grafo completo quaisquer dois vértices são adjacentes. Se todos os vértices de um grafo  $G$  têm o mesmo grau, digamos  $p$ , dizemos que  $G$  é *regular* de grau  $p$  ou é  $p$ -*regular*. Um grafo completo de ordem  $p$  é  $(p - 1)$ -regular. Na figura 2.20 temos que o grafo  $G$  representa um  $K_1$ , o  $H$  um  $K_2$ , o  $I$  um  $K_3$  e o  $J$  um  $K_5$ . Note que todo grafo completo é regular, mas a recíproca não é verdadeira. O conceito de grafo completo é aplicado a subgrafo induzido. Se  $G[V_1]$  é um grafo completo dizemos que  $V_1$  é um *clique*. Assim, clique é um subgrafo induzido completo. Na figura 2.21 temos um grafo  $G$  e um clique.

Usando argumentos de análise combinatória podemos determinar quantas arestas possui um grafo completo. Inicialmente, para o grafo ser completo, qualquer par de vértices possui uma aresta os conectando. Assim, de cada vértice saem  $n - 1$  arestas, como o grafo tem  $n$  vértices

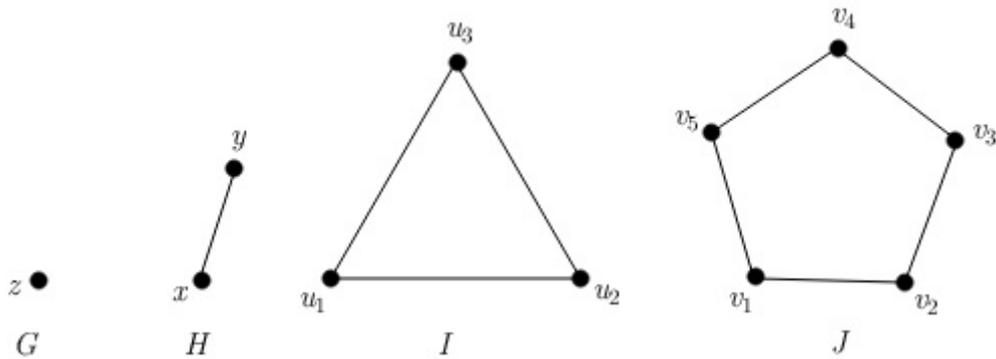


Figura 2.20: Grafos completos e regulares

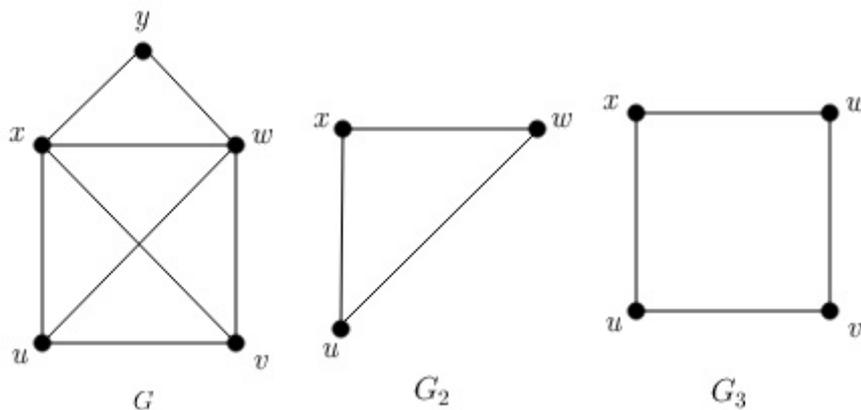


Figura 2.21: (a) Grafo  $G$ . (b) Subgrafo induzido (Clique). (c) Subgrafo que não é induzido.

pelo princípio fundamental da contagem, ele terá  $\frac{n(n-1)}{2}$  arestas (divido por 2 porque uma aresta  $v_i v_j = v_j v_i$ ).

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. O *complementar* de  $G$  é o grafo  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  tal que uma aresta  $e \in E$  se, e somente se,  $e \notin \overline{E}$ . Observe que o grafo  $G$  possui o mesmo número de vértices que o grafo  $\overline{G}$ , ou seja,  $V(G) = V(\overline{G})$ . Além disso,  $G \cup \overline{G}$  forma um grafo completo. Note que dois vértices são adjacentes em  $G$  se, e somente se esses dois vértices não são adjacentes em  $\overline{G}$ . No grafo dos jogos, figura 2.3 (página 15), seu complementar é o grafo com o mesmo conjunto de vértices, porém com as arestas que representam os jogos que faltam.

Na figura 2.22 o grafo  $\overline{G}$  é o complemento de  $G$  e vice-versa. Note que  $G \cup \overline{G}$  é um grafo simples completo com os vértices de  $G$ .

Um *passoio* em um grafo  $G = (V, E)$  é uma sequência, não-vazia,  $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$  onde  $v_i \in V$  para  $0 \leq i \leq k$ , e  $v_{j-1} v_j \in E$  para  $1 \leq j \leq k$ . Os vértices  $v_0$  e  $v_k$  são, respectivamente, *início* e *término* do passoio; os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  são chamados vértices *internos* de  $W$ . O *comprimento* de um passoio, denotado por  $W_k$ , é o número de arestas (incluindo as repetições) em  $W$ . O passoio que tem apenas um vértice é

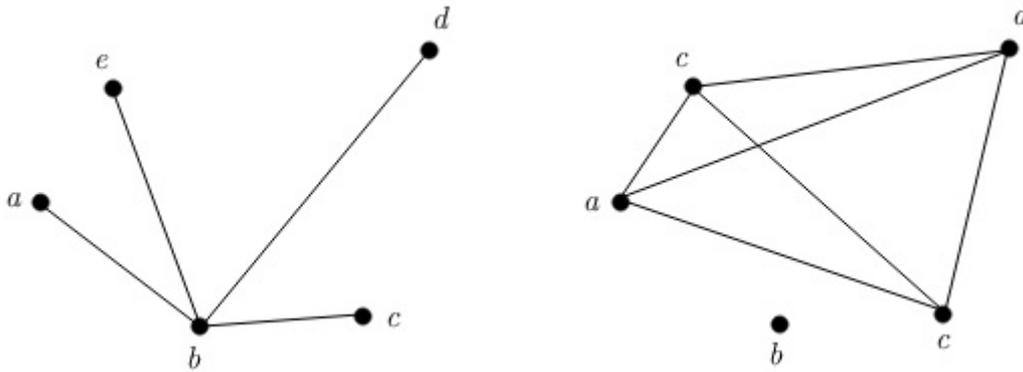


Figura 2.22: (a) Um grafo  $G$ . (b) O seu complemento  $\overline{G}$

chamado de *trivial* e seu comprimento é zero. Se o início e o término de  $W$  coincidem então  $W$  é dito *fechado*. Se o grafo é simples podemos definir o passeio somente pela sequência de seus vértices.

Dizemos que o passeio  $W$  *passa por*, ou *atravessa* cada uma das arestas  $e_1, e_2, \dots, e_k$  e que *visita* os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$ . Observe que a mesma aresta e/ou mesmo vértice podem ocorrer mais de uma vez, um vértice pode ser simultaneamente início, término e interno ao passeio. Um vértice  $u$  de  $G$  é *ligado* a um vértice  $v$  de  $G$  se existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$ .

Na figura 2.23, temos, por exemplo, o passeio  $(x, e_3, y, e_4, w, e_7, u, e_2, x, e_3, y)$ .

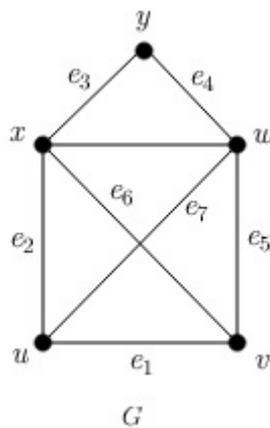


Figura 2.23: Passeios

Se, em um passeio as arestas  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  são duas a duas distintas, esse passeio é chamado *trilha*. Convém observar que uma trilha pode repetir seus vértices. Se  $W$  é uma trilha fechada de comprimento não-nulo e se os vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  forem dois a dois distintos, exceto  $v_0 = v_k$ , então  $W$  é um *circuito* ou *ciclo*. Na figura 2.23, temos, por exemplo, o ciclo

$$(x, e_3, y, e_4, w, e_7, u, e_2, x).$$

Em um passeio, se os vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  forem dois a dois distintos esse passeio  $P$  é

chamado *caminho*. Observe que  $P$  não repete arestas, portanto, todo caminho também é uma trilha. O número de arestas de  $P$  é o *comprimento* do caminho; um caminho de comprimento  $k$  é denotado por  $P_k$ . Note que  $k$  pode ser igual a zero, nesse caso,  $P_0 = K_1$ . Um caminho de comprimento  $k$  passa por exatamente  $k + 1$  vértices distintos e tem  $k - 1$  vértices internos. Na

figura 2.23, temos, por exemplo, o caminho  $(x, e_3, y, e_4, w, e_7, u, e_1, v)$ .

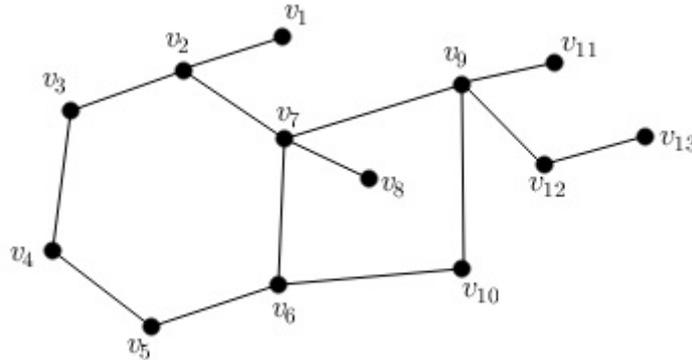


Figura 2.24: Ciclo

A *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  em um grafo  $G$  é o menor dos comprimentos dos passeios de  $u$  a  $v$  em  $G$ ; se em  $G$  não há um passeio de  $u$  a  $v$  dizemos que a distância de  $u$  a  $v$  é infinita. A *cintura* de um grafo  $G$  é o comprimento do menor circuito em  $G$ ; se não houver circuito em  $G$  a cintura é infinita. O *diâmetro* em um grafo  $G$  é a maior das distâncias entre vértices de  $G$ .

Na figura 2.24, a distância entre os vértice  $v_3$  e  $v_7$  é 2. A cintura do grafo da figura 2.24 é 4.

Os ciclos tem aplicações interessantes e desafiadoras, por exemplo, em problemas extremais sobre grafos. Uma dessas aplicações é saber quantas arestas, no máximo, um grafo pode ter de maneira que não tenha ciclo de comprimento 4. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 8** Na terra de Oz há  $n$  castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos  $A, B, C$  e  $D$  tais que  $A$  e  $B, B$  e  $C, C$  e  $D$  e  $D$  e  $A$  estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a  $\frac{n(1 + \sqrt{4n - 3})}{4}$ .

**Solução:**

Vamos modelar a situação por meio de um grafo onde cada castelo é representado por um vértice e cada estrada por uma aresta. Devemos encontrar qual é o número máximo de arestas que um grafo com  $n$  vértices pode ter de modo que não haja ciclo de comprimento 4.

Note que só há problema para  $n \geq 4$ , pois se o grafo tem menos de 4 vértices não há ciclo de

comprimento 4. Por exemplo, um grafo com 5 vértices, conforme figura 2.25, o número máximo de arestas é 6. Note que a inclusão de mais uma aresta gera no grafo um ciclo de comprimento 4.

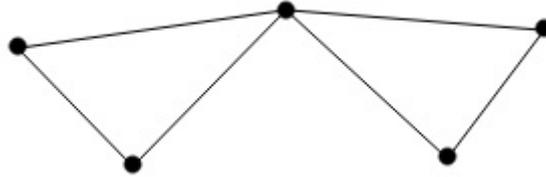


Figura 2.25: Terra do Oz para cinco castelos.

Observe que em um grafo  $G$  sem ciclo de comprimento 4 se  $u$  e  $v$  são vértices distintos não pode haver par de vértices que seja adjacente a  $u$  e a  $v$ . Na figura 2.26, todos os vértices que estão dentro da elipse tracejada são adjacentes ao vértice  $v$  e conectando quaisquer par deles com o vértice  $u$  (ver as arestas pontilhadas) teremos um ciclo de comprimento 4.

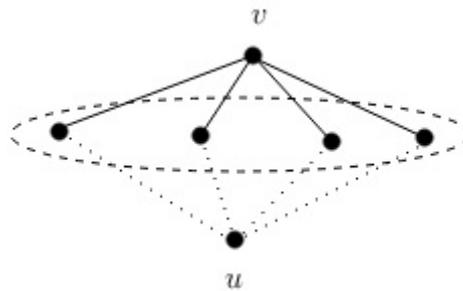


Figura 2.26: Grafo Terra do Oz

Assim, devemos contar quantos pares de arestas partem do vértice genérico  $v$ , ou seja, temos que contar quantas vezes ocorre o subgrafo 2.27.

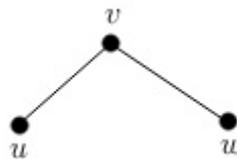


Figura 2.27: Subgrafo Terra do Oz

Denotando por  $X$  o conjunto desses pares de arestas, temos que  $|X| = \sum_{v_i \in V} \binom{d(v_i)}{2}$ . Como cada par de vértices  $\{u, w\}$  tem, no máximo, um vizinho em comum, concluímos que  $|X| \leq \binom{n}{2}$ . Em outras palavras, pares de estradas  $\leq$  pares de castelos. Daí, para todo vértice  $v_i \in V$  temos

$$\sum_{v_i \in V} \binom{d(v_i)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{v_i \in V} \left\{ \frac{d(v_i)[d(v_i) - 1]}{2} \right\} &\leq \frac{n(n-1)}{2} \\
\frac{1}{2} \sum_{v_i \in V} (d(v_i)[d(v_i) - 1]) &\leq \frac{1}{2}n(n-1) \\
\sum_{v_i \in V} (d(v_i)[d(v_i) - 1]) &\leq n(n-1) \\
\sum_{v_i \in V} \{ [(d(v_i))^2 - d(v_i)] \} &\leq n^2 - n \\
\sum_{v_i \in V} [d(v_i)]^2 - \sum_{v_i \in V} d(v_i) &\leq n^2 - n
\end{aligned}$$

Sabemos, pela desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, que dados  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  então  $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , ou seja,  $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}$ . Dessa forma,

$$\sum_{v_i \in V} [d(v_i)]^2 \geq \frac{[\sum_{v_i \in V} d(v_i)]^2}{n}$$

Daí,

$$\frac{[\sum_{v_i \in V} d(v_i)]^2}{n} - \sum_{v_i \in V} d(v_i) \leq n^2 - n$$

Como

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|A|$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{(2|A|)^2}{n} - 2|A| &\leq n^2 - n \\
4|A|^2 - 2n|A| - n(n^2 - n) &\leq 0
\end{aligned}$$

Resolvendo a inequação do 2º grau em  $|A|$ , temos:

$$4|A|^2 - 2n|A| - n(n^2 - n) = 0$$

$$\Delta = 4n^2(4n - 3)$$

Portanto,

$$|A| = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2(4n - 3)}}{8}$$

$$|A| = \frac{n}{4}(1 \pm \sqrt{4n - 3})$$

Logo,

$$\frac{n}{4}(1 - \sqrt{4n - 3}) \leq |A| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$$

Então,

$$|A| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3})$$

As ideias de ciclos, passeios, tipos de passeios e as ligações entre vértices costumam ser importantes para resoluções de muitos problemas.

Dizemos que um grafo é *Hamiltoniano* se o mesmo possui um circuito que visita todos os vértices. Um grafo é chamado *Euleriano* se possui trilha fechada que passa por todas as arestas.

Em um grafo  $G$  dois vértices  $u$  e  $v$  são ditos *conectados* se existe um caminho em  $G$  que liga  $u$  a  $v$ . Se para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  existe um caminho com extremidades  $u$  e  $v$  dizemos que o grafo é *conexo*. Caso contrário, o grafo é dito *desconexo*.

Uma *componente conexa* de um grafo é um subgrafo conexo maximal desse grafo, ou seja, é um subgrafo conexo que não é subgrafo próprio de outro subgrafo conexo. Um grafo conexo possui apenas uma componente conexa. Um grafo desconexo é formado por, no mínimo, dois subgrafos conexos. Observe na figura 2.28 que para quaisquer dois vértices existe um caminho que os conecta. Logo, esse grafo é conexo.

Uma aresta que quando removida aumenta o número de componentes conexas de um grafo  $G$  é chamada *ponte* ou *aresta de corte*. No grafo da figura 2.28 temos quatro arestas que são pontes ou arestas de corte:  $us$ ,  $rs$ ,  $yz$  e  $xy$ . Na figura 2.29 há dois grafos,  $G$  e  $H$ , que são desconexos.

O grafo  $G$  tem duas componentes conexas enquanto que o grafo  $H$  tem três.

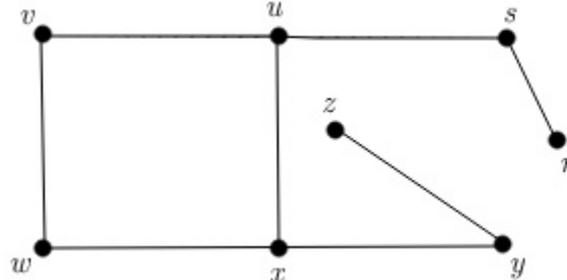


Figura 2.28: Grafo Conexo

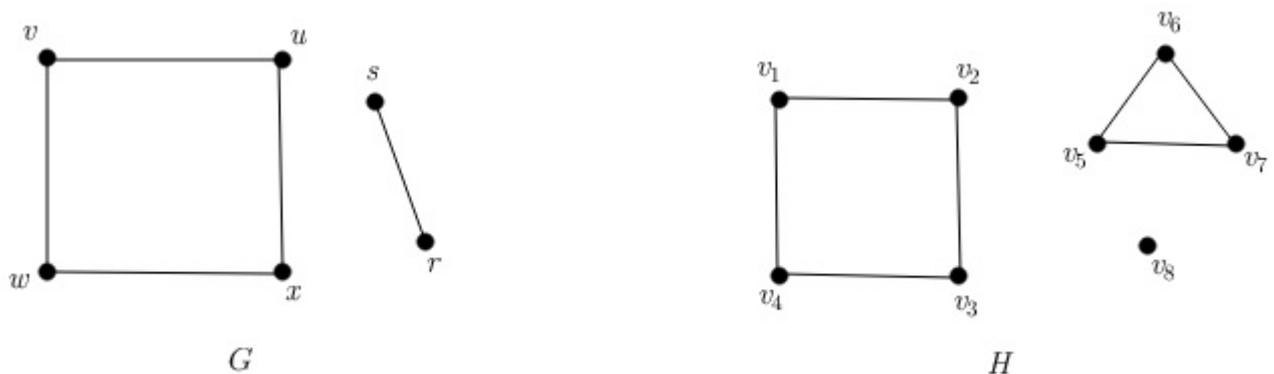


Figura 2.29: Grafos desconexos.

**Proposição 2.2.1** *Se existe um passeio em um grafo  $G$  com vértice inicial  $u$  e vértice final  $v$  então existe um caminho entre os vértices  $u$  e  $v$ .*

**Prova:**

Seja  $P = ua_0v_1a_1\dots v_ia_i\dots a_{j-1}v_ja_j\dots v$  um passeio de  $u$  para  $v$ . Se  $v_i = v_j$  podemos suprimir o passeio fechado intermediário obtendo um novo passeio  $P_1 = ua_0v_1a_1\dots v_ia_j\dots v$ . Repetindo essa operação enquanto houver vértices repetidos chegaremos a um caminho de  $u$  para  $v$ .

**Proposição 2.2.2** *Se  $G$  é um grafo onde todos os vértices tem pelo menos grau 2, então  $G$  contém um ciclo.*

**Prova:**

Em um grafo simples um caminho é determinado pela sequência de seus vértices. Seja  $P := v_0v_1v_2\dots v_{k-1}v_k$  o maior caminho em  $G$ . Como o grau de  $v_k$  é pelo menos 2, então  $v_k$  tem um vizinho  $v$  diferente de  $v_{k-1}$ . Se  $v$  não pertence a  $P$ , o caminho  $v_0v_1v_2\dots v_{k-1}v_kv$  contradiz a hipótese de que  $P$  é o maior caminho em  $G$ . Dessa forma,  $v = v_i$ , para algum  $i$  tal que  $0 \leq i \leq k - 2$  e  $v_iv_{i+1}v_{i+2}\dots v_k$  é um ciclo em  $G$ .

Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos como subgrafos. Como a árvore não possui ciclos é a maneira mais econômica de conectar os vértices. Um grafo cujas componentes conexas são árvores é chamado de *floresta*. Numa árvore (ou floresta) um vértice de grau 1 é chamado *folha*. Na figura 2.30  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  são árvores.

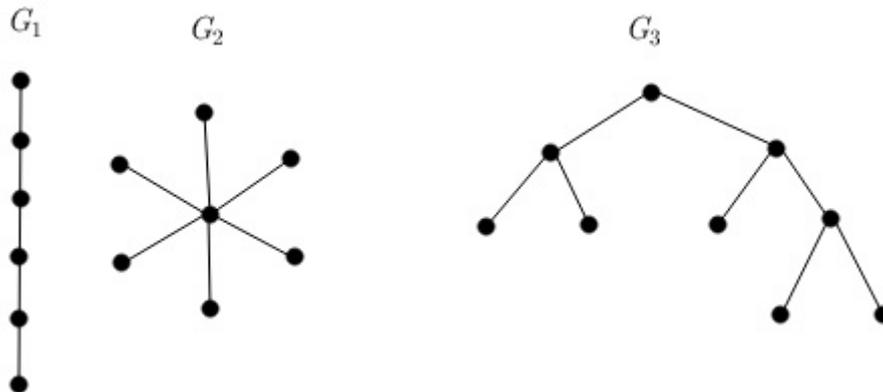


Figura 2.30: Três Árvores

**Teorema 2.2.3** *Seja  $G$  um grafo simples com  $n$  vértices. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $G$  é uma árvore;
- (ii)  $G$  não contém ciclos e tem  $n - 1$  arestas;
- (iii)  $G$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas;

- (iv)  $G$  é conexo e toda aresta é uma ponte;
- (v) Todo par de vértices de  $G$  é ligado por um único caminho;
- (vi)  $G$  não contém ciclos mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

**Prova:**

Para  $n = 1$  podemos facilmente verificar que os seis resultados são válidos, dessa forma, vamos assumir que  $n \geq 2$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Por hipótese,  $G$  é uma árvore. Pela definição de árvore  $G$  não contém ciclos. Daí, a retirada de uma aresta  $uv$  separa o vértice  $u$  do vértice  $v$  e, conseqüentemente, o grafo é suparado em duas árvores  $G_1$  e  $G_2$  com  $n_1$  e  $n_2$  vértices, respectivamente, de forma que  $n = n_1 + n_2$ . Por indução, o número de arestas de  $G_1$  é  $n_1 - 1$  e o número de arestas de  $G_2$  é  $n_2 - 1$ . Acrescentando a aresta  $uv$  temos novamente o grafo  $G$  cujo número de arestas é  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Por hipótese,  $G$  não contém ciclos. Suponha que  $G$  seja desconexo, como não contém ciclos cada componente conexa é uma árvore. Se cada componente tem  $n_i$  vértices, por indução, terá  $n_i - 1$  arestas. Assim, o número total de arestas de  $G$  é menor que  $n - 1$ . Absurdo.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv)

Como  $G$  é conexo e tem  $n - 1$  arestas, a retirada de uma aresta desconecta o grafo, pois  $n - 2$  arestas são insuficientes para conectar os  $n$  vértices do grafo. Logo, toda aresta é uma ponte.

(iv)  $\Rightarrow$  (v)

Suponha que em  $G$  existe mais de um caminho entre dois vértices. Então o grafo tem um clico e assim, há uma aresta que ao ser retirada não desconecta o grafo. Absurdo.

(v)  $\Rightarrow$  (vi)

Suponha que  $G$  tem um ciclo. Então há um par de vértices ligados por mais de um caminho. Absurdo. Logo,  $G$  não tem ciclos. Adicionado uma aresta  $uv$  ao grafo  $G$  temos três possibilidades: se  $u = v$  temos um laço, que é um ciclo; se  $u$  e  $u$  são adjacentes temos arestas paralelas, que é um ciclo; por fim,  $u$  e  $v$  estão conectados por um caminho único (hipótese) a adição da aresta  $uv$  produz um ciclo. Para mostrar que esse ciclo é único suponha que não seja, a retirada da aresta  $uv$  deixaria dois caminhos distintos entre  $u$  e  $v$ . Absurdo.

(vi)  $\Rightarrow$  (i)

Devemos mostrar que  $G$  é conexo. Suponha que  $G$  seja desconexo e sem ciclos, então uma aresta ligando duas componentes conexas não produz um ciclo. Absurdo.

Os três problemas seguintes envolvem conceitos de árvores bem como aplicações em otimização.

**Exemplo 9** Um país imaginário tem 30 cidades. Cada uma delas está ligada a cada uma das outras por uma única estrada. Qual é o número máximo de estradas que podem ser fechadas de modo que uma pessoa ainda possa chegar a qualquer cidade partindo de qualquer outra?

**Solução:**

Modelando a situação por meio de um grafo onde cada vértice representa uma cidade e cada aresta representa uma estrada que liga um par de vértices (ou um par de cidades). Note que cada estrada liga um par de cidades dentre as 30. Assim, o número total de estradas no país imaginário é  $\binom{30}{2}$ . Daí, temos que  $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ . Nosso propósito é reduzir a quantidade de arestas do grafo de maneira e deixar a menor possível e o grafo continue conexo, ou seja, temos que obter um subgrafo conexo e sem ciclos, ou seja, uma árvore. Pelo teorema 2.2.3 temos que essa árvore terá  $30 - 1 = 29$  arestas. Portanto, podemos fechar  $435 - 29 = 406$  estradas.

**Exemplo 10** (OPM)

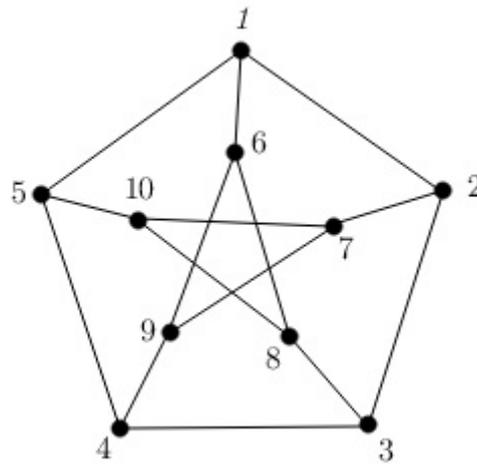


Figura 2.31: Grafo Polícia e Ladrão (a)

O jogo *Policiais e Ladrão* é disputado sobre um grafo. Há dois jogadores: um com um conjunto de policiais e um com um único ladrão. Na rodada zero, o jogador que comanda os policiais começa escolhendo os vértices que eles irão ocupar inicialmente e depois é a vez de o jogador que comanda o ladrão escolher o seu vértice inicial. Durante o jogo, é permitido que policiais ocupem um mesmo vértice.

As rodadas seguintes sempre começam com os movimentos dos policiais. Depois que todos eles fazem os seus movimentos é a vez do ladrão. Cada movimento consiste em ir para um vértice vizinho, ou seja, que está ligado por uma aresta; ou ficar no vértice em que está. Cada policial sabe a posição dos demais policiais e a do ladrão. E o ladrão sabe a posição de todos os policiais. Os policiais ganham se conseguirem pegar o ladrão, ou seja, ocupar o mesmo vértice em que está o ladrão.

Consideremos o seguinte exemplo.

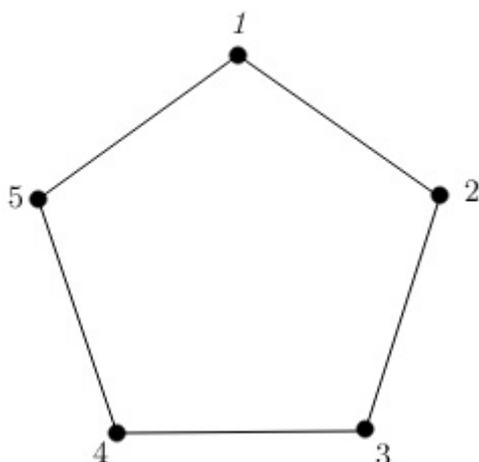


Figura 2.32: Grafo Polícia e Ladrão (b)

Na figura 2.32, suponha que haja um único policial que é colocado inicialmente no vértice 1. O ladrão deve escolher o vértice 3 ou 4, pois caso contrário perde na primeira rodada. É fácil perceber que o policial não conseguirá capturar o ladrão, pois o ladrão consegue manter-se sempre em um vértice que não é vizinho do vértice em que o policial está.

Suponha agora que são dois policiais. Colocando-os nos vértices 1 e 3, podemos perceber que o ladrão será capturado na primeira rodada. Dizemos que esse grafo tem copnumber igual a 2, ou seja, o número mínimo de policiais para garantir a vitória é 2.

**a)** Calcule o copnumber do Grafo de Petersen, o símbolo da OPM da figura 2.31.

**b)** Uma árvore é um grafo em que, dados dois vértices, há exatamente uma maneira de ir de um até o outro através das suas arestas. O primeiro grafo abaixo (figura 2.33) é uma árvore (por exemplo, existe exatamente um único caminho entre 1 e 5: 1 - 2 - 3 - 5) e o segundo não é (há dois caminhos entre, por exemplo, B e F você consegue encontrá-los?).

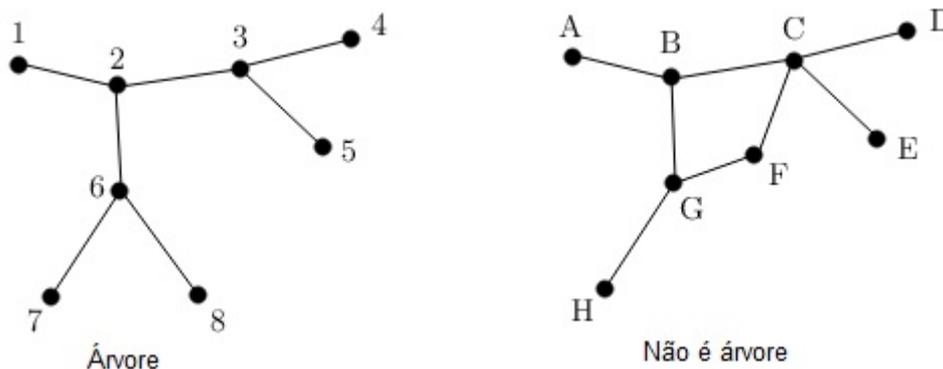


Figura 2.33: Árvore Polícia e Ladrão

Prove que o copnumber de qualquer árvore é 1.

**Solução:**

a) O copnumber é 3. Note que com 2 policiais não é possível prender o ladrão, pois cada vértice do grafo tem grau 3 e o ladrão sempre terá uma aresta para fugir. Porém, com três policiais em algum momento do jogo teremos a configuração da figura 2.34. Observe que é possível que o ladrão será pego colocando os policiais, por exemplo, nos vértices 2, 4 e 8. Com essa configuração todos os outros vértices do grafo são vizinhos do 2, 4, e 8. Portanto, o policial sempre conseguirá prendê-lo percorrendo apenas uma aresta.

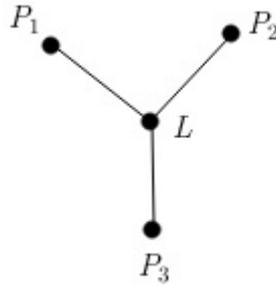


Figura 2.34: Árvore Polícia e Ladrão (Solução)

b) Seja  $P$  a posição do policial e  $L$  a posição do ladrão. Vamos mostrar que apenas um policial sempre conseguirá pegar o ladrão. Sabemos que em uma árvore todo par de vértices é ligado por um único caminho. Assim, uma boa estratégia é o policial seguir sempre para o próximo vértice no caminho que vai de  $P$  a  $L$ . Suponha que a distância de  $P$  a  $L$  é  $x$  (distância de  $P$  a  $L$  é a quantidade de arestas que percorremos para ir de  $P$  a  $L$ ). No movimento do policial essa distância sempre diminui em uma unidade, ou seja,  $x \rightarrow x - 1$ . Porém, no movimento do ladrão temos três situações possíveis: o ladrão fica parado ( $x \rightarrow x$ ); o ladrão volta ou se aproxima do policial ( $x \rightarrow x - 1$ ); o ladrão se afasta do policial ( $x \rightarrow x + 1$ ). No primeiro caso, após duas rodadas, a distância entre os dois diminui em uma unidade. No segundo caso, após duas rodadas, a distância entre os dois diminui em duas unidades. Portanto, nos dois primeiros casos após um número finito de rodadas, menor que  $x$ , o policial pega o ladrão. No terceiro caso, a distância entre os dois é constante. Porém, como o grafo é finito em algum momento o ladrão terá que repetir vértices. Como o grafo é uma árvore, acontecerá um dos dois primeiros casos. Portanto, após um número finito de jogadas o policial consegue prender o ladrão.

**Exemplo 11 (OPM)** No reino da Kruskalândia, há estradas ligando as cidades, como mostra o mapa a seguir (2.35). Todas as estradas são de terra e por uma estrada pode-se transitar em ambos os sentidos. O comprimento de cada estrada, em quilômetros, está indicado, fora de escala, no mapa a seguir (2.35).

O rei da Kruskalândia resolveu pavimentar algumas estradas do reino de modo que, a partir de

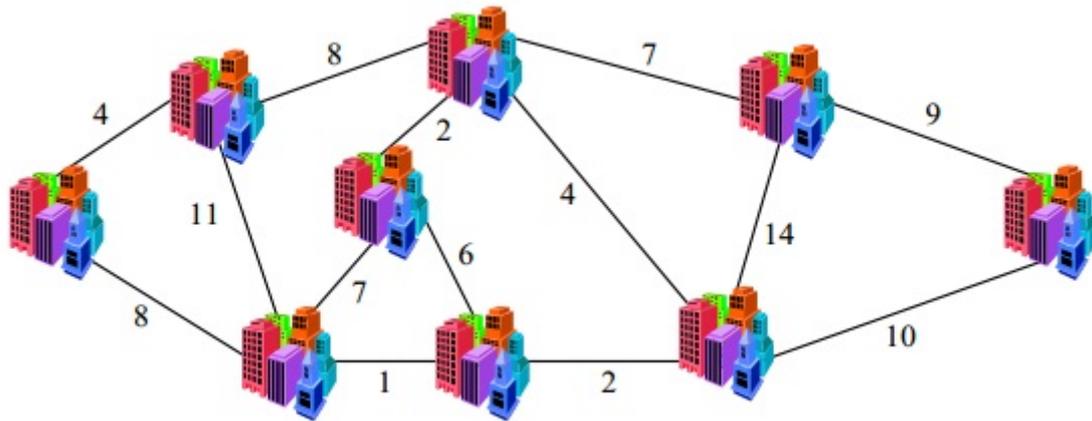


Figura 2.35: Mapa Reino da Kruskalândia

qualquer cidade, fosse possível atingir qualquer outra viajando somente por estradas pavimentadas. Como os cofres do reino andavam meio vazios, resolveu economizar o máximo possível. Chamou, então, o matemático da corte, que prontamente resolveu o problema. Agora é a sua vez.

- Qual é o menor número de estradas que o rei precisa pavimentar?
- Qual é o menor número de quilômetros de estrada que ele precisa pavimentar?

**Solução:**

a) Para resolver o problema do rei vamos modelar a situação por meio de um grafo denotado por  $G$  onde cada cidade é um vértice e cada estrada é uma aresta (ver figura 2.36). Temos que encontrar um subgrafo  $H$  de  $G$  conexo e sem ciclos como subgrafo, ou seja, uma árvore. Sabemos do teorema 2.2.3 que se um grafo com  $n$  vértices é uma árvore então ele tem  $n - 1$  arestas. O grafo  $G$  do exemplo tem 9 vértices. Assim, o grafo  $H$  tem  $9 - 1 = 8$  arestas. Portanto, O rei precisa pavimentar 8 estradas.

b) Este problema é uma variante do conhecido problema do carteiro chinês ou problema do caixeiro viajante onde um carteiro (ou caixeiro viajante) pretende visitar várias cidades percorrendo a menor distância possível. Também pode ser relacionado a grafo com peso nas arestas, onde o peso de cada aresta é o comprimento da respectiva estrada.

Uma maneira de resolver é testar todas as possibilidades para as 8 estradas que devem ser pavimentadas e encontrar uma árvore que tenha um custo mínimo. Para uma grande quantidade de vértices ou arestas encontrar manualmente essa árvore de custo mínimo é tarefa quase impossível. Geralmente, problemas como esse são resolvidos com o auxílio do computador. Existem vários algoritmos para encontrar árvores de custo mínimo, por exemplo, o de Kruskal, o de Boruvka, o de Prim, dentre outros. São chamados algoritmos gulosos e rodam em tempo polinomial. Neste trabalho, não iremos apresentar esses algoritmos, faremos uma solução baseada na análise

dos pesos das arestas.

Do item (a) sabemos que o rei precisa pavimentar 8 estradas. Para obter a menor quantidade de quilômetros temos que escolher as 8 arestas com menor peso de maneira que com essas 8 arestas possamos atingir qualquer cidade trafegando apenas por estradas pavimentadas. Dessa forma, temos que escolher 8 arestas que tenham peso mínimo. Inicialmente, escolhemos as arestas  $v_3v_6$ ,  $v_6v_8$ ,  $v_5v_8$ ,  $v_4v_5$ ,  $v_1v_2$ , que têm o menor peso (respectivamente, 1, 2, 4, 2, 4). Agora, temos que escolher mais três arestas para formar uma árvore. Para conectar a aresta  $v_1v_2$  basta escolher a aresta  $v_1v_3$  ou  $v_2v_5$ , pois ambas têm peso 8 (note que  $v_2v_3$  tem peso 11). Falta conectar as cidades representadas por  $v_7$  e  $v_9$ , temos três possibilidades cujo menor caminho é com as arestas  $v_5v_7$  e  $v_7v_9$  (os outros dois caminhos são  $v_7, v_8, v_9$  e  $v_7, v_9, v_8$ ). Desse forma, a soma dos quilômetros é  $1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 8 + 7 + 9 = 37$ . Portanto, para cumprir seu objetivo o rei da Kruskalândia terá que pavimentar, no mínimo, 37 km.

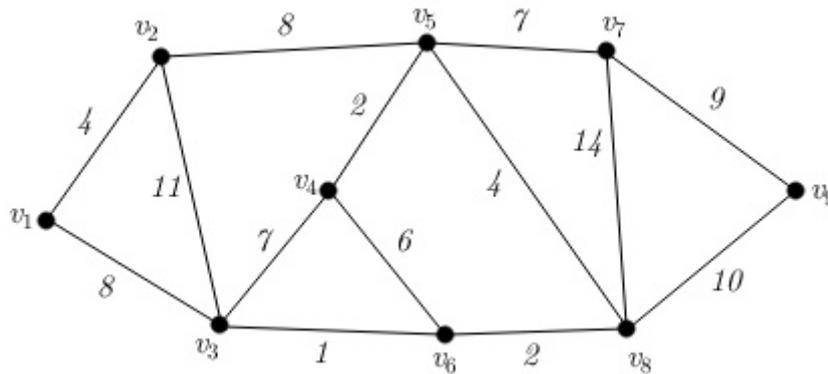


Figura 2.36: Grafo Reino da Kruskalândia

No campo da teoria dos grafos há alguns deles cujos vértices podem ser separados em dois subconjuntos distintos e envolvem apenas ciclos de comprimento ímpar. Vejamos.

Um grafo  $G = (V, E)$  é dito *bipartido* se o conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  ( $V_1, V_2 \subset V$ ) de forma que cada aresta de  $G$  une um vértice de  $V_1$  a um vértice de  $V_2$ . Em um grafo bipartido não há arestas em que ambas as extremidades estejam em  $V_1$  ou em  $V_2$ .

O problema seguinte envolve grafos bipartidos e tem um nível de dificuldade relativamente alto. Este problema foi da competição internacional de matemática para estudantes universitários na Bulgária e retirado do livro [21]. Pode ser usado em preparações para olimpíadas de matemática tanto nacionais quanto internacionais.

**Exemplo 12 (IMC)** Duzentos estudantes participaram de uma olimpíada de matemática onde

a prova tinha 6 problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido corretamente por pelo menos 120 estudantes. Mostre que existe dois estudantes que juntos resolveram todos os seis problemas.

**Solução:**

Modelando a situação por meio de um grafo bipartido  $G(V, E)$  onde  $V = X \cup Y$  tal que  $X = \{E_1, E_2, \dots, E_{200}\}$  é o conjunto dos vértices que representam os 200 estudantes e  $Y = \{P_1, P_2, \dots, P_6\}$  é o conjunto dos vértices que representam os 6 problemas. Assim, uma aresta liga um vértice  $E_i$  ( $1 \leq i \leq 200$ ) de  $X$  a um vértice  $P_j$  ( $1 \leq j \leq 6$ ) de  $Y$  se, e somente se, o estudante  $E_i$  resolveu o problema  $P_j$ . Queremos mostrar que existem dois vértices  $E_i$  e  $E_k$  em  $X$  tal que  $N(E_i \cup E_k) = 6$ .

O enunciado garante que se  $P_j \in Y$  então  $d(P_j) \geq 120$ . Portanto,

$$|E| \geq 6 \cdot 120 = 720$$

Daí,

$$d(E_1) + d(E_2) + \dots + d(E_{200}) \geq 720$$

Considerando a função teto de  $x$ , denotada  $\lceil x \rceil$ , tal que  $\lceil x \rceil =$  menor inteiro maior ou igual a  $x$ , então existe algum  $E_i$  em  $X$  tal que

$$d(E_i) \geq \left\lceil \frac{720}{200} \right\rceil = 4$$

Suponha que  $E_i$  resolveu os problemas  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ . Se  $E_i$  resolveu, por exemplo,  $P_5$  então existe um estudante  $E_k$  que resolveu  $P_6$  pois pelo menos 120 estudantes resolveram  $P_6$ . Portanto,  $N(E_i \cup E_k) = 6$ .

Suponha que  $E_i$  não resolveu  $P_5$  nem  $P_6$  e que nenhum outro estudante  $E_k$  resolveu  $P_5$  e  $P_6$ , então de  $E_k$  parte no máximo uma aresta para  $P_5$  e  $P_6$ . Observe que  $|X| = 200$  e de  $E_k$  em  $X$  parte, no máximo, uma aresta para  $P_5$  e  $P_6$ . Logo,  $d(P_5) + d(P_6) \leq 199$ . Absurdo, pois por hipótese,  $d(P_5) + d(P_6) \geq 240$ .

Um grafo é *bipartido completo* quando cada vértice de  $V_1$  é adjacente a todos os vértices de  $V_2$  e cada vértice de  $V_2$  é adjacente a todos os vértices de  $V_1$ . Denotamos um grafo bipartido completo por  $K_{p,q}$ , onde  $|V_1| = p$  e  $|V_2| = q$ . na figura 2.37 (b), temos um grafo bipartido completo. Se um grafo é bipartido completo e  $|V_1| = 1$  ou  $|V_2| = 1$  ele é chamado *estrela*.

**Proposição 2.2.4** Um grafo simples  $G = (V, E)$  é bipartido se e somente se não possui ciclos de comprimento ímpar.

**Prova:**

$\Rightarrow$  Suponha que  $G = (V, E)$  é bipartido e que  $V = X \cup Y$  onde cada aresta de  $G$  une um vértice de  $X$  a um vértice de  $Y$  (não há arestas que une dois vértices de  $X$  ou dois vértices de  $Y$ ).

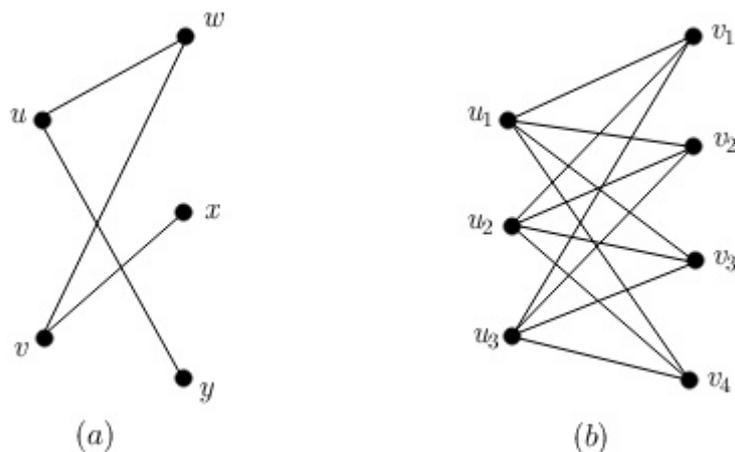


Figura 2.37: (a) Grafo Bipartido. (b) Grafo Bipartido Completo ( $K_{3,4}$ )

Um ciclo é determinado por uma sequência de vértices  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_j, y_j, x_1$  com  $x_i \in X$  e  $y_i \in Y$  que tem comprimento  $2j$ .

$\Leftarrow$  Suponha que  $G$  não tem ciclo de comprimento ímpar. Escolhendo um vértice  $x \in V$ , vamos separar os vértices de  $G$  em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  de modo que um vértice  $v \in V_1$  se, e somente se, existe um caminho de comprimento ímpar de  $x$  a  $v$ . Em outras palavras,  $V_1$  e  $V_2$  contém os vértices de  $G$  que tem um caminho até  $x$ , respectivamente, de comprimento ímpar e de comprimento par. Note que  $x \in V_2$ . Dessa forma, os conjuntos  $V_1$  e  $V_2$  são disjuntos ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ). Vejamos. Suponha que existe  $w \in V_1 \cap V_2$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $w$  é o vértice mais próximo de  $x$  que isso acontece. Então, existe um caminho  $P_1$  de comprimento par de  $x$  a  $w$  e um caminho  $P_2$  de comprimento ímpar de  $x$  a  $w$ , que não se interceptam. Dessa forma,  $P_1 \cup P_2$  é um ciclo de comprimento ímpar. Absurdo. Logo,  $G$  é bipartido.

A seguir, mais um problema proveniente da prova da OPM.

**Exemplo 13** (OPM) Numa festa de casamento há 500 pessoas. A partir das oito da noite, as pessoas começam a deixar a festa assim:

- No primeiro minuto após as oito horas, ou seja, entre 20h 00min 00s e 20h 00min 59s, saem todos os que não têm amigo entre os presentes, caso haja alguém nessas condições.
- No minuto seguinte, ou seja, entre 20h 01min 00s e 20h 01min 59s, vão embora todos os que têm exatamente 1 amigo entre os presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).
- Decorrido mais um minuto, ou seja, entre 20h 02min 00s e 20h 02min 59s, vão embora todos os que têm exatamente 2 amigos entre os que ainda estão presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).

- Entre 20h 03min 00s e 20h 03min 59s, vão embora todos os que têm exatamente 3 amigos entre os que ainda estão presentes (só sai neste intervalo quem satisfizer tal condição).

- E assim sucessivamente, para 4 amigos, 5 amigos, 6 amigos, ..., 499 amigos. Finalmente, quinhentos minutos transcorridos desde as oito da noite, às 04h 20min 00s da manhã, os últimos presentes, caso haja algum, vão embora e o salão de festas é fechado.

(a) Uma situação possível está representada na figura a seguir, em que os pontos representam as pessoas e dois pontos estão ligados caso as pessoas correspondentes sejam amigas.

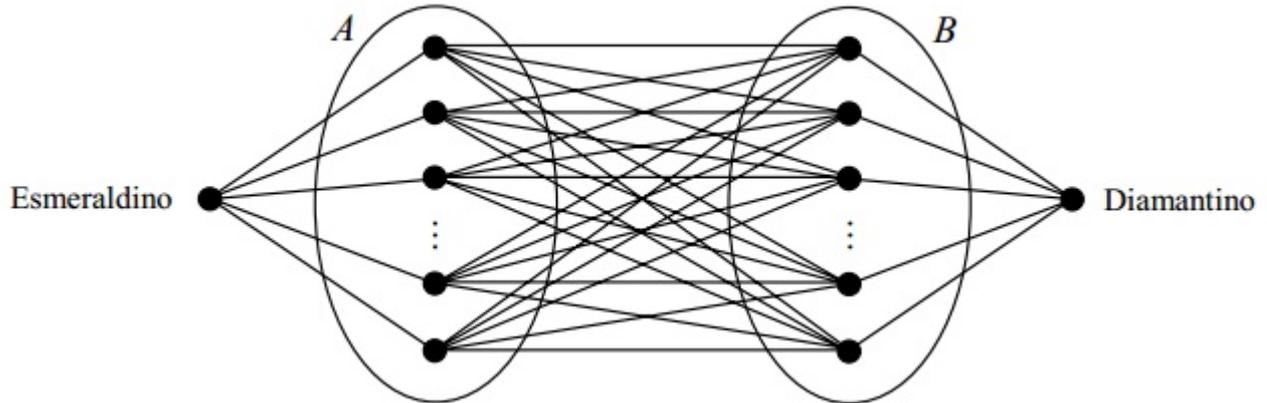


Figura 2.38: Festa de Casamento

Cada um dos grupos A e B têm 249 pessoas. Cada uma das pessoas de um grupo é amiga de todas as pessoas do outro grupo e pessoas de um mesmo grupo não são amigas. Esmeraldino é amigo de todas as pessoas do grupo A e Diamantino, de todas as pessoas do grupo B. E ninguém é amigo de mais ninguém. Na situação descrita acima, quantas pessoas ficam até o salão fechar?

(b) Existe alguma situação em que 499 pessoas ficam até o salão fechar?

**Solução:**

a) Analisando o grafo da figura 2.38 temos que  $d(E) = d(D) = 249$  ( $E=Esmeraldino$  e  $D=Diamantino$ ) e cada pessoa dos grupos A e B tem 250 vizinhos, ou seja, se  $a_i \in A$  e  $b_j \in B$  temos que  $d(a_i) = d(b_j) = 250$ . Assim, após 249 minutos saem Esmeraldino e Diamantino; como todos os 498 que sobram tem o mesmo número de amigos (249 amigos) então esses sairão juntos. Assim, 498 pessoas ficam até o salão fechar.

b) Não existe possibilidade de 499 pessoas ficarem até o salão fechar. Observe que se houvesse essa possibilidade, no momento de saída da primeira pessoa que tem  $d$  amigos (ou com grau  $d$ ), as 499 pessoas restantes deveriam ter  $d + 1$  amigos (ou grau  $d + 1$ ). Dessa forma, a soma dos graus do grafo seria  $d + 499 \cdot (d + 1) = 500d + 499$  que é ímpar. Contradição, pois a soma dos graus de um grafo é sempre par.

Para finalizar este capítulo iremos tratar de um importante tema que é clássico e tem aplicações

na solução de diversos problemas envolvendo a teoria dos grafos. São os grafos planares. Um grafo é dito *planar* se pode ser representado em um plano de modo que suas arestas só se encontrem nos vértices aos quais são incidentes (por exemplo, grafo  $G_2$  da figura 2.39).

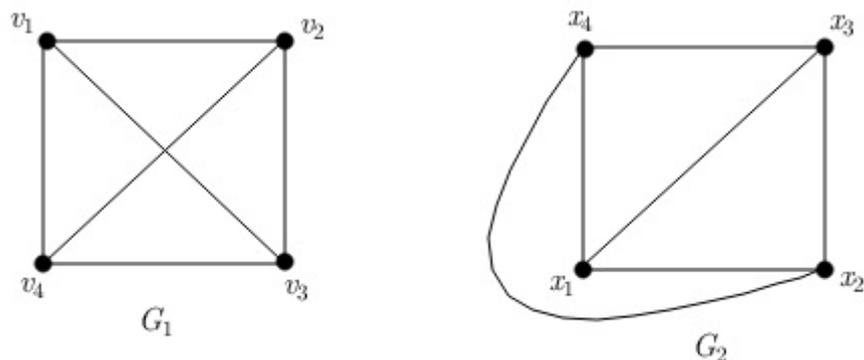


Figura 2.39: Grafo Planar

O grafo  $G_1$  da figura 2.39 é planar. Apesar que duas de suas arestas se interceptam fora das extremidades, é possível construir um grafo isomorfo a  $G_1$  tal que isso não aconteça, nesse caso, o grafo  $G_2$ . Se um grafo planar estiver representado de forma que suas arestas não se interceptam, então ele dividirá o plano em regiões que denominamos *faces*. Em geral, vamos denotar o número de faces por  $F$ , de vértices por  $V$  e de arestas por  $A$ . Por exemplo, no grafo  $G_2$  da figura 2.39 temos  $V = 4$ ,  $A = 6$  e  $F = 4$ . Note que  $V + F = A + 2$ . Essa relação não é mera coincidência, ela vale para os grafos planares, conforme mostra o teorema a seguir.

**Teorema 2.2.5** *Seja  $G$  um grafo planar simples e conexo. Seja  $F$  o número de faces,  $V$  o número de vértices e  $A$  o número de arestas de  $G$ , então  $V + F = A + 2$ .*

**Prova:**

Vamos provar por indução em  $F$ . Se  $F = 1$  o teorema é verdadeiro pois o grafo é uma árvore e  $A = V - 1$ . Supondo  $F \in \mathbb{N}$  tal que  $F \geq 2$ . Escolhendo uma aresta  $a$  de  $G$  que não seja de corte ( $a$  pertence a algum ciclo de  $G$ ) e retirando-a obtemos um subgrafo  $G - a$  que é conexo. Note que  $G$  tem ao menos um ciclo pois  $F \geq 2$  e assim  $G$  não é árvore. Logo, o subgrafo  $G - a$  tem  $F - 1$  faces,  $V$  vértices e  $A - 1$  arestas. Dessa forma,  $V + (F - 1) = (A - 1) + 2$ . Donde concluímos que  $V + F = A + 2$ .

Essa relação é conhecida como fórmula de Euler ou teorema de Euler. O teorema 2.2.5 é muito forte e a partir dele podemos deduzir vários corolários interessantes que envolvem grafos planares.

**Corolário 2.2.6** *Em todo grafo planar conexo  $2A \geq 3F$ .*

**Prova:** Se contarmos as arestas de cada face, contamos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face é limitada por pelo menos três arestas então  $\frac{3F}{2} \leq A$  (pois o grafo possui  $A$  arestas). Daí,  $2A \geq 3F$ .

A igualdade se verifica se todas as faces forem triangulares.

**Corolário 2.2.7** Em todo grafo planar conexo, com pelo menos três vértices, temos  $A \leq 3V - 6$ .

**Prova:**

Da relação de Euler temos que  $V - A + F = 2$ . Daí,  $3V - 3A + 3F = 6$ , como  $2A \geq 3F$  então  $3V - 3A + 2A \geq 6$ . Com isso,  $A \leq 3V - 6$ .

A partir do corolário 2.2.7 é possível mostrar, por exemplo, que  $K_5$  não é planar. Vejamos: Um  $K_5$  possui 10 arestas e 5 vértices. Com isso,  $10 > 3 \cdot 5 - 6$ , contradizendo o Corolário 2.2.7. É importante observar que a condição do Corolário 2.2.7 é necessária para que um grafo seja planar, mas não é suficiente. Há grafos que não são planares, por exemplo  $K_{3,3}$ , e atendem ao Corolário 2.2.7.

A seguir temos um problema muito conhecido, inclusive pelos alunos do Ensino Básico, cuja solução está diretamente relacionada a grafos planares.

**Exemplo 14** É possível ligar água, luz e telefone a três casas sem que as linhas se cruzem?

**Solução:**

Modelando a situação por meio de um grafo, o problema se reduz a seguinte pergunta: É possível representar um  $K_{3,3}$  em um plano de modo que suas arestas só se encontrem nos vértices aos quais são incidentes? Para responder esta questão vamos ao próximo corolário.

**Corolário 2.2.8** Seja  $G$  um grafo conexo planar bipartido, com ao menos duas arestas, então  $A \leq 2V - 4$ .

**Prova:**

Se um grafo é bipartido não tem ciclo de comprimento ímpar. Assim, cada face tem, no mínimo, 4 arestas. Se contarmos as arestas de cada face, contamos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face é limitada por pelo menos quatro arestas então  $\frac{4F}{2} \leq A$ . Daí,  $2A \geq 4F$ .

Da relação de Euler temos que  $V - A + F = 2$ . Daí,  $4V - 4A + 4F = 8$ , como  $2A \geq 4F$  então  $4V - 4A + 2A \geq 8$ . Com isso,  $A \leq 2V - 4$ .

Agora, vamos concluir a solução do exemplo 14. Sabemos que um  $K_{3,3}$  é bipartido, tem 9 arestas e 6 vértices. Com isso,  $9 > 2 \cdot 6 - 4$ , contradizendo o corolário 2.2.8. Logo, não é possível ligar água, luz e telefone nas três casas sem que as redes se cruzem.

**Corolário 2.2.9** *Todo grafo planar tem grau mínimo menor ou igual a 5.*

**Prova:**

*Seja  $G$  um grafo planar e  $\delta$  o grau mínimo. Sabemos que  $\delta \cdot |V| \leq \sum_{v \in V(G)} d(v)$  e  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2A$ .*

*Do corolário 2.2.7 temos  $A \leq 3V - 6$ . Com isso,  $\delta \cdot V = 6V - 12$ . Daí,  $\delta = 6 - \frac{12}{V} < 6$ . Portanto,  $\delta \leq 5$  (pois  $\delta$  é natural).*

Há outros resultados importantes em grafos planares como o teorema de Kuratowski, teorema das cinco cores, o famoso teorema das quatro cores, entre outros, os quais não destacaremos neste trabalho. Para um maior aprofundamento em grafos planares sugerimos que o leitor consulte [9], [32] ou [20]. O próximo capítulo é dedicado a emparelhamento em grafos bipartidos.

## Capítulo 3

# Emparelhamentos

Neste capítulo iremos discorrer sobre Emparelhamentos. Apresentamos aqui conjuntos independentes de vértices e de arestas, bem como o teorema de Hall que é um dos resultados mais importantes em emparelhamentos. A notação adotada se aproxima à de Bondy e Murty [9] e pequenas variações coincidem com outros textos de grafos sobre emparelhamentos como Diestel [15], Bollobás [8] e Boaventura Netto [7].

### 3.1 Conjuntos Independentes

No capítulo 2, vimos que um grafo  $G = (V, E)$  é bipartido se podemos particionar o conjunto dos vértices em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  ( $V_1, V_2 \subset V$ ;  $V_1 \cup V_2 = V$ ;  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ), de forma que cada aresta de  $G$  tem uma extremidade em  $V_1$  e outra extremidade em  $V_2$ . Assim, não há arestas com ambas as extremidades em vértices de um dos dois subconjuntos, ou seja, não há ligações entre vértices de  $V_1$  e de  $V_2$ . Cada um dos conjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tem seus vértices dois a dois não-adjacentes.

Um conjunto  $X$  de um grafo  $G$  é dito *conjunto de vértices independentes* se seus vértices são dois a dois não-adjacentes. Se dois vértices distintos  $u$  e  $v$  pertencem a  $X$ , não há aresta em  $G$  com extremidades  $u$  e  $v$ . Dessa forma, um conjunto  $X$  de vértices é independente se o subgrafo induzido  $G[X]$  é vazio. Na figura 3.1 temos alguns subconjuntos de vértices independentes. Por exemplo, um cujo vértice é  $v_1$ ; outro, cujos vértices são  $v_2$  e  $v_5$ ; outro cujos vértices são  $v_1$ ,  $v_3$  e  $v_5$ .

Dentre os conjuntos de vértices independentes é importante destacar os subconjuntos *maximais* e os subconjuntos *máximos*. Um subconjunto de vértices independentes é dito maximal se não for possível acrescentar outro vértice sem perder a independência. Assim, um conjunto de vértices independentes  $X$  é maximal se não está contido em um conjunto de vértices

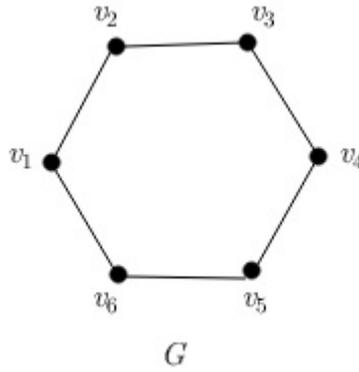


Figura 3.1: Subconjuntos de Vértices Independentes

independentes maior. Por outro lado, um subconjunto de vértices independentes  $X$  é dito máximo, se para todo conjunto de vértices independentes  $Y$  em um grafo  $G$  temos  $|X| \geq |Y|$ . Por exemplo, no grafo  $G$  da figura 3.1, temos o subconjunto de vértices independentes formado pelo vértice  $v_1$  que pode ser aumentado, portanto, não é maximal, nem máximo; o subconjunto de vértices independentes formado por  $v_2$  e  $v_5$  não pode ser aumentado e, portanto, é maximal, mas não é máximo; o subconjunto de vértices independentes formado por  $v_1, v_3$  e  $v_5$  não pode ser aumentado e não há outro conjunto de vértices independentes de cardinalidade maior, portanto, é máximo.

Denotamos a cardinalidade do conjunto de vértices independentes máximo em um grafo  $G$  por  $\alpha(G)$ . O número  $\alpha(G)$  é chamado *índice de estabilidade* do grafo. No grafo  $G$  da figura 3.1 temos que  $\alpha(G) = 3$ . Note que se um conjunto de vértices independentes é máximo então ele é maximal, porém a recíproca não é verdadeira vide conjunto de vértices independentes formado por  $v_2$  e  $v_5$  do grafo  $G$ , da figura 3.1, citados anteriormente.

Em qualquer grafo completo o índice de estabilidade é 1 pois cada vértice é adjacente a todos os outros vértices. Já o índice de estabilidade de um  $\overline{K_n}$  é  $n$  pois  $\overline{K_n}$  não tem arestas ( $\overline{K_n}$  é um grafo nulo).

Uma *cobertura* de vértices de um grafo  $G$  é um conjunto  $X$  de vértices ( $X \subseteq G$ ) onde cada aresta de  $G$  é incidente em, pelo menos, um vértice de  $X$ . Na figura 3.2 temos uma cobertura  $X = \{x, y, v, z\}$  na qual podemos observar que todas as arestas do grafo incide em, pelo menos, um desses quatro vértices de  $X$ .

Em qualquer grafo  $G$ , um conjunto  $X$  de vértices é uma cobertura de  $G$  se e somente se  $V(G) - X$  é um conjunto de vértices independentes. Um conjunto  $X$  de vértices é uma cobertura mínima em um grafo  $G$  se para toda cobertura  $Y$  em  $G$  temos  $|X| \leq |Y|$ .

Denotamos a cardinalidade de uma cobertura mínima de um grafo  $G$  por  $\beta(G)$ .

Na figura 3.3 temos o mesmo grafo da figura 3.2, mas destacando uma cobertura mínima

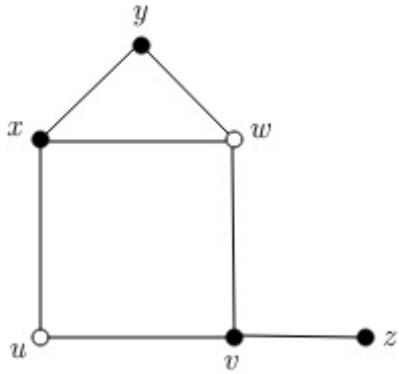


Figura 3.2: Cobertura

formada pelo conjunto de vértices  $Y = \{v, x, w\}$ . Note que todas as arestas do grafo têm ao menos uma extremidade em  $Y$ . Nesse caso,  $\beta(G) = 3$ .

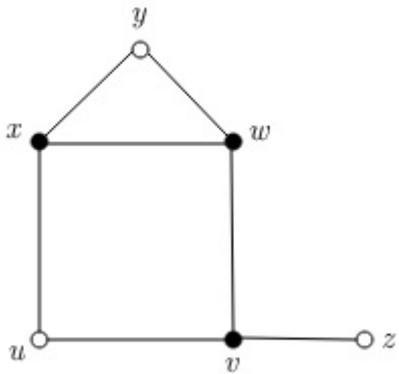


Figura 3.3: Cobertura Mínima

A cobertura de vértices mínima é um problema comum em otimização e consiste em encontrar a menor cobertura de vértices em determinado grafo. Observe que  $\beta(G)$  é o número mínimo de vértices que necessitamos para alcançar todas as arestas do grafo. Daí, concluímos que

$$\beta(G) = n(G) - \alpha(G).$$

De modo semelhante ao que escolhemos um conjunto de vértices independentes, também podemos selecionar um conjunto de arestas independentes. Se duas arestas não tem uma extremidade em comum são ditas *independentes*. A figura 3.4 mostra dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , sendo que cada um deles um conjunto de arestas independentes. No grafo  $G_1$  as arestas  $x_1x_5$  e  $x_2x_3$  não possuem extremidades em comum e por isso são ditas independentes. No grafo  $G_2$  as arestas  $v_1v_2$  e  $v_3v_5$  são independentes.

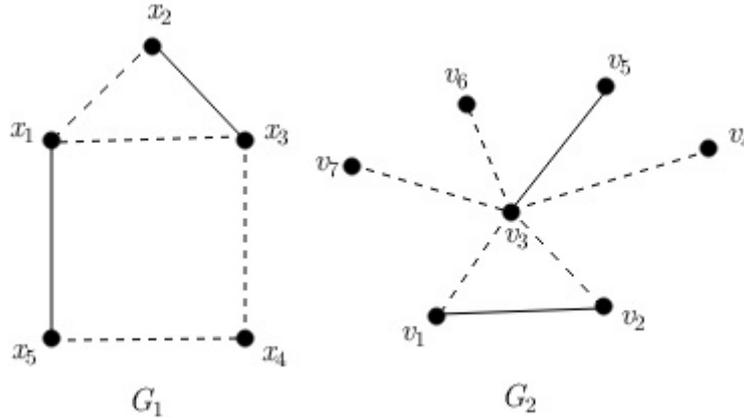


Figura 3.4: Arestas Independentes

### 3.2 Emparelhamentos

Em um grafo  $G$ , um conjunto  $M$  de arestas independentes é chamado *emparelhamento*. Assim, um conjunto de arestas  $M$  ( $M \subseteq E(G)$ ) é um emparelhamento se suas arestas duas a duas não são adjacentes. Os emparelhamentos possuem diversas aplicações no cotidiano. Algumas, relacionadas com formar pares, por exemplo, formação de casais, seleção de pares comuns para trabalhar em determinado projeto, dentre outras.

Um emparelhamento  $M$  é dito *maximal* se não for possível acrescentar outra aresta de  $G$  a  $M$  de tal forma que  $M$  continue sendo um emparelhamento. Assim, um emparelhamento  $M$  é maximal se não está contido em um conjunto de arestas independentes maior. Em um grafo  $G$  um emparelhamento  $M$  é dito *máximo* se contém o maior número possível de arestas independentes em  $G$ , ou seja, se para todo emparelhamento  $N$  em  $G$  temos  $|M| \geq |N|$ . Note que se um conjunto de arestas independentes é máximo então ele é maximal, porém a recíproca não é verdadeira. Denotamos a cardinalidade de um emparelhamento máximo em um grafo  $G$  por  $\alpha'(G)$ . Na figura 3.5 temos um emparelhamento maximal. Verifique que tal emparelhamento não é máximo.

Um vértice é dito *saturado* (ou *emparelhado*) se for incidente a uma aresta do emparelhamento. Caso contrário, o vértice é dito *não-saturado* ou *livre*. Na figura 3.5,  $u$  e  $z$  são vértices livres. Se um emparelhamento satura todos os vértices de um grafo é chamado *emparelhamento perfeito*. Como em um emparelhamento perfeito todos os vértices estão saturados e não há arestas adjacentes, podemos concluir que um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  com  $n$  vértices é perfeito se e somente se  $|M| = \frac{n}{2}$ . No grafo  $G_1$  da figura 3.4 temos um emparelhamento que não é perfeito, pois o vértice  $x_4$  está livre. Já no grafo da figura 3.6 temos um emparelhamento  $M = \{ux, yw, vz\}$  que é maximal, máximo e perfeito.

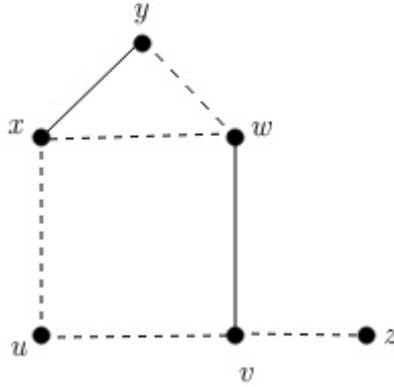


Figura 3.5: Emparelhamento Maximal

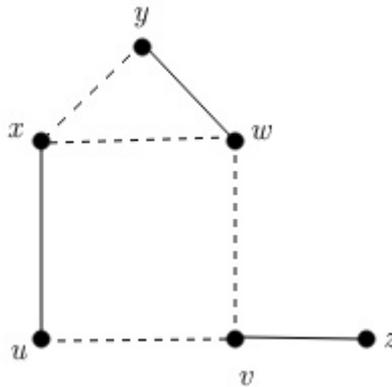


Figura 3.6: Emparelhamento Máximo e Perfeito

**Teorema 3.2.1** *Seja  $G$  um grafo onde  $\alpha'(G)$  é a cardinalidade de um emparelhamento máximo de  $G$  e  $\beta(G)$  é a cardinalidade de uma cobertura mínima de  $G$  então  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ .*

**Prova:**

*Seja  $G$  um grafo,  $E$  um emparelhamento de  $G$  e  $C$  uma cobertura de  $G$ . Devemos mostrar que para quaisquer  $E$  e  $C$  de  $G$  temos  $|E| \leq |C|$ . Cada aresta de  $E$  tem pelo menos uma extremidade em  $C$ . Se uma aresta de  $E$  tem as duas extremidades em  $C$ , basta escolher uma delas. Como não há arestas adjacentes em  $E$ , concluímos que  $|E| \leq |C|$ , ou seja,  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ .*

Uma maneira de aumentar a cardinalidade de um emparelhamento é usar a ideia de caminho aumentante e alternante.

Seja  $M$  um emparelhamento em um grafo  $G$ . Um caminho é dito  $M$ -alternante se suas arestas são alternadamente de  $M$  e de  $G - M$ . Um caminho  $M$ -alternante pode ou não começar e terminar com arestas de  $M$ .

Dado um grafo  $G$  e um emparelhamento  $M$ , um *caminho  $M$ -aumentante* em  $G$  é um caminho que liga dois vértices não-saturados por  $M$  tal que os vértices do caminho  $M$ -aumentante alternam arestas de  $M$  e arestas de  $G - M$ . Um caminho  $M$ -aumentante é também

M-alternante, pois suas arestas são alternadamente de  $M$  e  $G - M$ . Assim, se um grafo  $G$  tem um caminho M-aumentante então podemos aumentar a cardinalidade do emparelhamento. Para isso, basta eliminar as arestas de  $M$  que pertencem ao caminho M-aumentante e escolher para o novo emparelhamento as arestas de  $G - M$ . Dessa forma, temos um novo emparelhamento  $M'$  com as arestas do caminho M-aumentante que não pertencem a  $M$ . Portanto,  $M'$  tem a cardinalidade aumentada em uma unidade, ou seja,  $|M'| = |M| + 1$ . No grafo  $G_1$  da figura 3.7 temos um caminho M-alternante  $P_1 = (u, x, v, y)$  (as arestas de  $M$  estão representadas por linhas cheias). No grafo  $G_2$ , temos um caminho M-aumentante  $P_2 = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$  que também é M-alternante (as arestas de  $M$  estão representadas por linhas cheias). Os vértices livres de  $P_2$  são  $u_1$  e  $v_3$ . Note que, em um caminho M-alternante os vértices da origem e do término não são saturados por  $M$  é um caminho M-aumentante.

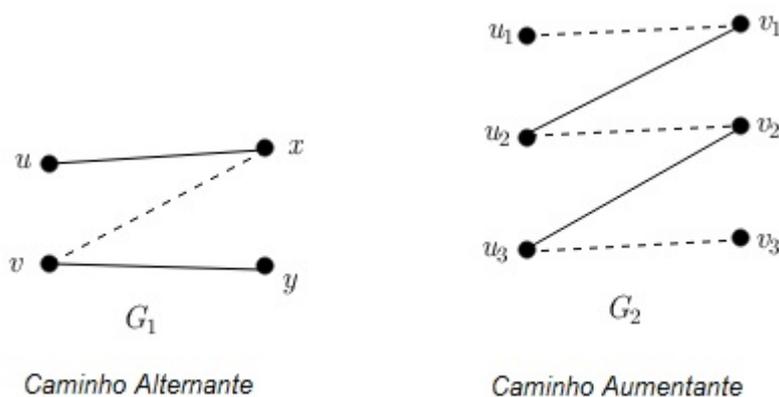


Figura 3.7: Caminho Alternante e Caminho Aumentante

**Teorema 3.2.2** *Um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  é máximo se e somente se  $G$  não possui um caminho M-aumentante.*

**Prova:**

$\Rightarrow$  Suponha que o grafo  $G$  possui um emparelhamento  $M$  e um caminho M-aumentante  $P$ . Então, pela definição de caminho M-aumentante, podemos aumentar a cardinalidade do emparelhamento  $M$  em pelo menos uma unidade. Para isso, basta eliminar as arestas de  $M$  que pertencem ao caminho  $P$  e, em seguida, temos um novo emparelhamento  $M'$  que inclui as arestas de  $P$  que não pertencem a  $M$  ( $M' = M \Delta E(P)$ ).  $M \Delta E(P)$  é a diferença simétrica de  $M$  e  $E(P)$ , ou seja, é o conjunto das arestas de  $M$  e  $E(P)$  que não pertencem a  $M \cap E(P)$ . Assim, o novo emparelhamento  $M'$  é tal que  $|M'| = |M| + 1$ . Portanto,  $M$  não é máximo. Pela contrapositiva, isto prova que, se um emparelhamento  $M$  em um grafo  $G$  é máximo, então  $G$  não possui um caminho M-aumentante.

$\Leftarrow$  Por outro lado, suponha que o emparelhamento  $M$  não é máximo. Então, existe em  $G$  um

emparelhamento  $M'$  tal que  $|M'| > |M|$ . Seja  $H = G[M \Delta M']$ . Como  $M$  e  $M'$  são emparelhamentos em  $G$  cada vértice de  $H$  tem grau máximo 2, pois cada vértice de  $G$  só pode ser incidente a uma aresta de  $M$  e uma de  $M'$ . Logo, as componentes conexas de  $H$  só podem ser vértices isolados, ou ciclos de ordem par com aresta alternadamente em  $M$  e  $M'$ , ou um caminho com arestas alternantes em  $M$  e  $M'$ . Mas  $|M'| > |M|$ , com isso o subgrafo  $H$  tem mais arestas de  $M'$  que de  $M$ . Dessa forma, alguma componente conexa de  $H$  é um caminho que começa e termina com arestas de  $M'$  donde concluímos que esse caminho é  $M$ -aumentante em  $G$ . Pela contrapositiva, isto prova que, se  $G$  não possui um caminho  $M$ -aumentante, então o emparelhamento  $M$  em  $G$  é máximo.

Uma das aplicações mais importantes que envolve emparelhamentos está relacionada a grafos bipartidos. Há diversos estudos, e atividades práticas, que envolvem emparelhamentos em grafos bipartidos. Um exemplo é o “teorema dos casamentos”. Tomando-se  $n$  homens e  $n$  mulheres de modo que cada um dos homens gostam de algumas mulheres, e vice-versa, em que condições podemos casar todos os homens (formar par Homem-Mulher) de maneira que todo casal se goste mutuamente?

Este problema surge também nas seguintes situações: quais as condições para escolher duplas de engenheiros para executar uma tarefa de forma que ambos se conheçam, ou alojar pessoas aos pares em quartos de hotel sendo que todas as duplas que estão alocadas em um mesmo quarto se conheçam, dentre outras.

Nesse tipo de problema, busca-se condições para a existência de um emparelhamento perfeito.

Nessa busca por soluções alguns resultados apresentavam condições suficientes, mas não necessárias; outros apresentavam condições necessárias, mas não suficientes. O grafo da figura 3.8 é bipartido e os dois conjuntos de vértices independentes  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  e  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  tem a mesma cardinalidade. Porém, não possui emparelhamento perfeito pois os vértices  $v_1$  e  $v_4$  só podem ser emparelhados com o vértice  $v_3$ .

Foram várias tentativas até que em 1935 o matemático inglês Philip Hall apresentou um teorema denominado Teorema de Hall (ou teorema dos casamentos) que assegurava condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito.

O exemplo a seguir foi retirado de Lovász [22] e ajuda a mostrar quando um grafo bipartido tem um emparelhamento perfeito.

**Exemplo 15** *Uma ilha é habitada por seis tribos. Eles vivem em paz e dividem a ilha entre eles, de modo que cada tribo tem um território de caça de 100 milhas quadradas. A ilha inteira tem uma área de 600 milhas quadradas.*

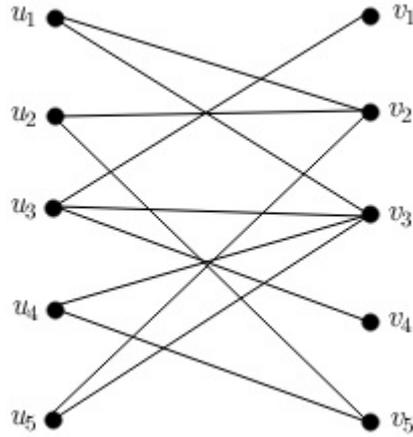


Figura 3.8: Grafo bipartido que não possui emparelhamento perfeito.

As seis tribos decidem que todas elas devem escolher novos totens<sup>1</sup>. Elas decidem que cada tribo deveria escolher uma das seis espécies de tartaruga que vivem na ilha. Obviamente elas decidem escolher totens diferentes, e portanto o totem de cada tribo deveria ocorrer em algum lugar no território deles.

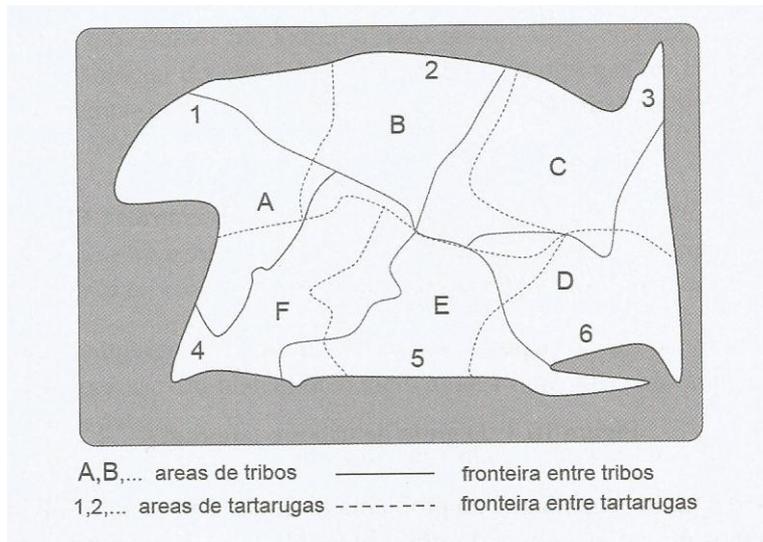


Figura 3.9: Mapa Tribos e Tartarugas

É dado que os territórios onde as diferentes espécies de tartarugas vivem não se sobrepõem, e elas têm a mesma área - 100 milhas quadradas (logo, segue que em toda parte da ilha vive algum tipo de tartaruga). Obviamente, o modo que as tartarugas dividem a ilha pode ser inteiramente diferente da maneira com que as tribos o fazem. É possível que tal seleção de totens exista? Em caso afirmativo, determine uma delas.

**Solução:**

<sup>1</sup>Totem é uma palavra que os índios utilizam para designar “Brasão”.

Inicialmente vamos modelar o problema por meio de um grafo. Representando cada tribo e cada espécie de tartaruga por um vértice. Além disso, a relação entre cada tribo e as possíveis tartarugas que poderão ser totem dessa tribo será dada por uma aresta. Note que não existe aresta ligando as tribos entre si, nem existe aresta ligando os totens entre si. Assim, o grafo é bipartido conforme a figura 3.10.

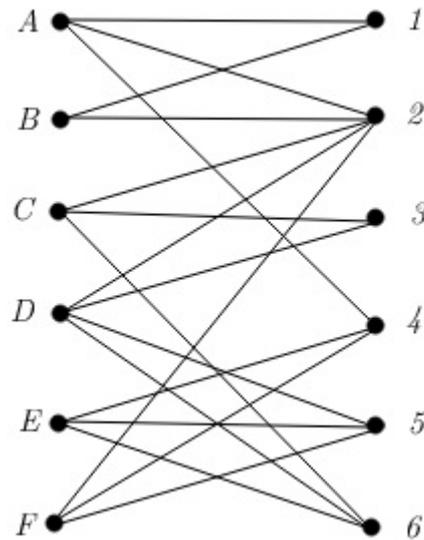


Figura 3.10: Tribos e Tartarugas

Nosso principal objetivo é provar se nesse grafo bipartido existe, ou não, um emparelhamento perfeito. Antes de resolver o problema, vem o seguinte questionamento: em quais condições não existe um emparelhamento perfeito?

Primeiro, se uma tribo não encontrar tartaruga em seu próprio território, ou seja, se o grafo tem um vértice isolado (com grau 0). Segundo, se duas tribos tivessem apenas a mesma espécie de tartaruga em seu território, ou seja, se dois vértices que representam as tribos tiverem ligados a apenas um vértice que representa as tartarugas. De modo geral, conjecturamos que uma condição necessária para ocorrer um emparelhamento perfeito é que para  $k$  tribos devemos ter, pelo menos,  $k$  espécies de tartarugas ligadas a essas tribos. No próximo teorema mostraremos que essa condição é necessária e suficiente. O problema atende a essa condição e a figura 3.11 mostra uma das soluções possíveis.

O exemplo anterior pode ser resolvido utilizando o resultado mais importante de emparelhamentos, o teorema de Hall, o qual será apresentado a seguir.

Dado um conjunto de vértices  $S$  em um grafo  $G = (V, E)$ , denotamos por  $N(S)$  o conjunto de todos os vértices adjacentes a algum vértice de  $S$ . Representando por  $G[X, Y]$  um grafo bipartido onde  $V = X \cup Y$ , temos:

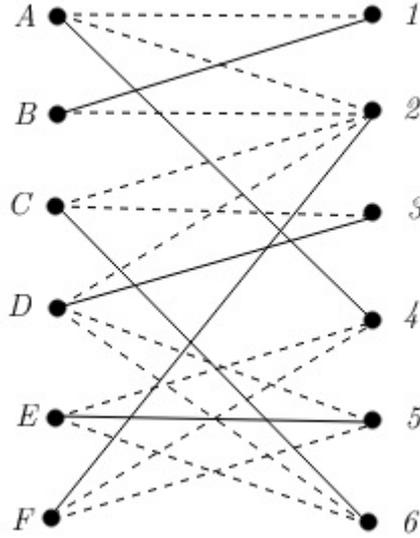


Figura 3.11: Emparelhamento tribos e tartarugas

**Teorema 3.2.3** *Um emparelhamento em  $G[X, Y]$  satura todos os vértices de  $X$  se e somente se  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .*

**Prova:**

$\Rightarrow$  *Seja  $G[X, Y]$  um grafo bipartido que possui um emparelhamento  $M$  que satura todos os vértices de  $X$ . Considere  $S \subseteq X$ , os vértices de  $S$  estão emparelhados por  $M$  com vértices distintos em  $N(S)$ . Portanto,  $|N(S)| \geq |S|$ .*

$\Leftarrow$  *Por outro lado, devemos provar que se  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$  então existe um emparelhamento em  $G[X, Y]$  que satura todos os vértices de  $X$ . Para provar, vamos usar a contrapositiva. Assim, dado  $M$  um emparelhamento máximo em  $G$  que não satura  $X$  devemos encontrar  $S \subseteq X$  de modo que  $|N(S)| < |S|$ .*

*Seja  $M$  um emparelhamento máximo em  $G$  que não satura  $X$  e  $u$  um vértice de  $X$  não saturado por  $M$  (ver figura 3.12). Denotando por  $Z$  o conjunto de todos os vértices que são alcançáveis por caminhos  $M$ -alternantes partindo de  $u$ . Como  $M$  é emparelhamento máximo, pelo teorema 3.2.2, não há caminhos  $M$ -aumentantes e  $u$  é o único vértice em  $Z$  não saturado por  $M$ .*

*Sejam  $R = Z \cap X$  e  $B = Z \cap Y$ , conforme a figura 3.12. Observe que os vértices de  $R - u$  estão emparelhados por  $M$  com os vértices de  $B$ . Dessa forma,  $|B| = |R| - 1$ . Note também que  $u \in X$  e os caminhos  $M$ -alternantes que partem de  $u$  atingem  $Y$  através de arestas de  $G - M$ , voltando para  $X$  através de arestas de  $M$ . Com isso, cada  $y \in B$  é vizinho de  $x$  ( $x \in R - u$ ) através de arestas de  $M$ . Portanto,  $B \subseteq N(R)$ .*

*Para concluir a prova, vamos mostrar que  $B = N(R)$ . Seja  $y \in N(R)$  então, por definição,  $y$  é vizinho de algum  $x$  em  $R$ . Assim, temos um caminho  $M$ -alternante de  $u$  a  $x$  que termina com*

uma aresta de  $M$ . Se  $xy \notin M$ , temos um caminho  $M$ -alternante de  $u$  a  $y$ . Com isso,  $y \in B$ . Senão,  $xy \in M$ . Com isso,  $xy$  é a última aresta do caminho  $M$ -alternante de  $u$  a  $x$  (note que  $x \neq u$  pois o vértice  $u$  não é saturado por  $M$ ). Logo,  $y \in B$ . Donde concluímos que  $B = N(R)$ . Portanto,  $|N(R)| = |B| = |R| - 1 < |R|$ , ou seja,  $|N(R)| < |R|$  para todo  $R \subseteq X$ .

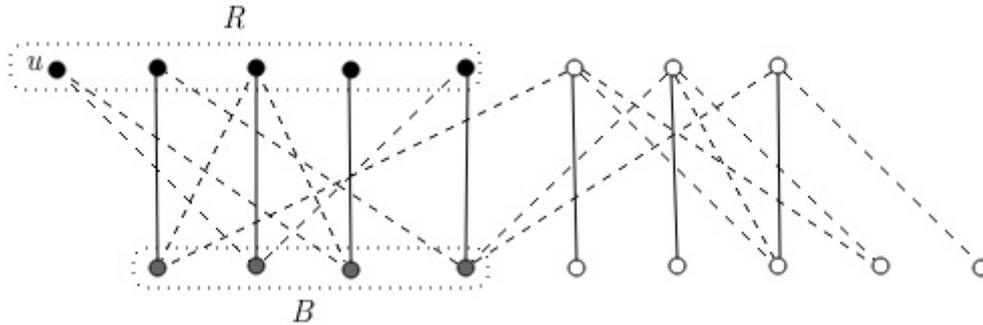


Figura 3.12: Teorema de Hall

O teorema de Hall é importante, pois oferece uma condição necessária e suficiente para que um grafo bipartido tenha um emparelhamento perfeito. Porém, apenas com essa condição pode ser inviável decidir se um grafo bipartido possui um emparelhamento perfeito. O exemplo seguinte também foi retirado de Lovász [22] e ilustra bem essa situação.

**Exemplo 16** *Em um baile há 300 estudantes. Alguns deles se conhecem. Toda garota conhece exatamente 50 rapazes e todo rapaz conhece exatamente 50 garotas (o conhecimento é mútuo). É possível que todos eles possam dançar simultaneamente de modo que apenas pares que se conhecem dançam um com o outro?*

**Solução:**

Vamos modelar a situação por meio de um grafo  $G$  onde cada um dos 300 estudantes é representado por um vértice. Observe que o grafo é bipartido e que os vértices que representam os rapazes estão em  $X$  ( $X \subseteq V(G)$ ) e os vértices que representam as garotas estão em  $Y$  ( $Y \subseteq V(G)$ ). A relação de conhecimento é representada por uma aresta, ou seja, uma aresta liga um vértice  $x_i$  de  $X$  a um vértice  $y_j$  de  $Y$  se, e somente se,  $x_i$  conhece  $y_j$ .

Note que a pergunta estará respondida se mostrarmos que neste grafo existe um emparelhamento perfeito. Para que isso aconteça necessitamos que  $|X| = |Y|$ . Mostraremos que em  $G$  isso acontece. De cada vértice  $x_i$  ( $x_i \in X$ ) partem 50 arestas (pois todo vértice tem grau 50), então a quantidade total de arestas que partem de  $X$  é  $50 \cdot |X|$ . De cada vértice  $y_j$  ( $y_j \in Y$ ) partem 50 arestas e a quantidade total de arestas que partem de  $Y$  é  $50 \cdot |Y|$ . Como a quantidade de arestas que partem de  $X$  ou que partem de  $Y$  é a quantidade de arestas de  $G$  (pois toda aresta

de  $G$  liga um vértice de  $X$  a um vértice de  $Y$ ), então concluímos que  $50 \cdot |X| = 50 \cdot |Y|$ . Assim,  $|X| = |Y| = 150$ . Todavia, somente o fato de  $|X| = |Y|$  não garante que haja emparelhamento perfeito em  $G$  (a condição é necessária mas não é suficiente).

Para ajudar na solução voltemos aos grafos das figuras 3.8 e 3.11. Na figura 3.8 se  $S = \{v_1, v_4\}$  temos  $N(S) = \{u_3\}$  então  $|S| > |N(S)|$  e não tivemos emparelhamento perfeito. Na figura 3.11 para qualquer subconjunto  $S$  contido em  $\{A, B, C, D, E, F\}$  ou em  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  temos que  $|S| \leq |N(S)|$ . Também já foi mostrado, ver teorema 3.2.3, que existe emparelhamento perfeito em um grafo bipartido  $H[A, B]$  se e somente se para todo subconjunto  $S$  ( $S \subseteq A$ ) temos  $|N(S)| \geq |S|$ . O problema é que nosso grafo  $G$  tem 300 vértices sendo 150 vértices em  $X$  e 150 vértices em  $Y$ , totalizando  $50 \cdot 150 = 7500$  arestas. Assim, temos  $2^{7500}$  subconjuntos, ou seja, teríamos que testar  $2^{7500}$  subconjuntos, que é um número gigantesco.

Poderíamos diminuir consideravelmente as contas calculando todas as maneiras diferentes de emparelhar um elemento de  $X$  com um elemento de  $Y$ . O número de maneiras de emparelhar vértices de  $X$  com vértices de  $Y$  é  $150!$ , menor que  $2^{7500}$ , mas ainda assim é muito grande.

Poderíamos usar o teorema 3.2.3, ou seja, analisar se para todo subconjunto  $S$  de  $X$  temos  $|S| \leq |N(S)|$ . Porém,  $X$  tem  $2^{150}$  subconjuntos, bem menor que os dois casos anteriores mas continua muito grande.

Apesar de não resolver o problema, o teorema 3.2.3 ajuda a provar certas propriedades em grafos que nos permitem concluir se estes tem um emparelhamento perfeito. Observe que em nosso problema todo vértice do grafo tem grau 50 e isso será decisivo para que o grafo tenha um emparelhamento perfeito. Na verdade, não é o fato do grau de cada vértice ser 50 que garante a existência de um emparelhamento perfeito, o grau de cada vértice poderia ser 10, 20, 1, basta que todos os vértices tenham o mesmo grau (diferente de zero).

O corolário a seguir (3.2.4) generaliza a solução do exemplo 16.

**Corolário 3.2.4** Se  $G[X, Y]$  é um grafo bipartido  $k$ -regular ( $k \geq 1$ ) então  $G[X, Y]$  tem um emparelhamento perfeito.

**Prova:**

Devemos mostrar que o grafo tem um emparelhamento perfeito. Para tanto, temos que provar que  $|X| = |Y|$ , que  $G$  tem um emparelhamento  $M$  que satura  $X$  e  $M$  é um emparelhamento perfeito.

Como o grafo  $G$  é bipartido

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v) = |E|$$

. Por hipótese, o grafo  $G$  é  $k$ -regular. Com isso,

$$\sum_{v \in X} d(v) = k \cdot |X| = |E| = \sum_{v \in Y} d(v) = k \cdot |Y|.$$

Daí,  $k \cdot |X| = |E| = k \cdot |Y|$ . Como  $k \neq 0$ , temos que  $|X| = |Y|$ .

Considere um subconjunto  $S \subseteq X$  e  $m$  o número de arestas incidentes em  $S$ . Por hipótese,  $G$  é  $k$ -regular. Assim, em cada vértice de  $S$  incide  $k$  arestas e  $m = k \cdot |S|$ . Analogamente, temos pelo menos  $k \cdot |N(S)|$  incidentes em  $N(S)$ , pois podemos ter arestas que incidem em  $N(S)$  e não incidem em  $S$ . Com isso,  $k \cdot |S| \leq k \cdot |N(S)|$  e  $|S| \leq |N(S)|$  ( $k \neq 0$ ). Logo, pelo teorema 3.2.3 existe um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$ .

Sabemos que  $|X| = |Y|$ . Daí, qualquer emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$  satura também todos os vértices de  $Y$ . Segue, que o número de arestas do emparelhamento é  $|X| = |Y| = \frac{|X|+|Y|}{2} = \frac{n}{2}$  ( $n$  é o número de vértices de  $G$ ). Donde concluímos que o emparelhamento é perfeito.

O próximo corolário traz como consequência do teorema de Hall que em um grafo bipartido  $G[X, Y]$  com emparelhamento perfeito os conjuntos de vértices  $X$  e  $Y$  têm a mesma cardinalidade.

**Corolário 3.2.5** *Um grafo bipartido  $G[X, Y]$  tem um emparelhamento perfeito se e somente se  $|X| = |Y|$  e  $|N(S)| \geq |S|$ , para todo  $S \subseteq X$ .*

**Prova:**

$\Rightarrow$  Seja um grafo bipartido  $G[X, Y]$  que tem um emparelhamento perfeito  $M$ . Então, cada aresta de  $M$  liga um vértice de  $X$  a um vértice de  $Y$ . O emparelhamento  $M$  não deixa vértice livre em  $X$  ou em  $Y$ , pois é perfeito, e todos os vértices de  $G$  são saturados por  $M$ . Como não há duas arestas de  $M$  incidentes em um mesmo vértice de  $G$  concluímos que  $|X| = |Y|$ .

Dado  $S \subseteq X$  e  $M$  um emparelhamento perfeito, temos que em cada vértice de  $S$  incide uma aresta de  $M$ , e em cada vértice de  $N(S)$  incidem pelo menos as arestas de  $M$  que incidem em  $S$  (note que podemos ter arestas de  $M$  que incidem em  $N(S)$  e não incidem em  $S$ ). Daí,  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ .

$\Leftarrow$  Por hipótese,  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subseteq X$ . Daí, pelo teorema de Hall (3.2.3)  $G$  tem um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$ . Como  $|X| = |Y|$ , tal emparelhamento também satura todos os vértices de  $Y$ . Portanto, o emparelhamento é perfeito.

Existe emparelhamento perfeito em um grafo qualquer (não somente em grafo bipartido).

Porém, não será objeto de estudo deste trabalho. Caso o leitor tenha interesse em emparelhamentos em um grafo qualquer, Bondy e Murty [9] explora bem esse tema. Assim, encerramos este capítulo. O próximo capítulo é dedicado às considerações finais.

## Capítulo 4

# Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos as noções básicas da Teoria dos Grafos destacando emparelhamentos em grafos bipartidos. Também apresentamos vários problemas que foram modelados e resolvidos por meio de grafos. Além disso, sugerimos a inclusão deste tópico no Ensino Básico através de pequenas oficinas.

A inclusão de tópicos de matemática discreta no Ensino Básico vem sendo discutida e implementada em alguns países. No Brasil, alguns trabalhos foram e vem sendo desenvolvidos buscando este propósito.

Acreditamos que o Ensino Básico necessita enfatizar um pouco mais tópicos de matemática discreta, especialmente, Teoria dos Grafos. Neste trabalho, procuramos escolher problemas atraentes e que abrangessem o conteúdo proposto. Na resolução dos problemas buscamos desenvolver conceitos e habilidades, sugeridas nos PCNs, como indução, dedução, organização lógica, demonstração, dentre outras.

Convém observar que não basta incluir mais um conteúdo no extenso currículo de matemática do Ensino Básico. Sugerimos que as atividades envolvendo grafos sejam trabalhadas em forma de pequenas oficinas. Desta forma, não sobrecarregamos ainda mais o currículo e contribuimos para o desenvolvimento das competências e habilidades mínimas exigidas para o Ensino Básico. Entendemos que a inclusão de atividades envolvendo grafos no Ensino Básico é necessária para cumprir parte das atuais expectativas desta modalidade de ensino. Além disso, é uma boa ferramenta para contextualizar situações, formar modelos, resolver problemas e, além disso, exige poucas habilidades de cálculo.

Esperamos que o professor do Ensino Básico conheça um pouco mais deste tema e utilize, em sala de aula, parte dos exemplos envolvendo grafos aqui sugeridos. Inicialmente, em forma de pequenas oficinas e, posteriormente, que este conteúdo possa figurar na grade de conteúdos do Ensino Básico. Desta forma, acreditamos contribuir para que o aluno desta modalidade de

ensino tenha maior interesse pela matemática e um ensino compatível com as novas exigências do mundo atual.

# Referências Bibliográficas

- [1] AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. *Proofs from The Book*. Fourth Edition. Ed. Springer-Verlag, 2010.
- [2] BASSANEZZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.
- [3] BENATTI H. G. *Complexidade Descritiva de Problemas em Grafos*. Tese de Doutorado, UFPE, 2000.
- [4] BENATTI, H. G. *Homeomorfismo em grafos: Algoritmos e complexidade computacional*. Dissertação de Mestrado,IME-USP, 1993.
- [5] BOAVENTURA NETTO, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [6] BOAVENTURA NETTO, P. O. *Teoria e Modelos de Grafos*. Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 1979.
- [7] BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: introdução e prática*. Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 2009.
- [8] BOLLOBÁS, B. *Modern Graph Theory*. (Graduate texts in mathematics; 184). Springer-Verlag, 1998.
- [9] BONDY, J. A.; MURTHY, U. S. R. *Graph Theory*. (Graduate texts in mathematics; 244). Springer-Verlag, 2008.
- [10] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 2001
- [11] BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

- [12] CHARTRAND, G. *Introductory Graph Theory*. Ed. Dover, Bonston, USA, 1997.
- [13] DE MORAIS FILHO, D. C. *Convite à Matemática*. (Coleção Professor de Matemática; 23). Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [14] DE MORAIS FILHO D. C. *Manual de Redação Matemática*. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2009.
- [15] DIESTEL, R. *Graph Theory - Edição Eletônica 2000*. (Graduate texts in mathematics; 173) Ed. Springer-Verlag, 2000.
- [16] FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y. E YAKABAYASHI, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. In: II Bienal da SBM, Salvador, 2004. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/pf/teoriadosgrafos/>>. Acesso em: 14 de dezembro de 2013.
- [17] FOMIN, D.; GENKIN, S. ... [et al.]. *Círculos Matemáticos*. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [18] GOLDBARG, M. C.; GOLDBARG E. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier Editora, Rio de Janeiro, 2012.
- [19] HARARY, F. *Graph Theory*. Addison Wesley, 1969.
- [20] HARRIS, J. M.; HIRST, J. L.; MOSSINGHOFF, M. J. *Combinatorics and Graph Theory*. (Undergraduate Texts in Mathematics). Ed. Springer, 2008.
- [21] HOLANDA, B. ... [et al.]. *Treinamento do Cone Sul*. Fortaleza: Realce Editora e Indústria Gráfica 2010.
- [22] LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; e VESZTERCOMBI K. *Matemática Discreta*. (Coleção Professor de Matemática; 30) Tradução de Ruy J. G. B. de Queiroz. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [23] LUCCHESI, C. L. ... [et al.]. *Aspectos Teóricos da Computação*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [24] MOREIRA, M. L. *Grafos: No Sítio e A Cores*. In: J. Rocha e C. C. Sá (editores). *Treze Viagens pelo mundo da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [25] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: combinatória*. (Coleção Professor de Matemática; 27). Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [26] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araujo. 2. reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
- [27] RIBEIRO, A. C. *Sobre Algoritmo de Emparelhamento Máximo e Grafos  $p$ -extensíveis*. Dissertação de Mestrado. Mestrado em Ciência da Computação. Universidade Federal de Goiás, 2008. Disponível em: <<http://www.inf.ufg.br/mestrado/dissertacoes?page=8>>. Acesso em: 07 de janeiro de 2014.
- [28] SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.
- [29] SHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta: uma introdução*. Tradução All Tasks. São Paulo: Cengage, 2013.
- [30] SIMÕES-PEREIRA, J. M. S. *Grafos e redes: teoria e algoritmos básicos*. Rio de Janeiro: Interciência, 2013.
- [31] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1986.
- [32] WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*. 4. ed. Harlow: Longman, 1996.