UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS, DESCARTES, MÖBIUS E VINCENT

José Paixão de Santana

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana
Agosto de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS, DESCARTES, MÖBIUS E VINCENT

José Paixão de Santana

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana
Agosto de 2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

S223e

Santana, José Paixão de

As equações algébricas, Descartes, Möbius e Vincent / José Paixão de Santana. – Feira de Santana, 2014.

44 f.

Orientador: Jean Fernandes Barros.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Equações algébricas. 2. Álgebra. I. Barros, Jean Fernandes, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 512

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente José Paixão de Santana do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte e seis dias do mês de agosto de dois mil e quatorze às 9:30 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"As Equações Algébricas, Descartes, Möbius e Vincent"**, do discente **José Paixão de Santana**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Evandro C. F. dos Santos (UFBA) e Claudiano Goulart (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 26 de agosto de 2014.

Jean F. B.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)
Orientador

Prof. Dr. Evandro C. F. dos Santos (UFBA)

Prof. Dr. Claudiano Goulart (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Aos meus filhos, Vida Belle e Lincoln José.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por mim "iluminar", ontem, hoje e sempre, e por todas as bênçãos que tem derramado sobre mim.

Agradeço, em especial, a minha mãe por todo incentivo que sempre mim deu e por seu exemplo de amor, força e perseverança para com todos com quem conviveu, enquanto esteve neste plano, motivo pelo qual estou chegando aqui hoje.

Agradeço a minha esposa, Tamires, por toda paciência, incentivo e companheirismo, de forma especial e carinhosa, principalmente nos momentos de maiores dificuldades, agradeço também, aos meus filhos, Vida Belle, a primogênita, e Lincoln José, que chegou em meados deste curso, que mesmo não tendo noção do que estava acontecendo mim trouxeram alegria e inspiração para seguir em frente.

Agradeço a meu sogro e minha sogra, meus segundos pais, por toda fé, compreensão, apoio e torcida, desde o início até a conclusão deste curso.

Agradeço a meu pai, meu companheiro de todas as horas, e meus irmãos, pelo espírito de confiança e positividade sempre, também agradeço aos demais familiares que sempre acreditaram em meus ideais.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Fernandes Barros, primeiro por aceitar mim orientar, depois pela paciência, pelas sugestões e grandiosidade de idéias. Agradeço aos demais professores que estiveram conosco durante o mestrado.

Agradeço à Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) pelo acolhimento como aluno durante este curso de mestrado. Agradeço, também, à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior) pela bolsa durante os 24 meses do programa, sem a qual eu não teria condições de arcar com deslocamento e materiais de estudo.

Agradeço aos meus colegas de curso, com os quais estive junto nessa caminhada, compartilhando conhecimento, além do incentivo de uns para com os outros. Agradeço, também, a todos meus amigos que de forma direta ou indireta colaboraram para meu crescimento pessoal e intelectual durante o mestrado.

“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charlie Chaplin)

Resumo

Neste trabalho, destacamos a resolubilidade das equações cúbicas e quárticas por meio de operações racionais e extrações de raízes (Fórmulas de Cardan). Inicialmente, introduzimos o corpo dos números complexos como uma subálgebra das matrizes de ordem 2. Isto, permite-nos ampliar o universo que as soluções das equações podem abranger. Em seguida, inserimos, de modo geral, as equações algébricas, relatando, em particular, um pouco sobre a história das equações cúbicas e das quárticas, bem como, o método direto de estudo de suas raízes, ou seja, suas resoluções por radicais. Posteriormente, apresentamos um método indireto de estudo das raízes de equações polinomiais, o qual nos permite, inclusive, o estudo das raízes de equações de grau $n > 4$. Este método consiste em estudar a variação de sinais dos coeficientes da equação, através da Regra de Sinais de Descartes, utilizando as Transformações de Möbius e sob a inspiração do Teorema de Vincent, com o auxílio do sistema algébrico computacional MAXIMA. Este método foi proposto com o intuito de possibilitar que estudantes do ensino médio possam estudar as raízes das equações de grau $n > 2$, que normalmente não acontece, além de incentivá-los à manipulação das novas tecnologias. Finalizamos com uma proposta de atividade desenvolvida para alunos do ensino médio, sugerindo o estudo de raízes de equações polinomiais de grau bastante elevado.

Palavras-chave: Equações algébricas; Fórmulas de Cardan; Regra de Sinais de Descartes; Transformações de Möbius; Teorema de Vincent; MAXIMA.

Abstract

In this work we intend to highlight the solvability of cubic and quartic equations by radicals and arithmetic operations (forms of Cardan). We begin by introducing the field of complex numbers as a subalgebra of matrices of order 2. This allows us to expand the universe that the solutions of the equations can cover. Then inserted, in general, algebraic equations, describing, in particular, a little about the history of the cubic and quartic, as well as the direct method of studying their roots, ie, its resolutions by radicals. Subsequently, we present an indirect method of studying the roots of polynomial equations, which allows us, including the study of the roots of equations of degree $n > 4$. This method consists in studying the signs of the coefficients of the equation, which is done by applying the Descartes Rule of Signs, using the Möbius transformations and under the inspiration of the theorem of Vincent, with the aid of the MAXIMA computer system. This method was proposed in order to allow high school students can make study of the roots of equations of degree $n > 2$ that normally doesn't happen, and encourage them to handling new technologies. We end with a proposed activity developed for high school students suggesting the study of the roots of polynomial equations of very high degree.

Keywords: Algebraic equations; Cardan formulas; Descartes Rule of Signs; Möbius transformations; Theorem of Vincent; MAXIMA.

Sumário

Introdução

Nosso trabalho, em seu primeiro capítulo, aborda o corpo dos números complexos, levando em conta a necessidade de ampliar o corpo dos reais para considerarmos o conjunto solução de equações do tipo $X^2 + 1 = 0$ como não vazio. Para tanto, utilizaremos a abordagem de matrizes de ordem 2 com entradas reais e obteremos uma caracterização desses números. Em seguida, desenvolveremos suas formas algébrica e polar, assim como suas operações e propriedades.

No capítulo 2, trazemos o método direto para a resolução de equações algébricas, sendo que iniciaremos com uma breve contextualização histórica das equações de modo geral e, posteriormente, nos ateremos as equações polinomiais cúbicas e quárticas. A partir da forma geral das equações cúbicas $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, trabalharemos, em função de seus coeficientes, por meio de operações algébricas fundamentais e extração de raízes quadradas e cúbicas, de modo a determinar expressões que nos permitem calcular suas raízes. Estas expressões são conhecidas como fórmulas de Cardan. Em seguida, faremos o estudo detalhado da natureza das raízes das cúbicas, fazendo o estudo do sinal de seu discriminante Δ(delta) , ou seja, analisaremos os três casos possíveis: discriminante positivo, nulo ou negativo; observando em cada caso o comportamento de suas raízes. Para efeito, de simplificação dos resultados, sem perda de generalidade, consideraremos apenas equações com coeficientes reais. Na sequência, abordaremos o estudo das raízes das equações polinomiais de quarto grau, cujo desenvolvimento de sua solução algébrica deve-se a Ferrari, aluno de Cardan, tendo sido publicada em 1545, no livro *The Great Art or the rules of Algebra* (Ars Magna) de Girolano Cardan, juntamente com o método resolutivo das cúbicas.

No capítulo 3, traremos um método indireto de estudo das raízes de equações polinomiais que nos permite, inclusive, estudar as raízes de equações de grau $n > 4$. Esse método consiste em utilizar a Regra de Sinais de Descartes que possibilita-nos determinar a quantidade de raízes positivas de uma equação polinomial de grau arbitrário que por meio das transformações de Möbius podemos identificar os intervalos reais nos quais se encontram essas raízes e, consequentemente, nos são dadas condições para estudar as raízes negativas e a quantidade de raízes imaginárias com o auxílio do teorema fundamental da Álgebra.

Vale ressaltar que todo esse estudo ocoore sob a inspiração do teorema de Vincent, o qual, vem justificar o fato de que as transformações de Möbius fazem a arrumação de sinais dos coeficientes de um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$, em ordem decrescente dos graus dos termos, em um certo intervalo.

Fazemos, também, uso do sistema computacional MAXIMA,[1] tanto para nos auxiliar

[1] O MAXIMA é um sistema para a manipulação de expressões simbólicas e numéricas, incluindo diferenciação, integração, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, vetores, matrizes, entre outros. O MAXIMA produz resultados de precisão elevada, e pode traçar funções e dados em duas e três dimensões. É considerado um software livre, podendo então ser usado sem necessidade de registro e

no processo algébrico de transformação das equações assim como para determinar as raízes das equações.

Por fim, no quarto capítulo, trazemos uma proposta de atividade para alunos do ensino médio, buscando dessa forma mostrar a importância do uso das tecnologias em meio à matemática assim como sua capacidade de proporcionar a acessibilidade à conteúdos ditos de "nível superior" à alunos do ensino médio.

pagamento, isto é, um software gratuito. Um dos poucos nessa área. Seu download pode ser feito através do seguinte link: http://ufpr.dl.sourceforge.net/sourceforge/maxima/maxima-5.9.2.exe.

Capítulo 1

O Corpo dos Números Complexos como Subálgebra de Matrizes de Ordem 2

Inicialmente, é importante entendermos o porquê do uso do adjetivo complexo para qualificar estes ditos números. Voltando um pouco na história da Matemática, torna-se notório perceber que esse adjetivo é fruto das elevadas dificuldades de abstrações para compreender o conceito de tais números, por parte dos matemáticos, na época de seu surgimento. Contudo, nos dias atuais a palavra "complexo" já não faz mais tanto sentido, pois sabemos que o conceito de número real exige nível de abstração equivalente.

Podemos exemplificar isso, trabalhando uma equação que nos mostra a necessidade de ampliar o corpo dos números reais para considerarmos seu conjunto solução, como não vazio, qual seja: $X^2 + 1 = 0$.

Vejamos, é imediato que não há solução em $\mathbb{R}$, pois, não existe número real que elevado ao quadrado seja um número negativo. Sendo assim, busquemos um "novo número", que denotamos por i, que satisfaça $i^2 = -1$. E assim, obtemos uma solucão da equação proposta. Para tanto, utilizaremos a abordagem da álgebra de matrizes de ordem 2 com entradas reais para obtermos uma caracterização destes números, como encontramos em [9]. Desta forma, consideremos a equação na forma

$$X \cdot X = -I$$

onde X é uma matriz 2×2 com coeficientes reais, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e "$\cdot$" indica o produto de matrizes. Segue-se, imediatamente que a matriz

$$i := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma solução. Geometricamente, esta matriz representa uma rotação de ângulo reto, em $\mathbb{R}^2$, no sentido anti-horário.

Construiremos um subconjunto da álgebra de matrizes de ordem 2 que inclua i e que estenda $\mathbb{R}$ como um corpo. Inicialmente, associemos ao número real a a matriz $aI = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. É imediato que o conjunto $\mathfrak{R} := \{aI : \ a \in \mathbb{R}\}$, munido das operações de adição e multiplicação de matrizes, é um corpo, claramente, isomorfo a $\mathbb{R}$.

Agora, consideremos o conjunto $\mathfrak{C} := \{aI + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}$, munidos das operações de adição e multiplicação de matrizes. Observemos que $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}$. Sendo assim, chamamos os "números" da forma $aI + 0i = aI$, de *reais*, e os da forma $aI + bi = bi$, com $a \neq 0$, indistintamente, de *imaginários ou complexos*. A seguir, mostremos que $\mathfrak{C}$ é um corpo. Da álgebra de matrizes, é fácil ver que $\mathfrak{C}$ é uma subálgebra comutativa com elemento identidade. Resta-nos mostrar que todos os elementos não nulos de $\mathfrak{C}$ são invertíveis. Observemos que o inverso multiplicativo de um número complexo (matriz) $aI + bi$ só existe se, $aI + bi \neq 0I + 0i$, ou seja, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, pois, caso contrário, o determinante da matriz $aI + bi$ seria nulo. E, consequentemente, a matriz não seria invertível. Observe ainda que, $det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2$ anula-se se, e somente se, $a = b = 0$. Satisfeitas estas condições, o inverso multiplicativo de $aI + bi$ é dado por

$$(aI+bi)^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = \frac{a}{a^2+b^2}I + \frac{-b}{a^2+b^2}i.$$

Logo, $\mathfrak{C}$ é um corpo, que a partir de agora, denotemos por $\mathbb{C}$. E mais, usando os isomorfismos acima, podemos escrever um número complexo, simplesmente, por $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Esta forma de escrever um número complexo é denominada de sua forma algébrica. Neste contexto, temos que $\mathfrak{C}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Desta forma, dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, temos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

1.1 Conjugado e Módulo

Seja $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O *conjugado* de z, denotado por $\overline{z}$ é o número complexo $a - bi$. Já o *módulo* ou *valor absoluto* de z, denotado por $|z|$, é dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Neste caso, a e b são, respectivamente, chamados de a parte real e a parte imaginária de z, os quais, respectivamente, denotamos por $R(z) = a$ e $I(z) = b$. Note que $R(z) = a$ e $I(z) = b$ são as coordenadas do ponto z no plano $\mathbb{R}^2$, que chamamos de *plano complexo*, ou *de Argand-Gauss*, sempre que consideramos seus pontos como números complexos.

Dentre outras informações, a conjugação fornece-nos a seguinte relação:

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

É fácil ver que

1. $a = R(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$;
2. $b = I(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{-i}{2}(z - \overline{z})$;
3. $z \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $z = \overline{z}$;
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

E mais, usando (5), obtemos

$$(6)\ |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

ou seja,

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

donde, extraindo a raiz quadrada de ambos membros da igualdade acima, obtemos

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Disto, segue-se que, para $z_2 \neq 0$,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1 z_2^{-1}| = |z_1||z_2^{-1}| = |z_1||z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Na penúltima igualdade, usamos o fato de que

$$1 = |1| = |z_2 z_2^{-1}| = |z_2||z_2^{-1}|.$$

1.2 Representação Polar

Cada ponto do plano complexo é representado por um número complexo que pode ser definido por um par ordenado de números reais $(x, y) = x + yi$.

Também, podemos identificar os pontos do plano complexo através de suas *coordenadas polares*, (ρ, θ). Note que a coordenada ρ é a distância à origem do ponto, e a coordenada θ é o ângulo determinado pelo segmento de comprimento ρ e o semi-eixo real positivo, medido no sentido anti-horário, desde que o ponto seja $(x, y) \neq (0, 0)$. É importante ressaltar, de uma vez por todas, que medimos ângulos em radianos.

Temos assim, a seguinte relação entre coordenadas cartesianas e polares:

$$x = \rho \cos\theta \text{ e } y = \rho sen\theta.$$

Portanto, todo número $z = x + iy = (x, y) \neq 0$ pode ser escrito da seguinte forma

$$z = \rho\cos\theta + i\rho sen\theta = \rho(\cos\theta + isen\theta),$$

a qual chamamos de *representação polar* ou *forma polar* de $|z|$.

Para qualquer valor de θ que torne a igualdade acima verdadeira, chamamos θ de um argumento de z, e usamos a notação $\theta = arg(z)$. Note que θ não é único, pois, se para um certo valor de θ a igualdade é verdadeira, então, para $\theta + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, também é um argumento. Porém, podemos determinar θ de maneira única de modo que se cumpra, por exemplo, a seguinte exigência: $0 \leq \theta < 2\pi$ ou que $-\pi < \theta \leq \pi$.

Para o que se segue, sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ escritos nas suas formas polares, digamos,

$$z_1 = \rho(\cos\theta + isen\theta) \text{ e } z_2 = r(\cos\phi + isen\phi).$$

Observemos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $\rho = r$ e $\theta = \phi + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Vejamos alguns fatos.

Proposição 1.2.1 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho}{r}[\cos(\theta - \phi) + isen(\theta - \phi)]$.

Demonstração. Vejamos,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{\rho(\cos\theta + isen\theta)r(\cos\phi - isen\phi)}{r^2} = \frac{\rho(\cos\theta + isen\theta)r[\cos(-\phi) + isen(-\phi)]}{r^2}.$$

Segue que, usando as fórmulas de adição de arcos, obtemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho}{r}[\cos(\theta - \phi) + isen(\theta - \phi)].$$

□

Proposição 1.2.2 $z_1z_2 = \rho r[\cos(\theta+\phi) + isen(\theta+\phi)]$.

Demonstração. Observando que

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= \rho(\cos\theta + isen\theta)r(\cos\phi + isen\phi) \\ &= \rho r[(\cos\theta\cos\phi - sen\theta sen\phi) + i(\cos\theta sen\phi + sen\theta\cos\phi)], \end{aligned}$$

e usando as fórmulas de adição de arcos, obtemos

$$z_1z_2 = \rho r[\cos(\theta+\phi) + isen(\theta+\phi)].$$

□

Da Proposição 1.2.2, temos que $arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$, ou seja, o argumento do produto é a soma dos argumentos. Fazendo $z_1 = z_2$, obtemos

$$z_1^2 = \rho^2[\cos(2\theta) + isen(2\theta)],$$

igualdade esta bastante sugestiva que nos leva a seguinte fórmula, conhecida como *primeira fórmula de De Moivre*,

Proposição 1.2.3 $z_1^n = [\rho(\cos\theta + isen\theta)]^n = \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para $n = 0$ a igualdade é imediata. Para $n \in \mathbb{N}$, demonstra-se, facilmente, por indução sobre n, usando a Proposição 1.2.2. Seja $n < 0$. Note que se $z = \cos\alpha + isen\alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z},$$

já que $|z| = \sqrt{sen^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$. Segue-se que

$$\begin{aligned} z_1^n &= [\rho(\cos\theta + isen\theta)]^n = \rho^n[(\cos\theta + isen\theta)^{-n}]^{-1} \\ &= \rho^n[\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)]^{-1} = \rho^n[\cos(n\theta) - isen(n\theta)]^{-1} \\ &= \rho^n[\cos(n\theta) + isen(n\theta)]. \end{aligned}$$

□

Sejam $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $w^n = z$. Nestas condições, w é uma raiz n-ésima de z. Segue-se a seguinte fórmula, conhecida como a *segunda fórmula de De Moivre*,

Proposição 1.2.4 *Sejam* $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então, as raízes* n*-ésimas de* z *são dadas por*

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Demonstração. Seja $w = r(\cos\phi + isen\phi)$, uma das raízes n-ésimas de z. Sendo assim, pela primeira fórmula de De Moivre e pelas condições de igualdade de números complexos na forma polar, temos que

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } \phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, para $k \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que o conjunto solução de $w^n = z$ é $\{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$. De fato, basta observar que $w_s = w_t$ se, e somente se, $s \equiv t \mod n$. Logo, os w_k's são dois a dois distintos para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. $\square$

Exemplo 1.2.1 *As raízes n-ésimas da unidade, isto é, as raízes da equação $w^n = 1$, são dadas por*

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Observe que, dado $z \in \mathbb{C}$, todas as raízes n-ésimas de z são da forma $z_0 w_k$, onde z_0 é uma raiz n-ésima de z. De fato, basta observar que $\left(\frac{z_i}{z_0}\right)^n = 1$, com z_i uma raiz n-ésima qualquer de z.

Para $n = 3$, temos que

$$w_0 = 1,\ w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Observemos que $w_1^2 = w_2$, pois, $\arg(w_1^2) = 2\arg(w_1) = \arg(w_2)$. Sendo assim, obtemos as raízes w_1, w_1^2 e $w_1^3 = 1$, que são todas as raízes cúbicas da unidade.

De modo mais geral, observando que $\arg(w_1^k) = k\arg(w_1) = \arg(w_{k+1})$, para $2 \leq k \leq n-1$, ou seja, $w_1^k = w_{k+1}$. E assim, concluímos que as raízes n-ésimas da unidade são $w_1, w_1^2, w_1^3, \ldots, w_1^{n-1}$ e $w_1^n = 1$, onde $w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + isen\frac{2\pi}{n}$. Além disso, observemos que as raízes n-ésimas da unidade, como pontos no plano complexo, são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito no círculo de centro em $(0, 0)$ e raio 1.

Da última parte do exemplo acima, segue-se que se uma das raízes cúbicas de A poder ser denotada, simbolicamente, por $\sqrt[3]{A}$, então as raízes cúbicas de A são

$$u_1 = \sqrt[3]{A},\ u_2 = w_1\sqrt[3]{A} \ e\ u_3 = w_1^2\sqrt[3]{A}.$$

Para obter maior aprofudamento a respeito da parte final desse capítulo, recomendamos ler [5].

Capítulo 2

Método Direto para a Resolução de Equações Algébricas

Resolver uma equação algébrica da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$, que é um problema central em Álgebra, consiste em determinar todas as suas raízes, reais ou imaginárias, que atribuídas à incógnita x satisfaz a igualdade. Para o que se segue, diremos que a equação *tem grau* n se, o termo a_n for diferente de zero. Denominamos este termo de *termo lider*.

Um resultado crucial para o estudo das equações polinomias é o teorema fundamental da álgebra, admitido aqui sem demonstração. A demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss (1.777-1.855) no ano de 1.798, e cujo enunciado é

Toda equação polinomial com coeficientes complexos de uma variável de grau n, $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz, real ou complexa.

Com isso, é importante ressaltarmos que quanto maior for o grau n, $n \geq 1$, de uma equação, mais trabalho teremos para definir todas as suas raízes.

Equações do tipo $ax + b = 0$, equações polinomiais do primeiro grau, tem sua solução determinada pela expressão $x = -\frac{b}{a}$, ou seja, a raiz é determinada por meio de operações aritméticas que envolvem coeficientes arbitrários.

Já as equações polinomiais do segundo grau, equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são, de modo geral, resolvidas pela fórmula, conhecida como *fórmula de Baskhara*,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

fórmula esta, obtida a partir da própria equação, completando quadrados.

É importante ressaltarmos que o símbolo $\sqrt{b^2 - 4ac}$ representa ambas as raízes quadradas de $b^2 - 4ac$. Ao examinarmos está fórmula, percebemos que, além de resolver operações racionais, temos que "extrair" a raiz quadrada de um certo número complexo.

Existem equações do 2º grau especiais que consistem, simplesmente, na extração de uma raiz quadrada de um determinado número, que são as equações do tipo $x^2 = A$. Logo, no caso em que $A \in \mathbb{R}$, a solução de uma equação quadrática do tipo $x^2 = A$, em geral, consiste em "extrair" a raiz quadrada, seja ela exata ou com a aproximação desejada, do número real A, o que é algo familiar e de fácil execução. Novamente, existem métodos sistemáticos para "extrair" raízes cúbicas de números reais, isto é, de resolver equações cúbicas especiais da forma $x^3 = A$. Este fato leva-nos a considerar os radicais $\sqrt[3]{A}$ como algo familiar e “conhecido”. Mais geralmente, a raiz de equações do modelo $x^n = A$, onde $A \in \mathbb{R}$, podem ser facilmente encontrados, de forma exata ou aproximadamente, usando, por exemplo, as tabelas logarítmicas. Até mesmo quando A é um número complexo, os valores de $\sqrt[n]{A}$ podem ser calculados, aproximadadente, por meio de tabelas de logaritmos de números e funções trigonométricas. Dessa forma, percebemos que os radicais do tipo $\sqrt[n]{A}$ representam quantidades facilmente determináveis.

A solução de uma equação que apresenta as suas raízes através de uma combinação das operações racionais e extrações de raiz é chamada *solução algébrica* ou *solução por radicais*.

Como já vimos, a equação quadrática é sempre solúvel por radicais, não importam os valores atribuídos a seus coeficientes. Mas, e as equações das formas $Ax^3+Bx^2+Cx+D = 0$ e $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, ou seja, equações cúbicas e quárticas, e equações de grau n, para $n > 4$? Elas são solúveis por radicais para valores quaisquer de seus coeficientes? A busca por respostas a estas perguntas desafiou algebristas, em especial, algebristas italianos, tais como Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardan e Ferrary, que na primeira metade do século XVI, demonstraram que as equações cúbicas e quárticas são solúveis por radicais para valores arbitrários de seus coeficientes. Inclusive há um impasse entre Cardan e Tartaglia a respeito do método resolutivo das cúbicas. O método apareceu publicado em 1545, no livro *The Great Art or the rules of Algebra* (Ars Magna), com as devidas referências a del Ferro e Tartaglia, de Girolamo Cardan, um médico, astrólogo, matemático, escritor prolífico, suspeito de heresia, enfim uma das figuras mais controversas de seu tempo, juntamente com a fórmula da equação quártica, atribuída por Cardan, “a seu pedido”, a seu discípulo L. Ferrary.

Conta a história que o método conhecido como “fórmula de Cardan”, cujo mérito, segundo Cardan, é de Scipione del Ferro, um professor de matemática da Universidade de Bolonha, que descobriu, em 1515, como resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + bx = c$, pertence, de fato, a Tartaglia. O fato é que del Ferro manteve sua fórmula em segredo, a fim de levar vantagem em duelos ou torneios matemáticos, como era costume entre os matemáticos da época. Quando del Ferro veio a óbito, em 1526, apenas duas pessoas conheciam seu trabalho, que eram seu genro e um de seus alunos, de nome Antonio Fior de Veneza.

Em 1535, Antonio Fior, tirando proveito do método de del Ferro, convidou o grande matemático Niccolo Tartaglia de Brescia para um debate, pois, Tartaglia proclamava que tinha descoberto a fórmula resolutiva das cúbicas do tipo $x^3 + bx^2 = c$ e, por sua vez, Fior não acreditava em tal descoberta. Poucos dias antes do debate, Tartaglia dedicou-se em solucionar também as cúbicas do tipo $x^3 + ax = c$ e, na noite de 12 para 13 de fevereiro de 1535, segundo o mesmo, num lampejo, conseguiu tal descoberta. É obvio que como Tartaglia era capaz de resolver dois tipos de cúbicas ao passo que Fior só podia resolver um, facilmente, Tartaglia ganhou o debate.

Foi então que Cardan soube da vitória de Tartaglia, e ficou ansioso para aprender seu método. Tartaglia, por sua vez, conseguiu evitar ao máximo sua aproximação, porém, quatro anos depois, houve um encontro entre eles e, após fazer Cardan jurar segredo, imedindo-o de publicar, Tartaglia expôs seu método. Contudo, alguns anos depois, numa visita a Bolonha, Cardan encontrou-se com o genro de del Ferro, e assim ficou sabendo da solução para a equação $x^3 + bx = c$ obtida, anteriormente, por del Ferro. Com isso, sentindo, talvez, que tal conhecimento o desobrigava de sua promessa a Tartaglia, Cardan publicou sua versão “aperfeiçoada” do método de Tartaglia, no Ars Magna. Sua atitude provocou um grande e amargo ataque de Tartaglia, proclamando ter sido traído por

Cardan.

Durante os dois séculos seguintes todas as tentativas para encontrar uma solução algébrica geral para equações de grau n, para $n > 4$, foram em vão, não por falta de criatividade dos matemáticos da época, que se ocuparam com isso, e sim, por conta das dificuldas encontradas para tratarem o problema como antes. Até que, no início do século XIX, comprovou-se, primeiro por Ruffini, com algumas lacunas, e depois por N. H. Abel (1.802-29), e também por E. Galois (1.811-32), que é impossível expressar, por meio de uma fórmula envolvendo operações racionais e envolvendo radicais, as raízes de equações de grau n, para $n > 4$, com coeficientes arbitrários. Neste trabalho, nós nos preocuparemos com as equações cúbicas e quárticas. Para mais informações, consulte [4]. Para o que se segue, utilizamos como referência [10].

2.1 Equações Cúbicas

Consideremos equações do tipo $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, onde A, B, C e D são números reais, com $A \neq 0$. Sem perda de generalidade, como $A \neq 0$, podemos considerar a equação geral do $3^{\underline{0}}$ grau como segue

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (*)$$

Com o intuito de chegarmos a solução geral da equação cúbica, o próximo passo é eliminarmos o termo de grau 2. Para tanto, podemos utilizar o processo de "completar cubo". Com isso, chegamos a

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + p\left(x + \frac{a}{3}\right) + q = 0,$$

onde $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ e $q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c$. E assim, a equação proposta é transformada em

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (1)$$

onde, $y = x + \dfrac{a}{3}$.

A equação cúbica da forma (1) pode ser resolvida por meio da seguinte substituição. Substituíndo $y = u + v$ em (1), chegamos a

$$u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0 \qquad (2)$$

Impondo a condição $p + 3uv = 0$, segue-se, a partir de (2), que $u^3 + v^3 = -q$. Logo, a solução da equação cúbica (1) é obtida a partir da solução desse sistema de duas equações, nas incógnitas u e v,

$$u^3 + v^3 = -q \text{ e } uv = -\tfrac{p}{3} \qquad (3)$$

Elevando essa última equação ao cubo, obtemos

$$u^3v^3 = -\tfrac{p^3}{27} \qquad (4)$$

Sendo assim, de (3) e (4), concluímos que u^3 e v^3 são as raízes da equação quadrática $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, denominada de *resolvente*.

Sejam A e B as raízes da resolvente. Desta forma,

$$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \text{ e } B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

E assim, podemos escolher a raiz quadrada que desejarmos. Uma vez encontrada as raízes, A e B, da resolvente, podemos escrever, por exemplo, $u^3 = A$ e $v^3 = B$. que, como foi citado no Capítulo 1, Seção 1.2, Página 7, se uma das raízes cúbicas de A poder ser denotada, simbolicamente, por $\sqrt[3]{A}$, então os três valores possíveis para u são

$$u=\sqrt[3]{A}, \qquad u=w\sqrt[3]{A}, \qquad u=w^2\sqrt[3]{A},$$

onde $w=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

De maneira análoga, obtem-se os três valores possíveis para v, que são eles

$$v=\sqrt[3]{B},\ v=w\sqrt[3]{B} \text{ e } v=w^2\sqrt[3]{B}.$$

Note que, há nove possibilidades de soluções para a equação (1). No entanto, seis delas, ou seja, as combinações

$$\begin{array}{r}\sqrt[3]{A}+w\sqrt[3]{B}\\ \sqrt[3]{A}+w^2\sqrt[3]{B}\\ w\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\\ w\sqrt[3]{A}+w\sqrt[3]{B}\\ w^2\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\\ w^2\sqrt[3]{A}+w^2\sqrt[3]{B},\end{array}$$

não satisfazem a condição $uv=-\frac{p}{3}$, como mostramos a seguir:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{A}w\sqrt[3]{B} &= wuv=-w\frac{p}{3}\\ \sqrt[3]{A}w^2\sqrt[3]{B} &= w^2uv=-w^2\frac{p}{3}\\ w\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} &= wuv=-w\frac{p}{3}\\ w\sqrt[3]{A}w\sqrt[3]{B} &= w^2uv=-w^2\frac{p}{3}\\ w^2\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} &= w^2uv=-w^2\frac{p}{3}\\ w^2\sqrt[3]{A}w^2\sqrt[3]{B} &= w^4uv=-w^4\frac{p}{3}=wuv=-w\frac{p}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, apenas as três combinações, a seguir, entre u e v, satisfazem as condições, $uv=-\dfrac{p}{3}$ e $u^3+v^3=-q$, preestabelecidas como requísitos para soluções da equação (1), que são:

$$\begin{aligned}y_1 &= \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\\ y_2 &= w\sqrt[3]{A}+w^2\sqrt[3]{B}\\ y_3 &= w^2\sqrt[3]{A}+w\sqrt[3]{B},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
y_2 &= w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
y_3 &= w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{a}{3}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
x_2 &= -\frac{a}{3}+w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
x_3 &= -\frac{a}{3}+w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}
\end{aligned}$$

são as soluções da equação $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$.

Estas expressões são conhecidas como a fórmula de Cardan, que foi o primeiro algebrista a publicá-las, como mencionamos acima.

Agora, façamos um estudo detalhado da natureza das raízes de uma equação cúbica por meio da fórmula de Cardan. Para tanto, consideremos p e q números reais. Segue-se que a natureza das raízes dependerá do sinal do discriminante, dado por $\Delta = 4p^3+27q^2$, obtido da expressão $\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$.

Sendo assim, Δ pode ser positivo, nulo ou negativo. A seguir, analisaremos estas possibilidades.

2.1.1 Caso 1

Seja $\Delta > 0$. Sendo assim, $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{\Delta}{108}}$ é um número real positivo. E, como $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}$, temos $y_1 = \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ é uma raiz real da cúbica. As outras raízes são

$$\begin{aligned}
y_2 &= -\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}+i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2}\\
y_3 &= -\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}-i\sqrt{3}\frac{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}{2},
\end{aligned}$$

que são as raízes imaginárias não nulas, desde que $A \neq B$. Obervemos que estas raízes são conjugadas.

O caso em que $A = B$, será tratado mais adiante.

Exemplo 2.1.1 *Usando a fórmula de cardan, resolvamos, em $\mathbb{C}$, a quação cúbica $x^3+x^2-2=0$. Primeiro, devemos transformá-la em uma cúbica do tipo $y^3+py+q=0$, e* *assim, eliminando o termo de grau 2. Para tanto, devemos usar a substituição $x = y - \frac{1}{3}$, já que $a = 1$. Desta forma, chegamos a*

$$y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{52}{27} = 0.$$

Como $p = -\dfrac{1}{3}$ *e* $q = -\dfrac{52}{27}$*, temos que* $\Delta = 100$*. E então,*

$$A = \frac{1}{27}(26 + 5\sqrt{27}) \ e \ B = \frac{1}{27}(26 - 5\sqrt{27}).$$

Logo,

$$\sqrt[3]{A} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \ e \ \sqrt[3]{B} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} \\
y_2 &= -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right) \\
y_3 &= -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Por conseguinte, temos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} - 1\right) \\
x_2 &= -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} + 2\right) + i\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right) \\
x_3 &= -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} + 2\right) - i\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

De outra maneira, é fácil ver que 1 é a solução real de $x^3 + x^2 - 2 = 0$. Este fato leva-nos a escrever $(x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$. E assim, as outras soluções são $-1 \pm i$, que são as duas raízes imaginárias da equação $x^3 + x^2 - 2 = 0$. Disto, segue-se que

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 4,$$

ou seja, temos uma soma entre dois números irracionais que resulta em um número racional. Este fato, por si só, é bastante curioso. Porém, analisando as outras raízes, chegamos a

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Ou ainda,

$$\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} - \left(2 - \sqrt{3}\right).$$

Donde,

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \text{ e } \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

já que

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 26+15\sqrt{3} \text{ e } \left(2-\sqrt{3}\right)^3 = 26-15\sqrt{3},$$

ou seja, $26+15\sqrt{3}$ é o cubo de $2+\sqrt{3}$ e $26-15\sqrt{3}$ é o cubo de $2-\sqrt{3}$. Observemos que ocorreu uma simplificação de raízes cúbicas. Isso decorre do fato da equação cúbica possuir uma raiz racional.

2.1.2 Caso 2

Seja $\Delta = 0$. E assim, obtemos $A = B = -\dfrac{q}{2}$. Sendo assim, as raízes da equação $y^3+py+q=0$ são todas reais, que são

$$y_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},\ y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \text{ e } y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Observemos que $y_2 = y_3$ é uma raiz dupla. A outra possibilidade é que $q=0$, donde, $p=0$, pois, a condição $\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}$ deve ser satisfeita. Neste caso, as três raízes são nulas. Então, a equação reduz=se a $y^3=0$, cuja a solução é trivial.

2.1.3 Caso 3

Seja $\Delta < 0$. Neste caso, $\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}} = i\sqrt{\dfrac{-\Delta}{108}}$, é um imaginário puro. E assim, $A = -\dfrac{q}{2}+i\sqrt{\dfrac{-\Delta}{108}}$ e $B = -\dfrac{q}{2}-i\sqrt{\dfrac{-\Delta}{108}}$ são números imaginários. Segue-se que as raízes da equação cúbica (1) são expressas por raízes cúbicas de números imaginários, o que resulta em três raízes reais. Verifiquemos este fato. Para tanto, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\sqrt[3]{A} = a+bi$. Sabendo que B é o conjugado de A, podemos considerar $a-bi$ como uma das raízes cúbicas de B, ou seja, $\sqrt[3]{B} = a-bi$, de modo que a condição

$$\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}$$

seja satisfeita. E assim, pela fórmula de Cardan, as raízes da equação (1) são

$$y_1 = 2a,\ y_2 = -a-b\sqrt{3} \text{ e } y_3 = -a+b\sqrt{3}.$$

Portanto, as três raízes são reais. E, também, são distintas. É claro que $y_2 \neq y_3$. Porém, se $y_1 = y_2$, temos que $b = -a\sqrt{3}$. Segue-se que $\sqrt[3]{A} = a(1-i\sqrt{3})$. Donde, chegamos a $A = -8a^3$. E assim, A é real, o que é impossível. Então, $y_1 \neq y_2$. Analogamente, vemos que $y_1 \neq y_3$. Daí, concluímos que: se $\Delta < 0$, então as soluções da equação (1) são reais e distintas. Embora essas raízes sejam reais, é inviável determiná-las pelo processo algébrico. Vejamos um exemplo para ilustrar esta afirmação.

Exemplo 2.1.2 *Resolvamos a equação $y^3-3y+1=0$. Para esta equação, $p=-3$, $q=1$ e $\Delta=-81$, já que*

$$\Delta = 4p^3+27q^2 = 4(-3)^3+27.1^2 = -81.$$

Segue-se que

$$\sqrt{\frac{-\Delta}{108}} = \sqrt{\frac{-(-81)}{108}} = \frac{9}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

E assim,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = w \\ B &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = w^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, as raízes são apresentadas na forma,

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{w} + \sqrt[3]{w^2} \\ y_2 &= w\sqrt[3]{w} + w^2\sqrt[3]{w^2} \\ y_3 &= w^2\sqrt[3]{w} + w\sqrt[3]{w^2}. \end{aligned}$$

Procuremos determinar algebricamente y_1, y_2 *e* y_3. *Para tanto, consideremos* $\sqrt[3]{w} = a+bi$. *Donde, segue-se que*

$$w = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3).$$

Pelas expressões de A *e* B, *chegamos a*

$$a^3 - 3ab^2 = -\frac{1}{2}, \qquad 3a^2b - b^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Isolando b^2, *na primeira equação, obtemos* $b^2 = \dfrac{2a^3+1}{6a}$. *Substituindo esta expressão na segunda, encontramos* $b = \dfrac{3\sqrt{3}a}{16a^3-1}$. *E assim, chegamos a equação*

$$(8a^3)^3 + 3(8a^3)^2 - 24(8a^3) + 1 = 0.$$

Considerando $x = 8a^3$, *temos que* $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. *Agora, fazendo a substituição* $x = y - 1$, *obtemos a equação*

$$(y-1)^3 + 3(y-1)^2 - 24(y-1) + 1 = 0.$$

Desenvolvendo-a, chegamos a

$$y^3 - 27y + 27 = 0.$$

E, em seguida, fazendo $y = 3z$, *temos que* $27z^3 - 81z + 27 = 0$. *Donde, dividindo todos os termos por* 27, *chegamos a* $z^3 - 3z + 1 = 0$. *Observemos que esta é a mesma equação que queríamos resolver, ou seja, não avaçamos na tentativa de encontrar* a *e* b, *pelo processo algébrico.*

O impasse acima, intrigou os antigos algebristas por um longo tempo, e passou a ser conhecido como *casus irreducibilis*, ou seja, caso irredutível. O que, de fato, observa-se é que se $\Delta < 0$, para p e q números racionais, e se nenhuma das três raízes reais da equação $y^3 + py + q = 0$ é racional, não se pode expressar nenhuma destas raízes por meio de expressões racionais envolvendo extrações de raízes reais de qualquer espécie. A seguir, utilizando a trigonometria, veremos que existe uma forma apropriada para expressarmos estas raízes.

2.1.4 O Tratamento Trigonométrico

Seja $A = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$. Sendo assim, o quadrado do módulo, ρ, de A é dado por

$$\rho^2 = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \frac{p^3}{27} = \left(-\frac{p}{3}\right)^3.$$

Donde,

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{-p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}},$$

já que $p < 0$. Em seguida, podemos determinar o argumento ϕ de A, ou através do cosseno

$$\cos\phi = \frac{-\frac{q}{2}}{\frac{-p\sqrt{-p}}{\sqrt{27}}} = \frac{q\sqrt{27}}{2p\sqrt{-p}}$$

ou da tangente

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}{-\frac{q}{2}} = \frac{-\sqrt{-\Delta}}{q\sqrt{27}},$$

supondo que ϕ pertença ao primeiro ou segundo quadrantes, conforme q seja negativo ou positivo. Então, encontrados ρ e ϕ, podemos escrever

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\phi}{3} + isen\frac{\phi}{3}\right) = \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\phi}{3} + isen\frac{\phi}{3}\right)$$

e

$$\sqrt[3]{B} = \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\phi}{3} - isen\frac{\phi}{3}\right).$$

Observando que

$$w = \cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3},$$

segue-se que as raízes y_1, y_2 e y_3 são dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\phi}{3} \\ y_2 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ y_3 &= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

No entanto, é mais comum representar-se y_2 e y_3 como segue:

$$\begin{aligned} y_2 &= -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right) \\ y_3 &= -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right). \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3 *Resolvamos, pelo método trigonométrico, a equação* $y^3 - 3y + 1 = 0$. *Primeiro, vamos calcular seu módulo* ρ *e seu argumento* ϕ. *Então temos,*

$$\rho = \sqrt{\frac{-p}{3}} = \sqrt{\frac{-(-3)}{3}} = 1$$

e

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{27}q}{2p\sqrt{-p}} = \frac{\sqrt{27}.1}{2(-3)\sqrt{-(-3)}} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, $\phi = \dfrac{2\pi}{3}$. *E assim,*

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ y_2 &= -2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ y_3 &= 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Logo, utilizando uma tabela trigonométrica, podemos encontrar os valores aproximados destas raízes, quais sejam

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,5320888862 \\ y_2 &= -1,8793852416 \\ y_3 &= 0,3472963554. \end{aligned}$$

Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2.1.4 *Resolvamos a equação* $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$. *Utilizando a expressão*

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

obtemos,

$$(x+1)^3 + \left(0 - \frac{3^2}{3}\right)(x+1) + \frac{2.3^3}{27} - \frac{3.0}{3} + (-3) = 0.$$

Fazendo a substituição $y = x + 1$, *obtem-se a equação transformada* $y^3 - 3y - 1 = 0$, *onde* $p = -3$, $q = -1$ *e* $\Delta = -81$. *Agora, calculemos o módulo* ρ *e o argumento* ϕ *desta nova equação. E assim, chegamos a*

$$\rho = \sqrt{\frac{-p}{3}} = \sqrt{\frac{-(-3)}{3}} = 1$$

e

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{27}q}{2p\sqrt{-p}} = \frac{\sqrt{27}.(-1)}{2.(-3)\sqrt{-(-3)}} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\phi = \dfrac{\pi}{3}$. *Desta forma, segue-se que*

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \\ y_2 &= -2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ y_3 &= -2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

são as raízes da equação transformada.
Utilizando uma tabela trigonométrica, podemos encontrar os valores aproximados dessas raízes, que são

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,879385242 \\ y_2 &= -1,532088886 \\ y_3 &= -0,3472963554. \end{aligned}$$

Agora, como $x = y - 1$, *obtemos*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,879385242 - 1 = 0,879385242 \\ x_2 &= -1,532088886 - 1 = -2,532088886 \\ x_3 &= -0,3472963554 - 1 = -1,3472963554, \end{aligned}$$

que são as raízes da equação original.

2.2 Equações Quárticas

Foi Ferrari, um aluno de Cardan, quem descobriu a solução algébrica das equações quárticas. Partindo da forma geral de uma equação quártica, $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cujos coeficientes a, b, c, d são reais, podemos escrevê-la na forma,

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d.$$

Em seguida, adicionando $\frac{a^2}{4}x^2$ a ambos os membros da igualdade acima, obtem-se

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \tag{1}$$

que é uma equação equivalente à original.

No caso em que $\left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d$ é um quadrado perfeito, a solução é imediata. Porém, em geral, isso não acontece. Logo, de acordo com o método de Ferrari, devemos adicionar a ambos os lados da igualdade (1), a expressão

$$y\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) + \frac{y^2}{4},$$

de modo a obter um quadrado perfeito do lado esquerdo da igualdade para um certo y. Assim, a equação (1) é transformada em

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{a}{2}y\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right). \tag{2}$$

Em seguida, determinemos y de modo que

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{a}{2}y\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right) \tag{3}$$

seja o quadrado de uma expressão linear, digamos, $ex + f$. Em geral, se

$$Ax^2 + Bx + C = (ex + f)^2, \tag{4}$$

então

$$B^2 - 4AC = 0, \tag{5}$$

e vice-versa. Observemos que a equação (4) é equivale às relações

$$A = e^2, \qquad B = 2ef, \qquad C = f^2, \tag{6}$$

E assim, a equação (5) é satisfeita. Agora, suponhamos que a equação (5) acontece. Então,

1. se $A = 0$ e $C = 0$, então $B = 0$. Logo, isto implica que as relações (6) são satisfeitas para $e = f = 0$.

2. se A e C não são ambos nulos, por exemplo, $A \neq 0$, então $e = \sqrt{A}$ e $f = \frac{B}{2e}$. Logo, em virtude de (5), segue-se que $C = f^2$.

E assim, o lado direito da equação (2) será o quadrado da expressão linear $ex + f$ se y satisfaz a equação

$$\left(\frac{1}{2}ay - c\right)^2 = 4\left(y + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - d\right),$$

que expandida, dá-nos

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0. \tag{7}$$

Sendo assim, tomando y como uma das raízes da equação cúbica (7), denominada de *resolvente* da equação quártica, temos que

$$\left(\frac{a^2}{4} - b - y\right)x^2 + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right) = (ex + f)^2,$$

para certos e e f. Desta forma, a equação quártica aparece na forma

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = (ex + f)^2,$$

que nos fornece duas equações quadráticas, que são

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2} = ex + f \text{ e } x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2} = -ex - f.$$

As soluções destas duas equações fornecem-nos as quatro raízes da equação quártica. Observemos que a solução simplifica-se quando escolhemos como raiz da resolvente (7) aquela racionalmente expressível pelos coeficientes a, b, c e d. Neste caso, as raízes da equação quártica são exprimíveis por radicais quadráticos. Em geral, as expressões para as raízes envolverão radicais quadráticos e cúbicos. Para estudos complementares, ler [10].

Exemplo 2.2.1 *Apliquemos o método acima para a equação $x^4 + 4x - 1 = 0$. Nesta caso, $a = 0,\ b = 0,\ c = 4$ e $d = -1$. Sendo assim, pela fórmula da resolvente, obtemos a equação $y^3 + 4y - 16 = 0$. É fácil ver que $y = 2$ é uma solução racional da resolvente. E assim, fazendo $y = 2$ na expressão (3), chegamos a*

$$2x^2 - 4x + 2 = (x\sqrt{2} - \sqrt{2})^2.$$

Donde, segue-se que

$$x^2 + 1 = x\sqrt{2} - \sqrt{2} \text{ e } x^2 + 1 = -x\sqrt{2} + \sqrt{2}.$$

Portanto, as quatro raízes da equação quártica são

$$x_1 = \frac{1 \pm i\sqrt{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}} \text{ e } x_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{\sqrt{8}-1}}{\sqrt{2}}.$$

Capítulo 3

Método Indireto de Estudo das Raízes de Equações Polinomiais

Neste capítulo, exporemos um método indireto para estudarmos as raízes de uma dada equação polinomial de grau arbitrário. O método, dito algébrico, utilizado no capítulo anterior não pode ser aplicado, em geral, às equações polinomiais de grau maior do que ou igual a 5. Para estas equações não conseguimos uma solução algébrica para as suas raízes, isto é, uma expressão geral envolvendo operações racionais e extrações de raízes. Esta impossibilidade constitui um dos episódios mais emblemático da história de Matemática, protagonizada por matemáticos como N. H. Abel (1.802-29) e E. Galois (1.811-32). Nós veremos um procedimento que pode ser trabalhado junto aos alunos do ensino básico na resolução de equações polinomiais de graus mais elevados do que aquelas costumeiramente trabalhadas neste nível de ensino-aprendizagem.

Para apresentar esse método, precisaremos de alguns ingredientes, tais como: a regra de sinais de Descartes, as transformações de Möbius e o teorema de Vincent; que vão nortear e dar sustentabilidade às nossas afirmações. Além disso, faremos uso do computador, que vai nos auxiliar de forma prática e segura, através do sistema algébrico-computacional MAXIMA, que é um software livre, facilmente encontrado na grande rede de computadores, na busca por tais soluções. Novamente, para o que se segue, utilizamos a referência [10].

3.1 A Regra de Sinais de Descartes

Para o que se segue, consideramos polinômios numa varíavel com coeficientes reais, ou simplesmente, polinômios reais. Sendo P um tal polinômio, indicaremos este fato escrevendo $P \in \mathbb{R}[x]$. Desta forma, definimos *o grau de P* como o maior expoente dentre os termos de coeficientes não nulos. Dizemos que x_0 é um *zero* de P se, $P(x_0) = 0$. Ou equivalentemente, x_0 é uma raiz da equação $P(x) = 0$. De fato, nós estaremos particularmente interessados em zeros reais.

A regra de sinais de Descartes consiste em determinar:

- exatamente a quantidade de raízes reais, positivas e negativas, de uma dada equação polinomial de coeficientes reais;
- um limitante superior para a quantidade de raízes reais, positivas e negativas, de uma dada equação polinomial de coeficientes reais.

Portanto, usando esta regra, podemos determinar o número máximo de zeros positivos e negativos de uma determinada equação polinomial. E consequentemente, com a ajuda do teorema fundamental da Álgebra, podemos determinar o número máximo de zeros imaginários desta equação. Devemos lembrar que, no caso de polinômios reais, os zeros imaginários aparecem conjugados, como é fácil ver. A seguir, vejamos uma definição.

Definição 3.1.1 *Dada uma sequência, finita ou infinita, de números reais $a_0, a_1, a_2, \ldots$, dizemos que existe uma variação de sinal (uma permanência de sinal) entre dois termos a_t e a_s, digamos, com $t < s$, se uma das seguintes condições ocorre:*

1. *$s = t + 1$ e os termos a_t e a_s têm sinais opostos (têm o mesmo sinal);*

2. *$s > t+1$ e os termos $a_{t+1}, a_{t+2}, ..., a_{s-1}$ são todos zeros, enquanto a_t e a_s têm sianis opostos (têm mesmo sinal).*

No caso de uma sequência finita de comprimento $n + 1$, digamos, $a_0, a_1, ..., a_n$, o número de variações de sinal é o número de pares (t, s) satisfazendo as condições (1) ou (2).

Exemplo 3.1.2 *Seja o polinômio $P(x) = -2x^9 - 5x^7 + x^4 + 7x^3 - x + 1$. Considerando a sequência dos seus coeficientes, $-2, 0, -5, 0, 0, 1, 7, 0, -1, 1$,temos que $V(P) = 3$ e $\mathcal{P}(P) = 2$.*

Observação 3.1.1 *Seja $P \in \mathbb{R}[x]$, digamos, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, com $a_n \neq 0$, isto é, P tem grau n. Observemos que os coeficientes de P é uma sequência finita de comprimento $n+1$. Denotaremos $V(P)$ o número de variações de sinais de P. E também, denotaremos por $\mathcal{P}(P)$ o número de permanências de P. Observemos que $V(P) \leq n$.*

Em *La Géométrie*, por volta de 1.637, Descartes afirmou: *"Uma equacão algébrica tem tantas raízes verdadeiras (isto é, positivas) quantas são as mudanças de sinais de + para - ou de - para +. E tantas raízes falsas (isto é, negativas) quantos são o número de vezes que dois sinais positivos ou dois sinais negativos aparecem em sucessão".*

A afirmação acerca da quantidade de raízes falsas, isto é, negativas, é válida somente para polinômios cujos termos, em ordem decrescente ou crescente dos seus termos, têm graus pares e ímpares que se alternam. De fato, dados dois termos consecutivos, um tem grau par, e, o outro, grau ímpar. Desta forma, se houver uma permanência de sinais, quando trocamos x por $-x$, o termo de grau par permanece com o mesmo sinal, enquanto o termo de grau ímpar muda de sinal. Isto significa que passamos a ter uma variação de sinal. Em particular, os polinômios completos, isto é, os polinômios que possuem todos os seus termos não nulos, são polinômios deste tipo. Por exemplo, considerando o polinômio $P(x) = x^8 - x^7 - x^5 - x^3 - x + 1$, temos que $V(P) = 2$ e $\mathcal{P}(P) = 3$. Agora, para $Q(x) = P(-x) = x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$, temos que $V(Q) = 0$ e $\mathcal{P}(Q) = 5$.

É importante ressaltar que a afirmação de Descartes conta os zeros (positivos e negativos) com multiplicidades. A multiplicidade dos zeros fica clara no teorema a seguir, que admitiremos sem demonstração. Uma demonstração pode ser encontrada em [10]. O teorema mostra-nos que um limitante superior para o número de zeros positivos é o número de variações de sinais do polinômio. Vejamos,

Teorema 3.1.3 *O número de zeros positivos de um polinômio com coeficientes reais, digamos $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, denotado por $Z(P)$, nunca é maior do que o número de variações de sinais, $V(P)$, na sequência dos seus coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Além disso, se $Z(P) < V(P)$, a diferença $V(P) - Z(P)$ é um número par.*

De acordo com o teorema, temos que o número de variações de sinais de P é congruo ao número de zeros de P módulo 2, isto significa que $V(P)$ e $Z(P)$ têm a mesma paridade. Dessa forma, se $V(P) = 0$, então $Z(P) = 0$. Note que a recíproca não é verdadeira, já que, por exemplo,

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x^2 - x + 1.$$

Se $V(P) = 1$, então $Z(P) = 1$. Neste caso, também, não vale a recíproca, já que, por exemplo, $P(x) = (x-1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, ou seja, $Z(P) = 1$, mas, $V(P) = 3$. Segue-se que nos casos em que $V(P) = 0$ e $V(P) = 1$, a regra de sinais de Descartes conta exatamente o número de zeros positivos de P.

Agora, se $V(P) = 2$, P pode ter um zero positivo duplo, ou dois zeros positivos simples, ou ainda, nenhum zero positivo. Se $V(P) = 3$, P pode ter um zero positivo triplo, ou um duplo e um simples, ou ainda, três zeros positivos simples. E assim, sucessivamente.

Observação 3.1.2 *Dado $P \in \mathbb{R}[x]$, além dos casos em que $V(P) = 0$ e $V(P) = 1$, existe um outro caso em que a regra de sinais de Descartes conta exatamente o número de zeros. É o caso em que todos os zeros de P são reais. Para uma demonstração deste fato, veja capítulo VI, seção* 11*, página* 124 *de [10].*

Dado $P \in \mathbb{R}[x]$, trocando x por $-x$ em P, obtemos o polinômio $Q(x) = P(-x)$. Sendo assim, a quantidade de zeros positivos de Q corresponde a quantidade de zeros negativos de P. Vamos exemplificar a contagem, por meio da regra de sinais, dos zeros de um dado polinômio. Seja $P(x) = x^5 + x^3 - 2x^2 + x - 2$. Neste caso, $V(P) = 3$. Desta forma, P pode ter um zero positivo triplo, ou um simples e um duplo ou ainda, três zeros positivos simples. Trocando x por $-x$, temos o polinômio transformado $Q(x) := P(-x) = -x^5 - x^3 - 2x^2 - x - 2$. Como $V(Q) = 0$, temos que não existem zeros negativos de P. Sendo assim, o número de zeros de P não é maior do que três. E então, P tem no mínimo dois zeros imaginários. Agora, mutiplicando $P(x)$ por $x + 1$, vemos que

$$(x+1)P(x) = x^6 + x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x - 2,$$

Isto significa que existe um único zero positivo de P. Logo, P tem um zero positivo e quatro zeros imaginários, os quais são dois a dois conjugados, já que P tem coeficientes reais.

3.2 As Transformações de Möbius

Seja $\phi : \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$ da forma $\phi(x; u, v, c, d) = \dfrac{ux + v}{cx + d}$, onde $u, v, c, d \in \mathbb{C}$. Diz-se que ϕ é uma transformação de Möbius se, $ud - vc \neq 0$.

Note que, dado $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, temos que $\phi(x; \lambda u, \lambda v, \lambda c, \lambda d) = \phi(x; u, v, c, d)$. Portanto os coeficientes u, v, c e d não são únicos.

A seguir, enunciamos vários fatos básicos sobre as transformações de Möbius. A referência que utilizamos para os enunciados e as demonstrações encontram-se em [9].

- **A composição de transformações de Möbius é uma transformação de Möbius.** De fato, se $T(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ e $\phi(x) = \dfrac{ex + f}{gx + h}$ são transformações de

Möbius, então
$$T \circ \phi(x) = T(\phi(x)) = \frac{(ae+bg)x + (af+bh)}{(ce+dg)x + (cf+dh)}$$
é uma transformação de Möbius, já que
$$(ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh) = (ad-bc)(eh-gf).$$

- **As transformações de Möbius são invertíveis.** De fato, se $T(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é uma transformação de Möbius, então $S(x) = \dfrac{dx-b}{-cx+a}$ é tal que
$$T \circ S(x) = T(S(x)) = x = S(T(x)) = S \circ T(x).$$

Observação 3.2.1 *Observemos que os coeficientes de $S(x)$ satisfazem precisamente a relação $ad - bc \neq 0$. Além disso, se $T(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é de Möbius e $\lambda \neq 0$ é um número complexo, $T(x) = \dfrac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda cx + \lambda d}$, ou seja, os coeficientes a, b, d e c não são únicos.*

- **Se T é uma transformação de Möbius, então T é uma composição de translações** $(x \to x+b)$**, rotações** $(x \to ax)$**, homotetias** $(x \to \rho x, \rho \neq 0)$ **e inversões** $(x \to \frac{1}{x})$**.** Vejamos, seja $T(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ uma transformação de Möbius. Se $c = 0$, $T(x) = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$. Tomando a translação $\tau_{\frac{b}{d}}(x) = x + \dfrac{b}{d}$ e $H_{\frac{a}{d}}(x) = \dfrac{a}{d}x$, que é uma homotetia ou uma rotação, conforme $\dfrac{a}{d}$ seja um real não nulo ou um imaginário, respectivamente, segue-se que $T(x) = \tau_{\frac{b}{d}} \circ H_{\frac{a}{d}}(x)$. Agora, se $c \neq 0$, então
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$
Sendo assim,
$$T = \tau_{\frac{a}{c}} \circ H_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ \iota \circ \tau_{\frac{d}{c}},$$
onde $\iota(x) = \dfrac{1}{x}$.

No que se segue, consideraremos o caso em que os coeficientes são reais.

Proposição 3.2.1 *Seja $\phi : \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$ dada por $\phi(x) = \dfrac{ux+v}{cx+d}$, com $u, v, c, d \in \mathbb{R}$. Considerando a homotetia $H(\xi) = \dfrac{d}{c}\xi$, tem-se que $\phi(H(\xi)) = \dfrac{b\xi + a}{\xi + 1} = \varphi(\xi)$, onde $a = \dfrac{u}{c}$ e $b = \dfrac{v}{d}$.*

De fato,

$$\begin{aligned}\phi(H(\xi)) &= \frac{u\frac{d}{c}\xi+v}{c\frac{d}{c}\xi+d}\\ &= \frac{\frac{ud}{c}\xi+v}{d(\xi+1)}\\ &= \frac{\frac{u}{c}\xi+\frac{v}{d}}{\xi+1}\\ &= \frac{a\xi+b}{\xi+1}=\varphi(\xi),\end{aligned}$$

onde $a=\dfrac{u}{c}$ e $b=\dfrac{v}{d}$, como queríamos demonstrar.

Por simplicidade, consideraremos $\xi=x$. Obtendo assim, $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{x+1}$. É esta a forma de φ que utilizaremos no decorrer de nosso trabalho.

Note que, dado $P\in\mathbb{R}[x]$, e se $cd>0$, temos que o número de variações de sinais de $P\circ H$ é igual ao número de variações de P.

Consideremos $a<b$. Desse modo, φ transforma o intervalo $(0,+\infty)$ em (a,b). Assim, temos sua inversa dada por

$$\psi(x;a,b)=\frac{x-b}{a-x}.$$

Então, sendo $P\in\mathbb{R}[x]$, indicaremos por $P\Big|_{(a,b)}$ o numerador da função racional $P\circ\varphi$, onde $\varphi\Big|_{(0,+\infty)}$. Assim, de acordo com a Regra de Sinais de Descartes, se $V\left(P\Big|_{(a,b)}\right)=0$ ou $V\left(P\Big|_{(a,b)}\right)=1$, então P não tem zeros ou tem um único zero, respectivamente, no intervalo (a,b). Na realidade, podemos supor que $0<a<b$, pois, por um lado, se $a<b<0$, substituindo x por $-x$, recaímos na situação padrão, por outro lado, se $a<0<b$, podemos subdividir este intervalo, a princípio, em $(a,0)$ e $(0,b)$, e assim, reduzimos a análise aos casos já vistos, e finalmente, no caso em que 0 é um zero de P, a verificação é imediata. Observemos a importância de φ para o estudo dos zeros de P em (a,b), permitindo a aplicação direta da regra de sinais de Descartes à $P\Big|_{(a,b)}$. Vejamos como φ funciona. Porém antes, note que, de acordo com o teorema fundamental da Álgebra, todo polinômio $P\in\mathbb{R}[x]$ fatora-se como um produto de fatores lineares, isto é, da forma $x-\alpha$, com $\alpha\in\mathbb{R}$, e de fatores quadráticos, isto é, da forma $[x-(\rho+i\sigma)][x-(\rho-i\sigma)]=x^2-2\rho x+\rho^2+\sigma^2$, com $\rho,\sigma\in\mathbb{R}$. Estes dois últimos aparecem aos pares, já que estamos lidando com polinômios cujos coeficientes são reais, com maior precisão, se $\rho+i\sigma$ é um zero, $\rho-i\sigma$ também será. Comecemos pelos fatores lineres, ou seja, $P(x)=x-\alpha$, com $\alpha\in\mathbb{R}$. Observando que

$$P\circ\varphi(x)=\frac{ax+b}{x+1}-\alpha=\frac{ax+b-\alpha x-\alpha}{x+1}=\frac{(a-\alpha)\left(x-\frac{\alpha-b}{a-\alpha}\right)}{x+1},$$

então,

$$P\Big|_{(a,b)}=(a-\alpha)\left(x-\frac{\alpha-b}{a-\alpha}\right).$$

E assim, se $\alpha\in(a,b)$, $V\left(P\Big|_{(a,b)}\right)=1$, já que $\psi(\alpha)>0$. E se $\alpha\notin(a,b)$, $V\left(P\Big|_{(a,b)}\right)=0$, já que $\psi(\alpha)<0$.

Agora, analisemos os fatores quadráticos, ou seja, $P(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Observando que

$$P \circ \varphi(x) = \frac{[ax+b-\alpha(x+1)]\,[ax+b-\overline{\alpha}(x+1)]}{(x+1)^2}.$$

Como apenas o numerador nos interessa, vamos trbalhar com ele.

$$\begin{aligned} P\Big|_{(a,b)} &= [(a-\alpha)x+(b-\alpha)][(a-\overline{\alpha})x+(b-\overline{\alpha})] \\ &= |a-\alpha|^2x^2+2R[(a-\alpha)(b-\overline{\alpha})]x+|b-\alpha|^2 \\ &= |a-\alpha|^2\Big(x^2+2R\Big[\frac{b-\overline{\alpha}}{|a-\alpha|^2}(a-\alpha)\Big]x+\Big|\frac{b-\alpha}{a-\alpha}\Big|^2\Big) \end{aligned}$$

Donde,

$$P\Big|_{(a,b)} = |a-\alpha|^2\left[x^2-2R\left(\frac{\alpha-b}{a-\alpha}\right)x+\left|\frac{\alpha-a}{b-\alpha}\right|^2\right],$$

onde $R(\cdot)$ representa a parte real de um número complexo. Note que

$$R\Big(\frac{\alpha-b}{a-\alpha}\Big) = \frac{(R(\alpha)-b)(a-R(\alpha))-I(\alpha)^2}{(a-R(\alpha))^2+I(\alpha)^2},$$

onde $I(\cdot)$ representa a parte imaginária de um número complexo.

Desenvolvendo $(R(\alpha)-b)(a-R(\alpha))-I(\alpha)^2$, chegamos a

$$-\left[\left(R(\alpha)-\frac{a+b}{2}\right)^2+I(\alpha)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right],$$

isto é,

$$(R(\alpha)-a)(b-R(\alpha))-I(\alpha)^2 = -\left[\left(R(\alpha)-\frac{a+b}{2}\right)^2+I(\alpha)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right].$$

Sendo assim, α está na parte exterior ou sobre o cículo

$$\left|z-\frac{a+b}{2}\right| = \frac{|b-a|}{2}$$

se, e somente se, $V\Big(P\Big|_{(a,b)}\Big) = 0$.

Além disso, temos outras condições suficientes que nos levam a concluir que

$$(R(\alpha)-a)(b-R(\alpha))-I(\alpha)^2 < 0.$$

De imediato, observa-se que uma destas condições é que $R(\alpha) \notin (a,b)$, ou seja, α não tenha parte real em (a,b). Uma outra condição é que

$$|b-a| < \Delta := \min_{0\leq i<j\leq n-1} |x_j-x_i|,$$

onde $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ são os n zeros de $P \in \mathbb{R}[x]$. Observemos que, dado $\rho+i\sigma$, com $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$, um zero de P, temos que $\Delta < 2|\sigma|$, pois

$$|b-a| < \Delta := \min_{0\leq i<j\leq n-1} |x_j-x_i| \leq |\rho+i\sigma-(\rho-i\sigma)| = |i2\sigma| = 2|\sigma|.$$

Como $(\rho - a)(b - \rho) = -[\rho^2 - (a + b)\rho + ab]$, temos que o seu valor máximo é atingido em $\frac{1}{2}(a + b)$, e vale $\frac{1}{4}(a - b)^2$. Desse modo,

$$(\rho - a)(b - \rho) \leq \frac{1}{4}(a - b)^2 < \frac{1}{4}\Delta^2 < \sigma^2,$$

ou seja, $(\rho - a)(b - \rho) - \sigma^2 < 0$.

Como consequência imediata desses fatos, segue-se que

Proposição 3.2.2 *Se os zeros de $P \in \mathbb{R}[x]$ têm parte real não-positiva, então $V(P) = 0$.*

De fato, a cada zero real, digamos, x_0, associa-se o fator linear $x - x_0$, de modo que não ocorre variação de sinal, já que $x_0 \leq 0$. Já, para cada zero complexo, digamos, $\rho + i\sigma$, associa-se o fator $[x - (\rho + i\sigma)][x - (\rho - i\sigma)] = x^2 - 2\rho x + \rho^2 + \sigma^2$, que não possui variação de sinal, já que $\rho \leq 0$. Assim, $V(P) = 0$, como queríamos demonstrar.

Geometricamente, o fato de que P tem todos os zeros com parte real não-positiva equivale a dizer que os zeros de P, escritos na forma polar, têm argumentos no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

As considerações acima, possibilita-nos concluir que, dado um $P \in \mathbb{R}[x]$, $P\Big|_{(a,b)}$ tem a forma

$$K \cdot ... \cdot (x - \psi(\alpha)) \cdot ... \cdot (x^2 - 2R(\psi(\alpha)) + |R(\psi(\alpha))|^2) \cdot \ldots,$$

onde K é uma cosntante real conveniente. Demonstremos este fato. Seja $P_i \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P_i(x) = x - \alpha_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Sendo assim, considerando $P_i \circ \varphi$, chegamos a $P_i\Big|_{(a,b)} = (a - \alpha_i)(x - \psi(\alpha_i))$. Agora, considerando $P_j(x) = (x - \beta_j)(x - \overline{\beta_j})$, fazendo $P_j \circ \varphi$, obtemos $P_j\Big|_{(a,b)} = |a - \beta_j|^2[x^2 - 2R(\psi(\beta_j))x + |\psi(\beta_j)|^2]$, com $\beta_j \in \mathbb{C}$. Disto, segue-se que

$$P(x) := a_n \cdot P_i \cdot \ldots \cdot P_j(x) = a_n \cdot (x - \alpha_i) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_j)(x - \overline{\beta}_j),$$

onde a_n é o coeficiente lider de P. Desta forma,

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_n \cdot (P_i \cdot \ldots \cdot P_j) \circ \varphi(x) \\
&= a_n \cdot (a - \alpha_i)(x - \psi(\alpha_i)) \cdot \ldots \cdot |a - \beta_j|^2[x^2 - 2R(\psi(\beta_j))x + |\psi(\beta_j)|^2] \cdot \ldots \\
&= K \cdot (x - \psi(\alpha_i)) \cdot \ldots \cdot (x^2 - 2R(\psi(\beta_j))x + |\psi(\beta_j)|^2) \cdot \ldots
\end{aligned}$$

onde $K \in \mathbb{R}$.

Resumindo, as transformações de Möbius auxiliam-nos na verificação da presença, ou não, dos zeros de um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$ no intervalo (a, b), com $0 < a < b$. Esta verificação dá-se por meio da regra de sinais de Descartes. De fato, aplicando a transformação de Möbius adequada no intervalo (a, b), se houver uma variação de sinal em $P\Big|_{(a,b)}$, existirá um zero de P em (a, b). Agora, se não houver variação de sinal em $P\Big|_{(a,b)}$, não haverá zeros em (a, b). Aqui, cabe uma definição.

Definição 3.2.1 *Seja $P \in \mathbb{R}[x]$. Diz-se que um intervalo (a, b) isola um zero de P, digamos, x_0, se, $x_0 \in (a, b)$ e P não se anula em $(a, b)\backslash\{x_0\}$.*

Por exemplo, considerando $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, usando os argumentos que veremos na próxima seção, pode-se mostrar que P tem três zeros reais, um positivo e dois negativos, localizados nos intervalos $(-2,-1)$, $(-1,0)$ e $(1,2)$, que os isolam.

Na próxima seção, justificaremos o porquê das transformações de Möbius realizarem aquela arrumação nos sinais dos coeficientes do polinômio, cujos termos são listados em ordem decrescente ou em ordem crescente dos seus graus. No caso, se houver apenas uma variação se sinal, então, os coeficientes iniciam-se com um sinal que se repete até um certo ponto, e a partir de então, muda-se o sinal até o último coeficiente do polinômio.

3.3 O Teorema de Vincent

Inicialmente, ilustraremos como as transformações de Möbius trabalham, conjuntamente com a regra de sinais de Descartes, estudando os zeros do polinômio

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 24x - 24.$$

Como $V(P) = 3$, temos, pela regra de sinais de Descartes, que P tem três zeros positivos simples ou um zero positivo simples e um duplo ou, ainda, um zero positivo triplo. Segue-se, usando a transformação de Möbius adequada, que P tem uma variação de sinal em $[0,1]$, e nenhuma variação em $[1,+\infty)$. Mostrando-nos que o polinômio P possui apenas um zero positivo. Demonstremos este fato. Tomando $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$, e usando o sistema algébrico computacional MAXIMA, segue-se que

$$P\Big(\frac{1}{x+1}\Big) = -\frac{24x^4 + 72x^3 + 60x^2 + 4x - 9}{(x+1)^4}.$$

Desta forma, existe um único zero de P em $(0,1)$, já que $V\Big(P\Big|_{(0,1)}\Big) = 1$. É imediato que 0 não é zero de P. Já no intervalo $[1,+\infty)$, considerando $\varphi(x) = x+1$, e observando que $P(x+1) = x^4 + 6x^2 + 40x + 9$, temos que $V(P) = 0$ em $[1,+\infty)$. Logo, P não tem zeros em $[1,+\infty)$. Agora, vejamos a variação de sinais de

$$Q(x) := P(-x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 24x - 24.$$

Trocando x por $-x$, temos que $V(Q) = 1$, ou seja, $P(-x)$ possui um único zero em $(-\infty,0)$. Isto mostra-nos que P tem zeros reais, um positivo, e outro, negativo. Com maior razão, como

$$Q\Big(\frac{x+2}{x+1}\Big) = \frac{31x^4 + 108x^3 + 108x^2 + 8x - 24}{(x+1)^4},$$

temos que o único zero negativo de P localiza-se em $(-2,-1)$, já que $V\Big(Q\Big|_{(1,2)}\Big) = 1$. Resumindo, P tem um zero positivo em $(0,1)$, um zero negativo em $(-2,-1)$ e dois zeros imaginários, conjugados.

No que se segue, fazemos uso do MAXIMA para determinar aproximadamente os zeros de P. E com isso, verificamos que, de fato, os intervalos acima contêm os zeros reais de P.

/* [wxMaxima: input start] */ allroots(P(x));

$$[x = 0.76676632985651, x = -1.729148228059535,$$

$$x = 3.456190189428932 * i + 2.481190949101514,$$

$$x = 2.481190949101514 - 3.456190189428932 * i]$$

/* [wxMaxima: input end] */

A seguir, apresentaremos o Teorema de Vincent, que justifica o fato de que as transformações de Möbius fazem a arrumação de sinais dos coeficientes de um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$, em ordem decrescente dos graus dos termos, em um certo intervalo, permitindo-nos verificar a presença ou não de zeros de P. O enunciado é conforme [1].

Teorema 3.3.1 *(Vincent-Alesina-Galuzzi) Seja $P(z)$ um polinômio de grau n positivo, sem zeros múltiplos. É possível determinar $\delta > 0$ tal que, para cada par de números reais positivos a, b, com $|b - a| < \delta$, todo polinômio transformado da forma*

$$Q(z) = (1 + z)^n P\Big(\frac{a + bz}{1 + z}\Big)$$

tem no máximo uma variação de sinais. O caso em que $V(Q) = 1$ é possível se, e somente se, $P(z)$ tem uma raiz simples no intervalo (a, b).

Demonstração. Seja $P \in \mathbb{R}[x]$, sem zeros múltiplos. Considerando $z_1, z_2, ..., z_n$, os zeros de P, definamos

$$\Delta = \min_{i<k} |z_i - z_k|.$$

Desta forma, afirmamos que $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta$ é um dos possíveis $\delta > 0$, que realizam o que está enunciado. E então, $|b-a| < \Delta$. Sendo assim, o círculo cujo diâmetro é (a, b) não contém zeros complexos e, no máximo, um zero positivo de P. Tomemos $\mathfrak{R}$ como sendo a união dos discos centrados em

$$c^{\pm} = \frac{a + b}{2} \pm i\frac{|b - a|}{2\sqrt{3}} \text{ de mesmo raio } r = \frac{|b - a|}{\sqrt{3}},$$

que correspondem aos semi-planos delimitados pelas linhas $I(z) = \pm\sqrt{3}R(z)$. Segue-se que $\mathfrak{R}$ contém no máximo um zero real. De fato, a distância máxima entre os pontos de $\mathfrak{R}$ e os pontos do intervalo (a, b) é

$$2r = 2\frac{|b - a|}{\sqrt{3}} < \Delta.$$

Sendo assim, existem as seguintes possibilidades:

- todos os zeros de P estão fora do círculo cujo diâmetro é (a, b);
- se um zero, necessariamente, único e real, está dentro deste círculo, então todos os outros zeros estão no complemento de $\mathfrak{R}$.

No primeiro caso, a transformação $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$T(z) = \frac{z - a}{b - z},$$

mapeia todos os zeros de P no semi-plano esquerdo do plano complexo. Enquanto que, no segundo caso, a imagem do zero positivo é positiva, e todos os outros zeros são mapeados no setor

$$S_{\sqrt{3}} = \{z|R(z) < 0 \ e \ |I(z)| < \sqrt{3}|R(z)|\},$$

já que todos os pontos que estão no complemento de $\mathfrak{R}$ são mapeados por T neste setor.

Observando que a transformação inversa de T é $S(z) = \dfrac{a+bz}{1+z}$, concluímos que

$$Q(z) = (1+z)^n P\Big(\frac{a+bz}{1+z}\Big)$$

não tem variações, no primeiro caso, e uma variação só, no último. □

Utilizando o método delineado acima, mostremos como um exercício, que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ tem três zeros reais, um positivo e dois negativos, localizados nos intervalos $(-2,-1)$, $(-1,0)$ e $(1,2)$.

Note que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ tem apenas uma variação de sinal, ou seja, pela regra de sinais de Descartes, tem apenas um zero positivo. Através das transformações de Möbius e utilizando os comandos do sistema algébrico computacional MAXIMA, vamos mostrar que este zero está exatamente no intervalo $(1,2)$.

De fato, pois tomando $\varphi(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ e utilizando o sistema algébrico computacional MAXIMA, obtém-se:

$$P\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = -\frac{x^3 - 7x - 7}{(x+1)^3}$$

como $V\big(P\big|_{(1,2)}\big) = 1$, então o zero positivo de P está extamente no intervalo $(1,2)$. Vejamos agora a variação de sinais de

$$Q(x) := P(-x) = -x^3 + x^2 + 2x - 1$$

Trocando x por $-x$, temos que $V(Q) = 2$, podendo haver, então, uma raiz dupla, duas raízes simples ou nenhuma raiz positiva para $P(-x)$.

Segue que utilizando $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1}$, obtém-se:

$$Q\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{(x+1)^3}$$

ocorrendo $V\Big(Q\Big|_{(0,1)}\Big) = 1$, o que implica que há um zero negativo de P no intervalo $(-1,0)$.

Utilizando, agora, $\varphi(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, obtém-se:

$$Q\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3}$$

ocorrendo $V\Big(Q\Big|_{(1,2)}\Big) = 1$, o que implica que há um zero negativo de P no intervalo $(-2,-1)$.

Conclusão, P tem um zero positivo em $(1,2)$, um zero negativo em $(-1,0)$ e outro zero negativo em $(-2,-1)$.

Para confirmar tal conclusão vamos determinar estas raízes de forma aproximada, utlizando o sistema algébrico computacional MAXIMA. Vejamos:
/* [wxMaxima: input start] */ allroots(P(x));

$$[x = 1.246979603717467,$$

$$x = -0.44504186791263,$$

$$x = -1.801937735804838]$$

/* [wxMaxima: input end] */

É importante rassaltar que o método, aqui apresentado, utilizando a regra de sinais de Descartes, juntamente com as transformações de Möbius adequadas, sob a inspiração do teorema de Vincent, e com o auxílio do MAXIMA, servi-nos para estudar a natureza dos zeros, com a possibilidade de contá-los, de polinômios reais de graus arbitrários. De fato, o método possibilita-nos isolarmos um zero dos demais. Isto significa que podemos determinar um intervalo que contém um zero, e nenhum outro. Observemos que, uma vez obtido um tal intervalo, podemos diminuir seu comprimento tanto quanto queíramos, ao redor do único zero que está nele. E assim, temos um método de aproximação por falta e por excesso de zeros reais. Isto pode ser aplicado aos alunos da educação básica, com o intuito de mostrá-los de maneira prática e prazerosa novos caminhos de como estudar equações polinomiais. Indicamos como leitura complementar [1] e [3].

Capítulo 4

Atividade Proposta

Mais uma vez, a exemplo do que fizemos no capítulo anterior, tornaremos a descrever o método indireto que possibilitará ao aluno do ensino médio manipular de forma efetiva as ferramentas vistas.

4.1 O Problema

O problema que propomos é o de estudar os zeros do polinômio

$$P(x) = 6x^7 - 5x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1.$$

4.2 A Solução

Vejamos o procedimento proposto neste trabalho para tal problema. Inicialmente, observemos que nem 0 e nem 1 são zeros de P, já que $P(0) = P(1) = 1$. Observando a variação de sinais de P, usando regra de sinais de Descartes, temos que P pode ter quatro zeros positivos, ou dois, ou nenhum.

Utilizando algum sistema algébrico computacional, por exemplo, o MAXIMA, munido do método exposto no capítulo anterior, que, resumidamente, conta com a regra de sinais de Descartes, de certas tranformações de Möbius, sob a inspiração do teorema de Vincent. O primeiro passo é verificarmos se P tem zeros nos intervalos $(0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Para tanto, utilizamos a transformação de Möbius dada por $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$. Desta forma, obtemos

$$P\Big|_{(0,1)} = x^7 + 7x^6 + 19x^5 + 25x^4 + 12x^3 - 4x^2 - 9x + 1,$$

que possui duas variações de sinais. Sendo assim, no intervalo $(0, 1)$, P tem dois zeros positivos ou nenhum.

Passando a considerar o intervalo $(1, +\infty)$, e utilizando a transformação de Möbius dada por $\varphi(x) = x + 1$, chegamos a

$$P\Big|_{(0,+\infty)} = 6x^7 + 37x^6 + 100x^5 + 152x^4 + 138x^3 + 71x^2 + 16x + 1,$$

que não possui variação de sinal. Isto mostra-nos que, em $(1, +\infty)$, não existem zeros de P.

Através do MAXIMA, podemos estimar os zeros reais de P, que são

$$\begin{aligned} x &= -0.50955667609221; \\ x &= 0.65024136277682; \\ x &= 0.90251375024204. \end{aligned}$$

Observemos que os zeros positivos estimados de P em $(0,1)$ são $x = 0.65024136277682$ e $x = 0.90251375024204$. Isto, leva-nos a perceber que os intervalos $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right)$ e $\left(\frac{7}{10}, 1\right)$ isolam estes zeros, respectivamente. Demonstremos este fato. Considerando $\varphi(x) = \left(\frac{\frac{1}{2}x+\frac{7}{10}}{x+1}\right)$, vemos que

$$\begin{aligned} P\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{7}{10}\right)} &= 1015625x^7 + 5843750x^6 + 13509375x^5 + 15530000x^4 \\ &+ 8412375x^3 + 839150x^2 - 1030015x - 305348 \end{aligned}$$

tem uma variação de sinal. Disto, segue-se, pela regra de sinais de Descartes, que P tem um único zero simples em $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{10}\right)$. Agora, considerando $\varphi(x) = \left(\frac{\frac{7}{10}x+1}{x+1}\right)$, chegamos a

$$\begin{aligned} P\Big|_{\left(\frac{7}{10},1\right)} &= -[610696x^7 + 7597135x^6 + 30027000x^5 + 53864000x^4 \\ &+ 43880000x^3 + 7050000x^2 - 11000000x - 5000000] \end{aligned}$$

tem uma variação de sinal. Novamente, pela regra de sinais de Descartes, segue-se que P tem um único zero simples em $\left(\dfrac{7}{10}, 1\right)$. Observemos que este procedimento possibilita-nos obter boas aproximações por falta e por excesso para os zeros de P. Para tanto, basta diminuírmos o comprimento do intervalo usando as transformações de Möbuis adequadas, por um lado, até não existirem variações, por outro lado, até existir mais de uma variação.

Passemos a analisar a existência de zeros negativos. Para tanto, substituamos x por $-x$ em P, e assim, obtendo

$$Q(x) = P(-x) = -6x^7 - 5x^6 - 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$$

É imediato que Q possui uma única variação de sinal, o que nos garante que Q possui um único zero simples positivo. Disto, segue-se que P tem um único zero negativo.

A partir deste momento, determinemos um intervalo que isola o zero negativo de P. Para tanto, utilizando $\varphi(x) = \frac{1}{x+1}$ em Q, obtemos

$$Q\Big|_{(0,1)} = x^7 + 7x^6 + 19x^5 + 25x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 25x - 19,$$

que possui uma única variação de sinal. Isto, mostra-nos, pela regra de sinais de Descartes, que Q tem um único zero $(0,1)$. Sendo assim, vemos que P tem um único zero negativo em $(-1,0)$, como comprova o MAXIMA, quando obtivemos o zero estimado $x = -0.50955667609221$. Agora, utilizando $\varphi(x) = x+1$, obtemos que

$$Q\Big|_{(1,+\infty)} = -(6x^7 + 47x^6 + 160x^5 + 308x^4 + 362x^3 + 261x^2 + 108x + 19),$$

ou seja, não ocorre variações de sinais no intervalo $(1,+\infty)$. Logo, conclui-se que, de fato, o único zero negativo de P encotra-se no intervalo $(-1,0)$.

Fechando a análise, utilizando o teorema fundamental da Álgebra, podemos determinar a quantidade de zeros imaginários de P. Já sabemos que P tem três zeros reais. Como P tem grau 7, temos que P tem exatamente 7 zeros. Sendo assim, P tem quatro zeros imaginários, dois a dois conjugados, já que P é um polinômio com coeficientes reais.

A seguir, propomos alguns exercícios, que constituem em estudar, pelo método indireto, os zeros dos polinômios listados.

1. $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$;
2. $x^3 - 9x^2 + 20x + 1 = 0$;
3. $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$;
4. $x^6 - 15x^4 + 40x^3 - 45x^2 + 24x - 5 = 0$;
5. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$.

Conclusão

Inicialmente, nosso trabalhou abordou o corpo dos complexos, com o objetivo de garantir um universo mais amplo no que diz respeito a resolução de equações algébricas. Estas, por sua vez, foram apresentadas de modo geral. Em seguida, abordamos a resolução das equações de grau um, de grau 2, de grau 3 e de grau quatro, dando atenção especial às quações cúbicas e quárticas. Também, trouxemos um pouco da história de como ocorreu a descoberta da fórmula resolutiva das cúbicas, assim como, das quárticas, afim de deixar o leitor inteirado a cerca de sua problemática.

No primeiro momento, nosso trabalho concentrou-se na resolução, por meio de radicais, das equações cúbicas e quárticas, desenvolvendo, da forma mais detalhada possível e exemplificada, cada tipo de equação cúbica de acordo com o sinal do seu discriminante, positivo, nulo ou negativo. Da mesma forma, fizemos com o processo resolutivo das equações quárticas, de modo que o leitor, sem maiores dificuldades, pudesse compreender, e inclusive aplicar, esses resultados, afim de solucionar problemas envolvendo tais equações.

Em seguida, buscamos métodos indiretos de estudo das raízes de equações polinomiais, inclusive de grau $n > 4$, que nos permitisse, através da regra de sinais de Descartes, das transformações de Möbius, sob inspiração do teorema de Vincent, e fazendo uso do software matemático MAXIMA, estudar a quantidade de raízes positivas, negativas e imaginárias. O objetivo do uso do computador e do sistema computacional MAXIMA foi o de tornar, o estudo das raízes das equações polinomiais de grau arbitrário, acessível e compreensível aos alunos do ensino médio.

Finalizando, lançamos a proposta de estudo, por meio do método indireto, das raízes de equações polinomiais de grau arbitrário, para os alunos do ensino médio, incentivando-os, não somente à descoberta de novas realidades na relação ensino-aprendizagem, mas, também, à manipulação das novas tecnologias, fazendo-os descobrir o grande leque de opções que estas proporcionam na resolução de problemas. Além disso, procuramos motivá-los a buscarem o que é possível, mesmo o que não seja comumente adotado, expandindo os seus horizontes.

Referências Bibliográficas

[1] Alessina, A. and Galuzzi, M., Vincent's Theorem from a modern point of view, June 9^{th}1998.

[2] Aragona, J. and Oliveira, O. R. B., Números Complexos, 1 ed., Editora da Física, 2010.

[3] Barros, J. F., Uma Versão do Teorema das Funções Implicitas para Polinômios, Feira de Santana, Bahia, 2013.

[4] Bastos, G. G., Resolução de Equações Algébricas por Radicais, Edições Livro Técnico, Fortaleza, 2002.

[5] Hefez, A., Curso de Álgebra, coleção universitária, volume 1, 3.ed. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2002. 226 pp.

[6] Hood, R., Solução da equação polinomial de grau três a graus maiores, extraído de Baungart, J. K. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, vol. 4, Álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[7] Macedo, B. F. M., Tutorial MAXIMA 5.9.2. para Windows, RA 042290 - MA111 - Turma A.

[8] Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio, http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/ciencian.pdf, pág. 41.

[9] Soares, M. G., Cálculo em uma variável complexa, 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[10] Uspensky, J. V., Theory of Equations, McGraw-Hill, New York, 1948.

Sites Acessados

http://www.bienasbm.ufba.br/M30.pdf em 02-02-2014

http://literamati.dominiotemporario.com/doc/Cubicas%20e%20maiores.pdf em 02-02-2014