UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio

Michelle Noberta Araújo de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Julho/2014

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

O48a Oliveira, Michelle Noberta Araújo de.
Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio / Michelle Noberta Araújo de Oliveira. – Campina Grande, 2014.
118 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".
Referências.

1. Função Exponencial e Logarítmica. 2. Contextualização. 3. Livros Didáticos. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 51(075.2)(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

ANÁLISE DA CONTEXTUALIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

por

Michelle Noberta Araújo de Olveira †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

ANÁLISE DA CONTEXTUALIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

por

Michelle Noberta Araújo de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Silvanio de Andrade - UEPB

Profa. Dra. Rosana Marques da Silva - UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Julho/2014

Dedicatória

À minha vó Iracema que por sua sabedoria, paciência e cuidado, é inspiração para todos da família.
Aos meus pais Hilton e Maria José cujo amor, incentivo e apoio foram fundamentais para a minha formação pessoal e profissional.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pelas bênçãos que me foram concedidas ao longo da vida.

À Escola Dr. Adilson Bezerra de Souza pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

À UFCG e a todos os professores do PROFMAT por terem proporcionado um importante momento de aprendizagem e crescimento profissional e pessoal.

Ao professor Daniel Cordeiro pela preciosa, clara e enriquecedora orientação.

À Banca Examinadora, composta pelos professores Silvanio de Andrade (UEPB) e Rosana Marques da Silva (UFCG), pela valiosa contribuição para a conclusão deste trabalho.

Ao meu marido Marcos, companheiro de vida e profissão, cuja parceria, apoio e compreensão foram essenciais para a conclusão do Curso.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho realizamos uma análise de como os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio motivam o estudo das funções exponenciais e logarítmicas, e das questões contextualizadas sugeridas como atividades a serem realizadas pelos alunos. São apresentadas as justificativas das fórmulas que fornecem o valor da magnitude de um terremoto na Escala Richter, o pH de substâncias e a medida da intensidade sonora em decibéis. Trazemos também sugestões de questões contextualizadas elaboradas por nós que podem ser utilizadas pelo professor em suas atividades em sala de aula. As análises que realizamos podem servir como instrumento pedagógico, no que diz respeito às boas contextualizações, ou como suporte para a formação do professor, pois para classificarmos uma contextualização como inadequada, temos que estar embasados no conhecimento matemático e de outras áreas do saber, necessários para que nossa argumentação seja convincente.

Palavras Chaves: Função Exponencial e Logarítmica. Contextualização. Livros Didáticos.

Abstract

In this work we realized an analysis that how the Mathematics Secondary's textbooks motivate the study of exponential and logarithmic functions, and issues contextualized as suggested activities to be performed by students. The justification of the formulas that provide the value of magnitude an earthquake in Richter scale, the pH of substances and the measurement of loudness in decibels are presented. We also bring suggestions of issues contextualized created for us that can be used by teachers in their classroom activities. The analyzes that we perform can serve like an educational tool, with regard to good contextualization or like support for teacher training, because for to qualify a contextualization like inadequate, we must be grounded in mathematical knowledge and other areas of knowledge, necessaries for our argument be convincing.

Keywords: Exponential and Logarithmic Function. Contextualization. Textbooks.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O grande desafio do professor de Matemática hoje, é dismistificar a ideia de que esta disciplina é para poucos, de que só quem compreende seus conceitos, técnicas e aplicações são pessoas de mentes “avantajadas”.

Durante muito tempo o ensino da Matemática se resumiu a apresentação de conceitos sem qualquer justificativa ou conexão com a realidade e à resolução de exercícios puramente manipulativos.

Reconhecemos que esta forma de enxergar a Matemática é extremamente equivocada, e a busca por um ensino que dê significado ao que se pretende ensinar, buscando em situações reais o sentido do aprender é o que boa parte dos professores vêm tentando desenvolver em sala de aula.

Diante desta nova forma de se pensar o ensino da Matemática, a contextualização é uma ferramenta importantíssima, visto que sua utilização é o que dá o sentido, o significado tão desejado à aprendizagem. Uma boa contextualização motiva e estimula a construção do saber.

> Os professores do ensino básico, quer por formação quer por hábito, acham-se envolvidos numa rotina de trabalho onde os assuntos abordados são aqueles em que se sentem seguros de tratar e os exercícios propostos são quase sempre aqueles mesmos que eles já sabem resolver (Lima [13], p. 149).

Isto nos fez pensar em um trabalho que pudesse auxiliar o professor nesta árdua tarefa de transformar as suas aulas de Matemática propondo, através da utilização de boas contextualizações, uma abordagem mais atrativa e cheia de significados para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas.

Analisamos várias questões contextualizadas encontradas nos livros didáticos do Ensino Médio de Matemática, envolvendo as funções exponenciais e logarítmicas, as quais classificamos como contextualizações boas ou inadequadas. Também analisamos como os autores motivam o estudo destas funções e como lhes são atribuídos significados por meio de ligações com as práticas sociais atuais, com outros campos do saber, com a própria matemática ou com a história da matemática.

Não revelamos de quais livros didáticos retiramos as questões e motivações apresentadas no intuito de preservar os autores, já que nossa análise é de cunho pedagógico.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral contribuir para o ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, tendo como ferramenta boas contextualizações encontradas em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.

Os objetivos específicos são:

- Analisar como os autores dos livros didáticos motivam o estudo das funções exponenciais e logarítmicas;
- Analisar os problemas contextualizados referentes à função exponencial e logarítmica presentes nas atividades a serem desenvolvidas pelos alunos nos livros didáticos;
- Desenvolver no professor de Matemática, através das análises apresentadas, uma criticidade em relação às situações-problema que pretenda utilizar em sala de aula.

1.2 Organização

Este TCC está organizado da seguinte maneira: Além deste, temos os seguintes capítulos:

- Capítulo 2: Tratamos do papel do ensino da Matemática no Ensino Médio e da importância da contextualização no ensino da Matemática.
- Capítulo 3: Falamos sobre a importância do ensino da função exponencial.
- Capítulo 4: Fizemos uma análise das motivações trazidas nos livros didáticos do Ensino Médio para o ensino da função, equação e inequação exponencial.
- Capítulo 5: Analisamos questões contextualizadas envolvendo funções exponenciais.
- Capítulo 6: Falamos sobre a importância do ensino da função logarítmica e apresentamos um breve resumo histórico da criação dos logaritmos.
- Capítulo 7: Fizemos uma análise das motivações trazidas nos livros didáticos do Ensino Médio para o ensino da função, equação e inequação logarítmica.
- Capítulo 8: Analisamos questões contextualizadas trazidas nas atividades propostas para os alunos envolvendo funções logarítmicas.

- Capítulo 9: São apresentadas as aplicações da função logarítmica na Escala Richter, no cálculo do nível de intensidade do som em decibéis e do pH de substâncias, bem como a justificativa de suas fórmulas.
- Capítulo 10: São dadas sugestões de questões contextualizadas criadas por nós envolvendo funções exponenciais e logarítmicas.
- Capítulo 11: Apresentamos as considerações finais do trabalho.
- Por fim, as Referências Bibliográficas.

Capítulo 2

A importância da contextualização no ensino da Matemática

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos o papel do ensino da Matemática no Ensino Médio, bem como o tripé ao qual acreditamos, baseados em Lima [13], que este ensino deve estar alicerçado: a conceituação, a manipulação e as aplicações, e o conceito de contextualização adotado por nós.

2.2 O papel do ensino da Matemática no Ensino Médio

Nos deparamos constantemente em sala de aula com perguntas do tipo: Por que temos que estudar esse conteúdo? Em que vamos usar isto que estamos aprendendo? Por que estudar matemática?

Segundo os PCN's [15], as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Entre os objetivos apresentados, levar o aluno a reconhecer as conexões entre os diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo é uma importante ferramenta para dar sentido e motivar a aprendizagem. Do mesmo modo, trabalhar os conteúdos matemáticos de forma isolada e desprovidos de aplicações, podem levá-lo a fazer os questionamentos citados anteriormente, gerando desinteresse e dificultando a aprendizagem.

> O critério central para a escolha dos temas e tópicos da Matemática que serão trabalhados no Ensino Médio é o da contextualização e o da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (PCN's [15], p.43).

Deste modo, observamos a importância da contextualização no ensino da Matemática, já que é um dos principais critérios para a escolha do que será desenvolvido junto aos alunos em sala de aula, pois é ela que permite a ponte entre a Matemática e ela mesma e entre a Matemática e as outras ciências.

> A matemática do Ensino Médio tem um valor formativo que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Além disso, também é uma ciência com suas características estruturais específicas (PCN's [15] p.40).

Ou seja, o ensino da Matemática no Ensino Médio além de assumir o papel instrumental, onde o que se aprende é aplicável diretamente em atividades do cotidiano do aluno, também possui o papel formativo de possibilitar o desenvolvimento do processo estrutural do pensamento e a aquisição de atitudes que façam com que o aluno ao se deparar com problemas reais tenha a capacidade de resolvê-los. Como ciência, traz suas demonstrações, definições e encadeamentos conceituais lógicos que permitem que novos conceitos sejam construídos a partir de outros e servem para justificar e dar sentido às técnicas utilizadas.

2.3 Os três componentes do ensino da Matemática

Acreditamos que o ensino da Matemática deve constituir-se de três componentes: *Conceituação*, *Manipulação* e *Aplicações*.

2.3.1 Conceituação

Segundo Lima [13], a conceituação compreende vários aspectos, entre os quais destacou os seguintes:

(A) A formulação correta e objetiva das definições matemáticas;

(B) O emprego bem dosado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que se supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese);

(C) O entendimento e a percepção de que algumas noções e certas proposições podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos.

A formulação correta e objetiva das definições matemáticas permite a simplificação da linguagem para um maior entendimento dos conceitos a serem trabalhados. Podemos definir algo de várias formas, porém quando utilizamos uma linguagem clara, correta e objetiva, contribuimos para que os conceitos sejam melhor compreendidos.

O raciocínio dedutivo é essencial para que o aluno conheça o porquê de determinadas afirmações serem verdadeiras ou falsas, suas recíprocas e negações. O porquê das fórmulas funcionarem nos ajudando a sermos mais objetivos e eficientes ao darmos a resposta para determinados problemas. Porém, as demonstrações têm que ser trabalhadas com bom-senso.

> Muitas vezes um raciocínio intuitivo, de natureza concreta, embora impreciso, tem um forte apelo visual e contribui para despertar o interesse do aluno. Neste caso, é de bom alvitre apresentá-lo (Lima [13], p. 180).

Por exemplo, quando queremos mostrar para o aluno que a razão entre o comprimento C e o diâmetro d de uma circunferência (hipótese), é o número irracional π (tese), podemos fazer isto utilizando um software de geometria dinâmica como o GeoGebra, por exemplo, desenhando dois polígonos regulares um inscrito e outro circunscrito a uma circunferência que possuem o mesmo número de lados, e fazer o aluno perceber de forma experimental que a medida que aumentamos o número de lados dos polígonos, o valor dos seus perímetros vai se aproximando de $d \cdot 3,14159...$ que é o valor do perímetro C da circunferência, onde $\frac{C}{d} = 3,14159...$ é aparentemente um número decimal não periódico. Este processo não nos garante que o número $\pi = 3,14159...$ é irracional, pois não temos como conferir se à medida que aumentarmos o número de lados dos polígonos, não vamos encontrar, depois de muitas casas decimais, um número decimal periódico.

Existe uma forma de demonstrar matematicamente a irracionalidade de π, porém é uma demonstração que não é de bom-senso ser apresentada no ensino médio devido a sua complexidade, e isto pode ser dito em sala de aula pelo professor enfatizando que o processo que foi utilizado nos dá a noção de que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é um número irracional, mas que não se trata de uma demonstração.

Quanto ao entendimento e a percepção de que algumas noções e certas proposições podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos, podemos dar como exemplo o caso em que uma progressão geométrica é uma função do tipo exponencial $f(x) = a \cdot b^x$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Existem muitos conteúdos que possuem conexão entre si, porém são tratados como coisas disjuntas, é interessante que o professor faça estas conexões, fazendo com que o aluno compreenda com mais clareza alguns conceitos e perceba a harmonia que existe dentro da própria Matemática.

A conceituação é o que vai permitir que o aluno, diante de um problema, identifique quais as ideias e conceitos deverão ser empregados, para que sejam feitas as generalizações que irão modelá-lo.

2.3.2 Manipulação

A outra componente da qual o ensino da matemática se constitui é a manipulação.

> Para analisar corretamente o papel da manipulação, o crítico deve policiar-se atentamente para não incorrer no erro de menosprezá-la. Durante séculos, e ainda hoje, a manipulação quase que monopolizou o ensino da matemática (Lima [13] p. 182).

A manipulação permite que o aluno, no momento de resolver um problema de aplicação, se torne mais ágil e preciso ao lidar com equações, fórmulas e operações, fazendo com que sua energia e seu tempo sejam concentrados em pontos realmente importantes, além de auxiliar na fixação de conceitos.

O que deve predominar é o bom-senso do professor na escolha de exercícios e problemas que envolvam manipulação.

2.3.3 Aplicações

As aplicações trazem o que há de mais belo na matemática, que é a essência e o porquê da sua existência, a busca pelas respostas de problemas reais que auxiliem a sociedade em sua busca permanete por desenvolvimento e melhoria de vida.

As aplicações são problemas bem contextualizados que não vêm acompanhados de fórmulas e trazem situações onde o aluno, de posse das informações apresentadas no problema, e tendo como base os conceitos aprendidos, buscará a forma mais adequada de modelá-los.

> O professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está sendo apresentada.(Lima [13], p. 184)

Sabemos que isto não é uma tarefa fácil, requer tempo, pesquisa, mas o resultado do esforço é recompensador. A maioria dos alunos torna-se mais interessada e comprometida com as aulas quando damos significado ao que estamos nos propondo a ensinar, e a utilização das aplicações é uma das ferramentas que dão este significado.

2.4 Contextualizações boas ou inadequadas, como diferenciá-las?

Trabalhar os assuntos, dando significado aos conteúdos, rodeados de aplicações, é motivador, estimulante, faz com que o aluno encontre um sentido, um porquê de dedicar seu tempo e sua energia para tentar compreender e aprender o que lhe está sendo apresentado em sala de aula. Em uma pesquisa realizada por Calliari [8], onde ele comparou o desempenho dos alunos em atividades descontextualizadas e, a seguir, em atividades contextualizadas, mostrou que nas atividades contextualizadas os alunos se saíram melhor, além de terem demonstrado maior interesse pelos conteúdos.

Dar significado ao conteúdo implica em trazer para a sala de aula problemas ou situações que tenham sentido e possuam ligação com o mundo real, mas que necessariamente não têm que estar inseridos no cotidiano do aluno.

> Embora as situações do dia-a-dia tenham grande importância no sentido de favorecer a construção de significados para muitos conteúdos a serem estudados, faz-se necessário considerar a possibilidade de construção de significados a partir de questões internas da própria Matemática, caso contrário, muitos conteúdos seriam descartados por não fazerem parte da realidade dos alunos. (Vasconcelos [21])

Para Vasconcelos ([21] p. 49) contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos por meio da problematização, resgatando os conhecimentos prévios e as informações que os alunos trazem, criando dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que conduza a sua compreensão.

Muitos professores consideram conhecimentos prévios como sendo a gama de conteúdos que o aluno já estudou em séries anteriores e que domina. Porém, os conhecimentos prévios aqui citados levam em conta a capacidade do aluno em ler e interpretar questões e a sua vivência sóciocultural e profissional.

Segundo Lima ([13], p.182), as situações contextuais não vêm acompanhadas de fórmulas. A tarefa de encontrar o instrumeto matemático adequado para traduzir a situação é o que se chama de modelagem matemática.

Para nós, boas contextualizações são as que, por meio da problematização, envolvam aplicações ou manipulações, ou seja, podem ou não vir acompanhadas de fórmulas que as modelem, desde que as informações contidas no problema sejam reais, ou simulem a realidade, fazendo conexão entre os próprios temas da Matemática, entre esses temas e outras ciências, entre a Matemática e as práticas sociais ou entre a Matemática e a História da Matemática.

Daremos maior ênfase às contextualizações que envolvem aplicações, pois são responsáveis por fazer a conexão entre a abstração e a realidade. Como não vêm modeladas, são mais desafiadoras, estimulantes e levam o aluno a aplicar os conceitos aprendidos.

As contextualizações serão consideradas inadequadas quando forem falsas ou artificiais. Gitirana *apub* Vasconcelos [17] aponta para o cuidado em evitar este tipo de contextualização. Para ela, deve-se evitar as contextualizações em que as situações são forjadas a fim de convencer o aluno da utilidade de certos conceitos e também com o uso de contextos na Matemática que imprimam situações absurdas. Segundo ela, tais procedimentos podem levar os alunos a desenvolverem uma acriticidade em relação à Matemática e também em relação à realidade.

Em nosso trabalho, vamos analisar como os autores de 10 livros didáticos do Ensino Médio de Matemática motivam o estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas e como lhes são atribuídos significados.

> Um procedimento que certamente desperta a atenção dos alunos, é abrir cada novo tema com um problema que necessita dos conhecimentos que vão ali ser estudados a fim de ser resolvido. De preferência (e isto ocorre naturalmente quando é proposto no início do capítulo) um problema cujo objeto principal não é o assunto a tratar naquele capítulo. Por exemplo, problemas que se resolvem com logaritmos, mas a palavra “logaritmo” não é mencionada (Lima [13], p. 184).

Classificaremos como boas motivações, problemas de aplicação, ou seja, situações bem contextualizadas que não vêm modeladas por nenhuma fórmula, e onde a resolução apresentada pelo autor, seja estimulante, conduzindo o aluno a modelar o problema e a *perceber a necessidade de se aprender algo novo, visto que seus conhecimentos prévios não são suficientes para resolvê-lo.*

As contextualizações que envolvem manipulação, mesmo quando boas, não são adequadas para motivar o aluno, pois se o problema já vem modelado, não há muito o que se fazer, basta utilizar as informações contidas nele e utilizar a fórmula apresentada para solucioná-lo o que faz com que se perca toda a magia da descoberta. Porém, acreditamos que boas contextualizações envolvendo manipulação podem ser utilizadas nas atividades a serem propostas para os alunos.

Capítulo 3

Função Exponencial

3.1 Introdução

Trataremos neste capítulo da importância do ensino da função exponencial no Ensino Médio e de como podemos identificar que um problema é modelado por uma função exponencial de acordo com sua caracterização matemática.

3.2 Importância do ensino da função exponencial

Acreditamos que todo conhecimento criado pela humanidade surgiu da necessidade de se encontrar a resposta para um problema real. Com o conhecimento matemático não poderia ser diferente. Os diversos teoremas, fórmulas, axiomas etc., surgiram para solucionar e generalizar problemas que aparecem em situações concretas permitindo criar modelos teóricos que possam resolver esses problemas e auxiliar na tomada de certas decisões de forma coerente.

> O objetivo fundamental do "uso" da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (Bassanezi [1], p. 18).

Muitos fenômenos naturais e sociais como o crescimento populacional, a meia-vida de uma substância, a medida da pressão atmosférica, o cálculo do montante num sistema de juros compostos, o resfriamento de um corpo, são exemplos que trazem problemas onde é importante a aplicação da função exponencial que devido a sua relação com outras ciências, tem seu estudo como parte relevante do currículo do Ensino Médio. Esta conexão com outras áreas do currículo e com a própria matemática faz com que o ensino e a aprendizagem ganhem mais e melhor sentido, pois cria a oportunidade na qual o aluno percebe a importância do conteúdo a ser trabalhado, o que faz da contextualização uma importante ferramenta de ensino para resolver problemas reais.

Diante dos vários e diversos tipos de problemas que aparecem em Livros Didáticos e têm como objetivo contextualizar aplicações de funções exponenciais, fica uma pergunta: Como podemos identificar que determinado problema é realmente modelado por uma função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$?

Tomemos o exemplo típico que pode funcionar como modelo pragmático:

Uma pessoa deposita R$ 1 200,00 na poupança a uma taxa de juros compostos[1] de 0,5% ao mês. Considerando que não foi feita nenhuma retirada, após 5 meses qual será o saldo da poupança?

Fazendo uma tabela que nos ajude a encontrar o saldo a cada mês, temos:

Mês (x)	Montante
1	$\underbrace{1\ 200}_{Capital\ inicial} + \underbrace{1\ 200 \cdot 0,005}_{juro} = 1\ 200(1+0,005) = 1\ 200 \cdot 1,005 = 1\ 206$
2	$\underbrace{1\ 206}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1\ 206 \cdot 0,005}_{juro} = 1\ 206(1+0,005) = 1\ 200 \cdot 1,005 \cdot 1,005 = 1\ 200 \cdot 1,005^2 = 1\ 212,03$
3	$\underbrace{1\ 212,03}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1\ 212,03 \cdot 0,005}_{juro} = 1\ 212,03(1+0,005) = 1\ 200 \cdot 1,005^2 \cdot 1,005 = 1\ 200 \cdot 1,005^3 = 1\ 218,09$
4	$\underbrace{1\ 218,09}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1\ 218,09 \cdot 0,005}_{juro} = 1\ 218,09(1+0,005) = 1\ 200 \cdot 1,005^3 \cdot 1,005 = 1\ 200 \cdot 1,005^4 = 1\ 224,18$
5	$\underbrace{1\ 218,09}_{Saldo\ anterior} + \underbrace{1\ 218,09 \cdot 0,005}_{juro} = 1\ 218,09(1+0,005) = 1\ 200 \cdot 1,005^4 \cdot 1,005 = 1\ 200 \cdot 1,005^5 = 1\ 230,30$
x	$f(x)$
$x+1$	$f(x+1) = 1,005 \cdot f(x)$
$x+2$	$f(x+2) = 1,005 \cdot f(x+1) = 1,005^2 \cdot f(x)$
$x+3$	$f(x+3) = 1,005 \cdot f(x+2) = 1,005^3 \cdot f(x)$
$x+h$	$f(x+h) = 1,005^h \cdot f(x)$

Deste modo, o saldo da poupança passados 5 meses é $R\$1\ 230,30$.

Observamos, diante do padrão que vai se apresentando na tabela, que o valor do montante no quinto mês é dado por $f(5) = 1200 \cdot 1,005^5 = 1\ 230,30$, mas como garantir que o valor do montante em um mês x qualquer é dado por $f(x) = 1200 \cdot 1,005^x$ com $x \in \mathbb{R}$?

[1] Juros compostos são os juros de um determinado período somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes

Pela tabela, quando tomamos $x = 2$ e acrescentamos três unidades ao tempo, temos $t = 5$, consequentemente,

$$f(2) = 1200 \cdot 1,005^2$$

$$f(5) = f(2+3) = 1200 \cdot 1,005^5$$

logo,

$$\frac{f(5)}{f(2)} = \frac{f(2+3)}{f(2)} = \frac{1200 \cdot 1,005^5}{1200 \cdot 1,005^2} = 1,005^3.$$

Do mesmo modo, se tomarmos $x = 1$ e também acrescentarmos três unidades, teremos $x = 4$ e consequentemente,

$$f(1) = 1200 \cdot 1,005$$

$$f(1+3) = f(4) = 1200 \cdot 1,005^4$$

logo,

$$\frac{f(4)}{f(1)} = \frac{f(1+3)}{f(1)} = \frac{1200 \cdot 1,005^4}{1200 \cdot 1,005^1} = 1,005^3.$$

Observamos no exemplo apresentado, que não importa qual o valor que escolheremos para x, ao fazermos $\frac{f(x+3)}{f(x)}$, obteremos sempre $1,01^3$. Isto significa que independentemente do valor escolhido para x, o saldo da poupança $f(x+3)$ no mês $(x+3)$ é $1,03^3$ vezes o saldo da poupança $f(x)$ no mês x, $f(x+3) = 1,005^3 \cdot f(x)$, ou seja, $f(x+3)$ é proporcional a $f(x)$. Se fizermos o mesmo procedimento, agora para o saldo $f(x+h), h \in \mathbb{R}$, no mês $x+h$, obteremos $\frac{f(x+h)}{f(x)} = 1,005^h$, Além disso, note que o valor da poupança representa uma função monótona crescente[2] injetiva[3].

A partir dessas observações, como podemos garantir que uma função do tipo exponencial modela este problema? Em termos gerais, isto nos é garantido pelo teorema de caracterização da função do tipo exponencial:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que para qualquer $h \in \mathbb{R}$ o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ não depende de x. Então f é do tipo exponencial: $f(x) = b \cdot a^x$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstraremos este teorema na Seção 3.3.2

> De modo geral, quando temos uma situação onde exite uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado, a função que a modela é a exponencial (Carvalho [7]).

[2]Dizemos que uma função $f : A \to B$ é monótona crescente quando para todo $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$

[3]Uma função $f : A \to B$ é injetiva quando para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

No nosso exemplo $f(x+h) = 1,005^h \cdot f(x)$, isto significa que a grandeza $f(x+h)$, que é o saldo da poupança no mês $(x+h)$, é proporcional a $1,005^h$ que é a sua taxa de variação, logo, a função que a modela é $f(x) = 1\ 200 \cdot 1,005^x, x \in \mathbb{R}$.

3.3 Caracterização da função exponencial e do tipo exponencial

Motivados pelo problema da seção anterior em que encontramos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independe de x, vamos nesta seção provar que uma função desse tipo é exponencial.

3.3.1 Caracterização matemática da função exponencial

Inicialmente precisaremos do seguinte Lema:

Lema 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $a = f(1)$

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$

Demonstração. Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

- $(1) \Rightarrow (2)$

Mostraremos inicialmente que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$

Temos que $r = \frac{m}{n} \Rightarrow m = rn$, portanto,

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo,

$$f(rx)^n = f(x)^m \Rightarrow f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Tomando $f(1) = a$, temos:

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$,.

Mostraremos agora que a igualdade anterior vale para todo $x \in \mathbb{R}$, em vez de apenas $r \in \mathbb{Q}$.

Suponhamos que f seja crescente (o caso em que f é decrescente é tradado de modo análogo), logo, $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Vamos supor, por exemplo, que $f(x) > a^x$.

Usaremos o seguinte Lema[4]:

Lema 3.2 *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$*

Logo, existe um número racional r tal que $f(x) > a^r > a^x$, ou seja, $f(x) > f(r) > a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) > f(r)$, segue que $x > r$. Do mesmo modo, temos que $a^r > a^x$, então $r > x$, o que é uma contradição. Logo, $f(x) = a^x$ e $(1) \Rightarrow (2)$.

- $(2) \Rightarrow (3)$

Tomemos $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, onde $f(1) = a$. Deste modo, $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$.

- $(3) \Rightarrow (1)$

Tomemos novamente $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, onde $f(1) = a$. Temos que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow [f(x+y)]^n = f(x)^n \cdot f(y)^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Logo, $[f(x+y)]^n = f(x)^n \cdot f(y)^n = a^{nx} \cdot a^{ny} = a^{n(x+y)} = f(n(x+y))$.

E assim terminamos a demonstração. $\square$

3.3.2 Caracterização da função do tipo exponencial

Teorema 3.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ não depende de x. Então f é do tipo exponencial: $f(x) = b \cdot a^x$ onde $b = f(0) \neq 0$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$.*

Demonstração. Chamemos $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$. Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x)/b$, onde $b = f(0)$, temos $\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{f(x+h)/b}{f(x)/b} = \frac{f(x+h)}{f(x)}$. Deste modo, g também é monótona injetiva, com $\frac{g(x+h)}{g(x)}$ independente de x, onde $g(0) = \frac{f(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1$. Utilizando $x = 0$ na igualdade $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$, obtemos $\varphi(h) = \frac{g(h)}{g(0)} = g(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Logo, a função g que é monótona injetiva, cumpre $g(x+h) = g(x) \cdot g(h)$, pois $\varphi(h) = g(h) \Rightarrow \frac{g(x+h)}{g(x)} = g(h) \Rightarrow g(x+h) = g(h) \cdot g(x)$, ou seja, $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue do teorema anterior (implicação $(3) \Rightarrow (2)$) que $g(x) = a^x$ logo, $f(x) = b \cdot g(x) = b \cdot a^x$. E assim terminamos a demonstração. $\square$

[4]A demonstração do Lema 3.2 pode ser encontrada em (Carvalho [7], p. 177)

Capítulo 4

Análise da motivação do estudo da função, equação e inequação exponencial

4.1 Introdução

Neste capítulo, faremos uma análise de como os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio motivam o estudo da função exponencial. Analisaremos apenas as situações contextualizadas, sendo descartadas as introduções que não fazem conexão da função exponencial com nenhum tema real, pois neste caso classificamos que verdadeiramente o livro não faz qualquer motivação para o seu estudo.

Classificaremos como motivações boas, as situações que apresentam boas contextualizações envolvendo a aplicação da função exponencial através de problemas que podem ser modelados pelos alunos e que para solucioná-los, será necessária a aquisição de novos conhecimentos, visto que o conhecimento prévio do aluno é insufuciente para resolvê-los.

As motivações serão consideradas inadequadas quando em seu enunciado trouxerem "falsas" contextualizações, situações forçadas ou fictícias, ou questões contextualizadas que apresentam problemas apenas de manipulação matemática do assunto, onde o aluno não precisa modelar o problema, pois a fórmula que o modela já é dada e com isso o aluno só precisa resolver uma equação ou inequação.

4.2 Função Exponencial

4.2.1 Boa motivação do uso da função exponencial em crescimento populacional

Na Fig. 4.1 temos um texto que traz uma estimativa do crescimento da população brasileira, baseada na quantidade de habitantes no ano de 1950 e na taxa de crescimento daquele período que era de 3% ao ano. Os dados estão corretos segundo o IBGE [45].

1 Introdução ao estudo da função exponencial

A função exponencial é uma ferramenta matemática presente na descrição e análise de muitos fenômenos da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos por meio de técnicas que utilizam a radioatividade, estudo do crescimento ou decrescimento de uma população etc.

Com base nos dados obtidos no Censo*, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) pode fazer estimativas e projeções sobre, por exemplo, o crescimento da população. Assim, em 1950 a população brasileira era cerca de 52 milhões de habitantes e crescia à taxa de 3% ao ano. Se essa taxa de crescimento anual tivesse permanecido até 2004, teríamos:

Ano	População estimada
1950	52.000.000
1951	$52.000.000 + 52.000.000 \cdot 0,03 = 53.560.000$
1952	$53.560.000 + 53.560.000 \cdot 0,03 = 55.166.800$
⋮	⋮
2003	$241.846.066,55 + 241.846.066,55 \cdot 0,03 \simeq 249.101.448,55$
2004	$249.101.448,55 + 249.101.448,55 \cdot 0,03 \simeq 256.574.492$

Portanto, a população brasileira em 2004 seria cerca de 257 milhões.

Agora, veja outra forma de representar os cálculos feitos na tabela acima:

Ano	População estimada
1950	$52.000.000 \cdot (1 + 0,03)^0$
1951	$52.000.000 \cdot (1 + 0,03)^1 = 53.560.000$
1952	$52.000.000 \cdot (1 + 0,03)^2 = 55.166.800$
⋮	⋮
2003	$52.000.000 \cdot (1 + 0,03)^{53} \simeq 249.101.448,55$
2004	$52.000.000 \cdot (1 + 0,03)^{54} \simeq 256.574.492$

Com essa nova tabela fica mais fácil observar que esse crescimento é exponencial: a população de cada ano é o produto da constante 52.000.000 por uma potência de base 1,03, com expoente variando de 0 a 54.

Note que os fatos da realidade nem sempre obedecem às estimativas. Por exemplo, a estimativa acima para a população brasileira no ano de 2004 era de cerca de 257 milhões. No entanto, a população registrada nesse ano foi de 180 milhões de habitantes, e a taxa de crescimento foi de 1,44%. Um dos principais fatores dessa diferença foi a queda da fecundidade, que provocou desequilíbrio no balanço entre nascimentos e mortes. Algumas das causas apontadas pelo IBGE para a queda da fecundidade são a popularização dos métodos anticoncepcionais e o aumento do número de mulheres que trabalham fora de casa.

A seguir, ampliaremos o estudo da potenciação e de suas propriedades, o que nos auxiliará no estudo da função exponencial e na resolução de equações e inequações exponenciais.

* O Censo é a coleta de dados sobre todos os domicílios e seus habitantes, em todos os lugares do país. Os recenseadores, em sua visita aos moradores, registram e apuram informações sobre cada uma das casas e seus habitantes. Em seguida, os pesquisadores do IBGE organizam e analisam essas informações, para depois disponibilizar os resultados a respeito da população do país para toda a sociedade.

Figura 4.1: Função exponencial, estatística e as práticas sociais.

É uma situação que apresenta uma boa contextualização, pois envolve uma pesquisa estatística, e através de pesquisas estatísticas são gerados dados que auxiliam a sociedade na tomada de decisões. Além disso, traz uma das mais importantes aplicações da função exponecial que é o estudo do crescimento de uma população.

Os dados trazidos nas tabelas sugerem que a função que modela a quantidade de habitantes $f(x)$ decorridos x anos, a partir do ano 1950, é a função do tipo exponencial $f(x) = 52\ 000\ 000 \cdot (1{,}03)^x$. Mas como garantir isso?

Inicialmente, verificamos que a função é monótona crescente, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, quando o tempo x aumenta, a população $f(x)$ também aumenta.

Temos que nos certificar que para qualquer ano x, a partir de 1950, a razão $\frac{f(x+t)}{f(x)}$, se mantém constante independente do valor de x escolhido.

Observemos os dados trazidos na primeira tabela da Fig. 4.1, página 20.

Tomemos $x = 0$ e $t = 2$, segue que $f(x+t) = f(2) = 55\ 166\ 800$ e $f(x) = f(0) = 52\ 000\ 000$. Portanto, $\frac{f(x+t)}{f(x)} = \frac{f(2)}{f(0)} = \frac{55\ 166\ 800}{52\ 000\ 000} = 1{,}0609$. Tomemos agora $x = 52$ e vamos manter $t = 2$. Segue que $\frac{f(x+t)}{f(x)} = \frac{f(54)}{f(52)} = \frac{256\ 574\ 492}{241\ 846\ 066{,}55} = 1{,}0609$, ou seja, independente do x que escolhermos, $\frac{f(x+2)}{f(x)} = 1{,}0609$. Deste modo, é razoável admitirmos que em qualquer outro período x', no qual o número de habitantes é $f(x'+t)$, passado o mesmo tempo t, tenha-se $\frac{f(x'+t)}{f(x')}$ constante, logo, pelo teorema da caracterização da função exponencial (Teorema 3.3.2), a função que modela o problema é $f(x) = b \cdot a^x$, onde $b = 52\ 000$, pois representa a população inicial $f(0)$, e $a = 1{,}03$, pois $f(1)/f(0) = 1{,}03$.

Um fato importante que foi colocado pelo autor é o de que nem sempre os fatos da realidade obedecem às estimativas, citando o exemplo em que a população brasileira no ano de 2004, segundo as estimativas, teria 257 milhões de habitantes mas, na realidade, a população registrada nesse ano foi de aproximadamente 180 milhões e a taxa de crescimento em relação ao ano anterior foi de $1{,}44\%$, ou seja, devemos estar atentos ao fato de que a fórmula utilizada para modelar o problema neste caso, nos ajuda a ter apenas uma ideia de como este crescimento populacional pode ocorrer.

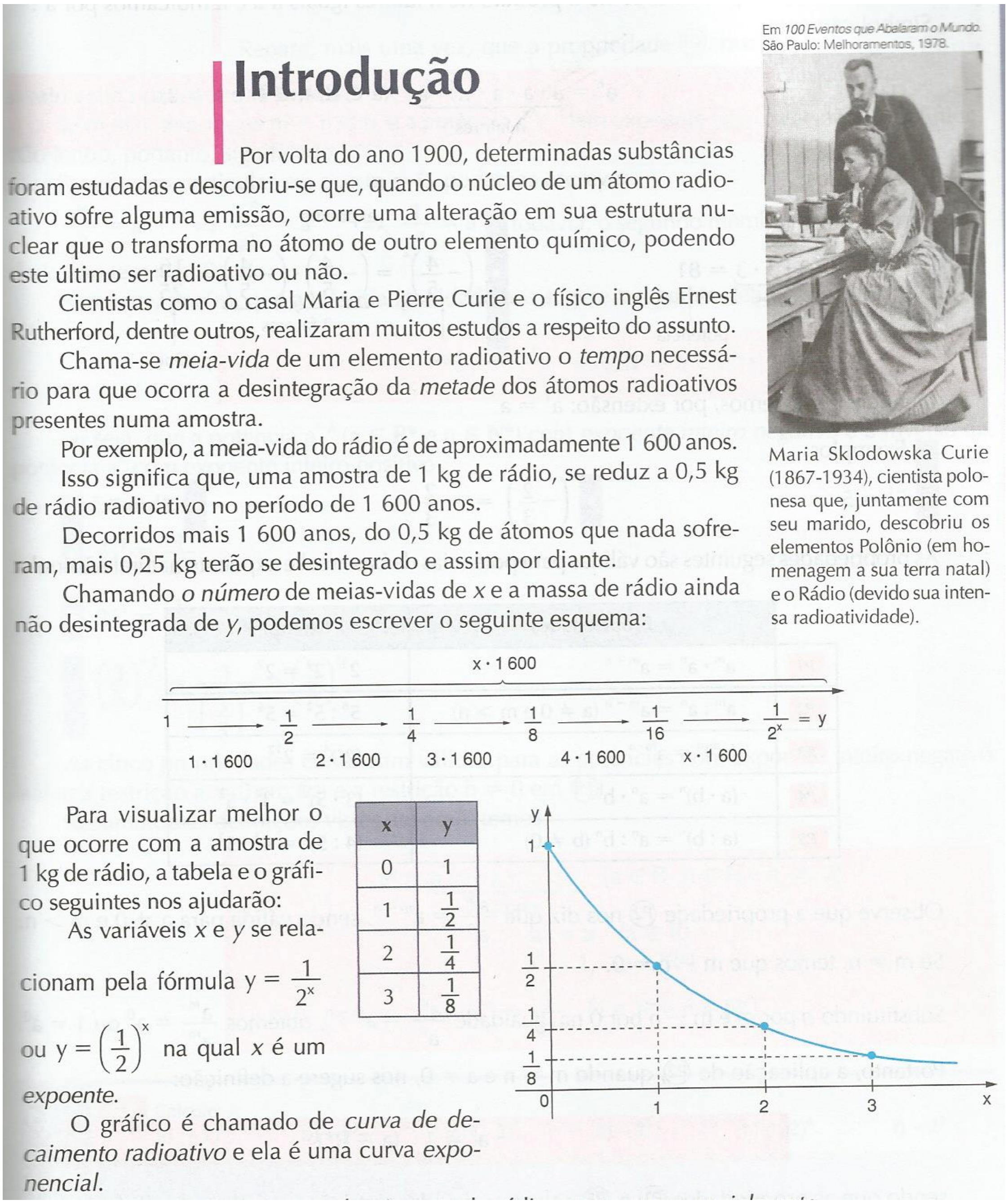
Deste modo, o problema fica razoavelmente modelado pela função $f(x) = 52\ 000 \cdot 1{,}03^x$, pois estamos analisando dados referentes a um número pequeno de anos. Nenhuma população cresce exponencialmente.

Após apresentar estas informações para os alunos, o professor pode fazer os seguintes questionamentos:

- Qual a população estimada para o ano de 2010?
- Pesquise o número de habitantes do Brasil segundo o censo do IBGE no ano de 2010. Os valores estão próximos dos que foram estimados na tabela?
- Qual a população estimada para 2020?

4.2.2 Boa motivação do uso da função exponencial em meia-vida de substâncias

Observamos na Fig. 4.2 que o autor inicia os estudos sobre função exponencial com uma importante aplicação que é a relação entre a meia-vida de uma substância radioativa e a quantidade de massa dessa substância ainda não desintegrada passadas *x* meias-vidas.



Introdução

Por volta do ano 1900, determinadas substâncias foram estudadas e descobriu-se que, quando o núcleo de um átomo radioativo sofre alguma emissão, ocorre uma alteração em sua estrutura nuclear que o transforma no átomo de outro elemento químico, podendo este último ser radioativo ou não.

Cientistas como o casal Maria e Pierre Curie e o físico inglês Ernest Rutherford, dentre outros, realizaram muitos estudos a respeito do assunto.

Chama-se *meia-vida* de um elemento radioativo o *tempo* necessário para que ocorra a desintegração da *metade* dos átomos radioativos presentes numa amostra.

Por exemplo, a meia-vida do rádio é de aproximadamente 1 600 anos. Isso significa que, uma amostra de 1 kg de rádio, se reduz a 0,5 kg de rádio radioativo no período de 1 600 anos.

Decorridos mais 1 600 anos, do 0,5 kg de átomos que nada sofreram, mais 0,25 kg terão se desintegrado e assim por diante.

Chamando *o número* de meias-vidas de *x* e a massa de rádio ainda não desintegrada de *y*, podemos escrever o seguinte esquema:

$$\overbrace{1 \xrightarrow[1 \cdot 1\,600]{} \frac{1}{2} \xrightarrow[2 \cdot 1\,600]{} \frac{1}{4} \xrightarrow[3 \cdot 1\,600]{} \frac{1}{8} \xrightarrow[4 \cdot 1\,600]{} \frac{1}{16} \xrightarrow[x \cdot 1\,600]{} \frac{1}{2^x} = y}^{x \cdot 1\,600}$$

Em *100 Eventos que Abalaram o Mundo*. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

Maria Sklodowska Curie (1867-1934), cientista polonesa que, juntamente com seu marido, descobriu os elementos Polônio (em homenagem a sua terra natal) e o Rádio (devido sua intensa radioatividade).

Para visualizar melhor o que ocorre com a amostra de 1 kg de rádio, a tabela e o gráfico seguintes nos ajudarão:

As variáveis *x* e *y* se relacionam pela fórmula $y = \frac{1}{2^x}$ ou $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ na qual *x* é um *expoente*.

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

O gráfico é chamado de *curva de decaimento radioativo* e ela é uma curva *exponencial*.

Figura 4.2: Motivação boa - Função exponencial e química.

Ao apresentar o tempo de meia-vida do rádio (que realmente é de 1600 anos segundo o site infoescola [40]), foram construídos um esquema e uma tabela que mostram a quantidade restante de 1 kg de rádio transcorridas x meias-vidas. É feita a generalisação deste esquema através de uma fórmula que representa uma função do tipo exponencial, o que é bom, pois através da manipulação de informações o aluno pode chegar a esta generalização, porém, é interessante que o professor acrescente alguns questionamentos a respeito das informações propostas, afim de permitir que os alunos compreendam melhor a aplicação da função exponencial neste caso, por exemplo,

1. Considere agora que nossa amostra seja de 3 kg em vez de 1 kg de rádio. Como ficaria a tabela apresentada?

2. Qual a fórmula que representa agora o número y do elemento rádio, ainda não desintegrado, passadas x meias-vidas?

3. Após 11 200 anos, quantos quilogramas de rádio ainda existem dessa amostra?

Na questão 1 a tabela ficaria com os seguintes valores:

x	$y = f(x)$
0	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3$
1	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1,5$
2	$1,5 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,75$
3	$0,75 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,375$
4	$0,375 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,1875$
5	$0,1875 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0,09375$

Os dados da tabela nos sugerem que a função que modela o problema é a função do tipo exponencial $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Vamos garantir isso utilizando o teorema de caracterização da função exponencial (Teorema 3.3.2).

Inicialmente, temos que a função é monótona decrescente, já que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Escolhendo $x = 2$ e $t = 3$, observamos que $\frac{f(x+t)}{f(x)} = \frac{f(5)}{f(2)} = 0,125$. Escolhendo $x = 0$ e mantendo $t = 3$ obtemos $\frac{f(x+t)}{f(x)} = \frac{f(3)}{f(0)} = 0,125$, ou seja, independete do x que escolhermos, $\frac{f(x+3)}{f(x)} = 0,125$. Logo, podemos admitir, que para qualquer outro instante x', passadas as mesmas t meias-vidas, teremos $\frac{f(x+t)}{f(x)}$ constante, o que caracteriza uma função do tipo exponencial, onde $b = 3$, pois $f(0) = 3$ e $a = \frac{1}{2}$, pois $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{1}{2}$. Portanto, a fórmula que representa a quantidade de rádio ainda não desintegrado passadas x meias-vidas é $f(x) = y = 3.(\frac{1}{2})^x$

Em seguida, na questão 3 temos que transcorridos 11 200 anos, terão se passado 7 meias-vidas do rádio e utilizando a fórmula encontrada, a quantidade restante dos 3 kg será dada por $y = 3 \cdot (\frac{1}{2})^7 = 3 \cdot \frac{1}{128} = 0,0234$ kg aproximadamente.

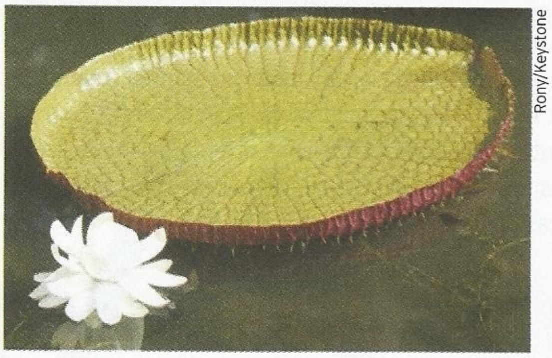
4.2.3 Motivação inadequada do uso da função exponencial - 1

Neste problema (Fig. 4.3) o autor fala de uma planta aquática com folha circular mas não fala de que planta se trata.

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha com forma circular de uma planta aquática.

Durante suas observações, percebeu que a cada mês o diâmetro da folha da planta triplicava.

Se no início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses?



Folha e flor da vitória-régia, planta aquática típica da região amazônica.

Para resolver esse problema, podemos construir uma tabela que mostre o aumento do diâmetro da folha da planta em função do tempo.

Observação inicial	1 cm
Após 1 mês	3 cm
Após 2 meses	9 cm
Após 3 meses	27 cm
Após 4 meses	81 cm

Vemos, então, que ao final de 4 meses o diâmetro da folha será igual a 81 cm.

Figura 4.3: Função exponencial - Motivação inadequada 1.

É colocada a foto de uma vitória-régia, que é uma planta que possui estas característas, mas não deixa claro se o problema está relacionado com ela, dando a entender que o autor criou uma situação fictícia para ser modelada com a função exponencial. Isso caracteriza uma contextualização inadequada, visto que os dados trazidos não têm relação com a realidade.

O autor não fala de uma vitória-régia, mas dá a entender que se trata desta planta. Pesquisando no site *www.vitoriaregia.pt* [33], descobrimos que seu tempo máximo de vida é de 2 anos, diferente dos 4 meses que é dado na questão. Logo, não pode ser uma vitória-régia.

São trazidas também duas tabelas. Na primeira (Fig. 4.3), é dado o crescimento máximo da planta após 4 meses, visto que este é seu tempo máximo de vida. Na segunda (Fig. 4.4), é desconsiderado o tempo máximo de vida da planta e é considerada apenas a variação do diâmetro em função do tempo. Porém, decorridos 6 meses, a planta já estaria com 7,29 m de diâmetro, após 12 meses, com 5,31 km, com 18 meses a planta estaria com 3 874 km o que é um absurdo.

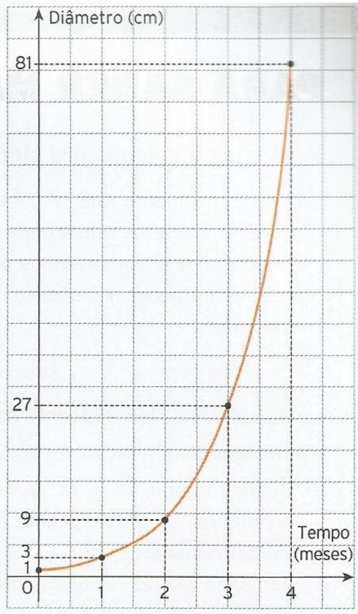
Representamos o crescimento dessa folha no gráfico ao lado. Unimos os pontos do gráfico, já que o aumento do diâmetro é contínuo.

Observando o gráfico, podemos dizer que o diâmetro dessa folha cresce **exponencialmente**. Utilizamos esse termo para expressar que ela cresce com seu diâmetro variando na forma de potência de base fixa, que, neste caso, é igual a 3.

De fato, em 4 meses o diâmetro aumenta aproximadamente 80 vezes!

Nesta unidade, vamos abordar problemas como este envolvendo **função exponencial**.

Retomemos a tabela que fizemos para o problema e consideremos apenas a variação do diâmetro em função do tempo, sem nenhuma restrição.



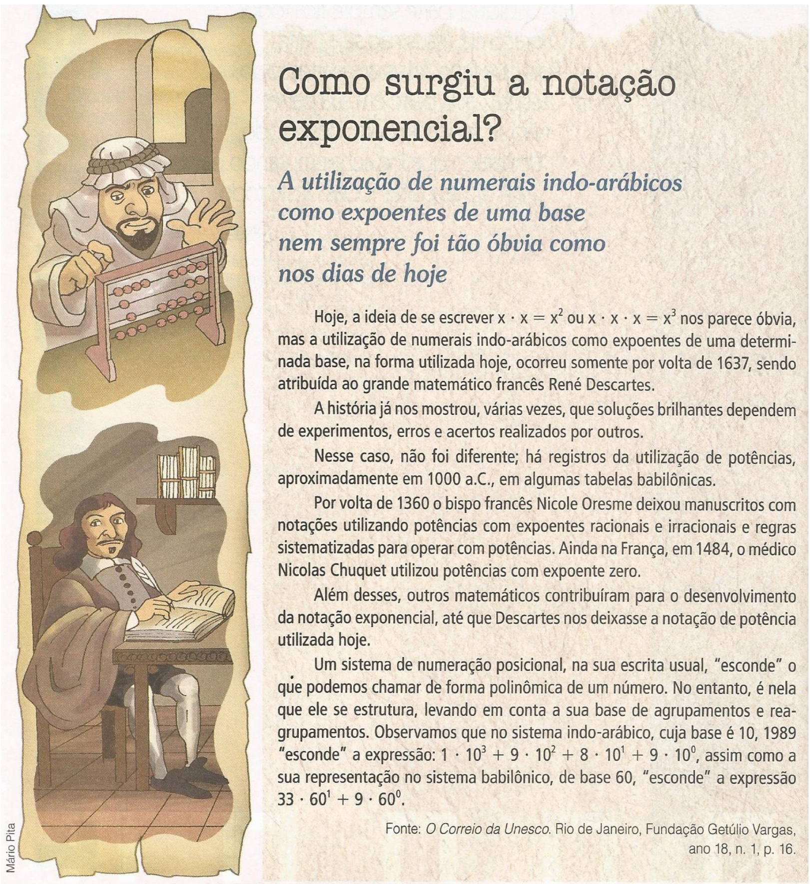
Tempo (meses)	Diâmetro (cm)
0	$1 = 3^0$
1	$3 \cdot 1 = 3 = 3^1$
2	$3 \cdot 3 = 9 = 3^2$
3	$3 \cdot 9 = 27 = 3^3$
4	$3 \cdot 27 = 81 = 3^4$
5	$3 \cdot 81 = 243 = 3^5$
6	$3 \cdot 243 = 729 = 3^6$
⋮	⋮ ⋮

Se, hipoteticamente, a folha dessa planta crescesse por x meses, seu diâmetro seria 3^x cm, ou seja, o crescimento seria dado pela função $y = 3^x$, que é uma função exponencial.

Figura 4.4: Função exponencial - Motivação inadequada 1 (continuação).

4.2.4 Motivação inadequada do uso da função exponencial - 2

Temos na Fig. 4.5 um texto de abertura do capítulo referente à função exponencial que realmente não traz nenhuma conexão com a ideia desta função. O autor tenta fazer uma contextualização da matemática com a história da matemática, falando sobre a evolução da notação das potências, mas acaba trazendo informações vagas e que não têm muito para acrescentar nem para estimular o estudo do conteúdo proposto no capítulo.



Como surgiu a notação exponencial?

A utilização de numerais indo-arábicos como expoentes de uma base nem sempre foi tão óbvia como nos dias de hoje

Hoje, a ideia de se escrever $x \cdot x = x^2$ ou $x \cdot x \cdot x = x^3$ nos parece óbvia, mas a utilização de numerais indo-arábicos como expoentes de uma determinada base, na forma utilizada hoje, ocorreu somente por volta de 1637, sendo atribuída ao grande matemático francês René Descartes.

A história já nos mostrou, várias vezes, que soluções brilhantes dependem de experimentos, erros e acertos realizados por outros.

Nesse caso, não foi diferente; há registros da utilização de potências, aproximadamente em 1000 a.C., em algumas tabelas babilônicas.

Por volta de 1360 o bispo francês Nicole Oresme deixou manuscritos com notações utilizando potências com expoentes racionais e irracionais e regras sistematizadas para operar com potências. Ainda na França, em 1484, o médico Nicolas Chuquet utilizou potências com expoente zero.

Além desses, outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da notação exponencial, até que Descartes nos deixasse a notação de potência utilizada hoje.

Um sistema de numeração posicional, na sua escrita usual, "esconde" o que podemos chamar de forma polinômica de um número. No entanto, é nela que ele se estrutura, levando em conta a sua base de agrupamentos e reagrupamentos. Observamos que no sistema indo-arábico, cuja base é 10, 1989 "esconde" a expressão: $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$, assim como a sua representação no sistema babilônico, de base 60, "esconde" a expressão $33 \cdot 60^1 + 9 \cdot 60^0$.

Fonte: *O Correio da Unesco*. Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, ano 18, n. 1, p. 16.

Mário Pita

Figura 4.5: Função exponencial - Motivação inadequada 2.

Na Fig. 4.6, que é a continuação do texto trazido na Fig. 4.5, é ressaltada a escrita de um número na sua forma decomposta utilizando a base 10 e a base 60, que era a base utilizada pelos babilônios, porém este fato em nada tem a ver com o estudo das funções exponenciais.

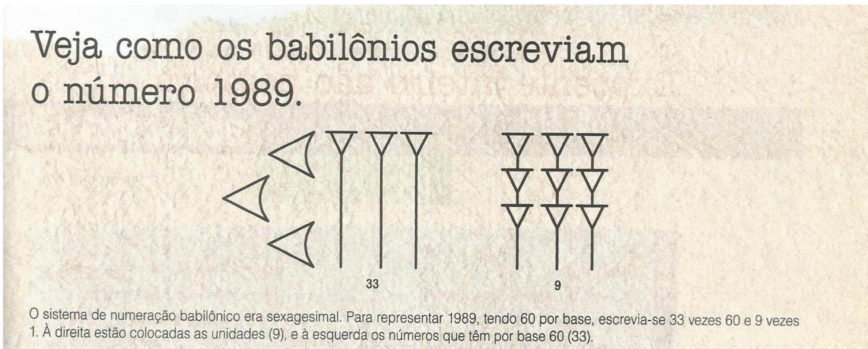


Figura 4.6: Função exponencial - Motivação inadequada 2 (continuação).

Ao utilizarmos a história da matemática para motivar o aluno no estudo de determinado conteúdo, é interessante que seja apresentada a motivação histórica do homem para produzir tal conhecimento e qual o porquê deste conhecimento ser utilizado ainda hoje. No texto apresentado, encontramos simplesmente um cronograma com as datas e os nomes dos matemáticos que contribuíram para a evolução das notações das potências sem explicar, por exemplo, o que motivou, o médico Nicolas Chuquet a utilizar potências com expoente zero.

4.3 Equação exponencial

4.3.1 Boa motivação do uso da equação exponencial em juros compostos

Temos na Fig. 4.7 uma boa motivação para o estudo de equações exponenciais onde é feita uma conexão entre a matemática e ela mesma, com um problema que envolve juros compostos.

Acompanhe o problema a seguir.

Por quanto tempo deve permanecer aplicado um capital de R$ 10.000,00, à taxa de juro composto de 10% ao ano, para que o montante atinja R$ 14.641,00?

Indicando por t o tempo, em ano, aplicamos a fórmula $M = C(1 + i)^t$, obtendo:

$$14.641 = 10.000(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow 14.641 = 10.000(1{,}1)^t$$

$$\therefore (1{,}1)^t = 1{,}4641$$

Note que essa resolução conduziu a uma equação cuja incógnita está no expoente de uma potência de base positiva e diferente de 1. Esse tipo de equação é chamado de **equação exponencial**.

Figura 4.7: Motivação boa - Equação exponencial e juros compostos.

A fórmula $M = C(1+i)^t$ representa uma função exponencial onde M varia de acordo com o valor de t, ou seja, M e t são variáveis, e i é uma constante que representa a taxa de juros. Temos uma equação exponencial a partir do momento que atribuímos um valor para M e queremos encontrar o valor de t que satisfaz a igualdade, ou seja, t é uma incógnita.

Abrimos uma ressalva quanto ao fato de considerarmos esta introdução uma boa motivação, apesar de já apresentar em sua solução a fórmula que modela o problema. O autor do livro que retiramos esta questão trabalhou matemática financeira no capítulo anterior ao que estuda a função exponencial, deste modo, utilizou um problema que envolve juros compostos, em que os conhecimentos prévios dos alunos não são suficientes para resolvê-lo, fazendo com que haja a necessidade de buscar novos caminhos que conduzam à solução do problema.

Caso o professor não tenha trabalhado matemática financeira com os alunos, para que o problema seja uma boa motivação, é interessante que procure ao invés de responder o problema apresentando diretamente a fórmula, explicar aos alunos o que são os juros compostos e com os dados do problema ir montando uma tabela que forneça, ano a ano, o montante da aplicação até chegar ao valor dado no problema que é de R$ 14.641,00. Por exemplo,

Ano (t)	Montante
1	$\underbrace{10\,000}_{Capital\ inicial} + \underbrace{10\,000 \cdot 0,1}_{juro} = 10\,000(1+0,1) = 10\,000 \cdot 1,1 = 11\,000$
2	$11\,000 \cdot 1,1 = 10\,000 \cdot 1,1.1,1 = 10\,000.1,1^2 = 12\,100$
3	$12\,100 \cdot 1,1 = 10\,000 \cdot 1,1^2 \cdot 1,1 = 10\,000 \cdot 1,1^3 = 13\,310$
4	$13\,310 \cdot 1,1 = 10\,000 \cdot 1,1^3 \cdot 1,1 = 10\,000 \cdot 1,1^4 = 14\,641$

Como o tempo necessário para que o montante atinja R$ 14.641,00 é de 4 anos, fica fácil encontrar a resposta utilizando o método proposto.

Pode-se questionar se o método que eles utilizaram para encontrar a resposta seria adequado caso o montante dado fosse de R$ 25.937,42 que é o montante gerado após 10 anos de aplicação. É bem provável que os alunos digam que não, já que mesmo com a calculadora, eles demorariam um pouco para encontrar a resposta. Neste momento, o professor pode pedir para que, observando os dados da tabela, eles façam uma generalização através de uma fórmula que forneça o montante em função do tempo e em seguida escrevam a equação que fornece o tempo dado o montante que agora é de R$ 25.937,42, informando que os estudos propostos a partir de agora os ajudarão a solucionar este e muitos outros tipos de problema.

4.3.2 Boa motivação envolvendo o uso de equação exponencial em crescimento populacional

Temos na Fig. 4.8 uma boa questão para introduzir o estudo de equações exponenciais.

2 Equações exponenciais

Para estudar este item, vamos resolver algumas questões.

Exemplos

1 Uma cultura, inicialmente com 100 bactérias, reproduz-se em condições ideais. Suponha que, por divisão celular, cada bactéria dessa cultura dê origem a duas outras bactérias idênticas por hora.

a) Qual a população dessa cultura após 3 horas do instante inicial?

b) Depois de quantas horas a população dessa cultura será de 51 200 bactérias?

a) No instante inicial, temos 100 bactérias.

Uma hora depois, teremos: $100 \cdot 2 = 200$ bactérias.

Decorrida mais uma hora (após 2 horas do instante inicial), a população será de $(100 \cdot 2) \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 = 400$ bactérias.

Decorrida outra uma hora (após 3 horas do instante inicial), a população será de $(100 \cdot 2^2) \cdot 2 = 100 \cdot 2^3 = 800$ bactérias. E assim por diante.

Após 3 horas, teremos 800 bactérias.

b) Depois de n horas, teremos uma população P igual a $P = 100 \cdot 2^n$.

De acordo com os dados do problema, temos: $51\,200 = 100 \cdot 2^n \Rightarrow 2^n = \dfrac{51\,200}{100} \Rightarrow 2^n = 512$

Desse modo, chegamos a uma equação exponencial, já que a incógnita n aparece no expoente.
Para resolver uma equação exponencial, devemos transformá-la de modo a obter potências de mesma base no primeiro e no segundo membros da equação dada. Para isso, além das propriedades das potências, usaremos o seguinte fato:

Se $a > 0$, $a \neq 1$ e x é a incógnita, a única solução da equação $a^x = a^\alpha$ é α.

Então, para resolver a equação $2^n = 512$, vamos decompor 512 em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$512 = 2^9 \Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9$

Como as bases são iguais, igualamos os expoentes. Daí obtemos $n = 9$, ou seja, a população da cultura será de 51 200 bactérias depois de 9 horas.

Figura 4.8: Motivação boa - Equação exponencial e crescimento populacional.

A contextualização apresentada é feita com base no crescimento populacional de uma cultura de bactérias.

Inicialmente o autor propõe que seja encontrada a população dessa cultura após 3 horas, o que é interessante, pois sem necessitar no momento de fórmulas, o aluno pode encontrar este resultado e perceber o padrão existente ao se calcular a população de bactérias a cada 1 hora, permitindo que seja feita a generalização fazendo uso da equação exponencial que será utilizada para solucionar a segunda pergunta do problema.

4.3.3 Motivação inadequada do uso da equação exponencial

No problema apresentado (Fig. 4.9), temos uma situação difícil de ocorrer na realidade, que é o aumento exponencial na produção de uma empresa a uma taxa de 50% ao ano. Essa taxa de projeção de crescimento pode até ocorrer nos primeiros anos de funcionamento da empresa, porém, com o passar do tempo, fica difícil manter esse padrão de crescimento.

2 Uma empresa produziu, num certo ano, 8 000 unidades de determinado produto. Projetando um aumento anual de produção de 50%, pergunta-se:

a) Qual a produção P dessa empresa t anos depois?

b) Após quantos anos a produção anual da empresa será de 40 500 unidades?

Figura 4.9: Equação exponencial - Motivação inadequada.

4.4 Inequação exponencial

4.4.1 Boas motivações do uso da inequação exponencial

Nos 10 livros observados, não encontramos boas motivações para o estudo de inequações exponenciais. Em 8 dos 10 livros não havia na introdução deste tópico nenhum problema que pudesse ser modelado com este conteúdo. É apenas apresentado o que é uma inequação exponencial e são trazidos exemplos que envolvem apenas manipulação, como se este tópico não tivesse aplicações em situações reais.

Em 2 dos 10 livros analisados, encontramos problemas que consideramos motivações inadequadas. A análise destes dois problemas estão apresentados nas subseções 4.4.2 e 4.4.3.

4.4.2 Motivação inadequada do uso da inequação exponencial - 1

Temos na Fig. 4.10 um problema contextualizado que envolve apenas manipulação, pois já é dada a fórmula que o modela.

1 A relação $P = 64\,000(1 - 2^{-0,1t})$ descreve o crescimento de uma população de microorganismos, sendo P o número de microorganismos, t dias após o instante $t = 0$. Determine o número de dias em que o valor de P será superior a 63 000.

Figura 4.10: Inequação exponencial - Motivação inadequada 1.

O aluno tem apenas que compreender a questão e aplicar a fórmula para resolvê-la, o que também é válido, porém o que estamos considerando como boas motivações são situações contextualizadas que apresentem aplicações da função exponencial onde o aluno tem que modelar o problema analisando os dados trazidos em seu enunciado.

É falado sobre o crescimento de uma população de microrganismos que é dado pela função $P = 64\ 000(1 - 2^{-0,1t})$. Que microrganismos são estes? Por que seu crescimento populacional é dado pela fórmula apresentada? Mesmo em questões de manipulação, é importante que os dados trazidos tenham sentido, não sejam inventados e tenham uma relação com a realidade.

4.4.3 Motivação inadequada do uso da inequação exponencial - 2

No texto trazido na Fig. 4.11, o autor fala que por meio de uma análise, percebeu-se que os gráficos do número de eleitores dos candidatos A e B podiam ser aproximados, respectivamente, pelos gráficos das funções $A(t) = 2 \cdot 10^5 \cdot (1,6)^{\frac{t}{12}}$ e $B(t) = 4 \cdot 10^5 \cdot (0,4)^{\frac{t}{12}}$.

Um partido político, avaliando as possibilidades de seu candidato A vencer as eleições, realizou uma pesquisa e concluiu que o número de eleitores do candidato A e de seu adversário B variam em função do tempo, em mês, a partir de um mesmo instante, de acordo com os gráficos representados ao lado.

Por meio de uma análise, percebeu-se que os gráficos do número de eleitores dos candidatos A e B podiam ser aproximados, respectivamente, pelos gráficos das funções $A(t) = 2 \cdot 10^5 \cdot (1,6)^{\frac{t}{12}}$ e $B(t) = 4 \cdot 10^5 \cdot (0,4)^{\frac{t}{12}}$, em que t representa o tempo, em mês.

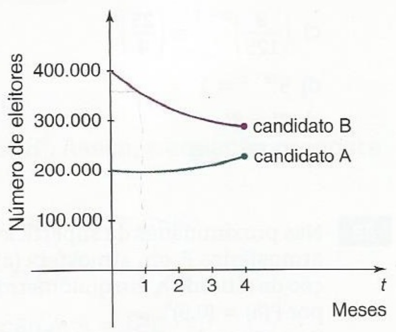


Figura 4.11: Inequação exponencial - Motivação inadequada 2.

Como essa análise foi feita? Como se chegou a estas fórmulas? Aparentemente, o autor criou primeiro as fórmulas para depois criar um problema que se resolvesse utilizando-as, porém isto não caracteriza uma boa contextualização.

Capítulo 5

Análise de questões contextualizadas envolvendo função exponencial

5.1 Introdução

Neste capítulo faremos uma análise das questões contextualizadas propostas como atividades para os alunos nos livros didáticos do Ensino Médio de Matemática, classificando-as como boas ou inadequadas, segundo os conceitos adotados por nós e explicitados no Capítulo 3.

5.2 Contextualizações boas

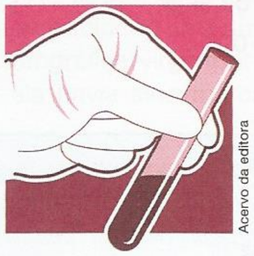
5.2.1 Função Exponencial e crescimento populacional

Ao modelarmos um problema que envolve crescimento populacional com uma função exponencial, devemos estar atentos ao fato de que a função exponencial possui um crescimento muito rápido em um curto espaço de tempo. Questões que envolvem crescimento populacional são muito frequentes nos livros didáticos. As questões apresentadas nesta seção são bons exemplos de contextualização, pois tratam de situações que simulam a realidade e trazem a função exponencial modelando o problema em um curto espaço de tempo.

Exemplo 1

Na questão apresentada na Fig. 5.1 temos um bom exemplo de contextualização, onde é feito um experimento com a bactéria E. coli.

45 (UFMG-MG) A população de uma colônia da bactéria *E. coli* dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1 000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de $4{,}096 \cdot 10^6$ bactérias por mililitro.



Assim, o tempo do experimento foi de: d

a) 3 horas e 40 minutos

b) 3 horas

c) 3 horas e 20 minutos

d) 4 horas

Figura 5.1: Contextualização boa - Função exponencial e crescimento populacional.

Ao pesquisarmos na internet no site *http://biologia.ifsc.usp.br* [25], verificamos que o tempo de geração da bactéria E. coli, ou seja, o tempo nescessário para que sua população dobre de número, realmente é de 20 minutos. Como existe um momento em que o experimento se encerra, temos que o crescimento do número de bactérias não se dá por um tempo indeterminado.

Exemplo 2

14. A população de uma cidade, em 2005, era de 60 000 habitantes. Se a taxa de crescimento anual ficar em torno de 2%, qual será a população aproximada no ano 2015?

a) *Faça um gráfico para mostrar o crescimento dessa população.*

b) Como o gráfico auxilia a perceber a tendência de crescimento dessa população, nas condições do problema?

Figura 5.2: Contextualização boa - Função exponencial e crescimento populacional.

Exemplo 3

68. Os biólogos afirmam que, sob condições ideais, o número de bactérias em uma certa cultura cresce de tal forma que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo de tempo considerado. Suponhamos que 2 000 bactérias estejam inicialmente presentes em uma certa cultura e que 4 000 estejam presentes 30 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes no final de 2 horas?

Figura 5.3: Contextualização boa - Função exponencial e crescimento populacional.

5.2.2 Função exponencial e juros compostos

Encontramos poucas questões envolvendo juros compostos onde o aluno tem que modelar o problema. A maioria das questões que envolvem este tema já vêm modeladas, e são execícios contextualizados que envolvem apenas manipulação. Observamos que os autores deixam para se aprofundar mais neste tema no capítulo sobre matemática financeira, que na maioria dos livros, vem depois dos capítulos que tratam da função exponencial e da função logarítmica.

Exemplo 1

Encontramos no problema (Fig. 5.4) uma boa contextualização, visto que mesmo não sendo um fato real pesquisado pelo autor, é uma situação que simula a realidade, que pode ocorrer de fato.

2 Certo banco oferece um investimento que rende uma taxa de 6% ao ano de juros compostos. Observe a simulação de um investimento de R$ 1500,00 em um período de três anos.

Ano (n)	Juro (J)	Montante (M)
1	$1\,500{,}00 \cdot 0{,}06 = 90{,}00$	$1\,500{,}00 + 90{,}00 = 1\,590{,}00$
2	$1\,590{,}00 \cdot 0{,}06 = 95{,}40$	$1\,590{,}00 + 95{,}40 = 1\,685{,}40$
3	$1\,685{,}40 \cdot 0{,}06 = 101{,}12$	$1\,685{,}40 + 101{,}12 = 1\,786{,}52$

a) Qual das funções a seguir determina o montante M obtido ao final do ano n, ao se investir R$ 1500,00?

- $M = 1500(6)^n$
- $M = 1500(1{,}06)^n$
- $M = 1500 + 6^n$
- $M = 1500 + (1{,}06)^n$

b) Qual será o montante ao final de 4 anos? E de 6 anos?

Figura 5.4: Contextualização boa - Função exponencial e juros compostos.

É uma questão de aplicação envolvendo matemática financeira, logo, o aluno deverá ao interpretar os dados do problema, modelá-lo de acordo com uma das quatro funções apresentadas no item a).

Caso os alunos ainda não tenham estudado matemática financeira, a tabela apresentada não contribui para que o aluno compreenda como será a modelagem deste problema, pois calcula primeiro os juros do período e em seguida os soma ao montante do período anterior, ou seja, apenas informa como funciona o sistema de juros compostos. Desta forma não fica nítido que o montante no período n também é o produto do valor inicial do investimento por $1,06^n$.

Propomos que o professor neste caso acrescente mais uma coluna à tabela, junto com os alunos, fornecendo mais informações que podem ajudá-los a visualizar melhor o comportamento do montante em função do tempo. A terceira coluna da tabela ficaria assim:

Ano (n)	Montante (M)
1	$1\ 500,00 + \underbrace{1\,500,00 \cdot 0,06}_{90,00} = 1\ 500(1+0,06) = 1\ 500(1,06) = 1\,590,00$
2	$\underbrace{1\,500(1,06)}_{1\ 590,00} + \underbrace{1\,500(1,06)(0,06)}_{1\ 590,00 \cdot 0,06 = 95,40} = 1\ 500 \cdot 1,06(1+0,06) = 1\ 500 \cdot 1,06 \cdot 1,06 = 1\ 685,40$
3	

Neste momento o professor pode pedir para que os alunos preencham sozinhos a terceira linha da tabela para, enfim, fazerem a generalização pedida no item a) que, neste caso, é $y = 1500(1,06)^n$

Os problemas apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6 são parecidos com os da Fig. 5.4.

Exemplo 2

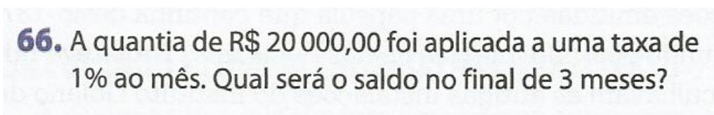

66. A quantia de R$ 20 000,00 foi aplicada a uma taxa de 1% ao mês. Qual será o saldo no final de 3 meses?

Figura 5.5: Contextualização boa - Função exponencial e juros compostos.

Exemplo 3

77 Atualmente, há uma grande oferta de crédito no mercado e muitas instituições financeiras realizam empréstimos pessoais sem grandes exigências de renda. No entanto, o indivíduo que deseja fazer o empréstimo deve estudar os termos do contrato e escolher a instituição financeira que propuser a forma de pagamento mais adequada as suas condições, inclusive pesquisando taxas de juros justas.

Para realizar um empréstimo de R$ 500,00, certa pessoa consultou duas instituições financeiras, A e B. Ambas cobram a dívida pelo sistema de juros compostos e o pagamento deve ser feito em parcela única *m* meses após a data da assinatura do contrato. No entanto, A utiliza uma taxa de 5% ao mês, e B, de 8% ao mês. As funções que representam o valor da dívida desse empréstimo nas instituições financeiras A e B, respectivamente, são:

a) $f(m)=500+(1{,}05)^m$ e $g(m)=500+(1{,}08)^m$

b) $f(m)=500+(0{,}05)^m$ e $g(m)=500+(0{,}08)^m$

c) $f(m)=500\cdot(1{,}05)^m$ e $g(m)=500\cdot(1{,}08)^m$

d) $f(m)=500\cdot(0{,}05)^m$ e $g(m)=500\cdot(0{,}08)^m$

Figura 5.6: Contextualização boa - Função exponencial e juros compostos.

5.2.3 Função exponencial e meia-vida de substâncias

Nos livros didáticos analisados observamos a presença constante de questões que envolvem a meia-vida de substâncias, porém a maioria delas já vêm modeladas por uma função exponencial, como é o caso do problema trazido na questão 5.9 que também é uma boa contextualização, porque traz um problema real, porém envolve apenas manipulação. O mesmo ocorre nas questões trazidas nas Figuras 5.10 e 5.11.

O professor pode fazer uso destas questões, utilizando os dados trazidos no problema, sem apresentar a fórmula que os modela para os alunos. Isto tornará as questões mais interessantes.

Exemplo 1

A questão apresentada na Fig. 5.7 traz uma boa conexão entre a matemática, a química e as práticas sociais. O tempo de meia vida de uma substância é uma das principais aplicações da função exponencial.

29 O tabagismo favorece o desencadeamento de uma série de doenças que podem levar ao óbito. Estima-se que no mundo morram anualmente cerca de 4,9 milhões de pessoas em decorrência do tabagismo, sendo 200 mil somente no Brasil.

Ao fumar, a nicotina, presente nos cigarros, é rapidamente absorvida pelos pulmões, chegando em poucos segundos à circulação sanguínea e ao cérebro. A quantidade de nicotina presente no corpo de uma pessoa reduz pela metade a cada duas horas; quando os neurônios sentem falta dessa substância, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração, o que leva a pessoa a fumar novamente, repetindo assim o ciclo. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproximadamente 1 mg de nicotina.

Considerando o consumo de um cigarro:

a) Qual função representa a quantidade *y* de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa *t* horas após o consumo, desconsiderando uma quantidade inicial que porventura se tenha no organismo?

- $y=2^{t}$ • $y=2^{\frac{t}{2}}$ • $y=2^{-\frac{t}{2}}$ • $y=2^{-t}$

b) Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente daquele cigarro, após 4h?

Figura 5.7: Contextualização boa - Função exponencial, química e práticas sociais.

As informações contidas no problema sobre o número de mortes no Brasil e no mundo por conta do tabagismo e a meia-vida da nicotina estão corretas de acordo com (Rosemberg [18], pp. 9 e 162). Trata de um tema atual que é o tabagismo e pode servir como gatilho para uma discussão maior em sala de aula, onde o professor pode criar, por exemplo, uma roda de discussão sobre os efeitos do tabagismo no organismo e suas consequências.

No item a) é pedido para que o aluno indique, entre as quatro fórmulas dadas, qual a que modela a questão. Um problema interessante, pois apesar de ser inevitável que os alunos já associem a resposta do problema a uma função exponencial, por se tratar do conteúdo trabalhado no capítulo e todas as alternativas trazerem funções exponenciais, para responder corretamente o problema, eles terão que associar o fato de que se a cada 2 horas a quantidade de nicotina presente no corpo ao se furmar 1 cigarro (1 mg), se reduz pela metade, ou seja, é multiplicada por $\frac{1}{2}$, então a função que o modela é $y = 1 \cdot (\frac{1}{2})^{t/2} = 2^{-\frac{t}{2}}$

Exemplo 2

Na Fig. 5.8, temos uma boa contextualização onde o aluno deverá indicar qual a função que fornece a porcentagem de cobalto-60 após 20 anos.

72. São necessários 5 anos para que o cobalto-60 perca metade de sua radioatividade. Qual é a porcentagem de sua atividade original que permanecerá no fim de 20 anos?

Figura 5.8: Contextualização boa - Função exponencial e meia-vida de substâncias.

Pesquisando no site wikipedia [46], vimos que a massa do cobalto-60 realmente se reduz pela metade a cada 5 anos aproximadamente. A função que fornece a quantidade de cobalto $f(x)$ passados x anos é

$$f(x) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$$

onde C_0 indica a quantidade inicial de cobalto-60. Logo, passados 20 anos, temos que

$$f(20) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = C_0 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) = C_0 \cdot 0,0625$$

Ou seja, restará ainda $6,25\%$ de cobalto-60 após 20 anos.

Exemplo 3

Na Fig. 5.9, temos uma questão que traz uma boa contextualização, pois segundo o site wikipedia [47], a meia-vida do estrôncio 90 realmente é de 29 anos, e a função que a modela está correta, porém envolve apenas manipulação.

20. (Unicamp-SP – 2007) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde *t* é um instante de tempo, medido em anos, *b* é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante t = 0.
Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante *b*.

Figura 5.9: Contextualização boa - Função exponencial e química.

O valor da constante b pode ser encontrado utilizando uma equação exponencial ou utilizando os conhecimentos sobre função exponencial.

No primeiro caso, como a meia-vida do estrôncio é de 29 anos, temos que descobrir o valor de b para que passados 29 anos, $P(29) = \frac{P_0}{2}$, ou seja, temos que resolver a equação $\frac{P_0}{2} = P_0 \cdot 2^{-29b}$.

Resolvendo a equação temos,

$$\frac{P_0}{2} = P_0 \cdot 2^{-29b} \Rightarrow 1 = 2 \cdot 2^{-29b} \Rightarrow 2^0 = 2^{1-29b} \Rightarrow b = \frac{1}{29}$$

Se utilizarmos os conhecimentos sobre função exponencial, podemos perceber que se a meia-vida do estrôncio é de 29 anos, a função que modela o problema é $P(t) = P_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{29}}$. Reorganizando as informações, temos $P(t) = P_0 \cdot 2^{-\frac{t}{29}} = P_0 \cdot 2^{-\frac{1}{29}t}$, logo, o valor de $b = \frac{1}{29}$.

Exemplo 4

73. *Datação arqueológica com carbono-14*

O carbono-14 é um isótopo raro do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte, o nível de C-14 no corpo começa a decair. Como é um isótopo radioativo de meia-vida de 5 730 anos, e como é relativamente fácil saber o nível original de C-14 no corpo dos seres vivos, a medição da atividade de C-14 num fóssil é uma técnica muito utilizada para datações arqueológicas. A atividade radioativa do C-14 decai com o tempo pós-morte segundo a função exponencial

$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$, em que $\mathbf{A_0}$ é a atividade natural do C-14 no organismo vivo e **t** é o tempo decorrido em anos após a morte.

Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter sua idade estimada. Verificou-se que emitia 7 radiações de C-14 por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama/hora, qual é a idade aproximada do fóssil?

Figura 5.10: Contextualização boa - Função exponencial e decaimento radioativo.

Exemplo 5

20 (UFF-RJ) A automedicação é considerada um risco, pois a utilização desnecessária ou equivocada de um medicamento pode comprometer a saúde do usuário: substâncias ingeridas difundem-se pelos líquidos e tecidos do corpo, exercendo efeito benéfico ou maléfico.

Depois de se administrar determinado medicamento a um grupo de indivíduos, verificou-se que a concentração (y) de certa substância em seus organismos alterava-se em função do tempo decorrido (t), de acordo com a expressão

$$y = y_0 2^{-0,5t}$$

em que y_0 é a concentração inicial e t é o tempo em hora. Nessas circunstâncias, pode-se afirmar que a concentração da substância tornou-se a quarta parte da concentração inicial após:

a) $\frac{1}{4}$ de hora
b) meia hora
c) 1 hora
d) 2 horas
e) 4 horas

Figura 5.11: Contextualização boa - Função exponencial e química.

5.2.4 Função exponencial e outras situações em que ocorre a sua aplicação

Função exponencial e decaimento

Temos na Fig. 5.12 uma questão que envolve uma boa aplicação da função exponencial, onde o aluno irá modelar o problema baseado, inicialmente, na manipulação das informações contidas no enunciado.

45 Cada golpe de uma bomba extrai 10% de óleo de um tanque. A capacidade do tanque é de 1 m³ e, inicialmente, está cheio.

a) Após o 5º golpe, qual o valor mais próximo para o volume de óleo que permanece no tanque?

b) Qual é a lei da função que representa o volume de óleo que permanece no tanque após n golpes?

Figura 5.12: Contextualização boa - Função exponencial e decaimento.

O item a) pode ser resolvido utilizando uma tabela que informe a quantidade de óleo presente no tanque a cada n golpes. Por exemplo,

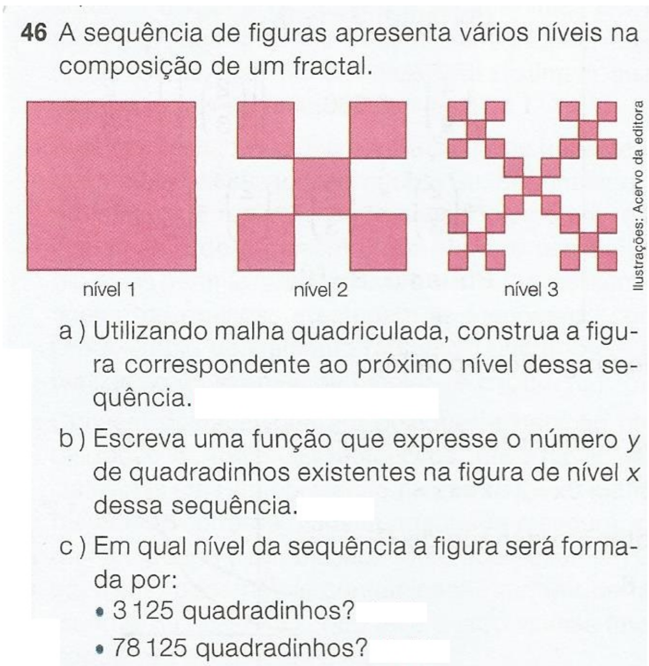
Golpe (n)	Quantidade restante de óleo (Q)
0	1
1	$\underbrace{1}_{valor\ anterior} - \underbrace{1 \cdot 0,1}_{retirada} = 1 \cdot (1-0,1) = 0,9$
2	$\underbrace{0,9}_{valor\ anterior} - \underbrace{0,9 \cdot 0,1}_{retirada} = 0,9 \cdot (1-0,1) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,9^2 = 0,81$
3	$\underbrace{0,81}_{valor\ anterior} - \underbrace{0,81 \cdot 0,1}_{retirada} = 0,81 \cdot (1-0,1) = 0,9^2 \cdot 0,9 = 0,9^3 = 0,729$
4	$\underbrace{0,729}_{valor\ anterior} - \underbrace{0,729 \cdot 0,1}_{retirada} = 0,729 \cdot (1-0,1) = 0,9^3 \cdot 0,9 = 0,9^4 = 0,6561$
5	$\underbrace{0,6561}_{valor\ anterior} - \underbrace{0,6561 \cdot 0,1}_{retirada} = 0,6561 \cdot (1-0,1) = 0,9^4 \cdot 0,9 = 0,9^5 = 0,59049$

Portanto, após 5 golpes, restará aproximadamente $0,59\ m^3$ de óleo no tanque.

Em seguida, pode-se observar pelo padrão existente na tabela, que a quantidade restante de óleo Q após cada n golpes é dada por $f(n) = (0,9)^n$.

Função exponencial, geometria e progressão geométrica

O problema da Fig. 5.13 faz uma conexão entre a matemática e ela mesma, trazendo uma sequência de figuras que possuem um padrão, onde a cada novo nível x, obtemos $y = 5^{x-1}$ quadradinhos.


46 A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.

a) Utilizando malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência.

b) Escreva uma função que expresse o número y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência.

c) Em qual nível da sequência a figura será formada por:

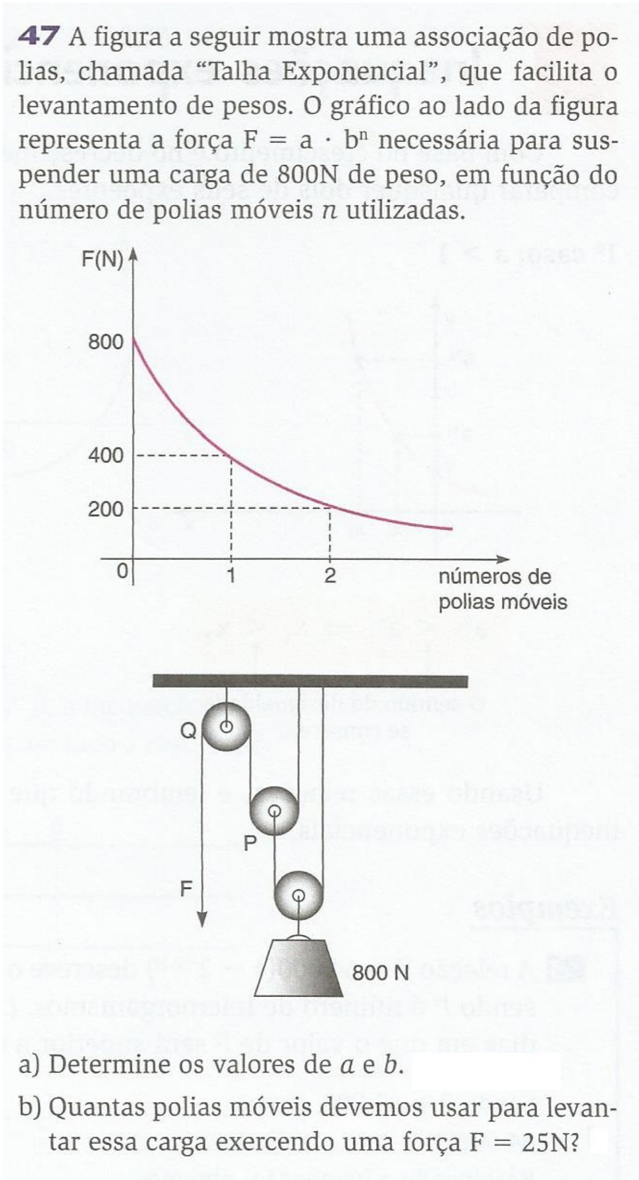
- 3 125 quadradinhos?
- 78 125 quadradinhos?

Figura 5.13: Contextualização boa - Função exponencial, geometria e progressão geométrica.

Este padrão o aluno poderá encontrar observando como o fractal se comporta nos níveis apresentados e no nível 4 que será feito por ele no item a). A sequência representa também uma progressão geométrica de razão 5, que é um caso particular da função exponencial quando seu domínio se restringe ao conjunto dos números naturais. É uma boa contextualização, pois envolve raciocínio lógico e a percepção de padrões geométricos que podem ser modelados por uma função exponencial.

Função exponencial e física

Na questão da Fig. 5.14 temos um esquema montado com polias chamado de talha exponencial, onde a força F necessária para suspender uma carga é dada pela função $F = a \cdot b^n$ onde n representa a quantidade de polias móveis utilizadas.



47 A figura a seguir mostra uma associação de polias, chamada "Talha Exponencial", que facilita o levantamento de pesos. O gráfico ao lado da figura representa a força $F = a \cdot b^n$ necessária para suspender uma carga de 800N de peso, em função do número de polias móveis n utilizadas.

a) Determine os valores de a e b.

b) Quantas polias móveis devemos usar para levantar essa carga exercendo uma força $F = 25N$?

Figura 5.14: Contextualização boa - Função exponencial e física.

Os dados do problema estão corretos e o professor pode encontrar mais detalhes sobre este assunto no site *www.mecatronicaatual.com.br* [27].

Ao responder ao item a), o aluno encontrará como resposta que o valor de $a = 800$ e o de $b = \frac{1}{2}$. Pode-se questionar o que significa o valor de $b = \frac{1}{2}$, que neste caso indica que para cada polia móvel acrescentada na talha, a força necessária para levantar o objeto se reduz pela metade. Este esquema tem uma grande aplicação prática, já que proporciona uma grande vantagem mecânica.

5.3 Contextualizações Inadequadas

Nesta seção apresentamos questões contextualizadas que consideramos inadequadas pelo fato de trazerem problemas com dados incorretos, situações forçadas ou fictícias que não simulam a realidade, fórmulas em que seu uso não é justificado.

Observamos que muitos dos problemas de manipulação trazidos pelos autores onde se tenta fazer uma contextualização, as situações apresentadas são fictícias e as fórmulas são inventadas no intuito de tornar o problema mais atraente para o aluno, porém situações desse tipo podem provocar o efeito contrário.

Os alunos são sujeitos críticos e, ao se depararem com questões que trazem dados incoerentes, podem questionar o professor sobre qual o sentido de se estudar determinado conteúdo, pra que realmente aquele conteúdo servirá e quais são suas aplicações. Daí a importância do professor estar atento às questões que propõe para seus alunos se certificando de que se tratam de boas contextualizações.

Analisar os contextos em que as questões são apresentadas na maioria das vezes não é uma tarefa fácil. Requer do professor um olhar atento e tempo para pesquisa. Mas é importante que o professor tenha uma atitude onde a indagação, o pensar, conversar com colegas, vasculhar livros, faça parte da sua rotina em busca de tornar as aula mais atraentes e os alunos mais estimulados a aprender o que está sendo proposto.

5.3.1 Contextualização inadequada 1

A questão (Fig. 5.15) trata de uma das principais aplicações da função exponencial, que é a meia-vida de uma substância e seria uma boa contextualização, porém algumas informações contidas no problema estão incorretas. O nome correto do antibiótico é Axetil cefuroxima e, segundo a Anvisa [36], sua meia-vida de eliminação é de de 60-120 minutos e não 3 horas como está descrito na questão.

Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radioativo leva para desintegrar metade de sua massa radioativa. O antibiótico Axetil cefuroxina apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo:

a) após 12 horas de sua ingestão?

b) após t horas de sua ingestão?

Figura 5.15: Função exponencial - Contextualização inadequada 1.

5.3.2 Contextualização inadequada 2

A questão trazida na Fig. 5.16 é uma contextualização inadequada, pois informa que a cada metro acima do nível do mar a pressão cai em 10%, mas isto está errado.

3 • A pressão que a camada de ar exerce sobre um corpo, ao nível do mar, é de 1 atm (atmosfera). A cada 1 metro acima do nível do mar essa pressão cai em 10%. Veja a tabela abaixo:

Altitude	Pressão
0 ao nível do mar	1 atm
1	0,9 atm
2	0,81 atm
3	0,73 atm
4	0,66 atm
5	0,60 atm

a) Escreva a lei que representa essa função exponencial.

b) Esboce o gráfico cartesiano dessa função.

c) Elabore outro exemplo de função exponencial aplicada no cotidiano.

Figura 5.16: Função exponencial - Contextualização inadequada 2.

A pressão é definida como sendo a força exercida por unidade de área, de acordo com o site sbvacuo [37].

No Sistema Internacional de Unidades [12], uma das unidades de medida de pressão é o pascal (Pa), onde 1 Pa equivale a 1 Newton (unidade de medida de força) por metro quadrado, ou seja,

$$Pa = \frac{N}{m^2}$$

Uma das fórmulas utilizadas para se fazer uma estimativa da medida da pressão atmosférica (P_{atm}), segundo Reichardt [16], é $P_{atm} = 101,3 \cdot e^{-\frac{A}{8,4}}$, onde A é a medida da altitude em Km e P_{atm} é dada em kPa.

No Sistema Internacional de Unidades [12],

$$1\ atm = 101\ 325\ Pa = 101,325\ kPa$$

Utilizando a fórmula apresentada, construimos a tabela 5.1 relacionando a altitude em metros e a medida aproximada da pressão atmosférica em kPa e em atm.

Altitude em m	P_{atm} **em** kPa	P_{atm} **em** atm
0	101,3	1
200	98,917	0,976
400	96,589	0,953
600	94,317	0,931
800	92,098	0,909
1 000	89,931	0,888

Tabela 5.1: Relação entre altitude em m e a medida aproximada da pressão atmosférica em kPa e em atm.

Na questão (Fig. 5.16), o autor fala que a pressão que a camada de ar exerce sobre um corpo ao nível do mar é de 1 atm, observamos que esta informação está correta, porém o autor coloca que a cada 1 metro acima do nível do mar a pressão cai em 10%. De acordo com os dados da tabela 5.1, observamos que esta informação está errada. Se a pressão atmosférica cair 10% a cada metro de altitude, sua medida aos 200 m seria de aproximadamente 0 atm, ou seja, praticamente não existira pressão atmosférica aos 200 m de altitude, o que é um absurdo.

5.3.3 Contextualização inadequada 3

O problema da Fig. 5.17 é uma contextualização inadequada pois não informa que tipo de planta pode possuir um crescimento como este, dando a entender que a situação apresentada não é real.

44 Uma planta aquática cobre, atualmente, uma área de 580 m^2 de um lago. Se a área coberta pela planta cresce à taxa de 5% ao dia, qual será a área coberta do lago daqui a dez dias? (Dado: $1{,}05^{10} \approx 1{,}629$).

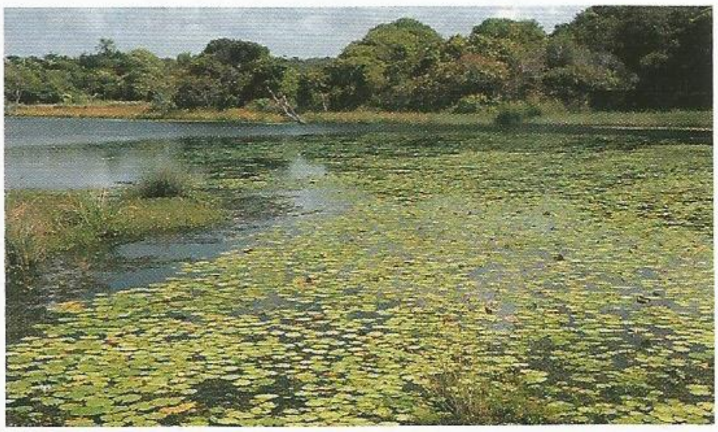


Figura 5.17: Função exponencial - Contextualização inadequada 3.

De acordo com as informações trazidas no problema, o valor referente à área coberta pela planta aumenta em 5% a cada dia, ou seja, é mutiplicada por 1,05 a cada dia, logo, a função do tipo exponencial $f(x) = 580 \cdot 1,05^x$ é a que modela o problema. Porém esta função possui um crescimento alarmoso. No décimo dia a área coberta pela planta seria de $944,76\ m^2$, que representa aproximadamente 1,7 da área coberta inicialmente. Como não é informada a área do lago, a área coberta pela planta no décimo dia poderia representar a área da própria lagoa. Além disso, a partir do trigésimo dia, a planta já estaria ocupando uma área de 2 506,73 m^2, após 120 dias, 202 368,95 m^2, o que equivale a área de aproximadamente 19 campos de futebol. Portanto, a situação traz dados inconcistentes, se tornando um problema superficial, uma contextualização forçada.

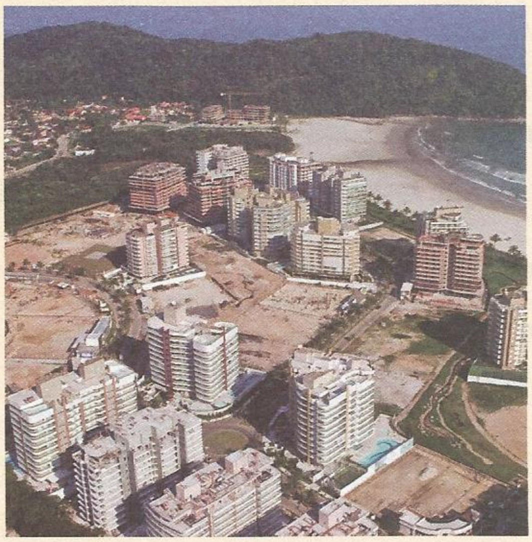
5.3.4 Contextualização inadequada 4

Na questão apresentada (Fig. 5.18) é dito que em uma região litorânea estão sendo construídos edifícios residenciais e que um biólogo prevê que a quantidade de pássaros de certa espécie irá diminuir segundo a lei $n(t) = n(0) \cdot 4^{-\frac{t}{3}}$.

31. Em uma região litorânea estão sendo construídos edifícios residenciais. Um biólogo prevê que a quantidade de pássaros de certa espécie irá diminui segundo a lei:

$$n(t) = n(0) \cdot 4^{-\frac{t}{3}}$$

em que n(0) é a quantidade estimada de pássaros antes do início das construções e n(t) é a quantidade existente *t* anos depois.



PALÊ ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

Qual é o tempo necessário para que a população de pássaros dessa espécie se reduza:

a) à metade da população existente no início das construções?

b) à oitava parte da população existente no início das construções?

c) a 1,5625% da população existente no início das construções?

Figura 5.18: Função exponencial - Contextualização inadequada 4.

De que região se trata? Que espécie de pássaro irá diminuir? Por que utilizar a fórmula dada para modelar o problema? É importante que estas informações estejam presentes no enunciado do problema. Fica notório que o autor criou uma situação que força a utilização da função exponencial. Para que seja considerada uma boa contextualização não é necessário que sempre o autor traga uma situação real. Podem ocorrer situações que simulem a realidade, porém neste caso, não há nem sequer uma simulação da realidade, visto que as informações contidas não estão justificadas.

5.3.5 Contextualização inadequada 5

Temos uma questão (Fig. 5.19) que envolve uma manipulação. Para encontrar o intervalo de tempo em que o golfinho esteve fora da água, o aluno terá que solucionar a equação

$4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t} = 0.$

26 A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água (t = 0) até o instante em que mergulhou (t = T), foi descrita por um observador por meio do seguinte modelo matemático

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t},$$

com t em segundos, h(t) em metros e $0 \leqslant t \leqslant T$. Qual o intervalo de tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto?

Figura 5.19: Função exponencial - Contextualização inadequada 5.

Como o observador chegou à conclusão de que a trajetória do salto do golfinho poderia ser descrita pela função $h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t}$?

Resolvendo a equação $4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t} = 0$ temos,

$$4t - t \cdot 2^{0,2 \cdot t} = 0 \Rightarrow t(4 - 2^{0,2 \cdot t}) = 0$$

logo, $t = 0$ ou $4 - 2^{0,2 \cdot t} = 0 \Rightarrow 2^{0,2 \cdot t} = 2^2 \Rightarrow 0,2t = 2 \Rightarrow t = 10$

Fica difícil imaginar que em um salto, um golfinho fica fora da água por 10 segundos. Além disso, segundo o site planeta sustentável [22], os golfinhos podem saltar até cinco metros de altura, porém, segundo a equação dada, fazendo $t = 6$, a altura atingida pelo golfinho é de aproximadamente $10,2$ m.

A questão apresenta uma contextualização forçada, criada pelo autor na tentativa de torná-la mais interessante, porém fica notório que foi algo inventado e que não tem relação com a realidade.

5.3.6 Contextualização inadequada 6

A questão apresentada na Fig. 5.20 (página seguinte) até seria uma boa aplicação da função exponencial, pois fala sobre a meia-vida do cobalto 60 que de fato é utilizado para o tratamento de pacientes com câncer, porém não é dito que a meia-vida do cobalto 60 é de aproximadamente 5 anos e nem é pedido para que o aluno pesquise sobre esta informação para poder responder ao item b, o que torna impossível sua resolução, mas caso o professor queira utilizá-la, basta informar que a meia-vida do cobalto 60 é de aproximadamente 5 anos.

21 • Período de desintegração (meia-vida) é o tempo gasto para desintegração de metade dos átomos radiativos, metade da massa de determinado isótopo de um elemento químico.

Ocorre que a massa do isótopo não desaparece, apenas diminui, pelo fato de o isótopo se converter em outro isótopo.

Como exemplo, o cobalto 60 (C^{60}_{27}) é usado para tratamento de pacientes com câncer. Considerando uma amostra de 10 g de cobalto 60, obtenha:

a) a expressão exponencial e o gráfico da função que relaciona a massa (m) da amostra em função do número de meias-vidas;

b) a massa do isótopo de cobalto dentro de 5 anos e de 25 anos.

Figura 5.20: Função exponencial - Contextualização inadequada 6.

5.3.7 Contextualização inadequada 7

20. (UEL-PR) Um barco parte de um porto **A** com 2^x passageiros e passa pelos portos **B** e **C**, deixando em cada um metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um, $2^{\frac{x}{2}}$ novos passageiros. Se o barco parte do porto **C** com 28 passageiros e se **N** representa o número de passageiros que partiram de **A**, é correto afirmar que:

a) **N** é múltiplo de 7.
b) **N** é múltiplo de 13.
c) **N** é divisor de 50.
d) **N** é divisor de 128.
e) **N** é primo.

Figura 5.21: Função exponencial - Contextualização inadequada 7.

Ao lermos o problema da Fig. 5.21 ficamos imaginando quem determinou que 2^x passageiros entrariam nesse barco e qual o porquê da regra que passando pelo porto B e C teria que deixar metade dos passageiros e receber mais $2^{\frac{x}{2}}$ passageiros. Uma situação completamente fictícia, criada para simplesmente tentar "disfarçar" um problema completamente manipulativo.

5.3.8 Contextualização inadequada 8

18. Em 1987, na cidade de Goiânia (Goiás), ocorreu um grave desastre envolvendo radioatividade. Um aparelho usado em exames radiológicos foi encontrado abandonado e levado a um ferro-velho, contaminando 249 pessoas e levando à morte quatro delas. O material radioativo envolvido era o elemento químico césio-137, que a cada 30 anos tem sua atividade radioativa reduzida à metade, período este chamado de meia-vida.

a) Em seu caderno reproduza e complete a tabela que relaciona o tempo (em anos) com a atividade radioativa (em becqueréis):

Atividade radioativa do césio-137	
Tempo (anos)	**Atividade radioativa (Bq)**
0	1,38
30	0,69
60	
90	
120	

b) Determine a função referente a essa tabela.

c) Construa o gráfico dessa função.

Figura 5.22: Função exponencial - Contextualização inadequada 8.

No problema da Fig. 5.22 é dada uma tabela cujo título é Atividade Radioativa do Césio 137. O título da tabela nos leva a entender que a atividade radioativa inicial do Césio 137 é de 1,38 Bq independente da quantidade observada. Porém, segundo o Conselho Nacional de Energia Nuclear ([6], pág.9) a atividade radioativa de uma substância depende da quantidade inicial observada.

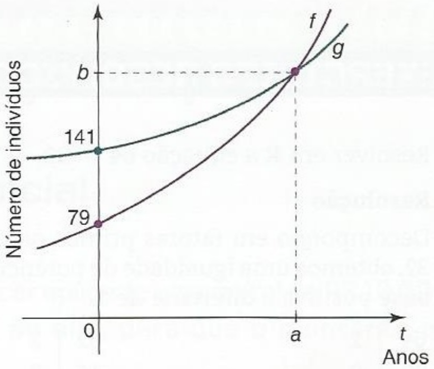
Deveria ser dado no enunciado qual a quantidade de Césio 137 que possui a atividade radioativa de 1,38 no tempo 0. Esta informação é importante para deixar claro que quanto maior for a quantidade inicial da substância radioativa, mais radiação ela irá emitir.

5.3.9 Contextualização inadequada 9

Encontramos nos livros didáticos analisados muitos problemas que já vêm modelados por uma função exponencial, onde tenta se fazer uma contextualização, porém os dados trazidos nos problemas são utilizados sem nenhuma justificativa, assim como as fórmulas que os modelam. É o caso dos problemas apresentados nesta Seção e nas Seções 5.3.10 e 5.3.11.

37 Suponha que as populações de dois vilarejos, A e B, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em ano, e as expressões $f(t)$ e $g(t)$ representam, respectivamente, o número de indivíduos desses vilarejos.

a) Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ são formados por pontos das curvas indicadas, a seguir, por f e g, respectivamente (essas curvas não são os próprios gráficos das funções, porque $f(t)$ e $g(t)$ só podem assumir valores naturais). Determine a e b na figura, coordenadas do ponto comum a f e g.



b) Daqui a quantos anos os dois vilarejos terão o mesmo número de indivíduos?

c) Daqui a sete anos, qual será o número de indivíduos do vilarejo A?

d) Calcule a taxa média de variação de cada uma das funções f e g, quando t varia de dois a quatro anos.

Figura 5.23: Função exponencial - Contextualização inadequada 9.

5.3.10 Contextualização inadequada 10

12. (UnB-DF) Suponha que a função $y(t) = \dfrac{aP}{a + (P - a) \cdot 3^{-1}}$ descreva a população de microrganismos no solo de um terreno com resíduos tóxicos no instante $t \geqslant 0$, dado em minutos contados a partir do instante inicial $t = 0$, e que essa função satisfaça as seguintes condições:

I) número de microrganismos em $t = 0$ é $5 \cdot 10^9$.

II) $P = 10^2 a$

Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

a) O valor de **P** é superior a 10^{12}.

b) O quociente $\dfrac{y(2)}{a}$ é inferior a 9.

Figura 5.24: Função exponencial - Contextualização inadequada 10.

5.3.11 Contextualização inadequada 11

84 A função $f(t) = 32 \cdot (0{,}3)^{t-2013}$ determina a porcentagem no aumento do número de alunos matriculados no Ensino Fundamental, em certa escola, no ano *t*, e a função $g(t) = 2 \cdot (1{,}2)^{t-2013}$, a porcentagem de aumento do número de alunos matriculados no Ensino Médio. A partir de que ano o aumento da porcentagem de alunos matriculados no Ensino Médio será maior que a do Ensino Fundamental? 2016

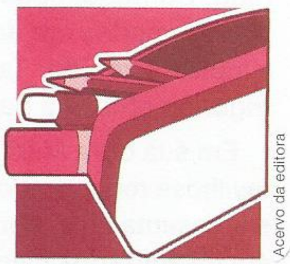


Figura 5.25: Função exponencial - Contextualização inadequada 11.

Capítulo 6

Função Logarítmica

6.1 Introdução

Trataremos neste capítulo da motivação histórica da criação dos logaritmos e suas propriedades e da importância do ensino da função logarítmica.

6.2 A importância do ensino da função logarítmica

Os logaritmos surgiram da necessidade de tornar mais simples as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, já que no fim do século XVI, com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, os cálculos estavam cada vez mais longos e trabalhosos e a calculadora ainda não havia sido inventada.

> Achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extração de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental (Lima [14], p. 1).
>
> As primeiras tábuas de logaritmos foram publicadas por Napier e Birrgi em 1614 e 1620, respectivamente. Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu *logaritmo*. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência, basta multiplicar o logaritmo do número pelo índice da raiz. Na terminologia matemática de hoje, uma correspondência como essa estabelecida por meio de uma tábua de logaritmos é o que se chama *função* (Lima [14], p. 2).

Desta forma, os logaritmos davam a possibilidade de transformar produtos em somas, divisões em subtrações e raízes em potências o que tornava os cálculos muito mais simples.

Daremos um exemplo de como a tábua de logaritmos funciona.

Vamos observar a tabela a seguir com algumas potências de 2 e seus logaritmos na base 2.

Número	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
log (na base 2)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Agora observemos como estas informações podem auxiliar nos cálculos das operações a seguir.

- Para multiplicar $4 \cdot 16$, vamos observar as linhas da tabela. Temos que log 4 na base 2 e log 16 na base 2, são, respectivamente, 2 e 4. Deste modo, basta somar $2+4=6$ e procurar na tabela o número que possui logaritmo 6, que neste caso é 64. Logo, $4 \cdot 16 = 64$. Observe que este processo utiliza as propiedades da potenciação onde, $4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6 = 64$

- Para dividir 1024 : 128, o processo é parecido, só que na divisão, ao invés de somar, vamos subtrair os logaritmos de 1024 e 128 na base 2. Deste modo, $10-7=3$ e o número que possui logaritmo 3 é 8, logo, $1024 : 128 = 8$.

- Para encontrar 8^3, basta multiplicar o logaritmo de 8 na base 2 por 3 que é o expoente da potência dada, ou seja, $3 \cdot 2 = 6$. O número que possui logaritmo 6 na tabela é o 128, que é a solução de 8^3.

- Para efetuar $\sqrt[4]{256}$ temos que dividir o logaritmo de 256 na base 2 que é 8 por 4, ou seja, 8:4=2. Na tabela, o número que possui logaritmo 2 é o 4, logo, $\sqrt[4]{256} = 4$.

Utilizamos uma tabela com potências de 2 para facilitar a compreensão, mas com certeza os matemáticos no século XVI, utilizando os algoritmos, calculavam estes valores sem precisar da tábua de logaritmos, porém, quando precisavam efetuar produtos do tipo $10^{0,12356} \cdot 10^{0,013289}$, por exemplo, as tábuas foram uma ótima solução para agilizar os cálculos.

> Logo depois do aparecimento da primeira tábua de logaritmos de Napier, o matemático inglês Henry Briggs, elaborou, junto com Napier, uma nova tábua, de mais fácil utilização, contendo os *logaritmos decimais* (Lima [14], p. 3).

A utilização dos logaritmos decimais tornou a tábua de logaritmos ainda mais prática, já que o sistema de numeração utilizado era o decimal. Vamos ver um exemplo de como os logaritmos decimais facilitaram o uso da tábua.

Observemos os valores aproximados dos logaritmos a seguir:

- $log3 \simeq 0,4771$
- $log30 = log(3 \cdot 10) = log3 + log10 \simeq 0,4771 + 1$
- $log300 = log(3 \cdot 100) = log3 + log100 \simeq 0,4771 + 2$
- $log3000 = log(3 \cdot 1000) = log3 + log1000 \simeq 0,4771 + 3$
- $log0,3 = log(3 \cdot 10^{-1}) = log3 + log10^{-1} \simeq 0,4771 - 1$
- $log0,03 = log(3 \cdot 10^{-2}) = log3 + log10^{-2} \simeq 0,4771 - 2$

Neste caso, temos que conhecendo o logaritmo de 3 na base 10, fica fácil de encontrarmos o valor aproximado do logaritmo dos números da forma $n = 3 \cdot 10^b$, pois $log\ n = log3 + b$.

Com o surgimento das calculadoras, o uso das tábuas logarítmicas perdeu a sua utilidade, porém a função logarítmica continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações.

Segundo Carvalho ([7], p. 191), essa importância é permanente; jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logarítmica está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

O que caracteriza uma função logarítmica é o fato de transformar produtos em somas, que é o contrário da exponencial. Isto nos é garantido pelo teorema de caracterização da função logarítmica que diz:

Uma função real $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$*, cujo domínio é o conjunto* $\mathbb{R}^+$ *dos números reais positivos, chama-se uma função logarítmica ou um sistema de logaritmos quando tem as seguintes propriedades:*

- *L é uma função crescente, isto é,* $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$*;*
- $L(xy) = L(x) + L(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (Lima [14], p. 18).

Não encontramos nos livros didáticos analisados problemas contextualizados que utilizassem estas propriedades pra modelá-los. A grande maioria dos problemas são modelados pela função exponencial e, em seguida, são utilizadas as propriedades dos logaritmos como função inversa da exponencial para solucioná-los. Os problemas relacionados à escala Richter, o Ph de substâncias, a medida da intensidade do som em decibéis, por exemplo, que utilizam função logarítmica para modelá-los, já vêm com a equação “montada”, ou seja, são situações contextualizadas que envolvem apenas manipulação.

Capítulo 7

Análise da motivação do estudo da função, equação e inequação logarítmica

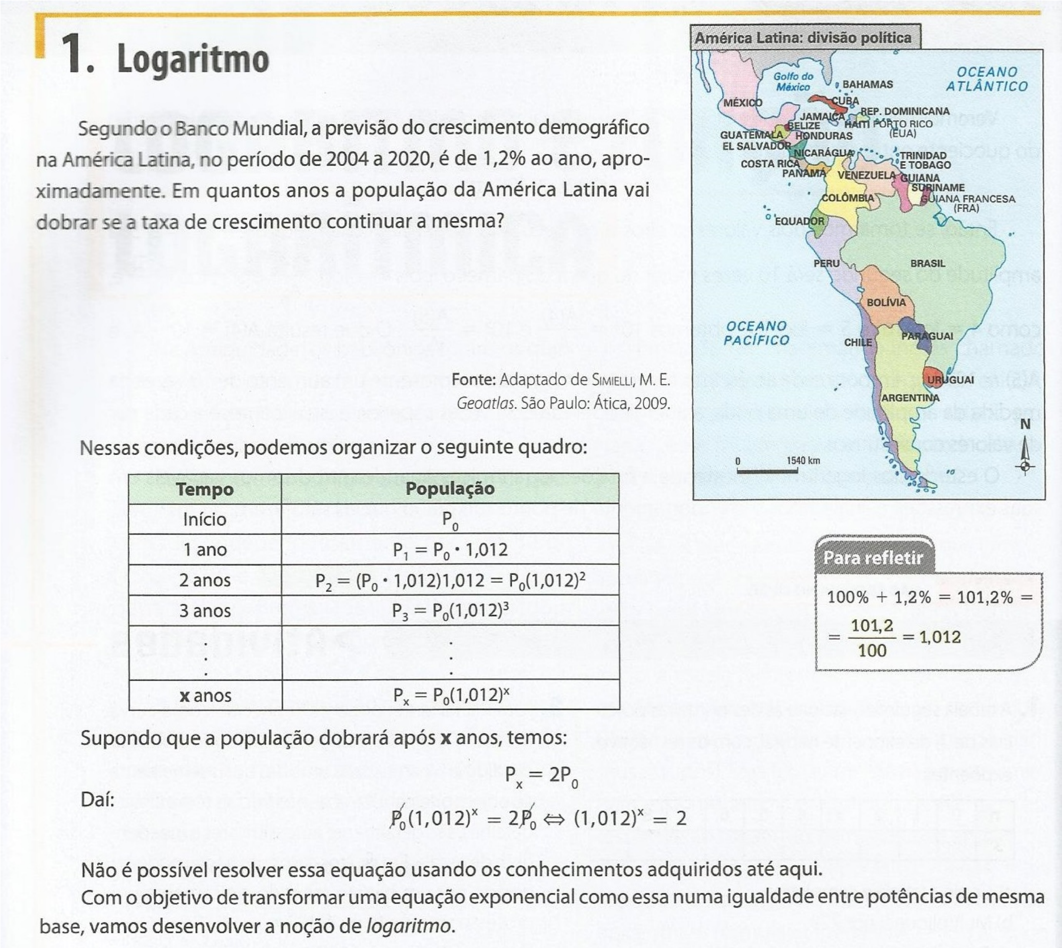
7.1 Introdução

Analisaremos como os livros didáticos de Matemática motivam o estudo da função, equação e inequação logarítmica, de acordo com os critérios adotados no capítulo 10.

7.2 Função logarítmica

7.2.1 Motivação boa

O problema utilizado para motivar o estudo da função logarítmica (Fig 7.1) é bom, visto que traz uma situação real sobre crescimento populacional, onde é estimado que passado um ano, a população da América Latina é igual a população do ano anterior multiplicada por 1,012, o que caracteriza uma função exponencial.



1. Logaritmo

Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Fonte: Adaptado de SIMIELLI, M. E. *Geoatlas*. São Paulo: Ática, 2009.

Nessas condições, podemos organizar o seguinte quadro:

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 \cdot 1{,}012$
2 anos	$P_2 = (P_0 \cdot 1{,}012)1{,}012 = P_0(1{,}012)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1{,}012)^3$
⋮	⋮
x anos	$P_x = P_0(1{,}012)^x$

Para refletir

$100\% + 1{,}2\% = 101{,}2\% = \dfrac{101{,}2}{100} = 1{,}012$

Supondo que a população dobrará após **x** anos, temos:

$$P_x = 2P_0$$

Daí:

$$\cancel{P_0}(1{,}012)^x = 2\cancel{P_0} \Leftrightarrow (1{,}012)^x = 2$$

Não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui.

Com o objetivo de transformar uma equação exponencial como essa numa igualdade entre potências de mesma base, vamos desenvolver a noção de *logaritmo*.

Figura 7.1: Motivação boa-Função logarítmica.

No problema deseja-se saber após quantos anos a população dobrará. O autor modela a situação através de uma equação exponencial, porém ressalta que os conhecimentos adquiridos até o momento são insuficientes para se resolver o problema e que para transformar uma equação exponencial como essa numa igualdade de potências de mesma base, é necessário desenvolver a noção de logaritmo.

7.2.2 Motivações inadequadas

Exemplo 1

Na situação apresentada na Fig. 7.2, temos que a cada acréscimo de 1 século no tempo t, a massa remanescente de plutônio fica multiplicada por 0,996, o que caracteriza uma função do tipo exponencial, porém isto não é ressaltado pelo autor.

O problema é modelado por uma função exponencial, onde o montante é encontrado em função do tempo. Em seguida, o autor utiliza a notação de logaritmos para expressar o tempo em função do montante sem explicar o porquê de representar o problema desta forma. Não fica clara a necessidade de se utilizar logaritmo para modelar um problema que aparentemente poderia ser solucionado utilizando os conhecimentos já adquiridos sobre função exponencial.

> Vimos, neste capítulo e no anterior, que vários problemas do cotidiano ou do universo científico relacionam grandezas que crescem ou decrescem através do produto por taxas constantes: juros em aplicações financeiras, crescimento populacional, nível de radioatividade de um elemento atômico, depreciação de um bem etc. O estudo desses problemas exige o conhecimento das funções exponencial e logarítmica, com as quais economistas fazem projeções, geógrafos estudam populações, biólogos avaliam o crescimento de culturas bacteriológicas ou químicos estimam o tempo de duração de substâncias radioativas.
>
> Para exemplificar, vamos considerar uma amostra de 1 kg de plutônio, elemento químico que perde 0,4% de sua massa a cada século.
>
> Aplicando a fórmula do montante, com taxa negativa, obtemos a função que descreve o tempo t, em século, em função da massa remanescente M dessa amostra, em quilograma:
>
> $$M = 1(1 - 0{,}004)^t \Rightarrow M = (0{,}996)^t$$
>
> $$\therefore t = \log_{0{,}996} M$$
>
> Neste capítulo, estudaremos funções desse tipo, chamadas de **funções logarítmicas**.

Figura 7.2: Motivação inadequada - Função logarítmica.

É falado no problema que 1 kg de plutônio perde 0,4% de sua massa a cada século. Esta informação está errada, pois de acordo com o site Wikipedia [48], existem mais de 20 isótopos de plutônio sintetizados e catalogados até hoje, todos eles são radioativos(radioisótopos) com meia-vidas que variam muito. As maiores meia-vidas são do Pu-244 (meia-vida de 80 milhões de anos), Pu-242 (meia-vida de 373 300 anos) e Pu-239 (meia-vida de 24 000 anos), os outros apresentam meia-vida inferior a 7 000 anos.

No problema não é falado qual dos isótopos do plutônio perde 0,4% de sua massa a cada século.

Vamos utilizar a fórmula $t = log_{0,996}M$ para encontrarmos após quantos anos, 1kg de plutônio perde 50% de sua massa, ou seja, qual a sua meia-vida.

Temos

$$t = log_{0,996}M$$

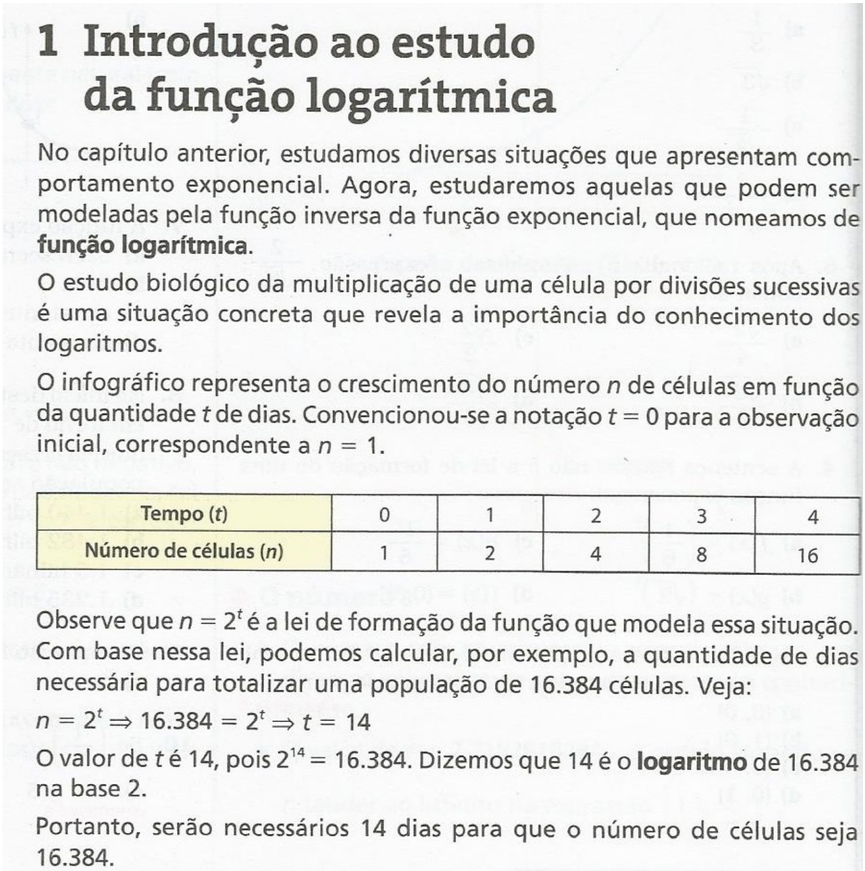
Para encontrarmos após quantos anos 1 kg de plutônio se transformará em 0,5 kg, faremos $M = 0,5$. Deste modo,

$$t = log_{0,996}0,5 \Rightarrow t = \frac{log0,5}{log0,996} \simeq \frac{-0,3010}{-0,00174} \simeq 173$$

Ou seja, a meia-vida do plutônio, segundo o problema, é de aproximadamente 173 séculos, ou seja, 17 300 anos, porém nenhum dos isótopos do plutônio possuem essa meia-vida e os dados do problema estão incorretos.

Exemplo 2

Temos na Fig. 7.3 um problema que faz conexão entre a matemática e a biologia. A forma como foi modelado está correta, porém para ser considerado uma boa motivação, o problema deve trazer um questionamento onde os conhecimentos já adquiridos pelos alunos sejam sufientes para solucioná-lo o que não é o caso do problema apresentado.



1 Introdução ao estudo da função logarítmica

No capítulo anterior, estudamos diversas situações que apresentam comportamento exponencial. Agora, estudaremos aquelas que podem ser modeladas pela função inversa da função exponencial, que nomeamos de **função logarítmica**.

O estudo biológico da multiplicação de uma célula por divisões sucessivas é uma situação concreta que revela a importância do conhecimento dos logaritmos.

O infográfico representa o crescimento do número n de células em função da quantidade t de dias. Convencionou-se a notação $t = 0$ para a observação inicial, correspondente a $n = 1$.

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Número de células (n)	1	2	4	8	16

Observe que $n = 2^t$ é a lei de formação da função que modela essa situação. Com base nessa lei, podemos calcular, por exemplo, a quantidade de dias necessária para totalizar uma população de 16.384 células. Veja:

$n = 2^t \Rightarrow 16.384 = 2^t \Rightarrow t = 14$

O valor de t é 14, pois $2^{14} = 16.384$. Dizemos que 14 é o **logaritmo** de 16.384 na base 2.

Portanto, serão necessários 14 dias para que o número de células seja 16.384.

Figura 7.3: Motivação inadequada - Função logarítmica.

Para solucionar o problema, os alunos podem utilizar os conhecimentos já adquiridos relacionados a função exponencial. Inclusive o autor já responde a equação $16\ 384 = 2^t$ fazendo a decomposição do número 16 384 que resulta numa potência de base 2.

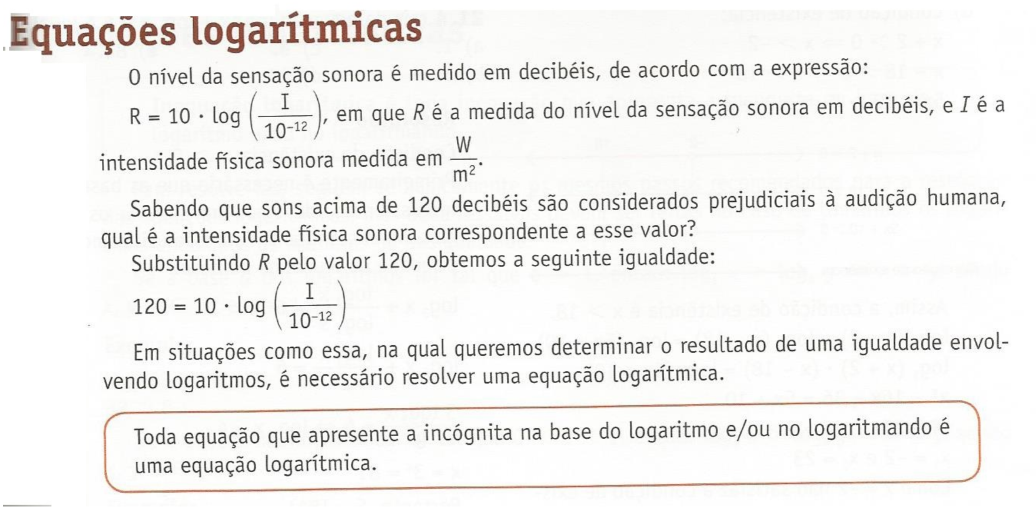
7.3 Equação logarítmica

7.3.1 Motivações boas

Em apenas 2 dos 10 livros analisados encontramos situações-problema utilizadas para introduzir o estudo das equações logarítmicas. Julgamos ambas como sendo motivações inadequadas, pois já trazem as fórmulas que modelam o problema. Uma delas está descrita na Seção 7.3.2. Nos demais livros não é apresentado nenhum problema para introduzir o estudo das equações logarítmicas. São apresentados exemplos de equações logarítmicas, seu conceito e técnicas de resolução.

7.3.2 Motivação inadequada

Temos na (Fig. 7.4) uma motivação inadequada para o estudo das equações logarítmicas, pois apesar de trazer uma de suas principais aplicações, que é o cálculo do nível de intensidade sonora em decibéis, a questão já está modelada por uma função logarítmica que se transforma numa equação a partir do momento que se determina um valor para *R*.



Equações logarítmicas

O nível da sensação sonora é medido em decibéis, de acordo com a expressão:

$R = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, em que R é a medida do nível da sensação sonora em decibéis, e I é a intensidade física sonora medida em $\frac{W}{m^2}$.

Sabendo que sons acima de 120 decibéis são considerados prejudiciais à audição humana, qual é a intensidade física sonora correspondente a esse valor?

Substituindo R pelo valor 120, obtemos a seguinte igualdade:

$120 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

Em situações como essa, na qual queremos determinar o resultado de uma igualdade envolvendo logaritmos, é necessário resolver uma equação logarítmica.

Toda equação que apresente a incógnita na base do logaritmo e/ou no logaritmando é uma equação logarítmica.

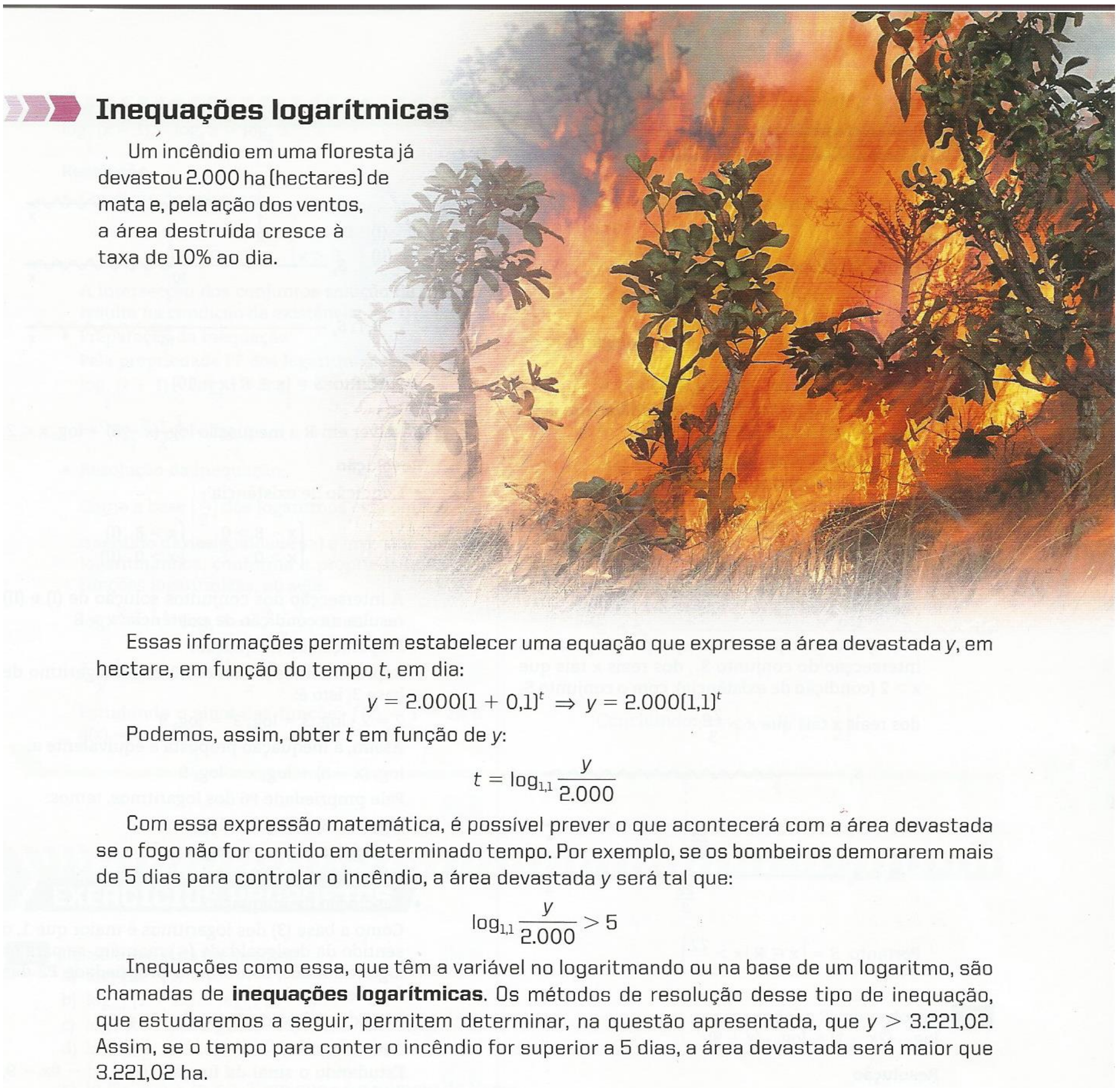
Figura 7.4: Motivação inadequada - Equação logarítmica.

Consideramos boas motivações apenas problemas de aplicação. No exemplo, o problema apesar de contextualizado, trata-se de uma manipulação que é interessante para ser utilizado como exercício, porém não é adequado para motivar o estudo de um novo conteúdo.

7.4 Inequação logarítmica

7.4.1 Motivação boa

O problema (Fig. 7.5) é uma boa motivação, pois traz uma situação que simula a realidade e pode ser modelada pela função exponencial e, consequentemente, pela sua inversa, a função logarítmica. Como a intensão do problema é descobrir qual será a área devastada pelo incêndio caso os bombeiros levem mais de 5 dias para controlar o fogo, teremos uma inequação logarítmica onde descobriremos quais os valores de y para os quais $t > 5$.



Inequações logarítmicas

Um incêndio em uma floresta já devastou 2.000 ha (hectares) de mata e, pela ação dos ventos, a área destruída cresce à taxa de 10% ao dia.

Essas informações permitem estabelecer uma equação que expresse a área devastada y, em hectare, em função do tempo t, em dia:

$$y = 2.000(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow y = 2.000(1{,}1)^t$$

Podemos, assim, obter t em função de y:

$$t = \log_{1{,}1} \frac{y}{2.000}$$

Com essa expressão matemática, é possível prever o que acontecerá com a área devastada se o fogo não for contido em determinado tempo. Por exemplo, se os bombeiros demorarem mais de 5 dias para controlar o incêndio, a área devastada y será tal que:

$$\log_{1{,}1} \frac{y}{2.000} > 5$$

Inequações como essa, que têm a variável no logaritmando ou na base de um logaritmo, são chamadas de **inequações logarítmicas**. Os métodos de resolução desse tipo de inequação, que estudaremos a seguir, permitem determinar, na questão apresentada, que $y > 3.221{,}02$. Assim, se o tempo para conter o incêndio for superior a 5 dias, a área devastada será maior que 3.221,02 ha.

Figura 7.5: Motivação boa - Inequações logarítmicas.

Esta foi a única motivação contextualizada referente a inequações exponenciais que encontramos nos livros analisados. Em praticamente todos, as inequações são tratadas de forma puramente manipulativa, sem apresentação de aplicações.

7.4.2 Motivações inadequadas

Em apenas um dos dez livros analisados encontramos uma situação-problema que introduz o estudo das inequações logarítimicas que julgamos como sendo uma boa motivação. Sua análise está descrita na Seção 7.4.1. Nos demais livros, são dados exemplos de inequações logarítmicas, seu conceito, propriedades e técnicas de resolução.

Capítulo 8

Análise de questões contextualizadas envolvendo função logarítmica

8.1 Introdução

8.2 Contextualizações boas

8.2.1 Função logarítimica como a inversa da função exponencial

Função logarítmica e juros compostos

As questões das Figuras 8.1 e 8.2 tratam de problemas envolvendo juros compostos que podem ser modelados através da função exponencial e que para serem resolvidos precisam de cálculos envolvendo logarítmos. São questões que simulam a realidade, onde o aluno poderá aprender a lidar com situações que envolvem aplicações financeiras e o uso adequado do cartão de crédito.

Exemplo 1:

58. Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

Figura 8.1: Contextualização boa - Função logarítmica e juros compostos.

Na questão (Fig. 8.1), a equação que modela o problema é

$$3C_0 = C_0 \cdot (1,02)^t \Rightarrow$$

$$3 = 1,02^t, \tag{8.1}$$

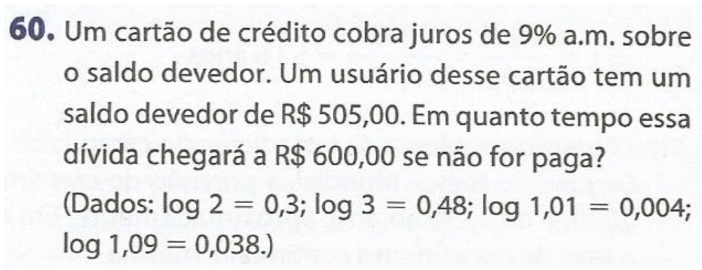
onde C_0 representa a quantia depositada, e t é o tempo.

Resolvendo a equação 8.1 temos,

$$log3 = log1,02^t \Rightarrow log3 = t \cdot log1,02 \Rightarrow t = \frac{log3}{log1,02} \simeq \frac{0,4771212}{0,0086} \simeq 55,48.$$

Deste modo, a quantia triplica após aproximadamente 55 meses. Pode-se pedir para que os alunos pesquisem qual a taxa aproximada de juros da caderneta de poupança no mês em que a atividade foi realizada e pedir para que eles respondam à questão utilizando a taxa pesquisada. Diante da nova resposta do problema, utilizando a taxa real de juros, o professor pode discutir com a turma as vantagens e desvantagens de se colocar o dinheiro na caderneta de poupança.

Exemplo 2:



60. Um cartão de crédito cobra juros de 9% a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de R$ 505,00. Em quanto tempo essa dívida chegará a R$ 600,00 se não for paga?
(Dados: log 2 = 0,3; log 3 = 0,48; log 1,01 = 0,004; log 1,09 = 0,038.)

Figura 8.2: Contextualização boa - Função logarítmica e juros compostos.

A equação exponencial $600 = 505 \cdot (1,09)^t$ é a que modela o problema (Fig. 8.2). Resolvendo a equação temos,

$$600 = 505 \cdot (1,09)^t \Rightarrow \frac{600}{505} = 1,09^t \Rightarrow log(\frac{600}{505}) = log1,09^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow log\frac{120}{101} = t \cdot log1,09 \Rightarrow t = \frac{(log12 \cdot 10) - (log1,01 \cdot 100)}{log1,09} =$$
$$= \frac{log(2^2 \cdot 3) + log10 - (log1,01 + log100)}{log1,09} = \frac{2 \cdot log2 + log3 + 1 - (0,004 + 2)}{0,038} =$$
$$= \frac{2 \cdot 0,3 + 0,48 + 1 - 2,004}{0,038} = \frac{0,6 + 0,48 + 1 - 2,004}{0,038} = \frac{2,08 - 2,004}{0,038} = \frac{0,076}{0,038} = 2.$$

Neste momento, o professor pode discutir com os alunos o quanto pode ser prejudicial fazer compras em cartões de crédito e não pagar a fatura em dia, pelo fato da taxa de juros ser muito alta e em um curto espaço de tempo a dívida se tornar muito grande. Além disso, a discussão pode se extender para a importância de se ter um bom planejamento financeiro e um consumo consciente.

É importante ressaltar que na questão apresentada é dito: "*Dados:* $log2 = 0,3;\ log3 = 0,48;\ log1,01 = 0,04\ ; log1,09 = 0,038$" quando o correto seria:"*Dados* ***aproximadamente***: $log2 = 0,3;\ log3 = 0,48;\ log1,01 = 0,04\ ; log1,09 = 0,038$".

Indicar os valores dos logaritmos na base 10 como sendo decimais exatos é um erro comum encontrado nos livros didáticos, porém, os logaritmos na base 10 de números naturais menos o zero, que não são potências de 10, são números irracionais, ou seja,

Teorema 8.1 $log_{10}A \in \mathbb{Q}\ com\ A \in \mathbb{N} - \{0\} \Leftrightarrow A = 10^n\ com\ n \in \mathbb{N}$

Consideraremos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ pelo fato da maioria dos livros didáticos incluirem o zero no conjunto dos números naturais.
Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $log_{10}A = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} - 0$, então $A = 10^n$ com $n \in \mathbb{N}$.

Temos

$$log_{10}A = \frac{p}{q} \Rightarrow A = 10^{\frac{p}{q}} \Rightarrow A^q = \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q \Rightarrow A^q = 10^p \Rightarrow A^q = 2^p \cdot 5^p.$$

Como A é um número natural positivo, sua decomposição em fatores primos é $A = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, onde $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ são números primos e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Deste modo,

$A^q = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n})^q = 2^p \cdot 5^p \Rightarrow 2^{\alpha_1 q} \cdot 5^{\alpha_2 q} = 2^p \cdot 5^p \Rightarrow \alpha_1 q = p = \alpha_2 q \Rightarrow p = \alpha_1 q \Rightarrow \frac{p}{q} = \alpha_1 \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Se $A = 10^n$, com $A \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $log_{10}A \in \mathbb{Q}$

De fato,

$$A = 10^n \Rightarrow log_{10}A = n \in \mathbb{Q}.$$

E assim terminamos a demonstração. □

Função logarítimica e o tempo de resfriamento de um corpo

Nas questões que envolvem o tempo de resfriamento de um corpo, a fórmula que modela o problema já é dada, porque o conhecimento necessário para se chegar a ela não é adequado para ser vivenciado no ensino médio.

Exemplo 1:

A questão dada na Fig. 8.3 traz uma boa conexão entre a matemática e a física. A fórmula que indica o resfrimento de um corpo está correta, de acordo com Lima ([14], p.124). Apresenta uma situação interessante que pode levar os alunos a se sentirem investigadores por um instante. Este tipo de problema normalmente instiga o aluno a querer chegar a sua solução, pois desperta a curiosidade e dá sentido ao que está sendo estudado.

23. (Vunesp) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h 30min o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°; a temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja 36,5 °C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por $D(t) = D_0 \cdot 2^{(-2\alpha t)}$ em que **t** é o tempo em horas, $\mathbf{D_0}$ é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante t = 0, D(t) é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante **t** qualquer e $\boldsymbol{\alpha}$ é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	Hora	Temperatura do corpo (°C)	Temperatura do quarto (°C)	Diferença de temperatura (°C)
t = ?	morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0	22h 30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 = 16$
t = 1	23h 30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, determine:

a) a constante α;

b) a hora em que a pessoa morreu.

Figura 8.3: Contextualização boa - Função logarítmica e tempo de resfriamento de um corpo.

Solucionando o item a) do problema, temos que no instante $t = 0$, $D(0) = D_0 = 16$ e no instante $t = 1$, $D(1) = 15$, logo,

$$15 = 16 \cdot 2^{(-2\alpha)} \Rightarrow log_2 15 = log_2(16 \cdot 2^{(-2\alpha)}) \Rightarrow log_2(3 \cdot 5) = log_2 16 + log_2 2^{(-2\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_2 3 + log_2 5 = 4 - 2\alpha \Rightarrow 1,6 + 2,3 - 4 = -2\alpha \Rightarrow -0,1 = -2\alpha \Rightarrow \alpha = 0,05.$$

Para descobrirmos a hora em que a pessoa morreu (item b), temos que descobrir o valor de t quando $D(t) = 20$, logo

$$20 = 16 \cdot 2^{-0,1t} \Rightarrow log_2 20 = log_2(16 \cdot 2^{-0,1t}) \Rightarrow log_2(4 \cdot 5) = log_2 16 + log_2 2^{-0,1t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_2 4 + log_2 5 = 4 - 0,1t \Rightarrow 2 + 2,3 - 4 = -0,1t \Rightarrow 0,3 = -0,1t \Rightarrow t = -3.$$

Portanto, a hora em que a pessoa morreu foi 22h 30min menos 3h, ou seja, 19h 30min.

Exemplo 2:

Na Fig. 8.4 temos uma questão em que a lei do resfriamento de Newton é dada de forma diferente da questão anterior, porém as fórmulas são equivalentes. A demonstração desta fórmula pode ser encontrada no site da Sociedade Brasileira de Física [34].

43 (UERJ) Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação:

$$T = T_0 + k\,e^{-ct}$$

Nesta relação, T é medida na escala Celsius, t é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e k e c são constantes a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100 °C, colocada numa sala de temperatura 20 °C. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 40 °C.

a) Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $\ell n\,2 = 0{,}7$ e $\ell n\,3 = 1{,}1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

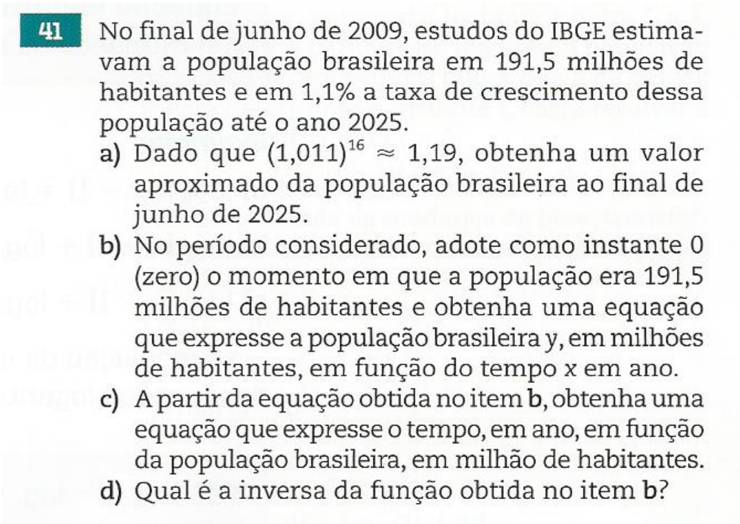
Figura 8.4: Contextualização boa - Função logarítmica e tempo de resfriamento de um corpo.

Mais uma vez foi utilizado "$ln2 = 0,7$ e $ln3 = 1,1$", quando o correto seria $ln2 \simeq 0,7$ e $ln3 \simeq 1,1$.

Como já informamos, a demonstração da lei de resfriamento de Newton não é adequada para ser apresentada no ensino médio, visto que envolve equações diferenciais, que é um conteúdo estudado apenas no ensino superior.

Função logarítmica e crescimento populacional

Temos na Fig. 8.5 uma questão que nos fornece dados sobre quais são as estimativas, segundo o IBGE, para o crescimento da população brasileira até o ano de 2025.



41 No final de junho de 2009, estudos do IBGE estimavam a população brasileira em 191,5 milhões de habitantes e em 1,1% a taxa de crescimento dessa população até o ano 2025.

a) Dado que $(1{,}011)^{16} \approx 1{,}19$, obtenha um valor aproximado da população brasileira ao final de junho de 2025.

b) No período considerado, adote como instante 0 (zero) o momento em que a população era 191,5 milhões de habitantes e obtenha uma equação que expresse a população brasileira y, em milhões de habitantes, em função do tempo x em ano.

c) A partir da equação obtida no item **b**, obtenha uma equação que expresse o tempo, em ano, em função da população brasileira, em milhão de habitantes.

d) Qual é a inversa da função obtida no item **b**?

Figura 8.5: Contextualização boa - Função logarítmica e crescimento exponencial.

É uma boa contextualização, pois traz uma situação real que serve para que os alunos tenham uma noção de como a população do Brasil pode vir a crescer, uma estimativa que possibilita a tomada de decisões a respeito de projetos que venham a beneficiar a população como um todo e prever problemas que, com planejamento prévio, podem ser solucionados ou amenizados.

Função logarítmica e meia-vida de substâncias

Exemplo 1:

A questão (Fig. 8.6) apresenta uma boa contextualização pois traz um problema que ensina ao aluno como é determinada a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo de madeira (com idade inferior a 40 000 anos) a partir da relação entre a quantidade de $C12$ existente hoje e a quantidade de $C12$ presente numa espécie semelhante atual.

99 Na caverna de Lascaux, na França, famosa pelas notáveis pinturas feitas em suas paredes por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade do *C* era 0,145 vezes a radioatividade normalmente encontrada num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão encontrado na caverna e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas.
(Extraído de *Logaritmos*, Elon Lages Lima, SBM, Coleção do Professor de Matemática, Fev./91)

Caverna de Lascaux, França

As pinturas da caverna de Lascaux têm 17 000 anos e foram encontradas em 1942.

Figura 8.6: Contextualização boa - Função logarítmica e meia-vida de substâncias.

Só deve ser informado ao aluno que o período de meia-vida do carbono 14 é de aproximadamente 5 730 anos. Esta informação não é dada na questão, porém o autor traz um texto antes de apresentar a questão que informa o período de meia-vida do carbono 14.

Exemplo 2:

Mais uma aplicação da função logarítmica (Fig. 8.7) que está relacionada com a meia-vida de substâncias radioativas. Neste caso, temos o iodo 125 que, segundo reportagem trazida no site da uol [23], pode ser utilizado na medicina para o tratamento do câncer de próstata.

102 As substâncias radioativas emitem partículas e, com o passar do tempo, sua massa vai diminuindo. O iodo 125, variedade radioativa do iodo com aplicações medicinais, tem meia-vida de 60 dias (perde metade de sua massa a cada 60 dias).

a) Quantos gramas de iodo 125 irão restar a partir de uma amostra de 10 g, após 60 dias? E após 120 dias? E após 6 meses?

b) Daqui a quanto tempo essa amostra terá apenas 0,04 grama?

Sugestão: use a fórmula $m = \frac{m_0}{2^x}$, em que, m_0: massa da amostra, m: massa que permanece radioativa e x: nº de períodos de meia-vida.

Figura 8.7: Contextualização boa - Função logarítmica e meia-vida de substâncias.

Ao responder ao item b do problema, é possível observarmos após quanto tempo a quantidade de iodo 125 se torna muito pequena.

Função logarítmica e a medida da pressão atmosférica

A questão apresentada na Fig 8.8 traz um problema instigante que faz uma conexão entre a física e a matemática. Muitas vezes assistimos reportagens falando sobre escaladas e a medida da altura de uma montanha. Mas como é feita essa medição? Um dos métodos utilizados é explicado na questão onde é dada a média da pressão atmosférica medida por um barômetro no topo do Pico da Neblina e a fórmula que fornece a medida da pressão em uma dada altura h.

10. (UF-PR) Um grupo de estudantes resolveu repetir a medição da altura do Pico da Neblina feita na década de 1960. Para isso, escalaram essa montanha e levaram um barômetro. Chegando ao cume da montanha, efetuaram várias medições da pressão atmosférica do local e obtiveram o valor médio de 530 mmHg. A pressão atmosférica p(h) a uma dada altura *h* (em metros, em relação ao nível do mar) é fornecida pela função:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{\alpha \cdot h}$$

sendo *e* a base do sistema de logaritmos neperianos, $p_0 = 760$ mmHg a pressão atmosférica no nível do mar, e α um número que depende principalmente da temperatura média no local de medição.
Sabendo-se que, nas condições desse experimento, $\alpha = -0{,}00012$ e que os estudantes usaram os valores aproximados $\ell n\,(760) = 6{,}63$ e $\ell n\,(530) = 6{,}27$, qual foi a altura que encontraram para o Pico da Neblina?

Figura 8.8: Contextualização boa - Função logarítmica e pressão atmosférica.

A fórmula está correta e pode ser encontrada em (Lima [14], p.126). Os conhecimentos necessários para modelar o problema são complexos para serem apresentados no Ensino Médio, por isso a questão já fornece a fórmula que a modela.

Resolvendo a questão temos que

- $P(h) = 530$
- $p_0 = 760$
- $\alpha = -0,00012$

Deste modo,

$$530 = 760 \cdot e^{-0,00012 \cdot h} \Rightarrow ln530 = ln(760 \cdot e^{-0,00012 \cdot h}) \Rightarrow ln530 = ln760 + lne^{-0,00012 \cdot h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6,27 = 6,63 - 0,00012h \Rightarrow -0,36 = -0,00012h \Rightarrow h = 3000.$$

8.2.2 Função logarítmica e a escala Richter

Exemplo 1:

Temos na Fig. 8.9 uma questão que explica como a magnitude dos terremotos é calculada utilizando a escala Richter. As fórmulas $M = logA - logA_0$ e $logE = 11,8 + 1,5M$, onde M é a magnitude[1] na escala Richter e A é a amplitude[2] máxima medida pelo sismógrafo, estão corretas segundo Henrique [11]. Explicaremos melhor a escala Richter no capítulo 9.

82 (UFV-MG) A fim de medir a magnitude de um terremoto, os sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter em 1935. Nesta escala, o maior terremoto já registrado foi o Grande Terremoto do Chile, em 1960, atingindo a magnitude de 9,5, seguido do ocorrido na Indonésia, em 2004, que atingiu a magnitude de 9,3. Na escala Richter, a magnitude M é dada por:

$$M = \log A - \log A_0$$

onde log denota logaritmo decimal, A é a amplitude máxima medida pelo sismógrafo e A_0 é uma amplitude de referência padrão. Sabe-se também que a energia E, em ergs (1 erg = 10^{-7} joules), liberada em um terremoto está relacionada à sua magnitude M por meio da expressão

$$\log E = 11,8 + 1,5M$$

A partir das informações acima, faça o que se pede:

a) Sabendo que no litoral do Brasil, em 1955, foi registrado um terremoto de magnitude 6,3 na escala Richter, determine a razão entre as energias liberadas nos terremotos ocorridos na Indonésia e no Brasil.

b) Considerando A_1 a amplitude máxima de um terremoto e E_1 sua energia, e A_2 a amplitude máxima de outro terremoto e E_2 sua energia, determine k tal que

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^k.$$

Figura 8.9: Função logarítmica e escala Richter.

É uma boa contextualização pois traz dados reais sobre o maior terremoto já registrado que ocorreu no Chile em 1960, atingindo a magnitude de 9,5, o ocorrido na Indonésia que

[1] Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. [43]

[2] Amplitude máxima é a medida da distância entre as posições extremas dos registros das oscilações das ondas sísmicas P (pressão máxima) e S (superficial), medidas a 100 km do epicentro do sismo por um sismógrafo [44]. Ver Fig. 9.8 no capítulo 9.

atingiu magnitude 9,3 e um dos terremotos que ocorreram no Brasil atingindo a magnitude de 6,5.

Chamemos de E_1 e M_1 a energia liberada e a magnitude, respectivamente, do terremoto ocorrido no Brasil e E_2 e M_2 a energia liberada e a magnitude, respectivamente, do terremoto ocorrido na Indonésia.

Respondendo ao item a) temos que

$$logE_1 = 11,8 + 1,5M_1 = 11,8 + 1,5 \cdot 6,3 = 21,25 \Rightarrow logE_1 = 21,25 \Rightarrow E_1 = 10^{21,25}$$

$$logE_2 = 11,8 + 1,5M_2 = 11,8 + 1,5 \cdot 9,3 = 25,75 \Rightarrow logE_2 = 25,75 \Rightarrow E_2 = 10^{25,75}$$

logo, a razão entre as energias liberadas nos terremotos ocorridos na Indonésia e no Brasil é

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{25,75}}{10^{21,25}} = 10^{4,5}.$$

O professor pode completar o item a) perguntando aos alunos o que significa este resultado, pois muitas vezes o aluno encontra a resposta, mas não compreende o seu significado que, neste caso, indica que apesar da diferença de apenas 3 unidades na magnitude do terremoto ocorrido na Indonésia em relação ao ocorrido no Brasil em 1955, a energia do primeiro é $10^{4,5} \simeq 31\,623$ vezes maior que a do segundo.

Respondendo ao item b) temos que

$$\begin{cases} logE_2 = 11,8 + 1,5(logA_2 - logA_0) \\ logE_1 = 11,8 + 1,5(logA_1 - logA_0) \end{cases}$$

Portanto,

$$logE_2 - logE_1 = 1,5(logA_2 - logA_1) \Rightarrow log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{3}{2}log\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{2}{3}log\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \Rightarrow log\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = log\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Logo, $k = \frac{2}{3}$.

Como a magnitude de um terremoto é dada pela fórmula

$$M = logA - logA_0 = log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

e já sabemos que

$$log\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{2}{3}log\left(\frac{E_2}{E_1}\right),$$

então podemos calcular a magnitude de um terremoto utilizando a fórmula

$$M = \frac{2}{3}log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

Exemplo 2:

Na Fig. 8.10 temos uma questão que permite ao aluno olhar de forma crítica para as informações que são lançadas nas diversas mídias. No exemplo dado, é trazido um texto adaptado do jornal O Estado de São Paulo, de 1999.

8 (UFPel-RS) A intensidade de um terremoto, medida na escala Richter, é uma função logarítmica determinada por $I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$, em que E é a energia liberada no terremoto, em kWh.

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar *seriamente casas mal construídas* em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 quilômetros do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto, pode causar sérios danos numa grande faixa de área.
8,0 ou mais	Enorme terremoto, pode causar grandes danos em muitas áreas, mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Analise o texto abaixo, adaptado do jornal *O Estado de S. Paulo*, 1999.

"Um dos mais fortes terremotos das últimas décadas atingiu a Turquia na madrugada de ontem, causando a morte de pelo menos 2 mil pessoas e ferimentos em outras 10 mil, segundo cálculos iniciais. (...) O tremor liberou uma energia de $7 \cdot 10^{2,4}$ kWh, de acordo com o registro nos EUA, e foi sentido em várias cidades vizinhas... Em pânico, a população da capital turca, de 7,7 milhões de pessoas, foi para as ruas. Cerca de 250 pequenos abalos se seguiram ao primeiro e mais intenso, que durou 45 segundos... pontes ruíram e fendas no asfalto dificultaram a chegada do socorro..."

Com base no cálculo da intensidade (magnitude) do terremoto, a ser medida pela escala Richter, verifique se o valor da energia liberada, citado no texto, corresponde aos efeitos descritos pela notícia.

Figura 8.10: Função logarítmica e escala Richter.

É informado que a energia liberada pelo terremoto que atingiu a Turquia liberou uma energia de $7 \cdot 10^2,4$ kWh. Na pergunta do problema, o autor quer que o aluno verifique se o valor da energia liberada, citado no texto, corresponde aos efeitos descritos pela notícia, baseados no cálculo da magnitude de um terremoto pela escala Richter.

Solucionando o problema, temos que

$$I = \frac{2}{3} \cdot log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow I = \frac{2}{3} \cdot log \frac{7 \cdot 10^{2,4}}{7 \cdot 10^{-3}} = \frac{2}{3} \cdot log 10^{5,3} = \frac{2}{3} \cdot 5,3 \simeq 3,5.$$

Na tabela de magnitudes na escala Richter e seus efeitos, temos que um terremoto de magnitude 3,5 às vezes mas raras vezes causa danos, logo os dados trazidos na notícia estão incorretos.

Problemas como este são interessantes, pois mostram o quanto o conhecimento matemático é importante para nos tornarmos sujeitos críticos, capazes de analisar as informações que nos são transmitidas a todo momento pelos diversos meios de comunicação.

8.2.3 Função logarítmica e medida da intensidade do som em decibéis

Exemplo 1:

O que caracteriza uma função logarítmica é o fato de que ela transforma produtos em somas, ou seja, $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Na questão dada na Fig. 8.11 podemos observar isto.

3. (Uepa) Os carnavais fora de época conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que pode causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel, é dada por $NIS = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ onde **I** é intensidade de energia qualquer e $\mathbf{I_0}$ é a intensidade de energia limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se num desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, o Nível de Intensidade Sonora será: (Dado: log 4 = 0,6.)

a) oito vezes maior.
b) dezesseis vezes maior.
c) aumentado em 8 dB.
d) aumentado em 6 dB.
e) aumentado em 16 dB.

Figura 8.11: Função logarítmica e medida em decibéis.

Se quadruplicamos a intensidade de energia[3] , temos que

$$NIS_1 = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$NIS_2 = 10log\left(\frac{4I}{I_0}\right).$$

Ou seja,

[3]Intensidade de energia é a quantidade de energia sonora que atravessa a unidade de área de uma superfície disposta perpendicularmente à direção de propagação, na unidade de tempo, ou seja, é a potência sonora recebida por unidade de área da superfície (Boas [2]).

$$
\begin{aligned}
NIS_2 &= 10log\left(\frac{4I}{I_0}\right) = 10(log4 + logI - logI_0) = \\
&= 10log4 + 10(logI - logI_0) = 10 \cdot 0,6 + 10log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \\
&= 6 + NIS_1.
\end{aligned}
$$

Logo, ao quadruplicarmos a intensidade de energia, acrescentamos 6 decibéis ao Nível de Intensidade Sonora (NIS).

Aplicando o teorema da caracterização podemos chegar a este mesmo resultado. No problema temos que $x_1 = \frac{I}{I_0}$, $x_2 = 4$ e $f(x_1 \cdot x_2) = f\left(\frac{4I}{I_0}\right) = NIS_2$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
f(x_1 \cdot x_2) = NIS_2 &= f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{I}{I_0}\right) + f(4) = 10log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 10log4 = \\
&= 10log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 6 = NIS_1 + 6.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2:

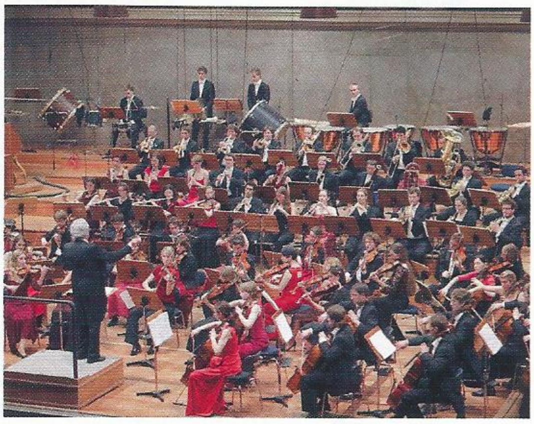
Na questão dada na Fig. 8.12 temos mais um exemplo do quanto pequenos acréscimos no nível do som em decibéis representam grandes variações na intensidade do som devido à utilização da escala logarítmica.

56 (UFRN) A escala decibel de som é definida pela seguinte expressão:

$$B = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Nessa expressão, B é o nível do som, em decibel (dB), de um ruído de intensidade física I, e I_0 é a intensidade de referência associada ao som mais fraco percebido pelo ouvido humano.

Som	Nível do som (dB)
Som mínimo	0
Raspagem de folhas	10
Sussurro	20
Conversação normal	60
Banda de rock	80
Orquestra	90
Máximo suportável	120



De acordo com a expressão dada e a tabela acima, pode-se concluir que a intensidade do som de uma orquestra é:

a) 1.000 vezes a intensidade de uma conversação normal.

b) 200 vezes a intensidade de uma conversação normal.

c) 100 vezes a intensidade de uma conversação normal.

d) 2.000 vezes a intensidade de uma conversação normal.

Figura 8.12: Função logarítmica e medida em decibéis.

No problema, o nível do som de uma conversação normal é de 60 dB e de uma orquestra de 90 dB, ou seja,

$$60 = 10log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow 6 = log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow 10^6 = \left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow I_1 = 10^6 I_0,$$
$$90 = 10log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow 9 = log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow 10^9 = \left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow I_2 = 10^9 I_0.$$

Fazendo

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^9 I_0}{10^6 I_0} = 10^3 = 1\,000.$$

obtemos que a intensidade do som de uma orquestra é 1 000 vezes maior que a de uma conversação normal e apenas há uma variação de 3 decibéis na medida do nível de intensidade sonora.

8.2.4 Função logarítmica e o pH de substâncias

Exemplo 1:

O problema apresentado (Fig. 8.13) fala da chuva ácida, um problema ambiental que é consequência da poluição industrial, fazendo uma conexão entre a matemática, a química e as práticas sociais. Traz informações sobre o que é o pH e como ele é calculado utilizando uma função logarítmica, além de mostrar como seu valor determina a acidez, a neutralidade e a basicidade de uma substância, informações necessárias para descobrir o nível de acidez da água da chuva mencionado no problema.

4 • (Fuvest-SP) Como consequência da poluição industrial, verificou-se em alguns lugares um aumento de até 1 000 vezes na concentração hidrogeniônica da água da chuva. Sabendo-se que o pH normal da água da chuva é de 5,6, qual seria o valor do pH no caso da chuva ácida mencionada anteriormente?

Nota: Antes de se envolver com a resolução do problema, recorra às informações sobre o equilíbrio iônico da água.

Na água, chamada neutra, independentemente da temperatura, as concentrações de íons H^+ e de íons OH^- são iguais. As soluções aquosas também serão neutras, quando essas concentrações de íons H^+ e OH^- forem iguais. Caso não ocorra essa igualdade de concentrações, teremos soluções ácidas ou básicas:

- Quanto maior a $[H^+]$, mais ácida é a solução.
- Quanto maior a $[OH^-]$, mais básica ou alcalina é a solução.

Para facilitar o cálculo dessas concentrações, o bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz (1868-1939), buscando um método para aperfeiçoar o controle de qualidade da cerveja, desenvolveu o cálculo do pH (potencial hidrogeniônico). Esse cálculo é feito usando-se a expressão:

$$pH = -\log [H^+] \text{ ou } pH = \log \frac{1}{[H^+]}$$

A escala de pH normalmente apresenta valores que variam de zero a 14.

Consideramos neutro o **pH = 7**.

$$\xleftarrow[\text{acidez cresce}]{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6} \quad \mathbf{pH = 7} \quad \xrightarrow[\text{basicidade cresce}]{8 \quad 9 \quad 10 \quad 11}$$

Figura 8.13: Função logarítmica e o pH de substâncias.

O professor pode complementar as informações trazidas informando o porquê de ser utilizada uma função logarítmica para determinar o pH (ver Capítulo 9).

Solucionando o problema temos que em condições normais, o pH da água é de 5,6, ou seja,

$$5,6 = -log[H^+]_{normal} \Rightarrow -5,6 = log[H^+]_{normal} \Rightarrow [H^+]_{normal} = 10^{-5,6}.$$

De acordo com a poluição mencionada no texto, em alguns lugares há um aumento de até 1 000 vezes na concentração hidrogeniônica da água da chuva (chamaremos de $[H^+]_p$ e pH_p a concentração hidrogeniônica e o potencial hidrogeniônico, respectivamente, da água da chuva ácida), ou seja,

$$[H^+]_p = 10^3 \cdot [H^+]_{normal} \Rightarrow [H^+]_p = 10^3 \cdot 10^{-5,6} = 10^{-2,6}.$$

Logo,

$$pH_p = -log10^{-2,6} = 2,6.$$

Exemplo 2:

Neste problema, (Fig. 8.14) também é explicado o que é o pH e como é calculado, além de mostrar o quanto é utilizado em diversas áreas, como por exemplo, na produção de vacinas, fermentações, produção do leite e seus derivados, agricultura.

23 **Contexto**

O pH, ou potencial hidrogeniônico, permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons hidrogênio, em mol/L.

Em 1909, com base em diversos estudos realizados em físico-química na segunda metade do século XIX e início do XX, o bioquímico dinamarquês Sören P. Sörensen (1868-1939) estabeleceu uma maneira para expressar o pH de uma substância utilizando o logaritmo negativo da sua concentração de íons hidrogênio $([H^+])$, ou seja, $pH = -\log[H^+]$.

A partir desse conceito, da obtenção experimental do produto iônico da água $([H^+][OH^-])$, que corresponde a $1 \cdot 10^{-14}$ a 25 °C, e do pOH, determinado por meio do logaritmo negativo da concentração de íons hidroxila $([OH^-])$ em mol/L, ou seja, $pOH = -\log[OH^-]$, foi obtida a relação $pH + pOH = 14$, e desenvolveu-se uma escala de 0 a 14, por meio da qual uma solução aquosa a 25 °C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica.

Jacques Boyer/Roger-Viollet/Imageplus

Sören P. Sörensen

- solução ácida: $pH < 7$
- solução neutra: $pH = 7$
- solução básica: $pH > 7$

A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Assim, o pH adquiriu importância no segmento industrial, permanecendo até os dias atuais, nos quais estudos envolvendo pH não são mais exclusividade dos químicos, sendo realizados também por profissionais de diversas áreas, como farmacêuticos, geólogos e agrônomos.

Um agrônomo, por exemplo, ao verificar as condições do solo para o início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que quando representado por um valor entre 6 e 7 tende a ser mais fértil.

a) Em uma propriedade rural, a produtividade máxima de feijão foi obtida com o pH 6,4 do solo. Determine a concentração de íons hidrogênio apresentada nesse solo.

b) Considerando o pH, a 25 °C, das substâncias a seguir, classifique-as em ácidas, básicas ou neutras.
- leite de magnésia: $10 < pH < 11$
- suco de limão: $2 < pH < 3$
- leite: $6 < pH < 7$
- água pura: $pH = 7$
- sangue: $7 < pH < 8$

c) Considerando $[H^+][OH^-] = 1.10^{-14}$ e utilizando as fórmulas $pH = -\log[H^+]$ e $pOH = -\log[OH^-]$, obtenha a relação $pH + pOH = 14$.

Figura 8.14: Função logarítmica e o pH de substâncias.

Solucionando a questão temos:

- No item a), $6,4 = -log[H^+] \Rightarrow -6,4 = log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-6,4} mol/L.$
- No item b), leite de magnésia (básica), suco de limão (ácida), leite (ácida), água pura (neutra), sangue (básica).

- No item c),

$$[H^+][OH^-] = 1.10^{-14} \Rightarrow log([H^+][OH^-]) = log 1 \cdot 10^{-14} = log[H^+] + log[H^-] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14 = -pH - pOH \Rightarrow pH + pOH = 14.$$

Para solucionarmos esta questão estamos aplicando o teorema da caracterização da função logarítmica onde $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

8.3 Contextualizações inadequadas

8.3.1 Contextualização inadequada 1

Os dados da questão apresentada na Fig. 8.15 são incoerentes com a realidade.

19. (Unemat-MT) Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção da espécie animal é inevitável. A população de determinada espécie animal ameaçada de extinção diminui segundo a função f(t) = ka^t, na qual **k** e **a** são números reais e f(t) indica o número de indivíduos dessa espécie no instante **t** (em anos). Atualmente (instante t = 0) existe 1 500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750. Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal decrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram irreversível para a extinção? Para os cálculos utilize, se necessário, alguns dos valores da tabela abaixo:

n	2	3	7	10
log n	0,30	0,47	0,85	1

a) 25
b) 40
c) 30
d) 15
e) 39

Figura 8.15: Função logarítmica - Contextualização inadequada 1.

Inicialmente, a informação de que ao chegar a 100 indivíduos , a extinção da espécie animal é inevitável está incorreta, pois de acordo com Brito [4], PMV (população mínima variável) é o número mínimo de indivíduos que uma população precisa ter para assegurar que ela possua uma certa probabilidade de sobrevivência em um certo período de tempo (por exemplo, 95% de chance de persistência em 100 anos). As estimativas de PMV podem variar caso a caso, por exemplo, de acordo com objetivos de conservação, grau de segurança ou as condições iniciais do cenário. Ou seja, não há um número que seja considerado universalmente válido para determinar que a partir dele, a espécie animal seja levada à extinção.

Também é informado que determinada espécie animal ameaçada de extinção diminui segundo a função $f(t) = ka^t$, mas que espécie é esta? Por que sua população se reduz modelada por esta fórmula? Neste caso fica notório que os dados da questão são fictícios.

8.3.2 Contextualização inadequada 2

Na questão da Fig. 8.16, fazem supostamente, uma conexão entre a matemática e as práticas sociais, onde se fala sobre a inclusão de novos amigos em um site de relacionamento.

24 • (UFRJ) Ana e Bia participam de um *site* de relacionamentos. No dia 1º de abril de 2005, elas notaram que Ana tinha exatamente 128 vezes o número de amigos de Bia. Ana afirmou que, para cada amigo que tinha no final de um dia, três novos amigos entravam para sua lista de amigos no dia seguinte. Já Bia disse que, para cada amigo que tinha no final do dia, cinco novos amigos entravam para sua lista no dia seguinte. Suponha que nenhum amigo deixe as listas e que o número de amigos aumente, por dia, conforme elas informaram.

a) No dia 2 de abril de 2005, vinte novos amigos entraram para a lista de Bia. Quantos amigos havia na lista de Ana em 1º de abril?

b) Determine a partir de que dia o número de amigos de Bia passa a ser maior que o número de amigos de Ana. Se precisar, use a desigualdade $1{,}584 < \log_2^3 < 1{,}585$.

Figura 8.16: Função logarítmica - Contextualização inadequada 2.

É dado que existe um padrão nesta inclusão. Para cada amigo que Ana tinha no final de um dia, três novos amigos entravam para sua lista de amigos no dia seguinte e para cada amigo que Bia tinha no final de um dia, entravam cinco novos amigos. Isto não acontece na realidade. Em um site de relacionamento, para que alguém entre em sua lista de amigos, é necessário fazer o convite a esta pessoa que aceita o pedido se quiser, portanto, não tem como padronizar a quantidade de amigos que entram em sua lista como é falado no problema.

Forçam uma contextualização, tornando o problema artificial e desconectado da realidade.

8.3.3 Contextualização inadequada 3

Nesta questão (Fig. 8.17), teoricamente, há uma conexão entre a matemática e uma situação vivenciada em sala de aula, porém o autor apenas “enfeita” o problema, que na verdade se trata de uma situação de pura manipulação, onde não é apresentada nenhuma contextualização da função logarítmica. A única coisa a ser feita é solucionar uma equação exponencial com base nos dados do problema.

2 (UFMT) Um professor de matemática, desejando verificar a capacidade de entendimento e interpretação da linguagem matemática de seus alunos, propôs a seguinte questão: “Admitindo que uma potência de base 10 cm com expoente 0,3 é igual a 2 e que uma potência de base 10 com expoente 0,48 é igual a 3, a que expoente deve-se elevar o número 3 para obter o número 12?”
Nessas condições, os alunos que interpretaram e resolveram corretamente essa questão responderam:
a) 2,15 c) 2,5 e) 2,25
b) 2,35 d) 2,75

Figura 8.17: Função logarítmica - Contextualização inadequada 3.

8.3.4 Contextualização inadequada 4

Devemos tomar muito cuidado com questões que envolvem o crescimento exponencial, pois ele se dá de forma muito rápida e na questão (Fig. 8.18) a taxa de aumento é muito alta (60%).

45. (Vunesp-SP) Um determinado lago foi tomado por uma vegetação. Em 1990, a área coberta pela planta era de 160 m², e, a partir de então, o aumento anual da área coberta pela vegetação foi de 60%. Determine:
a) a área, em m², coberta pela vegetação *n* anos mais tarde;
b) usando $\log_{10} 16 = 1{,}2$, quantos anos se passaram até que uma área de 2 560 m² fosse coberta?

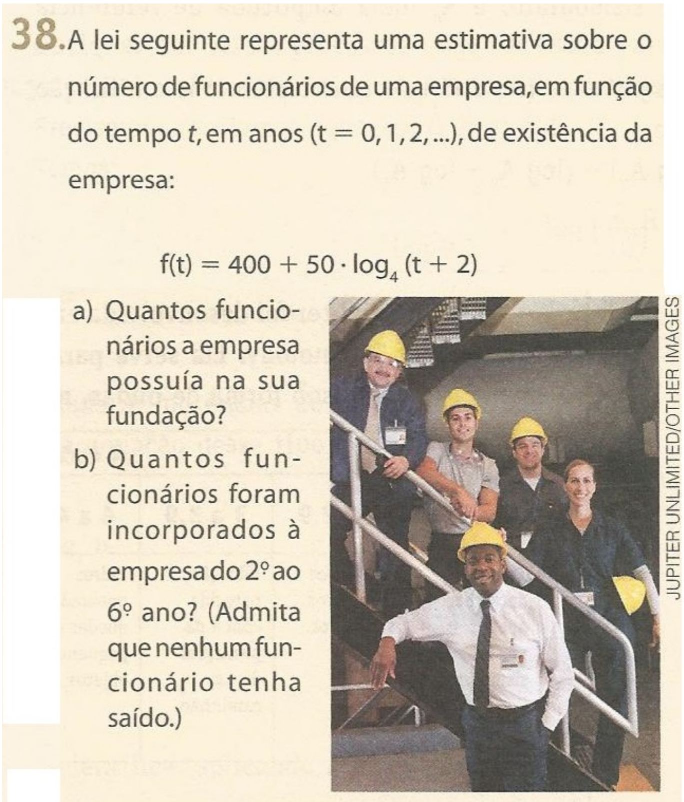
Figura 8.18: Função logarítmica - Contextualização inadequada 4.

A equação que modela o problema é $A(n) = 160 \cdot 1,6^n$, onde $A(n)$ é a área total ocupada pela planta em função do tempo n. Se n pode assumir qualquer valor, então quando $n = 24$, por exemplo, a vegetação estará ocupando uma área de 12 676 506 m^2 que representa a área de aproximadamente 1 170 campos de futebol. Como não é informada a área da superfície do lago, este valor pode representar uma área maior do que a área do próprio lago.

O autor poderia ter informado a superfície do lago e perguntado em quanto tempo, caso não fosse tomada nenhuma providência, a vegetação ocuparia toda a sua superfície.

8.3.5 Contextualização inadequada 5

No problema apresentado (Fig. 8.19) fala-se sobre a lei que representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo, que é dada por $f(t) = 400 + 50 \cdot log_4(t+2)$. Porém, de que tipo de empresa se trata? Por que foi utilizada esta fórmula para modelar o seu número de funcionários com o passar do tempo?



38. A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo t, em anos ($t = 0, 1, 2, ...$), de existência da empresa:

$$f(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$$

a) Quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação?

b) Quantos funcionários foram incorporados à empresa do 2º ao 6º ano? (Admita que nenhum funcionário tenha saído.)

Figura 8.19: Função logarítmica - Contextualização inadequada 5.

No item b pede-se para calcular o número de funcionários que foram incorporados do 2º ao 6º ano da empresa admitindo que nenhum tenha saído, logo, a fórmula não prevê este tipo de situação, o que é irreal, pois é comum que funcionários saiam das empresas, seja com maior ou menor frequência, principalmente após 4 anos.

8.3.6 Contextualização inadequada 6

19 (Unicamp-SP) As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2 (4t + 4)$, em que a variável t representa o tempo em ano.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes t = 1 e t = 7?

b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determinar esse instante t e especificar a cidade cuja população é maior após esse instante.

Figura 8.20: Função logarítmica - Contextualização inadequada 6.

Neste problema (Fig. 8.20), a população de duas cidades foi dada através de duas funções logarítmicas uma de base 8 e outra de base 2. Por que foram utilizadas estas fórmulas para modelar o problema? Qual a razão de se utilizar estas bases? Mais uma vez a utilização de tais fórmulas não é justificada. Além disso, observando as soluções do item a) onde $A(1) = 2$ e $A(7) = 6$, $B(1) = 3$ e $B(7) = 5$, observamos que ao passar 6 anos a população da cidade A triplicou, o que representa um crescimento elevado para um curto espaço de tempo, e o da B tornou-se aproximadamente 1,7 vezes maior.

8.3.7 Contextualização inadequada 7

5 (UERJ) O número, em centenas de indivíduos, de um determinado grupo de animais, x dias após a liberação de um predador no seu ambiente, é expresso pela seguinte função:

$$f(x) = \log_{5\sqrt[3]{5}} (x^4)$$

Após cinco dias da liberação do predador, o número de indivíduos desse grupo presentes no ambiente será igual a:

a) 3 b) 4 c) 300 d) 400

Figura 8.21: Função logarítmica - Contextualização inadequada 7.

O problema (Fig. 8.21) fala que a fórmula calcula o número, em centenas de indivíduos, de um determinado grupo de animais, x dias após a liberação de um predador. De que grupo de animais se trata? Qual predador será lançado no ambiente? De onde veio esta fórmula? Por que ela está sendo utilizada? Qual a razão de se utilizar um logarítmo de base $5\sqrt[3]{5}$?

Para solucionar o problema de acordo com os dados apresentados, temos que após 5 dias da liberação do predador, o número, em centenas de indívivuos, será dado por:

$$f(5) = log_{5\sqrt[3]{5}}(5^4) = \frac{log_5 5^4}{log_5 5\sqrt[3]{5}} = \frac{4}{log_5 5 + log_5 5^{\frac{1}{3}}} = \frac{4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3.$$

Ou seja, restarão 300 indivíduos do grupo de animais. Logo, de acordo com o problema, em uma "certa" espécie de animal, não importa quantos indivíduos temos inicialmente no grupo, sempre restarão 300 indivíduos quando lançarmos um predador por 5 dias em meio a eles. O que é um absurdo. E se no grupo houvesse 100 indivíduos? Na função apresentada, o número em centenas de indivíduos, depende apenas do número de dias em que o predador será colocado em meio ao grupo, como seria possível restar 300 indivíduos? Fica claro que o problema foi inventado na tentativa forçada de se fazer uma contextalização.

Capítulo 9

Algumas aplicações da função logarítmica

9.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos algumas das principais aplicações da função logarítmica que são: a medida da magnitude de um terremoto na Escala Richter, o pH de substâncias e a medida do nível de intensidade sonora em decibéis. Também serão apresentadas as justificativas das fórmulas utilizadas para calcular a medida destas grandezas, que podem servir como fonte de estudo para o professor ou como instrumento de ensino em suas aulas.

9.2 Nível relativo da intensidade sonora em decibéis

O texto da Fig. 9.1 nos traz informações sobre como a exposição ao barulho pode ser nociva à nossa saúde. Na reportagem da Fig. 9.2, um motorista é preso por estar com o som do carro 4,7 decibéis acima do permitido. A todo momento é falado sobre o nível de intensidade do som dado em decibéis. Mas que unidade de medida é esta?

No texto da Fig. 9.1 é falado que durante o dia, 55 decibéis é o nível máximo permitido e, à noite, 50. Na Fig. 9.2 o motorista foi preso porque o som do carro estava aproximadamente 5 decibéis acima do permitido no local. Será que 5 decibéis a menos ou a mais faz tanta diferença assim para nossos ouvidos?

Excesso de barulho pode deixar paulistano estressado e surdo

"Especialistas explicam que o limite máximo de decibéis permitido é de 55 durante o dia e 50 à noite"

Na capital, em pontos como as Avs. Paulista, República do Líbano e Radial Leste, a poluição sonora atinge índices de até 110 decibéis, que causa danos aos ouvidos

O grave problema da poluição sonora nas metrópoles piora a cada dia, principalmente por falta de fiscalização das autoridades. O trânsito é o grande vilão. Além do excesso de veículos nas ruas, sirenes de ambulâncias, ônibus, carros e motos com escapamento furado ou enferrujado, alterações no silencioso ou no cano de descarga, problemas no motor e os maus hábitos ao dirigir - acelerações e freadas bruscas e o uso de buzina em excesso -, agravam o barulho; sem falar nos carros com alto-falante que vendem de tudo pelas ruas da cidade.
Além de incômodo, o barulho afeta a saúde física e psicológica das pessoas, gerando estresse, ansiedade e aumento da pressão sanguínea. Quando o ruído é intenso e prolongado, pode causar alterações irreversíveis, como a perda da audição. E o que se constata é que, por conta do aumento da poluição sonora, a perda auditiva está começando a surgir mais cedo entre moradores de grandes cidades.

Especialistas explicam que o limite máximo de decibéis permitido é de 55 durante o dia e 50 à noite. No entanto, medições já realizadas por um fabricante de protetores auriculares mostraram índices bem mais altos. Todos os que circulam pelo centro da capital, seja de carro ou a pé, sofrem com a poluição sonora. Na esquina da avenida Paulista com rua da Consolação, por exemplo, o aparelho utilizado para medição registrou até 96 decibéis (dB); na Rua 25 de março - com o tradicional comércio de rua -, esquina com a Ladeira Porto Geral, a intensidade alcançou 105 decibéis.

Na Av. República do Líbano com a Rua Manoel da Nóbrega, no Ibirapuera, foram registrados até 100 decibéis; e na Radial Leste, na zona leste, a intensidade alcançou 110 decibéis.

> **"Uma exposição por quatro horas diárias nesse nível é suficiente para afetar a audição. Na maioria dos casos, a pessoa só descobre que sofre do problema quando a perda de audição é grave. Por isso a prevenção é importante", alerta a fonoaudióloga Isabela Gomes.**

Qualquer som acima de 85 decibéis pode causar surdez. A perda auditiva depende tanto da potência do som como do período de exposição ao ruído. Para se saber se o barulho está atingindo 85 decibéis é só verificar se é preciso elevar a voz para outra pessoa conseguir ouvir. O barulho frequente pode ocasionar problemas graves de audição em longo prazo - entre 10 e 15 anos.
"Pessoas que trabalham na rua - como policiais, guardas de trânsito, entre outros - podem ter perda auditiva induzida por ruído. Até mesmo funcionários de lojas situadas em vias muito barulhentas precisam tomar cuidado. Infelizmente, esse tipo de perda auditiva é irreversível e, na maioria dos casos, a única solução é o uso do aparelho auditivo", lembra a fonoaudióloga.

Algumas medidas poderiam facilitar a redução do nível de ruído - entre elas melhorar a qualidade dos motores dos carros. Uma fiscalização séria sobre os ônibus, motos, carros e caminhões que trafegam pelas ruas e avenidas da capital também ajudaria. Mas enquanto nada ou pouca coisa é feita nesse sentido, uma das soluções mais baratas e inteligentes é usar protetores de ouvido.

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), os ruídos são a terceira principal causa de poluição mundial. A entidade registrou, no ano passado, aumento de 15% de surdez entre a população do planeta.

Figura 9.1: Reportagem retirada do site UOL [26].

Veículo com som alto é apreendido em praia de Salto Grande, SP

O nível estava em 84.7 decibéis, a 7m de distância, 4.7 acima do permitido.
Além de infração, o som alto também é considerado crime ambiental.

Do G1 Bauru e Marília

Comente agora Tweetar 103 Recomendar 32

Decibelímetro, aparelho que mede os decibéis do som marca 84.7 (Foto: divulgação/SSP)

Policiais militares em **Salto Grande**, no interior de São Paulo, faziam ronda pela orla da prainha da cidade quando flagraram um carro, com placas de **Marília**, que trafegava com a tampa traseira aberta e o som ligado em volume alto.

Ao fazer a aferição do som, a uma distância de 7 metros do carro, a polícia constatou que o nível estava em 84.7 decibéis, sendo que o máximo permitido por lei é de 80. O motorista foi autuado, deve perder 4 pontos na Carteira de Habilitação e pagar multa que pode chegar aos R$5 mil.

O som alto também é considerado crime ambiental. Neste caso, a pena pode ser de 6 meses a 5 anos de reclusão. O condutor e o veículo foram apreendidos e encaminhados à Delegacia de Policia Civil de Salto Grande, para elaboração de boletim de ocorrência e o veículo foi recolhido ao pátio da cidade de Ourinhos.

A Polícia Militar alerta a população de Salto Grande e região que costuma fazer uso do som para que respeite os limites permitidos por lei.

Figura 9.2: Fonte: g1.globo.com [38].

Vamos começar compreendendo o que é intensidade sonora e como ela é medida.

> Intensidade sonora é a quantidade de energia sonora que atravessa a unidade de área de uma superfície disposta perpendicularmente à direção de propagação, na unidade de tempo. Em outras palavras, é a potência sonora recebida por unidade de área da superfície. No SI (Sistema Internacional de Unidades), a unidade de medida de intensidade sonora é $\frac{J}{m^2 s}$ (Joule por metro quadrado) ou $\frac{W}{m^2}$ (Watts por metro quadrado) (Boas [2], p.251).

Isto significa que quanto mais próximo estivermos de um objeto que emite algum som, maior será a energia recebida por unidade de área, logo, quanto mais nos afastarmos do objeto, a potência do som emitida por ele se "espalha" em uma superfície ainda maior, fazendo com que a energia recebida seja menor. É isso que ocorre na prática.

Segundo Boas ([2], p.268), a intensidade mínima que um som precisa ter para ser ouvido é de $10^{-12}W/m^2$ e denomina-se *limiar de sensação auditiva* ou *limiar de audibilidade*. Se o som estiver abaixo dessa medida ele não pode ser ouvido.

Quando a intensidade sonora é aumentada a partir desse limiar, passamos a percebê-lo com mais força até chegarmos a sensação de desconforto e até de dor. A esse valor dá-se o nome de *limiar de sensação dolorosa* ou *limiar de dor*. (Boas [2], p.268)

Em audição normal, o aparelho auditivo humano percebe sons cujas intensidades podem variar na ampla faixa de $10^{-12}W/m^2$ a $1W/m^2$. (Boas [2], p. 268)

Veja os dados das Figuras 9.1 e 9.2.

Tomemos agora $I = 10^{-3}W/m^2$ e $I_0 = 10^{-12}W/m^2$, respectivamente a intensidade sonora de uma rua barulhenta e a menor intensidade sonora audível (Boas [2], p. 269). Ao fazermos

$$\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10^9 = 1\ 000\ 000\ 000.$$

temos que a intensidade sonora de uma rua barulhenta é 10^9, ou seja, 1 bilhão de vezes maior que a menor intensidade sonora audível. Observemos que lidar com resultados como este seria um pouco trabalhoso, já que estamos lidando com números muito grandes. Por conta desta dificuldade, definiu-se que o nível relativo de intensidade sonora (N) seria dado pelo expoente de base 10, ou seja, pelo logaritmo de base 10 da razão entre a intensidade de um som em W/m^2 e um valor de referência, ou seja,

$$N = log\tfrac{I}{I_0}, \text{ em bels (Boas [2], p. 268).}$$

onde

- I é a intensidade de um som em W/m^2;
- I_0 é um valor de referência (normalmente é adotado 10^{-12});
- N é o nível relativo da intensidade I em relação a I_0, em bel (B).

Voltando ao nosso exemplo sobre a intensidade sonora de uma rua barulhenta em relação a menor intensidade sonora audível, temos que

$$N = log\frac{I}{I_0} = log\frac{10^{-3}}{10^{-12}} = log10^9 = 9B.$$

Observe que é mais fácil falar que em uma rua barulhenta, o nível de intensidade do som é de 9 B do que, em uma rua barulhenta, o som em W/m^2 é 1 bilhão de vezes maior que o menor som que pode ser captado por nossos ouvidos.

> Entretanto, pelo fato da unidade bel ser muito grande, prefere-se utilizar, na prática, uma unidade que corresponde a um décimo do bel, ou seja, o **decibel** (dB) (Boas [2], p.268).

Desse modo, a expressão que indica o nível relativo de intensidade sonora N, em decibel, fica

$$N = 10log\frac{I}{I_0}$$

Desta forma, o nível de intensidade sonora de uma rua barulhenta é de 90 decibéis (dB).

Observemos a Fig. 9.3 que apresenta uma tabela com valores aproximados de alguns níveis de intensidade sonora em decibéis.

Valores aproximados de alguns níveis de intensidade sonora	
Respiração normal	10 dB
Respiração ofegante	30 dB
Ambiente em boas condições para dormir	35 dB
Conversação em ambiente silencioso (como em uma biblioteca)	45 dB
Duas pessoas conversando a 1 m de distância	60 dB
Conversação em festa barulhenta	90 dB
Rua barulhenta	90 dB
Concerto de *rock*	120 dB
Trovão próximo	120 dB
Jato decolando a 30 m de distância*	140 dB
Grandes explosões (nas proximidades)*	200 dB

* Perigo para o aparelho auditivo.

Figura 9.3: Tabela retirada de Boas [2].

Sabendo agora o que é o decibel e como ele é medido, vamos responder à pergunta referente à Fig. 9.2: será que 5 decibéis faz tanta diferença assim na intensidade sonora que é captada por nossos ouvidos? Quantas vezes a intensidade sonora de um ambiente que registra 55 dB é maior que a intensidade sonora de um outro ambiente que registra 50 dB?

Para responder a esta pergunta, tomemos I_1 como sendo a intensidade do som correspondente a 55 dB e I_2 a intensidade do som correspondente a 50 dB. Deste modo temos,

$$55 = 10 \cdot log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow 5,5 = log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \Rightarrow 10^{5,5} = \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow I_1 = 10^{55} \cdot I_0,$$

$$50 = 10 \cdot log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow 5 = log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) \Rightarrow 10^{5} = \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow I_2 = 10^{5} \cdot I_0.$$

Logo,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{5,5} \cdot I_0}{10^5 \cdot I_0} = 10^{0,5} \simeq 3,2$$

ou seja, um aumento de apenas 5 decibéis no nível relativo de intensidade sonora indica que esta intensidade foi aumentada aproximadamente 3 vezes. Logo, 5 decibéis faz muita diferença.

A função $N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ indica que cada acréscimo de 10 unidades no nível relativo de intensidade sonora, representa que esta intensidade é 10 vezes maior que a anterior, ou seja, enquanto I aumenta multiplicativamente, N aumenta aditivamente. Ou seja, estamos transformando produtos em somas e segundo Lima [14], isto é o que caracteriza uma função logarítmica.

9.3 Escala Ritcher

> No dia 12 de janeiro de 2010, um terremoto de magnitude 7,0 na escala Richter atingiu o Haiti, provocando uma série de feridos, desabrigados e mortes. Diversos edifícios desabaram, inclusive o palácio presidencial da capital Porto Príncipe.
>
> Conforme o Serviço Geológio dos Estados Unidos, o terremoto ocorreu a cerca de 10 quilômetros de profundidade, a 22 quilômetros de Porto Príncipe. Esse primeiro terremoto antecedeu outros dois de magnitudes 5,9 e 5,5. Esse fato promoveu grande destruição na região da capital haitiana. Estima-se que metade das construções foram destruídas, 250 mil pessoas foram feridas, 1,5 milhão de habitantes ficaram desabrigados e o número de mortos ultrapassou 200 mil.
>
> Entre feridos e mortos, estão alguns brasileiros, inclusive a médica pediatra e sanitarista Zilda Arns Neumann, coodenadora internacional da Pastoral da Criança. (www.brasilescola.com [31])

Boulevard Jean-Jacques Dessaline, no centro de Porto Príncipe, capital do Haiti. A via foi uma das mais atingidas pelo terremoto de janeiro de 2010 e, na ocasião, muitos de seus prédios ficaram em ruínas. (Foto: Tahiane Stochero/G1)

Figura 9.4: Fonte: g1.globo.com [39].

Os terremotos são tremores de terra que ocorrem devido à movimentação das placas tectônicas. Estas placas encontram-se em constante movimento, pois flutuam sobre o magma que é o nome dado à rocha fundida embaixo da superfície terrestre (ver Fig. 9.6).

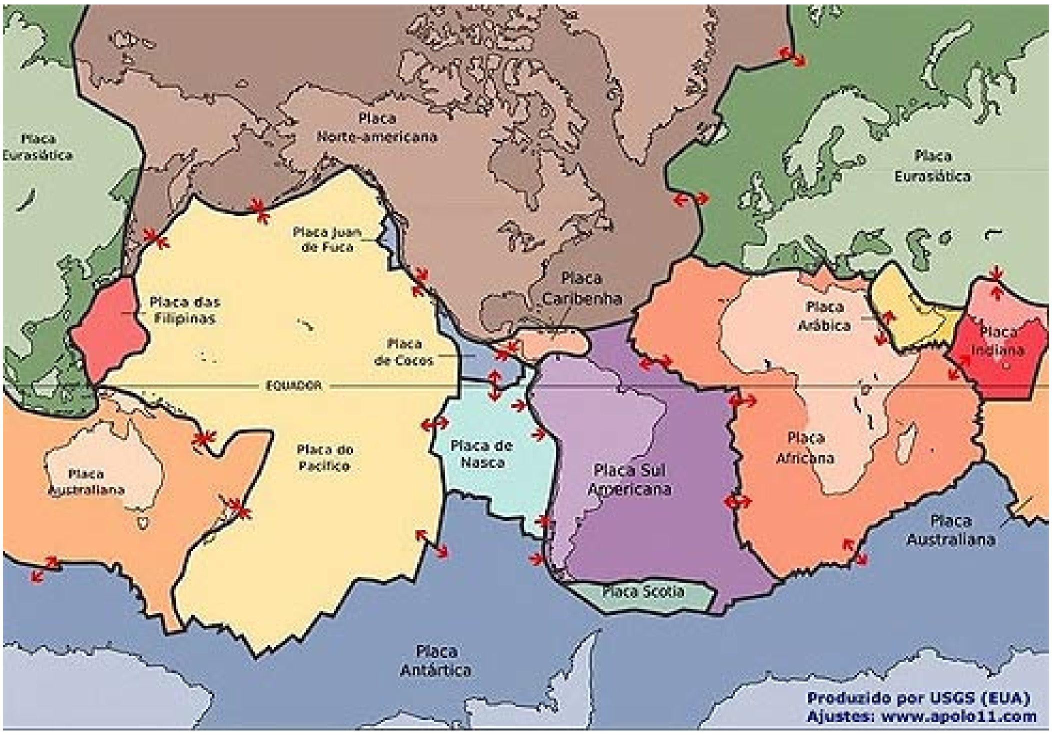


Figura 9.5: Mapa mostra a posição das placas tectônicas e os principais sentidos de deslocamento. Fonte: www.apollo11.com [28].

> Os tremores ocorrem normalmente ao longo da junção entre essas placas, que colidem, afundam ou deslizam entre si, liberando grande quantidade de energia. A velocidade com que as placas deslizam ou colidem varia entre poucos milímetros até 10 ou mais centímetros por ano.(www.apollo11.com [28])

Mas como os terremotos são medidos?

Segundo o site apollo11 [28], até 1979, a intensidade dos terremotos era medida através da conhecida escala Richter, mas em 1979 ela foi substituída pela escala de magnitude momentânea, de sigla Mw. Na prática, entretanto, os resultados são muito aproximados. Devido a esta aproximação de resultados, vamos observar como é calculada a magnitude de um terremoto utilizando a escala Richter.

> O sismógrafo é um instrumento que possui um sensor que detecta e amplifica os movimentos do solo e faz um registro gráfico do movimento (sismograma).
> A magnitude de um sismo indica a quantidade de energia liberada por ele. É baseada em medições precisas da amplitude das ondas sísmicas nos sismogramas para distâncias conhecidas entre o epicentro e a estação sísmica (w3.ualg.pt [32]).

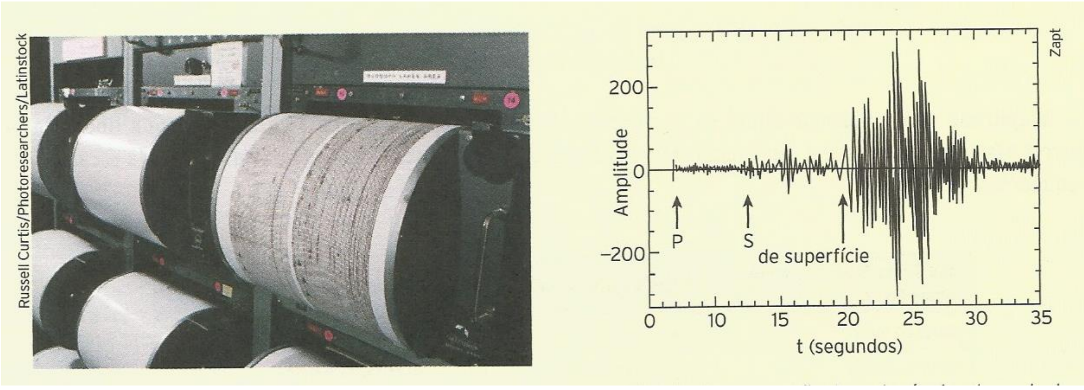


Figura 9.6: Imagem de um sismógrafo e de um sismograma. Fonte: Diniz [9].

Os valores que expressam a magnitude de um terremoto são muito altos. Por conta disso, Richter utilizou uma escala logarítmica de base 10 para representar esses valores. Como o logaritmo de base 10 é o expoente da potência de base 10, um terremoto de magnitude 10 000 000 = 10^7, na escala Richter é um terremoto de magnitude 7, o que simplifica bastante a informação. Portanto, um terremoto de grau 7 na escala Richter é 10 vezes maior que um de grau 6 e 100 vezes maior que um de grau 5.

> Quanto maior a magnitude de um terremoto, maior sua energia e capacidade de destruição, mas os efeitos dependem de vários fatores, entre eles a distância, profundidade, condições do terreno e tipo de edificações (www.apollo11.com [28]).

De modo geral os sismos são classificados da seguinte forma (Fig. 9.7):

DESIGNAÇÃO	MAGNITUDE	EFEITOS POSSÍVEIS	QUANTIDADE POR DIA
Micro	< 2,0	Micro tremor de terra, não se sente.	~ 8000 por dia
Muito pequeno	2,0-2,9	Geralmente não se sente, mas é detectado/registrado.	+/-1000 por dia
Pequeno	3,0-3,9	Frequentemente sentido, mas raramente causa danos.	+/-49000 por ano
Ligeiro	4,0-4,9	Tremor notório de objetos no interior de habitações, ruídos de choque entre objetos. Danos importantes pouco comuns.	+/- 6200 por ano
Moderado	5,0-5,9	Pode causar danos maiores em edifícios mal concebidos em zonas restritas. Provoca danos ligeiros nos edifícios bem construídos.	+/- 800 por ano
Forte	6,0-6,9	Pode ser destruidor em zonas num raio de até 180 quilômetros em áreas habitadas.	+/- 120 por ano
Grande	7,0-7,9	Pode provocar danos graves em zonas mais vastas.	+/- 18 por ano
Importante	8,0-8,9	Pode causar danos sérios em zonas num raio de centenas de quilômetros.	+/- 1 por ano
Excepcional	9,0-9,9	Devasta zonas num raio de milhares de quilômetros.	+/- 1 a cada 20 anos
Extremo	> 10,0	Nunca registrado	x

Figura 9.7: Escala Richter. Fonte: www.apollo11.com [28].

Embora um terremoto de 8,9 graus na escala Richter tenha uma intensidade aproximadamente 79 vezes maior que um de 7 graus, o terremoto ocorrido no Haiti em janeiro de 2010, de 7,0 graus na escala Richter, foi mais destruidor do que o de 8,9 graus ocorrido no Japão em março de 2011, pois as edificações do Haiti não estavam preparadas para terremotos tão fortes, já no Japão, como os tremores de terra ocorrem com maior frequência, as edificações são contruídas de modo a resistir mais a fortes abalos.

Segundo Henrique [11], a fórmula utilizada por Richter para calcular a magnitude de um terremoto foi:

$$M = logA(mm) + 3 \cdot log(8 \cdot \delta t(s)) - 2,92,$$

onde,

- M = magnitude do terremoto.
- A(mm)= é a amplitude (em mílimetros) do terremoto medida em um sismógrafo.
- $\delta t(s)$ = é o intevalo de tempo (em segundos) entre as ondas S(superficial) e P(pressão máxima), também medidas no sismógrafo.

Vamos observar os dados trazidos na Fig. 9.8 que representa um sismograma.

Na imagem, as escalas formam um nomograma[1] que permite estimar rápida e facilmente a magnitude de um sismo (w3.ualg.pt [32]).

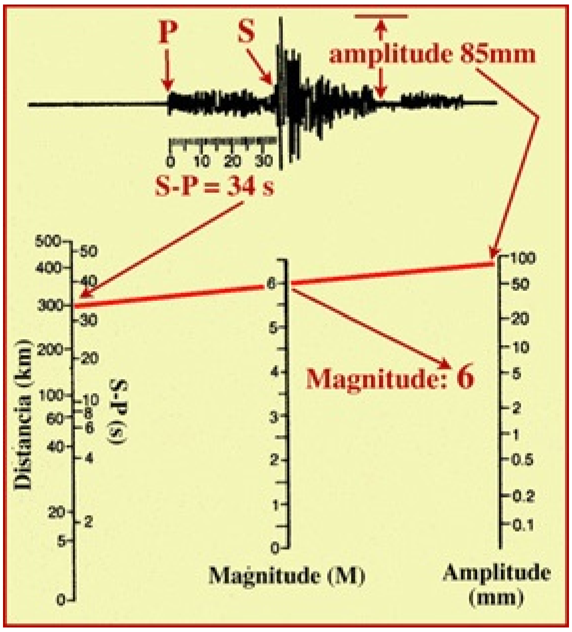


Figura 9.8: Sismograma. Fonte: w3.ualg.pt [32].

Utilizando os dados do sismograma vamos calcular a magnitude do terremoto utilizando a fórmula usada por Richter.

Neste caso, temos que:

- $A(mm) = 85$
- $\delta t(s) = 34$

Logo,

$$M = log85 + 3 \cdot log(8 \cdot 34) - 2,92) = 1,93 + 3 \cdot 2,43 - 2,92 = 6,3$$

A margem de erro na medição de um terremoto, segundo Henrique [11], é de 0,3 graus para mais ou para menos. Observamos que o valor 6,0 encontrado no nomograma Fig. 9.8 está dentro da margem de erro do valor 6,3 encontrado pela fórmula utilizada por Richter.

De acordo com Henrique [11], outra fórmula utilizada para calcular a magnitude de um terremoto é

$$M = logA - logA_0 \tag{9.1}$$

onde,

[1]Nomograma é um gráfico, com curvas apropriadas, mediante o qual se podem obter as soluções de uma equação determinada pelo simples traçado de uma reta (Ferreira [10])

- A = amplitude máxima medida no sismógrafo.
- A_0 = para amplitude de 0,001 mm no sismograma a distância de 100 km do epicentro [49] .

A fórmula:

$$LogE = 11,8 + 1,5M \tag{9.2}$$

relaciona a magnitude e a energia liberada, onde:

- E = energia liberada em ergs (1 erg = 10^{-7}J).
- M = magnitude do terremoto.

Uma fórmula utilizada nos livros didáticos é

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right) \tag{9.3}$$

onde,

- E = energia liberada pelo terremoto.
- $E_0 = 2,5 \cdot 10^8$ erg um valor padrão que equivale a $7 \cdot 10^-3$ kWh (blog Física na Veia, [50]).

A fórmula 9.3 é obtida estabelecendo uma relação entre as fórmulas 9.1 e 9.2 do seguinte modo:

$$\begin{cases} logE = 11,8 + 1,5(logA - logA_0) \\ logE_0 = 11,8 + 1,5(logA_0 - logA_0) \end{cases}$$

Portanto,

$$logE - logE_0 = 1,5(logA - logA_0) \Rightarrow log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3}{2}log\left(\frac{A}{A_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log\left(\frac{A}{A_0}\right) = \frac{2}{3}log\left(\frac{E}{E_0}\right).$$

9.4 pH de substâncias

Por que os shampoos de bebês não irritam os olhinhos?

O PH da lágrima é 7.2 e a única maneira de fazer um produto que não irrite os olhos é usar o mesmo PH. Logo, esses shampoos que possuem a mágica fórmula "chega de lágrimas", tem um PH igual ao da lágrima. Tudo o que for maior ou menor, irritará os olhos.

Figura 9.9: Texto e foto tirados de personalbuyers.blogspot.com.br [35].

O pH (potencial Hidrogeniônico) é um índice que expressa a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa. O seu valor é dado pela fórmula

$$pH = -log[H^+]$$

Mas qual o significado desta fórmula? Qual a relação do logaritmo com o pH de uma substância?

Antes de respondermos a estas perguntas vamos nos aprofundar em alguns conceitos relacionados à química.

As informações contidas nas subseções **Constante de equilíbrio**, **Conceito de ácido e base**, **Equilíbrio iônico da água** e **Produto iônico da água**, foram retiradas de Salvador [19] e [20].

Constante de equilíbrio

Muitas reações ocorrem mediante o consumo total dos reagentes envolvidos ou de pelo menos um deles. Podemos citar, como exemplos, a reação que se dá quando adicionamos um antiácido na água ou quando queimamos um palito de fósforo.

No entanto, há reações e processos reversíveis em que "reagentes" e "produtos" são consumidos e formados simultaneamente.

A representação $\leftrightarrows$ indica reações que ocorrem simultaneamente nos dois sentidos.

Um exemplo de processo reversível é o que ocorre com a água líquida contida num frasco fechado. Nesse sistema temos moléculas de água passando continuamente do estado líquido para o de vapor e do de vapor para o líquido:

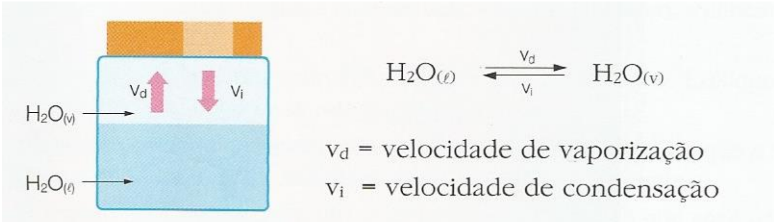


Figura 9.10: Moléculas de água passando continuamente do estado líquido para o de vapor e do de vapor para o líquido.

Quando dizemos que a velocidade de vaporização v_d (velocidade da direta) se iguala à velocidade de condensação v_i (velocidade da inversa), dizemos que o sistema atingiu o equilíbrio.

Uma consequência importante do fato de as duas velocidades serem iguais na situação de equilíbrio é que as quantidades dos participantes permanecem constantes, porém não obrigatoriamente iguais.

A Fig. 9.12 ilustra um processo químico em que ocorre um equilíbrio:

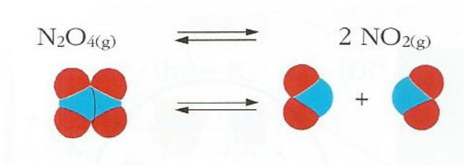


Figura 9.11: Exemplo de um processo em que ocorre um equilíbrio.

Algumas características de uma reação em que ocorre equilíbrio são:

- as reações direta e inversa continuam ocorrendo simultaneamente;
- nos equilíbrios, a velocidade da reação direta é sempre igual à velocidade da inversa;
- a não-ocorrência de mudança no sistema significa que as concentrações no equilíbrio permanecem constantes;
- esse tipo de equilíbrio somente é obtido em **sistema fechado**, a uma dada temperatura.

A expressão da constante de equilíbrio foi formulada pela primeira vez pelos noruegueses Guldberg e Waage, em 1863, e enunciada como a **Lei da ação das massas**.

Para um equilíbrio em que todos os participantes formam um sistema homogêneo, isto é, um equilíbrio homogêneo, genericamente representado por (Fig. **??**:

$$a\,A + b\,B \underset{v_i}{\overset{v_d}{\rightleftharpoons}} c\,C + d\,D$$

Figura 9.12: Representação de um equilíbrio homogêneo.

A velocidade das reações pode ser expressa por:

$$v_d = K_1 \cdot [A]^a \cdot [B]^b$$
$$v_i = K_2 \cdot [C]^c \cdot [D]^d$$

onde,

- v_d = Velocidade da direta
- v_i = Velocidade da inversa

No equilíbrio, as velocidades são iguais, logo:

$$v_d = v_i \Rightarrow K_1 \cdot [A]^a \cdot [B]^b = K_2 \cdot [C]^c \cdot [D]^d \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}.$$

Como K_1 e K_2 são constantes, a relação K_1/K_2 também é constante. A essa nova constante foi dado o nome de **constante de equilíbrio**, que é representada por K_c.

No equilíbrio, temos a expressão do K_c em termos de concentração:

$$aA + bB \rightleftarrows cC + dD,$$

$$K_c = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}.$$

Vejamos alguns exemplos da expressão do K_c para equilíbrios homogêneos:

- $2\ SO_{3(g)} \leftrightarrows 2\ SO_{2(g)} + O_{2(g)}$, ou seja, $K_c = \frac{[SO_2]^2 \cdot [O_2]}{[SO_3]^2}$
- $H_{2(g)} + I_{2(g)} \leftrightarrows 2\ HI_{(g)}$, ou seja, $K_c = \frac{[HI]^2 \cdot [H_2]}{[I_2]^2}$
- $FE^{2+}_{(aq)} + Cu^{2+}_{(aq)} \leftrightarrows FE^{3+}_{(aq)} + Cu^{+}_{(aq)}$, ou seja, $K_c = \frac{[Fe^{3+}] \cdot [Cu^{+}]}{[Fe^{2+}] \cdot [Cu^{2+}]}$

Conceito de ácido e base

Trabalhando na Universidade de Uppsala (Suécia), o físico-químico sueco Svante August Arrhenius (1859-1927) realizou numerosas experiências relacionadas à passagem de corrente elétrica em soluções aquosas. Com base nessas experiências, formulou a hipótese de que tais soluções deveriam conter partículas carregadas: os **íons**. A partir disso, ele estabeleceu a **teoria da dissociação iônica**.

De acordo com Arrhenius, determinadas substâncias, quando dissolvidas em água, são capazes de originar íons positivos, os **cátions**, e íons negativos, os **ânions**.

Ácido é toda substância que, em solução aquosa, origina como único cátion o H^+ (H_3O^+) (íons hidrogênio) .

Exemplos:

$$
\begin{array}{llll}
HC\ell \xrightleftharpoons{\text{água}} H^+ + C\ell^- & & HC\ell + H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + C\ell^- \\
H_2SO_4 \xrightleftharpoons{\text{água}} 2\,H^+ + SO_4^{2-} & \text{ou} & H_2SO_4 + 2\,H_2O \rightleftharpoons 2\,H_3O^+ + SO_4^{2-} \\
H_3PO_4 \xrightleftharpoons{\text{água}} 3\,H^+ + PO_4^{3-} & & H_3PO_4 + 3\,H_2O \rightleftharpoons 3\,H_3O^+ + PO_4^{3-}
\end{array}
$$

Figura 9.13: A característica do ácido é a presença do cátion H^+.

Base é toda substância que, em solução aquosa, origina o OH^- (íons hidroxila) como único tipo de ânion.

Exemplos:

$$
\begin{array}{l}
NaOH \xrightarrow{\text{água}} Na^+ + OH^- \\
Ca(OH)_2 \xrightarrow{\text{água}} Ca^{2+} + 2\,OH^- \\
A\ell(OH)_3 \xrightarrow{\text{água}} A\ell^{3+} + 3\,OH^-
\end{array}
$$

Figura 9.14: As bases são formadas por um cátion e pelo ânio OH^-.

Equilíbrio iônico da água

Medidas experimentais de condutibilidade elétrica e outras evidências mostram que a água, quando pura ou quando usada como solvente, se ioniza numa extensão muito pequena, originando o equilíbrio:

$$H_2O_{(\ell)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows H_3O^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)}$$

ou simplificadamente:

$$H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)}$$

Na água pura, a concentração de íons H^+ é sempre igual a concentração de íons OH^-, pois cada molécula de água ionizada origina um íon H^+ e um íon OH^-

Em diferentes temperaturas a condutibilidade da água varia, ou seja, um aumento da temperatura provoca aumento na ionização. Embora a quantidade de íons H^+ e OH^- presentes no equilíbrio sofram variação em função da temperatura, as suas concentrações serão sempre iguais entre si:

$$\text{água pura} \Rightarrow [H^+] = [OH^-]$$

A 25^{o}C, as concentrações em mol/L[2] de H^+ e OH^- na água pura são iguais entre si e apresentam um valor igual a $10^{-7} mol/L$.

[2]mol/L: unidade de quantidade de substância por litro SI [12].

Produto iônico da água (K_w)

Considerando o equilíbrio da água pura:

$$H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows H^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)},$$

podemos escrever a expressão de sua constante de equilíbrio:

$$K_c = \frac{[H^+]\cdot[HO^-]}{H_2O},$$

onde, H_2O=constante.

$$K_c[H_2O] = [H^+][OH^-] \Rightarrow K_w = [H^+][OH^-],$$

onde K_w corresponde à constante de ionização da água e cujo valor pode ser calculado a 25^{o}C, pois já conhecemos os valores de $[H^+]$ e $[OH^-]$ a essa temperatura:

$$K_w = [H^+][OH^-] = 10^{-7}\cdot 10^{-7} = 10^{-14}\ mol/L.$$

Note que aqui, diferentemente dos outros dois casos (nível de intensidade do som e escala Richter), os valores são muito pequenos.

E se a água não for pura?

Quando uma substância é dissolvida na água, pode ocorrer ou não alteração nas concentrações de íons $[H^+]$ e $[OH^-]$.

Quando a concentração de $[H^+]$ sofre um aumento, a solução formada é **ácida**, ou seja,

$$[H^+] > 10^{-7}mol/L \Rightarrow [OH^-] < 10^{-7}mol/L \Rightarrow [H^+] > [OH^-].$$

Se a concentração de $[H^+]$ diminui, a solução formada é **básica**, ou seja,

$$[H^+] < 10^{-7}\ mol/L \Rightarrow [OH^-] > 10^{-7}\ mol/L \Rightarrow [H^+] < [OH^-].$$

Deste modo, para indicar a acidez, a neutralidade ou a basicidade de uma solução aquosa, basta verificar a concentração de $[H^+]$ ou $[OH^-]$ presente na solução.

Observe que os números que indicam a concentração de $[H^+]$ em uma solução variam de 10^{-14} a 10^0, ou seja, são números do tipo $10^{-7} = 0,0000001\ mol/L$. Para tornar mais prática a maneira de indicar a acidez ou a basicidade de um meio, o bioquímico dinamarquês Peter Lauritz Sorensen(1868-1939), propôs em 1909 que o potencial hidrogeniônico (pH) de uma solução fosse dado por:

$$pH = -log[H^+].$$

Note que a potência de base 10 que representa a quantidade de $[H^+]$ em mol/L possui expoente (logaritmo) variando de -14 a 0. Se a fórmula para indicar o pH fosse $pH = log[H^+]$, seu valor seria o 0 ou um número negativo. Para facilitar a comparação entre os valores que indicam o pH, preferiu-se utilizar $pH = -log[H^+]$ o que possibilita trabalhar com uma escala variando de 0 a 14, facilitando mais ainda os cálculos.

Portanto, uma solução básica que possui a concentração de $[H^+] = 10^{-8}$ mol/L, possui $pH = -log10^{-8} = 8$.

Com o uso desta fórmula, é possível expressar a basicidade, neutralidade e acidez de uma solução do seguinte modo:

- $pH < 7 \rightarrow$ solução ácida;
- $pH = 7 \rightarrow$ solução neutra;
- $pH > 7 \rightarrow$ solução básica.

Observe que é mais prático dizer que uma solução tem pH=5 do que dizer que a concentração de $[H^+]$ de uma solução é 10^{-5} mol/L.

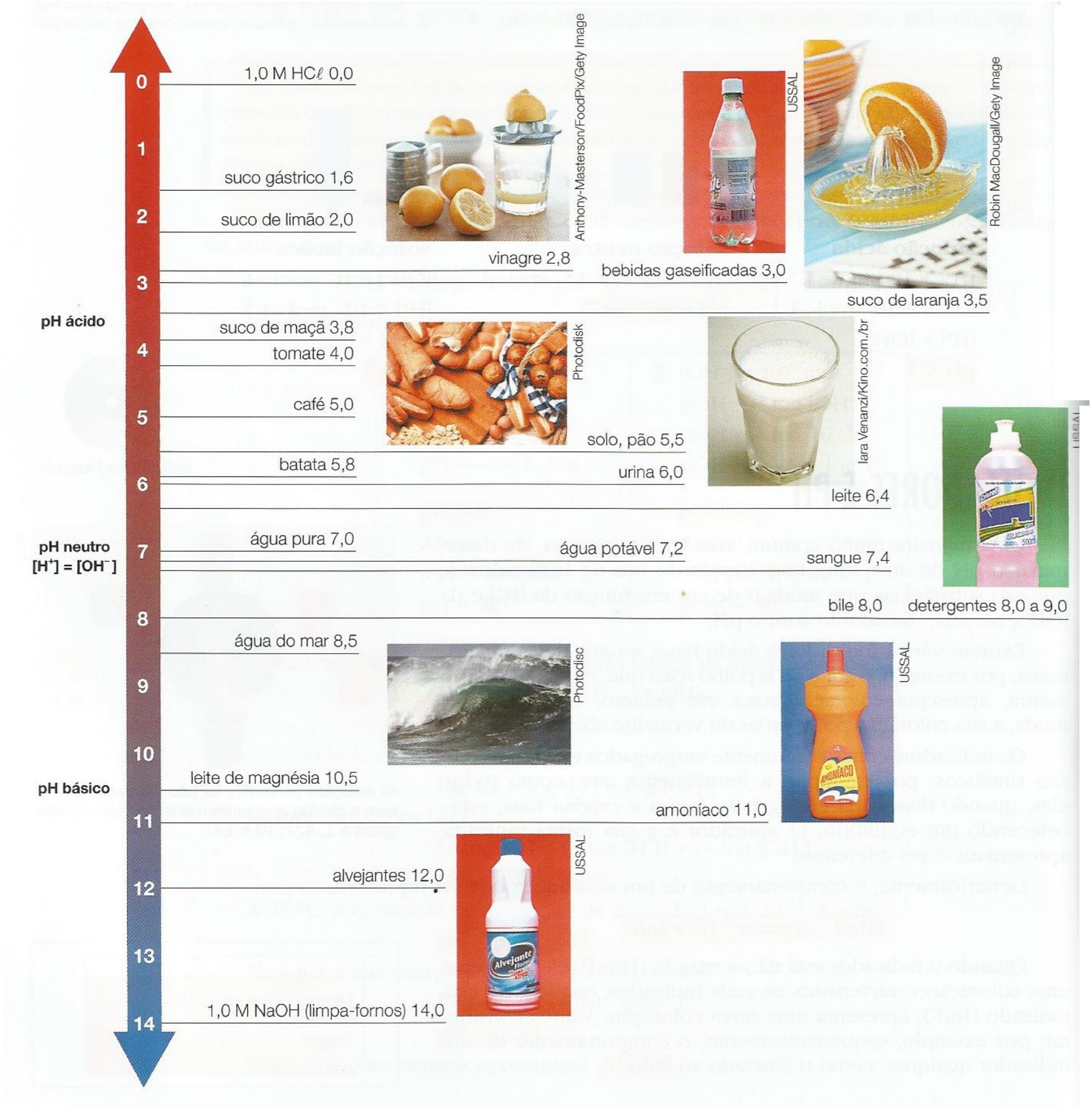


Figura 9.15: Escala de pH.

Capítulo 10

Sugestões de contextualizações para serem aplicadas em sala de aula

10.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas sugestões de questões contextualizadas elaboradas por nós, que podem ser utilizadas pelo professor em suas aulas.

10.2 Questão 1

> Dentre os isótopos já conhecidos do iodo, o I-131 (iodo-radioativo) é utilizado na medicina de diagnóstico para tratamento de tumores na tireóide, pois este isótopo libera radiação com características semelhantes às dos raios-x e radiação beta, sendo esta última capaz de destruir as células carcinogênicas em questão (iodoterapia) (Infoescola [24]).
>
> A Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) determina a obrigatoriedade da internação para pacientes submetidos a terapia com material radioativo, com doses acima de 1110 Mbq (30 mCi). Deste modo, um paciente que se submete a um tratamento de câncer na tireoide e recebe, por exemplo, uma dose de 100 mCi de I-131, tem que ser internado. Praticamente todo o excesso de I-131 será eliminado do organismo pela urina em 48 horas. Uma pequena parte é eliminada pela saliva, suor e fezes. O período de internação pode variar de acordo com cada paciente, sendo entre 48 a 72 horas. A alta depende da avaliação clínica realizada pelo médico e das medidas da radiação realizadas pelo físico. O paciente submetido a terapia permanecerá em um quarto especial com banheiro próprio, paredes com proteção de chumbo e biombos de chumbo. O piso do banheiro e do quarto, as maçanetas, torneiras e telefone serão protegidos com plástico, para evitar contaminações (www.santapaula.com.br [30]).

Quando a atividade do I-131 for igual ou infeiror a 30 mCi, o paciente poderá ser liberado (Bolognesi [3]).

Figura 10.1: Estrutura de um quarto terapêutico. Fonte: Bolognesi [3].

De acordo com as informações contidas no texto responda:

a) O I-131 possui meia-vida de 8 dias. Após quanto tempo um paciente que é submetido a uma dose terapêutica de 100 mCi estaria liberado, caso essa substância não fosse eliminada pela urina, feses, suor e saliva?

b) De acordo com Conselho Nacional de Energia Nuclear [5], os rejeitos sólidos gerados após a internação de um paciente em um quarto terapêutico devem ficar armazenados em uma instalação monitorada, até que esses rejeitos possam ser eliminados no sistema de coleta de lixo urbano. Para que isto aconteça, a atividade radioativa do rejeito não pode ser superior a 0,002 mCi/Kg.

Sabendo que um rejeito sólido de 1Kg retirado do quarto de um paciente que recebeu tratamento com I-131 levou 120 dias para ser descartado no sistema de coleta de lixo urbano, calcule o valor máximo da atividade radioativa em mCi desse rejeito no momento em que ele foi recolhido do quarto terapêutico.

Resposta:

a) Como a meia vida do I-131 é de 8 dias, a cada 8 dias a dose de 100mCi se reduz pela metade, ou seja, a quantidade de I-131 presente no organismo é multiplicada por $\frac{1}{2}$ a cada 8 dias. Deste modo, a função que modela o problema é a função exponencial

$$f(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}},$$

onde t indica o tempo transcorrido em dias.

Como o paciente só é liberado se é detectada uma dose igual ou inferior a 30mCi, a inequação que nos fornece a quantidade de dias que o paciente deve permanecer internado é

$$30 \geqslant 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{100} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log\left(\frac{3}{10}\right) \geqslant log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log3 - log10 \geqslant \frac{t}{8} \cdot (log1 - log2).$$

Utililizando os valores aproximados: $log3 = 0,477121$ e $log2 = 0,30103$ temos,

$$0,477121 - 1 \geqslant \frac{t}{8} \cdot (-0,30103) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,52288 \geqslant -\frac{t}{8} \cdot 0,30103 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4,18303 \leqslant 0,30103t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \geqslant 13,8957.$$

Logo, o paciente passaria aproximadamente 14 dias internado.

Após responderem a este item o professor pode pedir para que os alunos comparem o tempo que o paciente passa realmente internado, que é de 48 a 72 horas, ou seja, de 2 a 3 dias, com o valor encontrado no item *a* que é de aproximadamente 14 dias e observem que, se o ser humano não eliminasse boa parte da radiação através da urina, feses, suor e saliva, o paciente passaria muito mais tempo internado.

b) Queremos descobrir qual o valor máximo da atividade radioativa do rejeito no momento em que foi recolhido do quarto terapêutico, visto que ele foi descartado 120 dias depois de ter sido coletado e sabendo que ele só pode ser descartado no sistema de coleta do lixo urbano quando sua atividade for igual ou inferior a 0,002 mCi. Deste modo, a inequação que modela o problema é

$$0,002 \geqslant C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{8}},$$

onde C_0 indica o valor máximo da atividade radioativa do rejeito no momento da coleta. Segue que

$$0,002 \geqslant C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,002 \geqslant C_0 \cdot \frac{1}{32\,768} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 \leqslant 65,54.$$

Portanto, o valor máximo da atividade radioativa do rejeito no momento da coleta era de 65,54 mCi.

10.3 Questão 2

Segundo o site Apollo11 [28], um dos terremotos mais destrutivos da história foi o que ocorreu na costa oeste de Sumatra em 26/12/2004, gerando ondas gigantes que devastaram mais de 12 países e deixaram um número de aproximadamente 227 mil mortos. Foi estimado inicialmente que o terremoto teria atingido 9 graus na escala Richter, porém os cientistas responsáveis pelo estudo elevaram a magnitude do abalo para entre 9,1 e 9,3 graus. Foi tão intenso que gerou uma força equivalente a 100 gigatons, ou seja, aproximadamente 5 000 000 de bombas atômicas como a de Hiroshima. Essa é a maior energia já calculada liberada por um abalo sísmico.

Figura 10.2: Imagem do tsunami que atingiu a costa oeste de Sumatra na Indonésia em 26/12/2004 Fonte [29].

De acordo com os dados apresentados no texto, o aumento para 9,3 graus na magnitude do terremoto indica que a energia liberada foi aumentada quantas vezes em relação a de 9 graus registrada inicialmente?

Utilize a fórmula que apresentamos no Capítulo 9 que nos fornece a magnitude de um terremoto na escala Richter:

$$M = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

onde

M = magnitude do terremoto

E = Energia liberada

E_0 = Um valor de referência

Resposta:

Tomemos como

- E_1 o terremoto de magnitude 9,3;
- E_2 o terremoto de magnitude 9.

Deste modo,

$$9,3 = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E_1}{E_0}\right), \tag{10.1}$$

$$9 = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E_2}{E_0}\right). \tag{10.2}$$

Segue de 10.1 que

$$\frac{9,3 \cdot 3}{2} = log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \Rightarrow 13,95 = log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \Rightarrow 10^{13,95} = \frac{E_1}{E_0} \Rightarrow E_1 = E_0 \cdot 10^{13,95},$$

Da equação 10.2 temos

$$\frac{9 \cdot 3}{2} = log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \Rightarrow 13,5 = log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \Rightarrow 10^{13,5} = \frac{E_2}{E_0} \Rightarrow E_2 = E_0 \cdot 10^{13,5}.$$

Para sabermos quantas vezes E_1 é maior que E_2 basta fazermos

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{13,95}}{E_0 \cdot 10^{13,5}} = 10^{0,45} \simeq 2,8.$$

Ou seja, o aumento de 0,3 na magnitude indica que a energia liberada aumentou em 2,8 vezes aproximadamente.

10.4 Questão 3

O pH (potencial hidrogeniônico) indica a acidez, basicidade ou neutralidade de uma solução. A fórmula que nos fornece o pH é

$$pH = -log[H^+],$$

onde $[H^+]$ representa a concentração de íons de hidrogênio presentes na solução em mol/L.

> Uma das propriedades mais importantes de um cosmético é o pH, que deve ser o mais próximo possível do pH natural da região onde será aplicado. Enquanto cremes e loções para aplicação na pele devem ter pH próximo de 4,5, outros cosméticos como maquiagens para os olhos (rímeis, sombras e lápis coloridos) devem ter pH em torno de 7,5, que é o pH da lágrima. Sabonetes e desodorantes íntimos devem ter pH ainda menor do que 4,5, para terem ação bactericida (web.ccead.puc-rio.br [41]).

Foi feito um teste em determinada marca de hidratante para o corpo e foi constatado que a concentração de $[H^+] = 10^{-6}$. Este produto tem o pH dentro do recomendado?

Resposta:

Para descobrirmos o pH do hidratante testado, basta substituirmos o valor $[H^+] = 10^{-6}$ na fórmula $pH = -log[H^+]$, ou seja,

$$pH = -log[10^-6] = -(-6) = 6$$

Portanto, o pH do hidratante é 6 e ele encontra-se fora do recomendo para a pele que deve ser próximo de 4,5.

10.5 Questão 4

João ficou sabendo de uma promoção onde o preço da TV que tanto desejava passou de R$ 1 200,00 para R$ 1 000,00, caso o pagamento fosse realizado à vista ou em 1 vez no cartão de crédito. Sem pensar muito, correu para a loja e decidiu comprar a TV e pagar em 1 vez no cartão de crédito. Quando a fatura chegou, percebeu que a compra de R$ 1 000,00 não poderia ser paga com o salário do mês e decidiu não pagar a fatura. Se a operadora do cartão de crédito cobra multa de 2% e juros de 12% ao mês, e sabendo que o sistema de juros utilizado é o de juros compostos, responda:

a) Qual a função que fornece o valor da dívida de João passados t meses, com $t > 0$?

b) Qual será o valor da dívida se ele só puder pagar seis meses após o vencimento da primeira fatura?

c) Qual a sua opinião a respeito da forma como a compra foi realizada? Quais os cuidados que se deve ter ao se fazer uma compra utilizando o cartão de crédito?

Resposta:

a) A fórmula que modela o problema é $f(t) = 1000 \cdot (1,12)^t$.
b) Neste caso o valor da dívida será $f(6) = 1\ 000 \cdot (1,12)^6 \simeq 1\ 973,72$
c) Resposta pessoal.

10.6 Questão 5

> Em certos casos, a idade de um dado material pode ser determinada com base na taxa de decaimento de um isótopo radioativo. O melhor exemplo da aplicação desse tipo de fenômeno é a datação de materiais através da medida do decaimento do carbono-14. A técnica do radiocarbono é hoje largamente utilizada em arqueologia e antropologia para a determinação da idade aproximada dos mais diversos artefatos. Os seres vivos recebem o carbono-14 por meio do alimento e da água mantendo um nível constante dele no corpo. Enquanto existir vida, a quantidade de carbono-14 no organismo da planta ou do animal será igual à presente na atmosfera, cerca de 14 dpm/g, ou seja, cada 1g de carbono-14 apresenta 14 dpm (desintegrações por minuto). A partir do momento que não existe mais vida, o carbono-14 deixa de ser incorporado ao organismo e inicia o processo de decaimento radioativo. No caso do carbono-14, após 5 730 anos, sua atividade cairá de 14 dpm/g para 7 dpm/g e, após 11 460 anos, cairá para apenas 3,5 dpm/g e assim por diante, já que sua meia-vida é de 5 730 anos.
> Os "Pergaminhos do Mar Morto" são uma coleção de manuscritos que contêm fragmentos de todos os livros da Bíblia Hebraica (Velho Testamento) com exceção única do livro de Ester, e foram descobertos por um pastor em 1947. Uma vez provada a autenticidade dos pergaminhos, a questão de sua datação tornou-se fundamental, pois deveriam remontar ao tempo da vida e pregação de Cristo. A atividade do carbono-14 encontrada nos manuscritos era de 11 dpm/g (qnesc.sbq.org.br [42]).

Com base nas informações dadas, qual a idade aproximada dos pergaminhos? O valor encontrado confirma que eles remontam ao período da vida e pregação de Cristo?

Resposta:

Temos que a meia-vida do carbono-14 é de 5 730 anos e que sua atividade em um organismo vivo é de 14 dpm/g. A atividade do carbono-14 medida nos pergaminhos foi de 11 dpm/g, logo, para determinarmos sua idade t em anos, devemos resolver a seguinte equação:

$$11 = 14 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11}{14} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log\left(\frac{11}{14}\right) = log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log 11 - log 14 = \frac{t}{5\,730} \cdot (log 1 - log 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,041393 - 1,146128 \simeq \frac{t}{5\,730} \cdot (-0,30103) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0,104735 \simeq \frac{t}{5\,730} \cdot (-0,30103) \Rightarrow$$

$$t \simeq \frac{600,1336}{0,30103} \simeq 1993,6.$$

Logo, a idade dos Pergaminhos do Mar Morto é de aproximadamente 2000 anos o que confirma que eles remontam ao período da vida e pregação de Cristo.

Capítulo 11

Conclusões

Em nosso trabalho analisamos em 10 livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, como as contextualizações que motivam o estudo das funções exponenciais e logarítmicas vêm sendo trabalhadas, classificando as motivações analisadas como sendo boas aplicações ou motivações inadequadas.

Analisamos também as questões contextualizadas nos exercícios propostos aos alunos classificando-as como contextualizações boas ou inadequadas.

Escolhemos trabalhar com estes conteúdos porque ao fazerem conexão com outros tópicos matemáticos e com outras áreas do currículo do Ensino Médio como por exemplo, juros compostos, meia-vida de substâncias, crescimento populacional, tempo de resfriamento de um corpo, possuem relevância na formação do aluno.

Em relação às funções exponenciais, todos os livros analisados iniciaram o estudo desta função trazendo uma contextualização, porém em apenas cinco deles as situações representaram boas contextualizações. Já no tópico referente às equações exponenciais, sete dos dez livros não trouxeram situações contextualizadas para motivar o seu estudo e, no tópico das inequações exponenciais, apenas dois dos dez livros analisados trouxeram um problema contextualizado para motivar seu estudo e ambos foram considerados inadequados.

A maioria dos problemas contextualizados envolvendo funções, equações e inequações exponenciais tratam de crescimento exponencial, decaimento radioativo e juros compostos. Encontramos ainda muitas questões com contextualizações inadequadas, onde são apresentadas informações incoerentes, fictícias ou erradas. Muitas apresentam fórmulas que não são justificadas de onde foram retiradas ou o porquê do seu uso.

Nas funções logarítmicas, todos os problemas contextualizados que representam aplicações, na verdade, são modelados pela função exponencial e em seguida são utilizadas as propriedades dos logaritmos para solucioná-los, ou seja, a função logarítmica aparece apenas como coadjuvante. Não encontramos nenhuma situação em que a função logarítmica é quem modela o problema.

Nos tópicos que tratam das inequações exponenciais e das equações logarítmicas, em apenas dois livros foram utilizados problemas para motivar o estudo destes temas, porém ambos foram considerados inadequados, pois os problemas já estavam modelados.

Encontramos em apenas um dos livros um problema contextualizado que motiva o estudo das inequações logarítimicas. Nos demais livros são apresentados apenas os conceitos e técnicas de resolução.

As questões apresentadas no capítulo sobre as funções logarítmicas, que não apresentam fórmulas prontas e necessitam ser modeladas pelos alunos, na verdade tratam da função exponencial, e a função logarítmica é utilizada apenas como sua inversa. Em nossa análise também as consideramos como sendo boas contextualizações, já que hoje uma das principais utilizações da função logarítmica é a de ser aplicada como a inversa da exponencial.

As questões que envolvem função logarítmica e que já vêm modeladas com fórmulas, em sua maioria, tratam da magnitude de um terremoto na Escala Richter, do pH de substâncias, ou da medida do som em decibéis. A maioria destes problemas representam boas contextualizações, embora sejam problemas de manipulação.

De modo geral, observamos que os autores dos livros analisados, em sua maioria, têm tentado utilizar a contextualização para motivar o estudo das funções exponenciais e logarítmicas, assim como trazer em seus exercícios problemas contextualizados, porém ainda ocorrem alguns equívocos no momento de elaborar e selecionar estas questões.

O professor deve ter o olhar crítico e atento no momento de escolher a maneira como irá abordar os conteúdos e quais exercícios contextualizados irá utilizar em sala de aula. Para que isto ocorra, é necessário que o professor pesquise, busque o conhecimento de outras áreas do currículo, pois as questões contextualizadas têm esta conexão com outras áreas do saber. Buscando auxiliar o professor nesta tarefa, é que desenvolvemos este trabalho.

Para nós, as análises realizadas permitiram o desenvolvimento de uma criticidade no momento de selecionar as questões e motivações que trabalharemos em sala de aula no que diz respeito às funções exponenciais e logarítmicas, que pode ser expandida para outros temas matemáticos, já que os critérios utilizados para realizarmos as análises das contextualizações destas funções podem ser utilizados para qualquer outro tópico da matemática.

As boas contextualizações apresentadas podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula como instrumento de ensino e as contextualizações inadequadas podem auxiliar o professor em sua formação, já que para classificarmos uma contextualização como inadequada temos que estar embasados no conhecimento matemático e de outras áreas do saber, necessários para que nossa argumentação seja convincente.

Elaboramos algumas questões que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula e apresentamos as justificativas das fórmulas que são utilizadas no cálculo da magnitude de um terremoto na Escala Richter, da intensidade sonora em decibéis e do pH de substâncias, que também podem ser utilizadas pelo professor, já que também é importante, no que for possível e adequado para o ensino médio, apresentar a justificativa das fórmulas que estão sendo utilizadas.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, R. C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, (2013).

[2] BOAS, N. V., DOCA, R. H., BISCUOLA, G. J.; *Física Ensino Médio - Volume 2*. 1ª edição, São Paulo, Saraiva (2012)

[3] BOLOGNESI, L, COLENCI, R., CREDDO, J. D.; *A importância do quarto terapêutico no tratamento de pacientes com câncer de tireóide*, Botucatu, SP. Artigo, (2013).

[4] BRITO, D.; *Análise de Viabilidade de Populações: Uma ferramenta para a conservação da biodiversidade no Brasil*, Ilhéus, BA. Artigo (2009).

[5] CNEN; Conselho Nacional de Energia Nuclear *Instalações radiativas - Gerência de rejeitos radioativos em instalações radiativas*, Resolução CNEN - 19/85. Publicação: D.O.U. de 17/12/85.

[6] CNEN; Conselho Nacional de Energia Nuclear *Apostila educativa: Radioatividade* Rio de Janeiro, RJ.

[7] CARVALHO, P. C. P., LIMA, E. L., MORGADO, A. C., WAGNER, E.; *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*. Coleção do Professor de Matemática, 3ª edição, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (1998).

[8] CALLIARI, L. R.; *A Contextualização na Matemática: uma alternativa para o ensino*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, (2001).

[9] DINIZ, M. I. de S.V.D., SMOLE, K. S.; *Matemática: ensino médio: Volume 1*. 6ª edição, Saraiva, São Paulo - SP, (2010).

[10] FERREIRA, A. B. de H.; *Dicionário Aurélio de Língua Portuguesa*. Editora Nova Fronteira S/A, Rio de Janeiro - RJ, (1988).

[11] HENRIQUE, C. A. P.; *Logaritmos e Terremotos: Aplicação da escala logarítmica nos abalos sísmicos*, Centro Universitário Metropolitano de São Paulo, SP. Artigo (2006).

[12] INMETRO; Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia *Sistema Internacional de Unidades - SI*. 1ª edição Brasileira da 8ª edição do BIPM, Rio de Janeiro, (2012).

[13] LIMA, E. L.; *Matemática e Ensino*. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 3ª edição, Rio de Janeiro, (2007).

[14] LIMA, E. L.; *Logaritmos*. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 4ª edição, Rio de Janeiro, (2010).

[15] Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III - Ciências da Natureza, Matemáica e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

[16] REICHARDT, K. *A água em sistemas agrícolas*. São Paulo: Manole, (1990).

[17] RÊGO, R. G., VASCONCELOS, M. B. F, *A contextualização como recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática*. VI EPBEM, Monteiro, PB: Artigo (2010).

[18] ROSEMBERG, J.; *Nicotina: Droga Universal*. São Paulo, SES/CVE, (2003).

[19] SALVADOR, E., USBERCO, J.; *Química, volume 1: químic geral*. Saraiva, 14ª edição, São Paulo, (2009).

[20] SALVADOR, E., USBERCO, J.; *Química, 2: físico-química*. Saraiva, 10ª edição, São Paulo, (2005).

[21] VASCONCELOS, M. B. F.; *A contextualização e o ensino de Matemática: Um estudo de caso*, João Pessoa, PB: Dissertação, (2008).

Páginas consultadas

[22] *http://planetasustentavel.abril.com.br/planetinha/bichos/golfinhos-cheios-truques-645338.shtml*. Página consultada em 19/01/2014.

[23] *http://www1.folha.uol.com.br/fsp/ciencia/fe2504200001.htm*. Página consultada em 02/02/2014.

[24] *http://www.infoescola.com/elementos-quimicos/iodo-radioativo/*. Página consultada em 02/02/2014.

[25] *http://biologia.ifsc.usp.br/bio4/aula/aula06.pdf*. Página consultada em 18/02/2014.

[26] *http://www2.uol.com.br/vyaestelar/audicao_surdez.htm#tab*. Página consultada em 27/02/2014.

[27] *http://www.mecatronicaatual.com.br/educacao/1258-trabalhando-com-polias-ou-roldanas*. Página consultada em 18/02/2014.

[28] *http://www.apollo11.com*. Página consultada em 11/03/2014.

[29] *http://www.dayandnightnews.com/2012/04/indonesia-issues-tsunami-warning-after-8-9-quake/*. Página consultada em 18/03/2014.

[30] *http://www.santapaula.com.br/servicos/terapia_radioisotopos.aspx*. Página consultada em 26/03/2014.

[31] *http://www.brasilescola.com/geografia/o-terremoto-no-haiti.htm*. Página consultada em 18/03/2014.

[32] *http://w3.ualg.pt/~jdias/GEOLAMB/GA5_Sismos/52_Sismologia/5207_Magnitude.html*. Página consultada em 08/04/2014.

[33] *http://www.vitoriaregia.pt/Meaning.aspx*. Página consultada em 08/04/2014.

[34] *http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v21_116.pdf* Página consultada em 15/04/2014.

[35] *http://personalbuyers.blogspot.com.br/2012/02/shampoo-infantil-tem-ph-bom.html*. Página consultada em 17/04/2014.

[36] *http://www.anvisa.gov.br/divulga/public/livro_eletronico/infeccao.html*. Página consultada em 02/01/2014.

[37] *http://www.sbvacuo.org.br/noticias/o-que-e-vacuo.pdf*. Página consultada em 03/01/2014.

[38] *http://g1.globo.com/sp/bauru-marilia/noticia/2012/03/veiculo-com-som-alto-e-apreendido-em-praia-de-salto-grande-sp.html*. Página consultada em 17/04/2014.

[39] *http://g1.globo.com/mundo/noticia/2013/01/veja-fotos-do-haiti-logo-apos-o-tremor-de-2010-e-tres-anos-apos-o-desastre.html*. Página consultada em 17/04/2014.

[40] *http://www.infoescola.com/quimica/elemento-radio/*. Página consultada em 20/05/2014.

[41] *http://web.ccead.puc-rio.br/condigital/mvsl/Sala%20de%20Leitura/conteudos/SL_cosmeticos.pdf*. Página consultada em 17/04/2014.

[42] *http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc16/v16_A03.pdf*. Página consultada em 18/04/2014.

[43] *http://www.iag.usp.br/siae98/terremoto/terremotos.htm*. Página consultada em 25/05/2014.

[44] *http://magiadamatematica.com/unifeso/7-richter.pdf*. Página consultada em 25/05/2014.

[45] *http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2000/tendencias_demograficas/comentarios* Página consultada em 17/05/2014.

[46] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Cobalto*. Página consultada em 20/05/2014.

[47] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Cobalto*. Página consultada em 20/05/2014.

[48] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Plut%C3%B3nio*. Página consultada em 25/05/2014.

[49] *http://pt.slideshare.net/semanadeinverno/sismologia-cincia-dos-terremotos-onde-como-e-por-qu-1*. Página consultada em 25/05/2014.

[50] *http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2010-01-10_2010-01-16.html*. Página consutada em 25/05/2014.