



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
REGIONAL CATALÃO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL  
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**



**ABRAHÃO DE ALMEIDA SILVA**

**O ENSINO DE FUNÇÕES LINEARES: uma abordagem  
Construtivista/Construcionista por meio do Kit LEGO®  
Mindstorms.**

**Catalão – GO**

**2014**

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	ABRAHÃO DE ALMEIDA SILVA				
E-mail:	abrahaogospel@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim		<input type="checkbox"/> Não		
Vínculo empregatício do autor	COLÉGIO ESTADUAL ADELINO ANTÔNIO GOMIDE				
Agência de fomento:	COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PES-	Sigla:	CAPES		
	SOAL DE NÍVEL SUPERIOR				
País:	BRASIL	UF:	DF	CNPJ:	00.889.834/0001-08
Título:	O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES: uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do kit LEGO® Mindstorms.				
Palavras-chave:	Construtivismo, Construcionismo, Ensino, Função Linear, NXT, Robótica Educacional.				
Título em outra língua:	THE TEACHING OF LINEAR SYSTEMS: a Constructivist / Constructionist approach through Mindstorms LEGO® kit.				
Palavras-chave em outra língua:	Constructivism, Constructionism, Learning, Linear Function, NXT, Educational Robotics.				
Área de concentração:	MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO				
Data defesa:	08/08/2014				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT				
Orientador:	Fernando Kennedy da Silva				
E-mail:	kennedy.fernando@gmail.com				
Co-orientador:	Marcelo Henrique Stoppa				
E-mail:	mhstoppa@gmail.com				

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Abraão de Almeida Silva  
Assinatura do (á) autor (a)

Data: 11 / 08 / 2014

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**ABRAHÃO DE ALMEIDA SILVA**

**O ENSINO DE FUNÇÕES LINEARES: uma abordagem  
Construtivista/Construcionista por meio do Kit LEGO® Mindstorms.**

Trabalho de Final de Curso do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão – como requisito para obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva.

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Henrique Stoppa.

**Catalão – GO**

**2014**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)  
GPT/BSCAC/UFG**

S586e Silva, Abrahão de Almeida.  
O ENSINO DE FUNÇÕES LINEARES: uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do kit LEGO® Mindstorms [manuscrito] / Abrahão de Almeida Silva. - 2014.  
xv, 61 f.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva; Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo Henrique Stoppa.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.

Bibliografia.

Anexo.

1. Construtivismo. 2. Função Linear. 3. Robótica Educacional.I. Título.

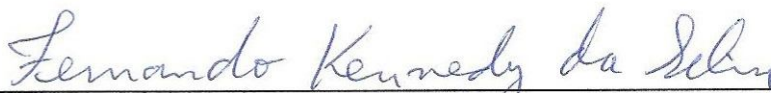
CDU: 007.52



# Abrahão de Almeida Silva

## O ENSINO DE FUNÇÕES LINEARES: uma abordagem Construtivista/Construcionista por meio do Kit Lego Mindstorms

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 08 de Agosto de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



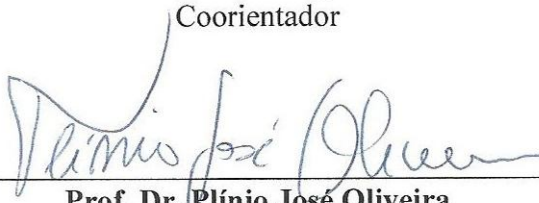
---

**Prof. Dr. Fernando Kennedy da Silva**  
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC  
Presidente da Banca



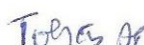
---

**Prof. Dr. Marcelo Henrique Stoppa**  
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC  
Coorientador



---

**Prof. Dr. Plínio José Oliveira**  
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC



---

**Prof. Dr. Tobias Anderson Guimarães**  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFTM

*À todos que por algum motivo cederam parte do seu tempo na leitura desse trabalho,*

*Aos meus pais João e Teresa.*

## Agradecimentos

Aos professores e colegas das disciplinas que cursei ao longo do mestrado que contribuíram para transformar minha visão acerca do Ensino de Matemática.

Ao meu orientador Dr. Fernando Kennedy da Silva, por ter acreditado em mim, em nosso trabalho, por suas importantes contribuições e principalmente por ter me compreendido quando me senti bloqueado, travado, sem inspiração.

Ao coorientador Marcelo Henrique Stoppa pelas dicas, pelos momentos de discussão, pelos esclarecimentos e paciência.

Aos professores Plínio José e Thiago Porto por suas contribuições e auxílios extras na compreensão das disciplinas estudadas no Mestrado.

Aos amigos Alceney Garcia, Rogério Mastrela e André Coelho pelos longos momentos de estudos em tardes exaustivas e esclarecedoras.

A direção e aos colegas de profissão do Colégio Estadual Adelino Antônio Gomide pelo apoio.

Aos professores que participaram da minha formação ao longo da minha vida escolar e acadêmica, em especial à todos os professores do programa de mestrado.

Aos meus irmãos pelo estímulo e incentivo e principalmente ao meu irmão Leonardo de Almeida que leu parte do meu texto e contribuiu inferindo gentilmente melhorias para o aprimoramento do trabalho.

Aos meus pais pelo apoio, carinho, confiança, incentivo...

Ao Departamento de Matemática da UFG por ter aderido ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Aos idealizadores do PROFMAT, por nos propiciar essa oportunidade de qualificação.



*Qual é o valor de um segundo?*

*Qual é o valor de um minuto?*

*Pergunta a uma família no momento de luto.*

*Qual é o valor de uma hora?*

*Qual é o valor de uma tarde?*

*Pergunta a quem tá preso do outro lado das grades.*

*Todo mundo tem igual vinte e quatro horas por dia*

*Riqueza é usar o tempo com sabedoria.*

*Gabriel Pensador*

## RESUMO

Este trabalho tem como propósito apresentar uma nova abordagem ao conceito de função linear com a utilização do Kit Mindstorms NXT LEGO® ou Kit NXT, dentro da concepção pedagógica do Construtivismo/Construcionismo e da Robótica Educacional. Discorre-se sobre cada teoria com vistas para a mudança na prática do professor, além de um levantamento histórico da robótica e da robótica educacional. Posteriormente são apresentados os tópicos matemáticos que justificam a abordagem como a teoria de funções, monotonicidade, proporcionalidade, função afim e lineares. Uma proposta de trabalho é apresentada sob a forma de sequência didática objetivando instigar no professor, mudanças no modo de regência, o trabalho com robótica educacional, a utilização do Kit NXT e a criatividade. Além disso, dentro dessa proposta, explora-se a matemática existente no processo de funcionamento das engrenagens de um relógio analógico, com a finalidade de ensinar função linear por meio do seu funcionamento. O principal intuito do trabalho é o de apresentar ao professor uma nova metodologia para o ensino de função linear que venha ser no mínimo diferente, porém espera-se que possa motivar alunos e professores.

**Palavras-chave:** Construtivismo, Construcionismo, Ensino, Função Linear, NXT, Robótica Educacional.

## ABSTRACT

This work aims to present a new approach to the concept of linear function using the LEGO® NXT Mindstorms Kit or Kit NXT within the pedagogical concept of Constructivism / Constructionism and Educational Robotics. It talks about each theory with a view to a change in teacher practice, and a historical survey of educational robotics and robotics. Later mathematical topics that justify the approach to the theory of functions, monotonicity, proportionality, and related linear functions are presented. A proposed work is presented in the form of Teaching Sequence aiming to instigate the teacher changes in how regency, working with educational robotics, using the NXT kit and creativity. Furthermore, within this proposal, it explores the existing mathematics in working gears of an analog watch with the purpose of teaching linear function by means of its operation process. The main aim of the work is to present to the teacher a new methodology for teaching linear function that will be at least different, however it is expected that students and teachers can motivate.

**Keywords:** Constructivism, Constructionism, Learning, Linear Function, NXT, Educational Robotics.



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>2 O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2.1 A perspectiva construtivista.....</b>	<b>13</b>
<b>2.2 Uma Abordagem construcionista.....</b>	<b>15</b>
<b>3 A ROBÓTICA NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.....</b>	<b>17</b>
<b>3.1 Mas o que é Robótica?.....</b>	<b>17</b>
<b>3.2 A Robótica na Educação.....</b>	<b>20</b>
<b>3.3 O Kit Mindstorms NXT LEGO®.....</b>	<b>22</b>
<b>3.4 Componentes de um Robô.....</b>	<b>23</b>
<b>4 CONCEITOS MATEMÁTICOS.....</b>	<b>28</b>
<b>4.1 Função.....</b>	<b>28</b>
<b>4.1.1 Monotonicidade.....</b>	<b>28</b>
<b>4.1.2 Proporcionalidade.....</b>	<b>29</b>
<b>4.1.3 Função Diretamente e Inversamente Proporcional.....</b>	<b>30</b>
<b>4.1.4 Teorema Fundamental da Proporcionalidade.....</b>	<b>31</b>
<b>4.1.5 Função Afim.....</b>	<b>32</b>
<b>4.1.6 Funções Compostas.....</b>	<b>33</b>
<b>4.1.7 Função Inversa.....</b>	<b>42</b>
<b>5 APLICAÇÕES.....</b>	<b>45</b>

<b>5.1 Sequência Didática de Matemática: Ensinando Funções Lineares por meio do Kit de Robótica da Mindstorms NXT LEGO® .....</b>	<b>48</b>
<b>5.2 Estudo das interações entre as engrenagens do Relógio Analógico Classic-Clock.....</b>	<b>56</b>
<b>5.2.1 Estudo das interações para obtenção dos segundos.....</b>	<b>58</b>
<b>5.2.2 Estudo das interações para obtenção dos minutos.....</b>	<b>58</b>
<b>5.2.3 Estudo das interações para obtenção das horas.....</b>	<b>62</b>
<b>5.2.4 Programação do Relógio Analógico Classic-Clock.....</b>	<b>64</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>67</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>79</b>
<b>ANEXO A – Instruções para montagem do Relógio Analógico Classic-Clock.....</b>	<b>73</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Procurando complementar a formação no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional de Matemática – PROFMAT – este trabalho de final de curso objetiva buscar uma nova abordagem pedagógica para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, vinculado à robótica educacional.

Sabemos que este processo encontra-se defasado e mediante aos problemas educacionais vivenciados em nossa sociedade nos últimos anos, muitas têm sido as discussões e reflexões principalmente aquelas que referem a motivação, redução da taxa de evasão escolar, reprovação e aprendizagem significativa, por diversos autores e pesquisadores no assunto. As principais causas levantadas, referem-se à utilização de metodologias ultrapassadas, que restringem ao aluno a uma participação passiva em sala de aula, submetendo-o a decorar e repetir aquilo que lhe é imposto, conforme aponta Cabral (2010). Sendo a matemática uma disciplina reflexiva, analítica e experimental, poucos são os que se arrisgam e possuem o devido preparo para ensiná-la de forma que venha instigar no alunado o caráter investigativo e reflexivo.

Deste modo, trabalhando com a robótica educacional, buscamos nesse trabalho apresentar uma proposta diferenciada para abordarmos função afim, mais especificamente função linear.

Vale ressaltar que sendo o PROFMAT um programa de pós-graduação *stricto sensu* com vistas para o aprimoramento da formação profissional de professores de matemática da educação básica, este trabalho se deteve nesse cenário, com foco exclusivo para melhoria da aprendizagem do discente do Ensino Médio.

Subsidiemos o trabalho no Construtivismo/Construcionismo e na Robótica. No primeiro, pelo fato de comungarmos da ideia de que a aprendizagem da matemática se dá de modo significativo quando parte do concreto para o abstrato. Já no segundo, pelo fato de ser dentre as novas abordagens em matemática a que permite maiores inovações e estímulos à criatividade.

Quanto às indagações norteadoras do trabalho, queríamos um método, uma forma de abordar função, diferente do modo expositivo tradicional, baseado apenas em conteúdo e listas de exercícios. Uma aplicação com robótica onde pudéssemos ver o emprego da função afim. Seria interessante, mas queríamos se possível, uma forma de materializar a função. Um modo de fazer com que os alunos pudessem enxergá-la e compreender as

interações realizáveis com elas como a composição e a inversão. Assim surgiu a ideia de explorar um relógio analógico feito com o Kit de Robótica Educacional da Mindstorms NXT LEGO®, com total atenção para o funcionamento de suas engrenagens. E foi nessas engrenagens que buscamos compreender se as mesmas se adequavam ao estudo da função afim, bem se era possível ensinar essas funções por meio de seu funcionamento.

Assim, trazemos no primeiro capítulo uma conceituação de Construtivismo norteadora de nossa prática pedagógica. Falamos também do Construcionismo que é uma concepção pedagógica fundamentada no Construtivismo que subsidia o recurso didático que estamos adotando – Kit de Robótica Educacional da Mindstorms NXT LEGO® ou apenas Kit NXT.

Já no segundo capítulo, falamos da Robótica e da Robótica Educacional, bem como sua aplicação na aprendizagem da matemática. Fazemos um pequeno levantamento histórico de sua evolução na educação. Abordamos o Kit NXT bem como a definição de Robô.

No terceiro capítulo trazemos a conceituação matemática que modela nosso objeto de estudo, o relógio analógico Classic Clock, mas principalmente, o processo de interação entre o funcionamento de suas engrenagens.

A aplicação matemática das funções lineares é abordada no quarto capítulo, onde trazemos sob a forma de sequência didática, uma metodologia para ensiná-la por meio do uso do Kit NXT.

E por fim, em anexo, trazemos os passos da montagem do relógio Classic Clock, que faz parte da última aula da Sequência Didática sugerida no capítulo anterior.

## 2 O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

É um contrassenso o fato de ainda hoje precisarmos defender o uso de novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem como se estivéssemos tratando de coisas de ficção científica recém trazidas à realidade. Ora! Defender esta causa por si só já é um atraso. Nossos alunos vivem hoje num mundo que está além da computação. Vivem na era da interatividade, na era das redes.

Podemos dizer que atualmente, é impossível que um professor atue de forma eficaz fazendo uso apenas dos velhos métodos, das tradicionais aulas puramente expositivas, alheio às mudanças tecnológicas para fins educacionais que se multiplicam ao seu redor.

Na prática diária da docência é perceptível a pressão que o professor sofre por parte dos alunos para que o mesmo utilize os novos canais de comunicação disponíveis, redes sociais, por exemplo, para repassar listas de exercícios, avisos, confirmação de datas de provas e outras. Isso porque a utilização destes está muito presente no cotidiano dos estudantes. Esta geração de crianças e adolescentes que assentam nos bancos escolares “navegam” na internet com habilidade e exploram com familiaridade um mundo cada vez mais interativo.

Embora essa interatividade esteja cada vez mais presente no cotidiano também dos professores (caixas eletrônicos, celulares, e outros), muitos destes educadores podem ser considerados analfabetos digitais, pois, apesar de estarem cada vez mais servidos (ou cercados) por tecnologias ainda possuem alguma dificuldade em trabalhar com o computador e explorar os recursos da internet ou, quando já estão familiarizados com estes recursos, compreendendo diversas de suas funções e possibilidades de utilização, não estão ainda seguros para empregá-los em sua prática docente.

Assim, de acordo com Araújo e Sant’Ana (2011), frequentemente encontramos alunos com muito mais conhecimento e prática no uso das TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação) que grande parte dos professores. Além da falta de conhecimento e de habilidades para utilização dos novos instrumentos tecnológicos, encontramos muita resistência por parte de certos pais e professores, que demonizam o computador.

Sabemos, entretanto, que os meios, por si sós, não são capazes de trazer contribuições para o processo educativo. Como afirma Rezende (2002), os meios tecnológicos seriam ineficientes se usados como centro da prática pedagógica e principalmente, tomando o espaço da reflexão humana.

A simples introdução de novas tecnologias na educação não implica necessariamente novas práticas pedagógicas, pois podemos com ela apenas vestir o velho com roupa nova, como seria o caso dos livros eletrônicos, tutoriais multimídia e cursos a distância disponíveis na Internet, que não incorporam nada de novo no que se refere à concepção do processo de ensino-aprendizagem. (Pretto, 1996).

Contudo, temos a clareza de que a “tecnologia educacional” não irá resolver os problemas da educação brasileira, que são de natureza social, política, ideológica, econômica e cultural. Todavia, esta constatação não mina a necessidade da introdução de inovações tecnológicas no contexto educacional.

O que acreditamos, no entanto, é no uso das novas tecnologias da informação e da comunicação fundamentado numa abordagem construtivista que privilegie o aluno como ser pensante e sujeito de sua própria aprendizagem. E nesta abordagem a elaboração de projetos e materiais didáticos pode se beneficiar das possibilidades que essas TICs nos oferecem: possibilidade de interatividade, de armazenamento e organização de informações, de promover a comunicação e interação e outras para que dentro de uma perspectiva construcionista possa melhor contribuir para o processo de aprendizagem.

## **2.1 A perspectiva construtivista**

Considerados como pais da psicologia cognitiva contemporânea, “[...] Piaget e Vygotsky propõem que o conhecimento é construído em ambientes naturais de interação social, estruturados culturalmente” (ARGENTO, 2005, f. 1). Embora estes dois autores apresentem concepções que divergem em alguns pontos, ambos concordam que cada aluno constrói seu próprio aprendizado num processo de dentro para fora baseado em experiências de fundo psicológico o que no contexto educativo desloca a preocupação com o processo de ensino (visão tradicional) para o processo de aprendizagem.



De acordo com Argento (2005), estes teóricos procuram explicar o comportamento humano em uma perspectiva em que sujeito e objeto interagem em um processo que resulta na construção e reconstrução de estruturas cognitivas. Assim, as noções de tempo, espaço e a logicidade de raciocínio são construídas pelo indivíduo através da ação em trocas dialéticas com o meio. Portanto, construtivismo é:

[...] a ideia que sustenta que o indivíduo - tanto nos aspectos cognitivos quanto sociais do comportamento como nos afetivos - não é um mero produto do ambiente nem um simples resultado de suas disposições internas, mas, sim, uma construção própria que vai se produzindo, dia a dia, como resultado da interação entre esses dois fatores. Em consequência, segundo a posição construtivista, o conhecimento não é uma cópia da realidade, mas, sim, uma construção do ser humano. (CARRETERO, 1997 apud ARGENTO, 2005).

Ainda segundo essa autora, o construtivismo de Piaget é fundamentado em sua teoria chamada de Epistemologia Genética ou Teoria Psicogenética, que explica como o indivíduo, desde o seu nascimento, constrói o conhecimento. Esta teoria é a mais conhecida concepção construtivista da formação da inteligência e é considerada maturacionista, no sentido de que ela preza o desenvolvimento das funções biológicas como base para os avanços na aprendizagem. Assim, seus postulados estruturam o desenvolvimento em estágios de maturação biológica.

Piaget vê o professor mais como um espectador do desenvolvimento e favorecedor dos processos de descobrimento autônomo de conceitos do que como um agente que pode intervir ativamente na assimilação do conhecimento.

Já na chamada perspectiva sócio-interacionista, sócio-cultural ou sócio-histórica, abordada por Vygotsky, a relação entre o desenvolvimento e a aprendizagem se deve ao fato de o ser humano viver em meio social, sendo este a alavanca para aqueles dois processos. Isso quer dizer que o desenvolvimento e a aprendizagem caminham juntos, ainda que não em paralelo. (RABELLO; PASSOS, 2002).

Ao abordarmos esta concepção sócio-interacionistas nos deparamos com as seguintes indagações: como lidar com o desenvolvimento natural da criança e estimulá-lo através da aprendizagem? Como esta pode ser efetuada de modo a contribuir para o desenvolvimento global da criança?

Ainda de acordo com Rabello e Passos (2002), em Vygotsky, ao contrário de Piaget, o desenvolvimento – principalmente o psicológico/mental (que é promovido pela

convivência social, pelo processo de socialização, além das maturações orgânicas) – depende da aprendizagem na medida em que se dá por processos de internalização de conceitos, que são promovidos pela aprendizagem social, principalmente aquela planejada no meio escolar.

Deste modo, para Vygotsky, não é suficiente ter todo o aparato biológico da espécie para realizar uma tarefa se o indivíduo não participa de ambientes e práticas específicas que propiciem esta aprendizagem.

Assim, não é concebível pensar que a criança vai se desenvolver com o tempo, pois esta não tem, por si só, instrumentos para percorrer sozinha o caminho do desenvolvimento, que dependerá das suas aprendizagens mediante as experiências a que foi exposta. Neste modelo, o sujeito – no caso, a criança – é reconhecida como ser pensante, capaz de vincular sua ação à representação de mundo que constitui sua cultura, sendo a escola um espaço e um tempo onde este processo é vivenciado, onde o processo de ensino-aprendizagem envolve diretamente a interação entre sujeitos. (RABELLO; PASSOS, 2002, f. 4).

Essa interação e sua relação com a imbricação entre os processos de ensino e aprendizagem podem ser melhor compreendidos quando nos remetemos ao conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Para Vygotsky (1991), ZDP é,

[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKY, 1991, p. 57).

É justamente nesta zona de desenvolvimento proximal que a aprendizagem vai ocorrer. Rabello e Passos (2002), afirmam que a função do professor dentro desta concepção, portanto, seria a de favorecer esta aprendizagem, servindo de mediador entre a criança e o mundo e que o processo de aprendizagem não se deve focalizar no que a criança aprendeu, mas sim o que ela está aprendendo.

## **2.2 Uma abordagem construcionista**

O construcionismo caracteriza-se por uma concepção pedagógica desenvolvida por Seymour Papert, pensada a partir do construtivismo, sobretudo o piagetiano, e distingue-se deste pelo grau de envolvimento dos alunos nas tarefas de aprendizagem (Hay; Barad, 2001 apud MELO, 2009). Este envolvimento, pressupõe que os alunos tenham a capacidade de criar conceitos, compreender e gerar novo conhecimento.

Esta perspectiva construcionista foi formulada na década de 60, quando o autor buscou – junto a sua equipe no MIT (Massachusetts Institute of Technology) – elaborar um software educacional que possibilitasse o uso do computador como uma ferramenta de construção do conhecimento por parte de seus usuários. Esse software foi idealizado no formato de uma linguagem de programação, batizada de LOGO, nome que referencia o termo grego que significa "pensamento, raciocínio e discurso", ou também, "razão, cálculo e linguagem". Antes disso, Papert trabalhou cinco anos com Piaget, em seu Centro de Epistemologia Genética, na Suíça. (GUEDES; KLEBER, 2010).

Para os autores acima citados, na visão de Papert, quando o sujeito tem a oportunidade de construir algo físico (externo), ocorrem simultaneamente construções internas. Ou seja, são desenvolvidas estruturas mentais internas que conduzem ao progresso na aprendizagem de situações com complexidade crescente.

Dentro da concepção construcionista, a tecnologia assume o papel de meio para promover o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos envolvidos nas tarefas de aprendizagem, isto é, “a tecnologia torna-se um meio de expressão intelectual e de exploração”.

Esta abordagem pedagógica se enquadra em nossa proposta de trabalho, pois objetivamos utilizar objetos (aparatos, dispositivos, estruturas, robôs) construídos com o kit NXT como ferramentas para o aprimoramento de competências e habilidades em matemática, em especial para a compreensão da função afim. Sobre esses assuntos discorreremos nos capítulos seguintes.

### 3 A ROBÓTICA NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A evolução tecnológica tem trazido para o processo educacional um grande desafio. A necessidade de não somente abordar mas também assimilar o desenvolvimento tecnológico é uma urgente realidade uma vez que os cenários econômico, social e cultural vêm sofrendo profundas alterações como reflexo destes avanços.

Como destaca Pinto (2011), nossos educandos, nascidos na chamada “era digital” chegam imersos a um mundo de inovações tecnológicas em praticamente todas as áreas da sociedade. Os meios de comunicação multimídia promovem, constantemente, a interação entre o ser humano e a técnica. E com isso, dá-se a necessidade da inovação tanto na forma de ensinar quanto de aprender.

Embora os estudantes do ensino básico estejam imersos em um ambiente em que a tecnologia é facilmente percebida: carros, celulares, eletrodomésticos, computadores e outros, estes mesmos estudantes passam boa parte de seu tempo na escola estudando conteúdos de matemática, física e outros, que estão na base das tecnologias e, no entanto, os conceitos que lhes são apresentados parecem distantes da vida cotidiana.

Para Benitti et al (2009), *“uma forma de viabilizar o conhecimento científico-tecnológico e, ao mesmo tempo estimular a criatividade e a experimentação com um forte apelo lúdico, pode ser proporcionada através da robótica educativa”* (BENITTI et al, 2009, p. 1811). Assim, o estudante não apenas entra em contato com novas tecnologias, mas experimenta aplicações práticas de conceitos, outrora apenas teóricos, percebendo-os como algo presente em seu cotidiano.

Através da robótica educativa os estudantes poderão explorar novas ideias e descobrir novos caminhos na aplicação de conceitos adquiridos além de não somente proporcionar a interdisciplinaridade, mas exigí-la, pois a robótica requer conhecimentos sobre mecânica, matemática, biologia, física, programação, dentre outros.

#### 3.1 Mas afinal, o que é Robótica?

De acordo com Cabral (2010) podemos definir robótica como o ramo da ciência que estuda e desenvolve dispositivos eletromecânicos (robôs), criados para a execução de determinada tarefa.

Desde a antiguidade, esta ideia de construção de dispositivos automatizados que realizassem tarefas humanas (ou sobre-humanas) esteve presente na mente do homem. De acordo como escritor Mark E. Rosheim, *apud* Pinto (2011), o matemático, inventor mecânico e filósofo grego Ctesibius, que viveu por volta de 285 – 222 a.C., aplicando seu conhecimento de pneumática e hidráulica criou a clepsidra ou relógio de água, que é um dos primeiros sistemas criados pelo homem para medir o tempo.

Silva (2010), destaca também Heron de Alexandria, matemático, engenheiro grego que por volta do ano 62 d. C., construiu diversas invenções na área da automação.

Dentre seus sistemas robóticos está a primeira máquina de vender bebida da história, na qual se colocava uma moeda e recebia um jato de água. Heron era contratado por sacerdotes que queriam seus templos “automatizados” de modo a impressionar os fiéis. (RIBEIRO, 2006, *apud* SILVA, 2010, f. 49-50. Grifos do autor).

Contudo, é Leonardo da Vinci quem mais se destaca com seus inventos e engenhocas robóticas, ainda segundo a autora, chega a ser considerado por muitos como o pai da robótica. Este cientista, matemático, engenheiro inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico é reverenciado até os dias atuais por sua engenhosidade tecnológica. Ele concebeu ideias muito à frente de seu tempo, como um helicóptero, um tanque de guerra, o uso da energia solar, uma calculadora, dentre outros. Porém, um número relativamente pequeno de seus projetos chegou a ser construído. Ele desenvolveu os planos de um cavaleiro que se deveria mover autonomamente, mas como se tivesse no seu interior uma pessoa. Este artefato é conhecido por alguns como “Robô de Leonardo”.

Outro inventor que se destacou foi o francês Jacques de Vaucanson. Em 1738 ele criou o primeiro robô funcional, um androide que tocava flauta, assim como um pato mecânico que se alimentava. E assim, “[...] após expor para a sociedade as primeiras criações robóticas, a tecnologia avançou a ponto das pessoas preverem o uso das criaturas mecânicas como força de trabalho” (SILVA, 2010, f. 50). E o vislumbre deste potencial tecnológico da automação aparece nas formas literárias refletindo o medo dos seres humanos, de serem substituídos por suas próprias criações.

Ainda segundo Silva (2010), foi por meio da literatura, filmes e peças de ficção científicas que o termo robô se popularizou. A palavra “robota” em checo, robot, no inglês e robô para nós, tornou-se comum quando o escritor checo Karel Capek, em 1921, escreveu a peça R.U.R. (Rossum’s Universal Robots), em que conta a história de um cientista brilhante

chamado Rossum, que projetou e construiu um exército de robôs que acabaram por se tornarem muito inteligentes e dominaram o mundo.

Já a palavra “robótica”, que compreende o estudo e a aplicação de robôs, foi cunhada pelo famoso escritor russo de ficção científica, Isaac Asimov. A palavra foi usada pela primeira vez em seu conto denominado Runaround, publicado em 1942. Porém, de acordo com Pinto (2011), o termo robótica e mais precisamente a “robótica industrial” é atribuído ao engenheiro americano Joseph Elgelberger que desenvolveu o primeiro robô industrial em 1950, o Unimate, o que o faz ser considerado por muitos como o pai da robótica industrial.

Hoje, a robótica está fortemente presente em diversos setores da indústria, principalmente na indústria automobilística. No entanto, seu uso não está restrito ao meio industrial, a robótica se encontra muito mais próxima do que pensamos.

O que temos percebido é que as pessoas relacionam a robótica ao que vêm no cinema e esta percepção faz com que acreditem que a robótica será de grande utilidade num futuro distante. Ledo engano. A robótica está presente em nossos lares e cada um de nós tem vários robôs em casa. O grande problema é que em nossa formação regular, não fomos apresentados a uma disciplina que nos contemplasse com o conhecimento básico que nos permitisse reconhecer e aproveitar melhor o que um robô pode proporcionar. (SANTOS, 2008, p. 1).

A aparência humanoide sempre associada aos robôs pelas obras de ficção também contribuem para nossa falta de reconhecimento dos dispositivos robóticos que manuseamos em nosso dia-a-dia.

Santos (2008), apresenta uma classificação que nos permite compreender os vários tipos de robôs e nos leva a como nosso cotidiano está rodeado de robótica:

Os robôs são classificados de acordo com sua semelhança com o corpo humano ou parte deste. Quanto mais alta a classificação maior a proximidade com o ser humano. Dessa forma, a classe 1, denominada de autômato é um tipo de robô concebido para realizar uma única tarefa de forma automática. Um exemplo desse tipo de robô são as portas automáticas usadas em alguns supermercados que detectam a aproximação das pessoas e permanecem abertas apenas o tempo suficiente para que elas passem, fechando-se em seguida para isolar o ambiente refrigerado da loja do calor externo.

Na classe 2 está a máquina flexível que é um robô com capacidade de fazer tarefas de um mesmo tipo mas se adaptando a ligeiras particularidades de cada uma. Um exemplo disso são as atuais lavadoras de roupa onde se pode escolher programas de lavagem para 2 kg, 4 kg, 6 kg até 10 kg podendo também escolher entre um ou dois enxágues e água fria ou morna.

Na classe 3 fica o robô móvel. A mobilidade apregoada nesta classe não se refere apenas ao robô que possui meios próprios de locomoção mas também àqueles que são portáteis e assim também podem se mover. Na verdade a principal evolução desta classe de robô não é a mobilidade mas sim a capacidade de se comunicar com outras máquinas e com o homem. Nesta classe estão os celulares, os relógios de pulso digitais os MP3,4,5...



A classe 4 pertence ao androide ou humanoide. Nesta classe se enquadram os braços robóticos que vemos sendo usados nas linhas de montagem de veículos automotores.

Na classe 5 ficam os cybers, acrônimo da expressão que, em inglês significa organismo cibernético. Nesta classe de robôs coexistem sistemas mecatrônicos e biológicos. (SANTOS, 2008, p. 1-2).

Todos estes mecanismos robóticos que hoje são realidades presente na vida de muitos, outrora foram apenas sonhos – muitos destes, vislumbrados pelas obras de ficção científica – frutos da incessante criatividade e inventividade humana. E é justamente este aspecto de nossa natureza, a capacidade criativa, que torna a robótica aplicada a educação uma excepcional ferramenta de ensino e aprendizagem.

### **3.2 A Robótica na Educação**

A robótica educativa é uma forma de aplicação de tecnologia no processo de ensino e aprendizagem, de maneira que se torna possível uma ampliação significativa da gama de atividades desenvolvidas na escola e possibilita a interação entre diferentes áreas do conhecimento.

Contudo, por ser ainda uma metodologia nova no ensino, apresenta bastante resistência em ser incorporado no currículo escolar.

Para Melo (2009), a robótica educacional é um potencial por se tratar de um motivador, bem como por ter finalidade específica (construção de um objeto, ou recurso metodológico).

Melo (2009), considera alguns pontos bastante relevantes que o trabalho com robótica possibilita:

- Exercitar competências de domínio de determinadas ciências como a matemática e a física, principalmente os métodos experimental de resolução de problemas;
- Maior motivação para com as disciplinas ligadas à tecnologias;
- Desenvolvimento da abstração no ato de programar onde o programador/aluno precisa se colocar no lugar do *brick* para escolher a melhor configuração para que seu protótipo funcione;
- Percepção da importância dos modelos físicos, como simuladores de situações reais, porém com limitações que precisam ser respeitadas;

- Desenvolvimento do espírito investigativo, no processo de compreensão da problematização, na partilha de ideias com os companheiros;
- Fornecimento de um trabalho mais individualizado por parte do professor, que pode dar atenção a cada aluno conforme o nível de desenvolvimento de cada um.

Passemos agora para as concepções históricas da implementação da robótica no meio educacional, com o intuito de perceber sua evolução ao longo dos anos atrelada ao desenvolvimento da própria tecnologia neste ambiente.

De acordo com Cabral (2010), é possível afirmar que o uso de artefatos tecnológicos, no meio educacional, iniciou com a “Máquina de Ensinar” de B. F. Skinner e seu decorrente “estudo programado” nas décadas de 1950-60. Este pesquisador norte-americano, professor de psicologia, construiu uma máquina objetivando a ensinar crianças e adultos em idade escolar.

A máquina consistia numa espécie de caixa, onde, em um espaço vazado, aparecia uma pergunta para o estudante e ao lado, em outro pequeno espaço, ele deveria marcar a resposta que considerasse correta. Geralmente, eram símbolos ou palavras que completavam a questão. Depois de escrever a resposta, o estudante girava o rolo da máquina e lia imediatamente a resposta correta. Para a “metodologia da instrução” ou “estudo programado” o conhecimento deveria ser imediato e os erros eram considerados indesejáveis e deveriam ser rapidamente eliminados. (CABRAL, 2010, f. 23-24).

Além disso, o criador da “máquina de ensinar” dizia respeitar o tempo de cada criança, uma vez que o aluno resolvia as questões no seu próprio ritmo.

Na contramão de Skinner, Seymour Papert, vislumbrou o potencial educativo de outra máquina, o computador para a aprendizagem escolar. Papert iniciou seu estudos sobre o uso do computador na educação e criou, nas décadas de 1960-70, a linguagem de programação chamada LOGO ou “linguagem da tartaruga” como ficou conhecida. A ferramenta proporciona que as crianças possam programar os movimentos de uma tartaruga em uma tela de computador utilizando comandos simples e, desta forma, através da ação física e mental, construir hipóteses, testar e reconstruí-las imediatamente.

Ainda segundo Cabral (2010), Skinner e Papert divergem totalmente nas suas ferramentas e metodologias para uma educação tecnológica. O primeiro está baseado numa epistemologia empirista propondo uma “máquina de ensinar” e o segundo numa epistemologia construtivista, propondo, podemos dizer, uma máquina de aprender.

Na perspectiva da “máquina de ensinar” o processo de ensino e aprendizagem baseia-se na ideia da “transmissão de conhecimentos” tal como uma aula expositiva realizada pelo professor. Já na perspectiva da “máquina de aprender” o computador passa a ser uma ferramenta educacional de complementação, aperfeiçoamento e possível mudança na qualidade de ensino. O computador não seria mais um instrumento que ensina o aprendiz, mas uma ferramenta com a qual o estudante desenvolve algo e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato do aluno estar agindo e refletindo sobre uma tarefa por intermédio do computador.

A linguagem LOGO foi desenvolvida nesta perspectiva de construção do aprendizado que ficou conhecida por “construtivismo”. E em 1986, a empresa LEGO<sup>®1</sup> lançou robôs programados usando a linguagem LOGO e, em 1989, Seymour Papert se uniu à LEGO<sup>®</sup>. Em 1998, a empresa lançou a série Mindstorms NXT, com o modelo Robotics Invention System.

### 3.3 O Kit Mindstorms NXT LEGO<sup>®</sup>

Com o advento da robótica na educação, surgiram vários kits de montagem que tem por finalidade explorar a capacidade cognitiva dos alunos bem como promover o desenvolvimento de diversas habilidades e competências ligadas a interação com as tecnologias. Dentre esses kits podemos citar os kits Vex, kits Alfa Educ 2008 e Alfa Educ Hobby, kit de robótica Curumim (produzido por empresa brasileira) e o Kit Mindstorms NXT LEGO<sup>®</sup>, que foi o kit escolhido para o desenvolvimento deste trabalho.

A linha Mindstorms NXT é constituída por kits comercialmente lançadas em 1998, com uso exclusivo voltado pra a educação. Trata-se de um conjunto de peças de plástico, tijolos vazados e cheios, placas, pinos, rodas, motores, eixos, engrenagens, polias, correntes, vigas, sensores de toque, de intensidade luminosa, temperatura, sons, cor, câmera, além de um controlador conhecido como *brick*. Os diferenciais entre os tipos de kits lançados – Mindstorms NXT LEGO<sup>®</sup> 1.0, Mindstorms NXT LEGO<sup>®</sup> 2.0 – divergem quanto a tipos de

---

<sup>1</sup> O Grupo LEGO<sup>®</sup> é uma empresa privada com sede em Billund, na Dinamarca fundada em 1932 por Ole Kirk Kristiansen. Possui hoje aproximadamente 10.000 funcionários, e é o terceiro maior fabricante mundial de brinquedos e materiais de jogo. É conhecida por seu produto mundialmente famoso, o tijolo LEGO<sup>®</sup>, um brinquedo formado por diversos módulos de tamanhos diferentes, os quais se encaixam perfeitamente originando diversas combinações, e que desde o final do ano de 1950, tornou-se popular em todo o mundo.

peças e aprimoramento em sensores. No mais, mantêm a mesma estrutura e capacidade de processamento.

Cada kit permite a construção de robôs simples que podem ser programados com uso de softwares específicos como o RoboLab ou Robotics Inventions System, bem como podem ser em linguagem Lejos (Java) ou BriccX (C++). Podem interagir com um computador externo por meio de ligação em em porta USB ou por meio da tecnologia Bluetooth.

Porém, como afirma Melo (2009), esse processo de interação, com o meio externo, bem como a automação dos brinquedos feitos de LEGO® só foi possível graças a invenção do *Brick*, realizado pelo (*Massachusetts Institute of Technology - MIT*), ou como ele designa, “tijolo programável”. (Veja Fig. 2)

### 3.4 Componentes de um robô

De posse dos conhecimentos prévios sobre robótica, podemos agora conhecer as principais partes que o compõe nos mais variados kits da Mindstorms NXT, bem como uma rápida noção da plataforma de programação do sistema NXT.

Conforme nos aponta Melo (2009), o Kit NXT apresenta como supracitamos, um *brick* (*receiver NXT*), com um processador de 32 bits, que pode ser programado em sistema MAC ou PC. (Veja Fig. 2)

Além dele, há sensores que se conectam diretamente com o *brick*, e este com o computador por meio de cabo e porta *USB* ou pela tecnologia bluetooth, motores e centenas de peças como tijolos, vigas, eixos, polias, pinos, engrenagens, entre outros. (Veja Fig. 1)

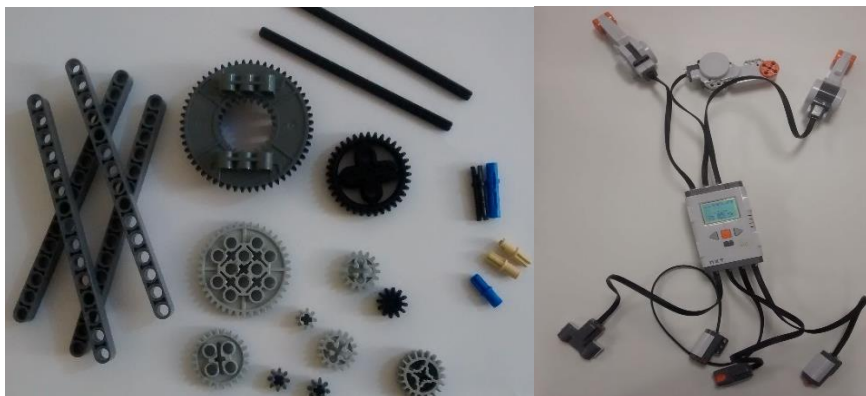


Figura – 1: *Brick*, sensores, motores e algumas peças do Kit NXT

Azevedo (2010) nos traz as seguintes definições:

Controlador (*brick*) – é a principal parte de um robô, constitui-se de um microcomputador e com uma plataforma disponível para a programação de comandos. Possui três portas para motores (portas A, B, C), quatro portas para sensores (portas 1, 2, 3, 4), uma porta USB (porta U), bluetooth, um display (visor), autofalante, quatro botões em sua parte frontal (botão laranja (B<sub>1</sub>) de funções *on*, *off*, *run*; botão cinza escuro (B<sub>2</sub>) que atua para apagar ou voltar um nível no menu e dois botões cinzas claros (B<sub>3</sub>) que são para navegação para direita e esquerda no menu). Além de “buracos” para encaixes de pinos e outros dispositivos, conforme Fig. 2.

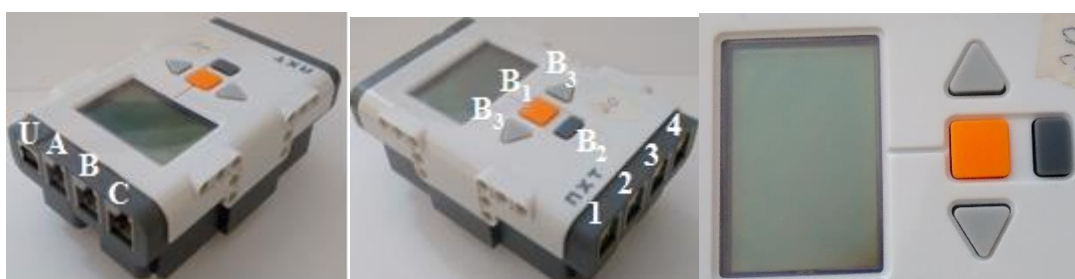






Figura – 2: *brick* (do Kit NXT): portas de conexão, display e botões de controle e navegação

Sensores – são os dispositivos pelos quais o robô interage com o ambiente. Sua função é detectar sinais que são interpretados pelo controlador, sinais de contato, visuais e sonoros. Os tipos mais comuns são toque, som, ultrassom, luz, cor, câmera e rotação (está contido no motor). Na tab. 1 abaixo, segue a descrição desses sensores, conforme Melo (2009).

Tabela – 1: Tipos de sensores

Descrição do sensor	Foto do sensor
<p style="text-align: center;"><b>SENSOR DE TOQUE</b></p> <p>É acionado quando pressionado, quando pressionado e solto ou quando está sendo pulsado.</p>	
<p style="text-align: center;"><b>SENSOR DE LUZ</b></p> <p>É constituído por duas “lâmpadas” uma receptora e outra emissora, por meio das quais o <i>brick</i> faz a leitura do ambiente em um espectro que varia numa escala de 0 (preto) a 100 (branco).</p>	
<p style="text-align: center;"><b>SENSOR DE SOM</b></p> <p>Permite que o <i>brick</i> faça leitura de sons externos perceptíveis naturalmente (em dB), e sons adaptados à sensibilidade do ouvido humano (em dBA).</p>	
<p style="text-align: center;"><b>SENSOR ULTRASSÔNICO</b></p> <p>São utilizados para medir distâncias pela relação tempo e emissão dos ultrassons, bem como para detectar objetos em movimentos. Consegue medir uma distância aproximadamente de 250 cm.</p>	

Atuadores – trata-se dos diferentes tipos de motor que podem ser empregados para mover o robô como também partes de sua estrutura. Podem ser motores elétricos, mecânicos, hidráulicos ou pneumáticos. No Kit NXT o *brick* tem saída para três motores elétricos. Cada motor pode atuar para mover coisas/objetos, fazendo-os girar, ou como sensores, pois possuem um encoder (quantificador de rotação) embutido que faz a leitura em graus ou em número de voltas. (Veja Fig. 3)





Figura – 3: Motor elétrico do Kit NXT

Manipuladores – são os membros do robô. Estes podem ser construídos ou então já virem previamente montados. Trata-se dos braços, pernas, pinças, alavancas ou garras que fornece uma visão mais realista e/ou dinâmica do robô. Normalmente apresenta algum atuador em sua estrutura a fim de dar movimento ao manipulador.

Engrenagens (veja Fig. 4) – são rodas dentadas de diversos tamanhos, conforme Fig. 4. Ao se interagirem, as engrenagens são denominadas como motora e movida, em conjunto, são designadas em três categorias, de entrada (motora), intermediárias (movidas), de saída (movida final) – veja Fig. 7. As engrenagens são empregadas para dar velocidade e força a um sistema. Quando se deseja dar velocidade, a engrenagem motora é maior que a movida. Já quando se deseja aumentar a força de um sistema a motora é menor que a movida. E assim é constituído o sistema mecânico de um robô.



Figura – 4: Exemplos de engrenagens do Kit NXT

Eixo – são peças de ligação entre o motor e engrenagens ou rodas.

Fonte de energia – por meio do qual o controlador e sensores são alimentados. Pode ser por exemplo baterias.

Fiação – são os cabos por meio dos quais são transmitidos sinais entre sensores e controlador, bem como por onde são alimentados na fonte de energia.

Estrutura – é o restante das partes que constitui o robô. Formado por peças que tem por finalidade sustentar o controlador, os manipuladores, sensores, atuadores, baterias, engrenagens. São uma estrutura de pinos, eixos, placas, barras que formam a carcaça do robô. Podem ficar estáticos em uma plataforma ou móveis sobre rodas.

*Plataforma LEGO Mindstorms education NXT ou NXT-G* – é o ambiente de programação dos robôs (veja Fig. 5). Conforme afirma Melo (2009), trata-se de uma plataforma composta de blocos de programação, onde de acordo com a função que o programador deseja que o robô execute, ele os “arrasta” para a área de trabalho e programa cada um dos blocos escolhidos. Cada bloco é programado com a ação que deseja que o *brick* desempenhe ou designe aos motores e sensores. Uma das facilidades do sistema é a possibilidade de se utilizar teclas de atalho que normalmente o usuário utiliza noutros sistemas, como desfazer (Ctrl + Z), copiar (Ctrl + C), colar (Ctrl + V), entre outras. Além disso podem se utilizar outras programações previamente programadas, para se elaborar outras mais complexas.

O processo de elaboração da programação em robótica tem uma ação bastante positiva no desenvolvimento de competências de planejamento, como afirma Melo (2009). Deste modo, o aluno/programador deve pensar logicamente, com a mesma lógica do *brick* para detectar os motivos dos possíveis problemas, buscando ajustes para melhores resultados.

Na figura abaixo (Fig. 5), temos um exemplo de programação no software NXT-G da LEGO®. São exibidos a área de trabalho, alguns blocos programação de áudio, motor e blocos programação de sensores de cor, toque, som, luz e ultrassom.

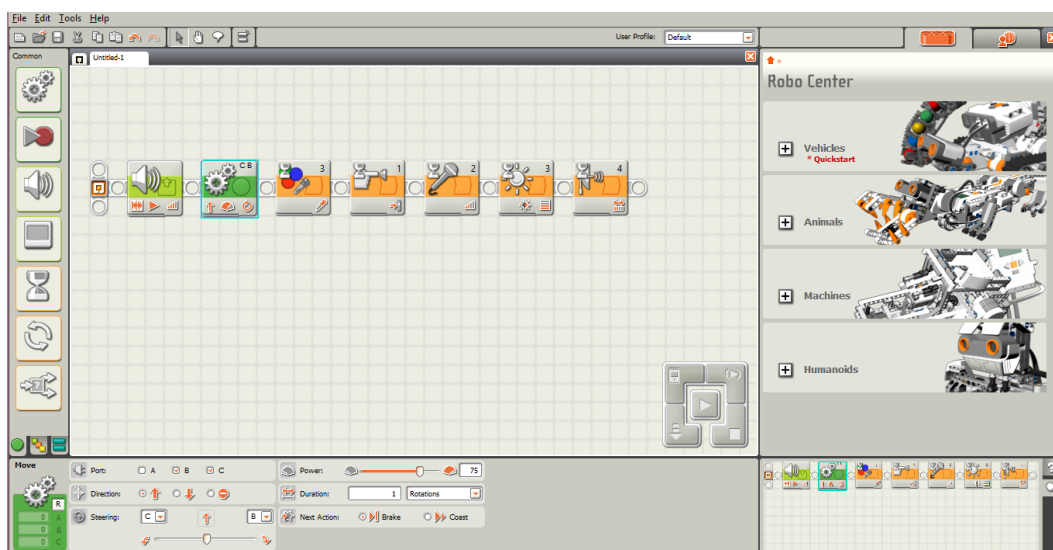


Figura – 5: Exemplo de programação no software NXT-G

## 4 CONCEITOS MATEMÁTICOS

### 4.1 Função

De acordo com GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. (2005) temos a seguinte definição: *“Dados dois conjuntos não vazios A e B e f uma relação de A em B. Se a cada elemento x de A estiver associado um único elemento y em B, então essa relação descreve uma função”*.

#### 4.1.1 Monotonicidade

Definição de Monotonicidade: O conceito de monotonicidade serve para garantir que aumentando os valores do domínio de uma função sempre teremos na imagem valores correspondentes sempre aumentando ou diminuindo consecutivamente, ou seja, a monotonicidade serve para preservar ou inverter a relação de ordem entre as grandezas. Para o primeiro caso, chamamos de função monótona crescente e para o segundo decrescente.

Matematicamente de acordo com Ribenboim (2012), temos função monótona:

- estritamente crescente se  $\forall x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  
 $(x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 > y_2, \text{ onde } y_1 = f(x_1) \text{ e } y_2 = f(x_2)).$
- estritamente decrescente se  $\forall x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  
 $(x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 < y_2, \text{ onde } y_1 = f(x_1) \text{ e } y_2 = f(x_2)).$
- não-decrescente se  $\forall x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  
 $(x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2, \text{ onde } y_1 = f(x_1) \text{ e } y_2 = f(x_2)).$
- não-crescente se  $\forall x_1$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  
 $(x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 \leq y_2, \text{ onde } y_1 = f(x_1) \text{ e } y_2 = f(x_2)).$

O objetivo de definir monotonicidade é evitar que situações adversas como o preço da arroba do boi gordo ou da saca de soja em função do tempo aconteça. Pois em ambos os casos o preço é oscilante, dependendo de várias variáveis de mercado que em sua maioria não são lineares com o preço. Assim temos nos casos de grandezas diretamente proporcionais

tipos específicos de funções monótonas crescentes e para os casos de grandezas inversamente proporcionais, tipos específicos de funções monótonas decrescentes. Vale ressaltar que toda relação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais estabelece uma função monótona, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo a área do círculo em função do raio é uma função monótona crescente, porém não é diretamente proporcional.

#### 4.1.2 Proporcionalidade

Quanto a proporcionalidade não se sabe ao certo quando esta foi utilizada pela primeira vez, o professor Elon Lages Lima já afirmava isso em seu livro “Meu professor de matemática”, Lima (2006), dizendo também que trata-se do conceito matemático mais difundido no mundo desde os tempos mais remotos.

Neste livro, Elon faz menção a um dos textos mais antigos do Brasil que teve várias edições, 80, sendo a primeira de 1883, com textos de melhor entendimento para a definição de proporcionalidade.

Tal livro chamava-se Aritmética Progressiva de Antônio Trajano cuja definição de proporcionalidade era: *“Diz se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.”*

Por uma questão de simplificação de resultados consideraremos apenas os casos em que as grandezas são números positivos.

Falar em proporcionalidade só faz sentido se as grandezas em questão estiverem bem relacionadas. Assim podemos pensar que se duas grandezas  $x$  e  $y$  estiverem interligadas de modo que para cada valor de  $x$ , se encontre um valor bem determinado em  $y$ , dizemos que  $y$  é função de  $x$ . Ou seja,  $y = f(x)$ . Aprimorando um pouco mais os conceitos a fim de definir a função de proporcionalidade, precisamos atestar se dois valores distintos  $x_1 < x_2$ , correspondem a valores em  $y$  de modo que os correspondentes sejam  $y_1 < y_2$  ou  $y_1 > y_2$ . Em suma, precisamos verificar se  $y$  é uma função monótona de  $x$ .

### 4.1.3 Função Diretamente e Inversamente Proporcional

De acordo com Lima et al (1997), temos as seguintes definições, proposições e teoremas acerca da proporcionalidade, função, função afim e linear que se seguem.

**Definição:** Definimos então que  $y = f(x)$  é diretamente proporcional a  $x$  quando as duas condições seguintes forem satisfeitas:

- $y$  é função monótona crescente de  $x$ ;
- se multiplicarmos  $x$  por um número natural por  $n$ , o valor correspondente de  $y$  também fica multiplicado por  $n$ . Ou seja,

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo, dizemos que  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ , quando multiplicamos  $x$  por um número natural  $n$  e seu correspondente fica dividido por  $n$  e  $y$  é uma função decrescente de  $x$ , ou seja,

$$f(n \cdot x) = \frac{1}{n} f(x), \quad n \neq 0$$

Se  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ , para todo  $x > 0$  e para todo  $n$  natural, então,  $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ , para todo número racional  $r = p/q$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$ , e  $q \neq 0$ .

A prova para o caso de todo  $r$  racional encontra-se no livro “Meu Professor de matemática” (LIMA, 2006, f. 129).

Para o caso de  $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ , considerando  $a = f(1)$ , segue:

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = c \cdot a = a \cdot c$$

Adequando melhor este resultado temos:

$$f(x) = a \cdot x$$

ou seja,

$$y = ax$$

para todo  $x$  real, o que caracteriza a função linear. Onde  $a$  é chamado de taxa de variação de  $f$  e na visão da proporcionalidade é chamado de constante de proporcionalidade. O raciocínio é análogo para proporcionalidade inversa, desde que se considere grandezas não nulas. Em muitos casos a constante de proporcionalidade é dado de forma bem clara como no exemplo, se um caderno custa oito reais, qual o valor de seis cadernos? Porém nem sempre isso ocorre ou é necessário ou tem significado com relevância, como é o caso do teorema de Tales. Neste

teorema temos que em um triângulo ABC a cada ponto X do lado AB, corresponde um ponto Y do lado AC, desde que o segmento XY seja paralelo ao lado BC, de modo que o comprimento  $x$  do segmento AX seja proporcional ao comprimento  $y$  do segmento AY. Neste caso a constante de proporcionalidade  $a = y/x$  corresponde a  $a = \text{sen}B/\text{sen}C$ . Note que isso não tem grande relevância, uma vez que quando utilizamos o teorema de Tales não fazemos associação com medidas angulares e ao ensinar, sempre explanamos o teorema sem que o aluno tenha noção de trigonometria.

Quando a relação  $x \rightarrow y$  implica em  $x' \rightarrow y'$  é uma proporção,  $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$  temos a tradicional técnica conhecida como regra de três, que consiste em descobrir um dos quatro números conhecido os outros três.

#### 4.1.4 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema: Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente, então as seguintes afirmações são equivalentes<sup>2</sup>:

- (a)  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ , para todo  $n$  inteiro e todo  $x$  real.
- (b) Pondo  $a = f(1)$ , tem-se  $f(x) = ax$ , para todo  $x$  real.
- (c)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , para qualquer  $x, y$  reais.

A importância fundamental desse teorema decorre do fato de que se quisermos saber que se uma função é linear primeiramente constatamos se ela é crescente ou decrescente, e depois se  $f(nx) = nf(x)$ , para todo  $x$  real e  $n$  inteiro.

Os dois resultados abaixo, são corolários resultantes do teorema fundamental da proporcionalidade<sup>3</sup>:

Corolário 1. São equivalentes as seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$ :

- 1)  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ ;
- 2) para todo número real  $n > 0$ , tem-se  $f(nx) = nf(x)$ ;
- 3) existe um número  $a$ , chamado de constante de proporcionalidade entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = ax$ , ou seja,  $y = ax$ .

<sup>2</sup> A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro “A Matemática do Ensino Médio” (LIMA et al, 1997, f. 94, 95).

<sup>3</sup> Estes corolários também são demonstrados no livro “Meu professor de matemática” (LIMA, 2006, p. 129-131).

Corolário 2. São equivalentes as seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$ :

- 1)  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ ;
- 2) para todo número real  $n \neq 0$ , tem-se  $f(nx) = f(x)/n$ ;
- 3) existe um número  $a$ , chamado de constante de proporcionalidade entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = a/x$ , ou seja,  $y = a/x$ .

Vale ressaltar que para o caso de proporcionalidade inversa, basta mostrarmos a correspondência para uma proporcionalidade direta de constante de proporcionalidade inversa, ou seja, se  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ , então  $y$  é diretamente proporcional a  $1/x$ .

Como vimos grandezas diretamente proporcionais podem ser consideradas com uma relação de função, a chamada função linear. Porém, as funções lineares são um caso especial de funções afins. Por isto, faremos uso do Teorema de Caracterização da função afim para termos mais uma ferramenta para constatar a proporcionalidade entre grandezas, de um modo ajustado para as funções lineares.

#### 4.1.5 Função Afim

Definição: Uma função  $f: R \rightarrow R$  chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in R$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in R$ . Quando  $b = 0$  temos a chamada função linear.

As funções lineares por sua vez são modelos matemáticos para problemas de proporcionalidade.

Teorema de Caracterização da função afim: Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona injetiva. Se o acréscimo  $f(x + h) - f(x) = \vartheta(h)$  depender apenas de  $h$ , então  $f$  é uma função afim<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro “A Matemática do Ensino Médio” (LIMA et al, 1997, p. 99).

#### 4.1.6 Funções Compostas

O conceito de função composta e inversa é outra ideia bastante comum no nosso dia-a-dia. As ideias aqui propostas são de acordo com Neto (2012) e Ribenboim (2012). Via de regra, toda vez que relacionamos duas grandezas por exemplo, no qual uma terceira depende da segunda, podemos relacionar diretamente a primeira com a terceira, isto é, compô-las. A exemplo, podemos citar a altura alcançada pela lava de um vulcão em erupção que depende da pressão no interior do vulcão. A pressão por sua vez depende da temperatura interna que agita a lava. Assim podemos mensurar a altura que um jato de lava alcança diretamente por meio da temperatura da lava. Podemos citar também a função Lucro de uma empresa como sendo expressa pela composição das funções Receita e Despesa dessa mesma empresa. Vejamos alguns exemplos matemáticos:

Exemplo:

Consideremos a função  $f$  de  $R$  em  $R$  definida por  $f(x) = x + 1$ . Então, pela lei da função sabemos que  $f(x)$  é sempre o resultado do acréscimo de 1 unidade ao valor previamente estabelecido  $x$ . Seja  $g(x) = x^2 - 5$ , a função que eleva ao quadrado todo valor a ela atribuído e subtrai 5 unidades. Ao fazermos uma aplicação dos valores de  $f$  em  $g$  dizemos que temos uma composição de função. O pertinente neste caso é a criação dessa função proveniente desta composição de  $f$  em  $g$ . Vamos chamar essa composição de  $h(x)$ , denotando por  $(g \circ f)(x)$  que é equivalente a  $g(f(x))$ . Para o nosso caso, temos:

$$h(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 5 = (x + 1)^2 - 5 = x^2 + 2x - 4$$

$$h(x) = x^2 + 2x - 4$$

Podemos representar uma situação descrita por uma função composta por meio de digramas, conforme Fig. 6.

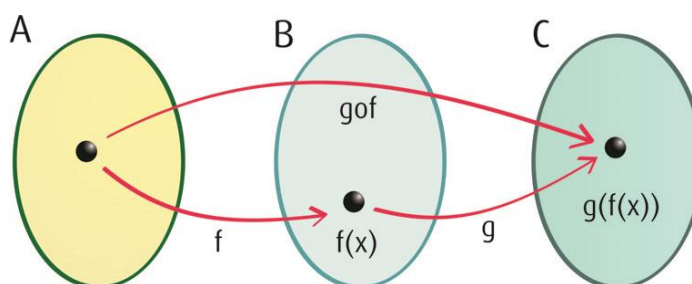


Figura – 6: Diagrama de composição de função



Note que o objetivo da função composta é abreviar “caminhos”.

O processo acima ilustrado pode ser entendido assim:

Considere  $f$  uma função definida em um conjunto  $X$  de números reais e tendo imagem contida em um conjunto  $Y$  de números reais; assim, a cada número real  $x$  em  $X$  a função  $f$  associa o valor  $y = f(x)$  pertencente a  $Y$ .

Seja  $g$  uma função definida no conjunto  $Y$  considerado acima, com valores em um conjunto  $Z$  de números reais; assim, cada elemento  $y$  em  $Y$  a função  $g$  associa o valor  $z = g(y)$  pertencente a  $Z$ .

Tomando a seguinte correspondência, obtida *compondo* as correspondências  $f$  e  $g$ : a cada  $x \in X$  associamos o número real  $g(f(x))$ , igual à imagem por  $g$  da imagem de  $x$  por  $f$ . Isto é uma correspondência do conjunto  $X$  no conjunto  $Z$ .

Definição de Composição de Funções: Dadas as funções  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$ , a função composta de  $f$  e  $g$  é a função  $g \circ f: X \rightarrow Z$  definida, para cada  $x \in X$ , por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Algumas observações cabem ressaltar:

Note que o domínio de  $g$  precisa ser igual ao contradomínio de  $f$  e que a ordem de aplicação da função deve ser mantida, ou seja,  $(g \circ f)(x)$  não necessariamente é igual a  $(f \circ g)(x)$ .

Como não é nosso objetivo vamos apenas citar algumas principais propriedades das funções compostas.

1. Pode-se associar três ou mais composições de funções:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2.  $g \circ f$  injetora  $\Rightarrow f$  injetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira,
3.  $g \circ f$  sobrejetora  $\Rightarrow g$  sobrejetora, mas a recíproca nem sempre é verdadeira,

4.  $g, f$  injetora  $\Rightarrow g \circ f$  injetora
5.  $g, f$  sobrejetora  $\Rightarrow g \circ f$  sobrejetora
6.  $g, f$  bijetora  $\Rightarrow g \circ f$  bijetora

Um comentário pertinente é quanto a composição das funções lineares. Essas funções ao serem compostas, resultam em uma nova função, na qual o novo coeficiente angular é dado pela multiplicação dos coeficientes angulares das funções anteriores. Veja o exemplo:

$$f(x) = a_1x$$

$$g(x) = a_2x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a_1x) = a_2a_1x = a_1a_2x.$$

Para o caso que estamos estudando, que exploraremos melhor nas aplicações, buscamos compreender como compor as engrenagens do Kit NXT, de modo a aumentar ou diminuir e quantificar as quantidades de giros dados pelas engrenagens. Para isso vamos para algumas definições.

Em um processo de interação de engrenagens temos três tipos principais: engrenagem motora ou de entrada, engrenagem movida intermediária e engrenagem movida final ou de saída.

Engrenagem motora é a engrenagem que recebe o primeiro estímulo do motor, é a responsável por transmitir as demais o movimento.

Engrenagem movida intermediária, faz o elo entre a motora e a movida final. É a engrenagem que recebe o estímulo da motora e tem por função leva-lo até a engrenagem movida final, neste caso, cada engrenagem transmite o torque recebido para a engrenagem consecutiva/adjacente no sistema. Pode ser apenas uma ou tantas quantas forem as engrenagens que estiverem entre a motora e a movida.

A engrenagem movida final é a última do sistema de acoplamento, ela pode ou não ter sua quantidade de giros alterada, bem como sua velocidade e o sentido do seu movimento. Se encarrega de apresentar o giro no fim do processo, bem como a velocidade e o sentido de movimento que se deseja.

Na figura abaixo (Fig. 7), temos três engrenagens, adotando a orientação da esquerda pra direita, sendo a primeira engrenagem a que recebe o torque do motor, dizemos que a primeira é a engrenagem motora (de entrada), a segunda engrenagem intermediária (movida intermediária) e a terceira é a engrenagem movida final (de saída).

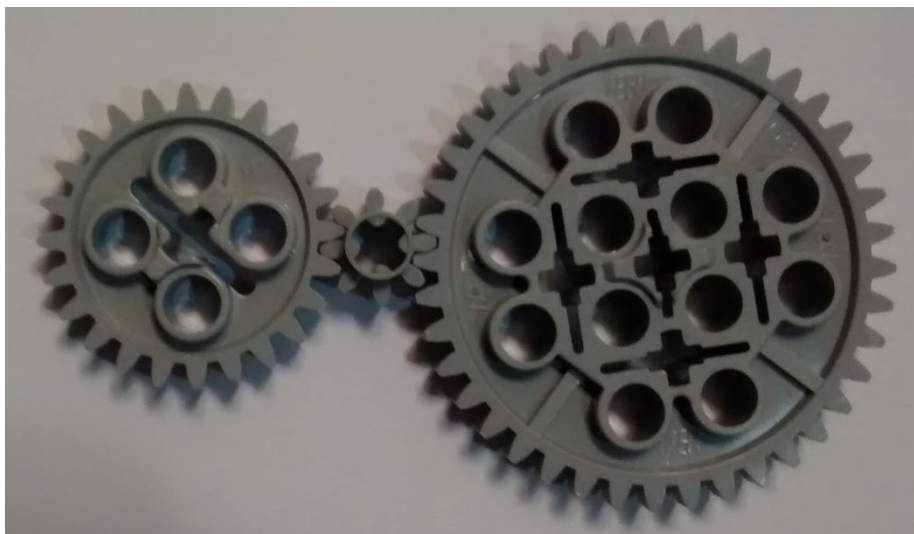


Figura – 7: Engrenagens: de entrada, intermediária e de saída – orientação da esquerda pra direita

Chamamos um conjunto de engrenagens que se interagem de **Trem de Engrenagens ou Caixa de Engrenagens**. Esse Trem de Engrenagens pode ser de dois tipos, Simples ou Composto, conforme Fig. 8.

Em trens simples o acoplamento das engrenagens é dado de forma direta, engrenagem com engrenagem, sem a necessidade de eixo para transmissão do torque à uma engrenagem adjacente. Melhor dizendo, a engrenagem motora transmite a de saída um deslocamento linear e não angular. Neste tipo de acoplamento, o valor numérico das engrenagens, excetuando a primeira e a última, são cancelados como trataremos melhor no próximo subitem

Os trens de engrenagens compostos são utilizados para se ter redução ou potencialização na velocidade e na quantidade de giros da engrenagem de saída. Se caracterizam por apresentarem um eixo com mais de uma engrenagem acoplada. Neste caso, as engrenagens intermediárias influenciam diretamente na quantidade de giros e na velocidade da engrenagem de saída, num processo que pode ser descrito pela composição de funções, onde são transferidos às engrenagens envolvidas variações angulares que conseqüentemente proporcionam uma maior ou menor quantidade de voltas na engrenagem de saída. Esse assunto será detalhado no subitem 4.1.4.2.

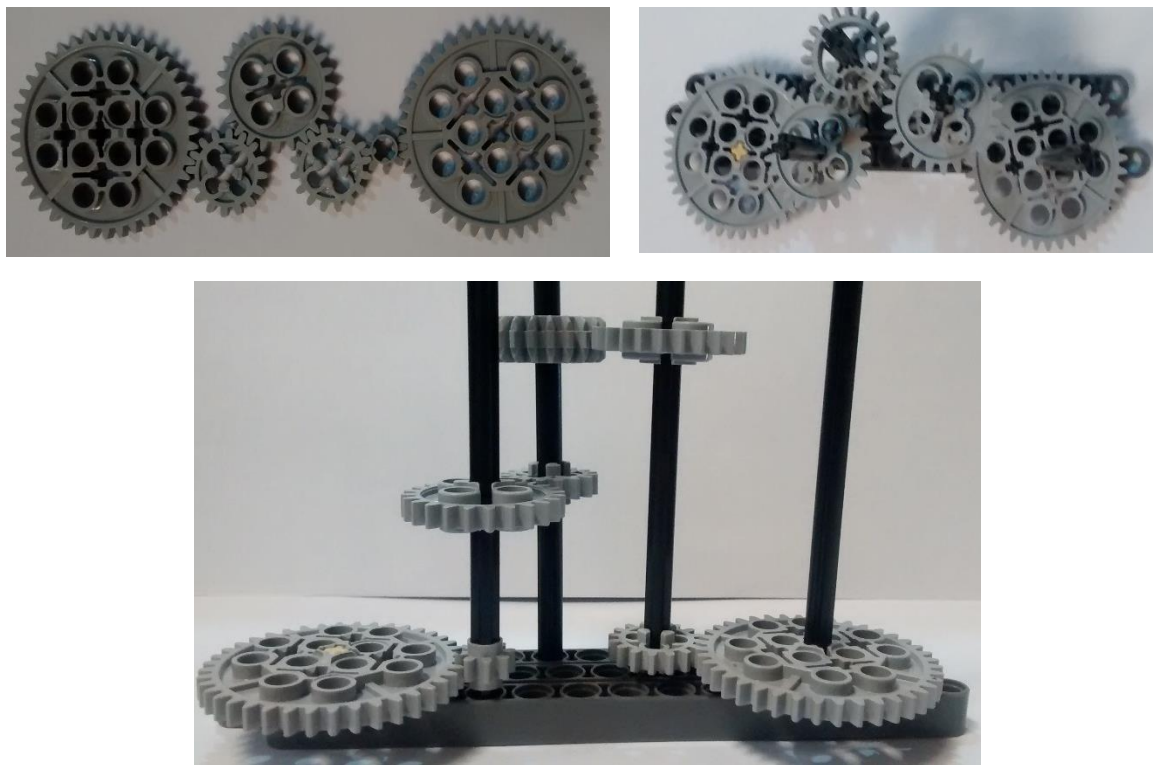


Figura – 8: Trem de Engrenagens: à esquerda superior – trem simples, à direita superior e inferior trem composto.

As engrenagens intermediárias influenciam apenas no sentido do movimento da engrenagem de saída. Por isso, independentemente da quantidade de dentes que tenham as engrenagens intermediárias, a quantidade de giros da engrenagem de saída não será alterado, se dará do mesmo modo que se a engrenagem motora e de saída estivessem em acoplagem direta.

Considere um sistema constituído por três engrenagens  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , conforme Fig. 19. Sendo  $E_1$  a engrenagem motora de entrada,  $E_2$  a engrenagem movida intermediária e  $E_3$  a engrenagem movida final de saída. Como as três engrenagens estão acopladas, quando  $E_1$  der um giro deslocando  $x$  (u. c.) linear, esse deslocamento é transferido para  $E_2$ , fazendo com que  $E_2$  gire também  $x$  (u. c.) linear e conseqüentemente também é transferido para  $E_3$  que também gira  $x$  (u. c.) linear. Por causa do acoplamento essa transmissão só não acontece se por uma eventualidade os dentes das engrenagens quebrarem ou se as mesmas estiverem mal acopladas. Ressaltamos que quando essas engrenagens têm diferentes raios ou diferentes quantidades de dentes, elas sofrerão distintas variações angulares, porém, terão os mesmos deslocamentos lineares. Deste modo podemos estender esse raciocínio para quantas engrenagens intermediárias que desejarmos.

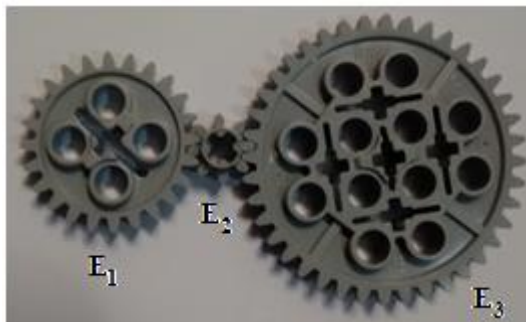


Figura – 19: Simulação de um Trem Simples de engrenagens.

Para a situação exemplificada na figura acima, podemos representar matematicamente assim,

dado que:  $E_1 = 24$  dentes,  $E_2 = 8$  dentes,  $E_3 = 40$  dentes. Temos as seguintes relações de proporcionalidade.

$$E_1 : E_2 \Rightarrow \frac{24}{8} = \frac{3}{1}$$

Ou seja, 1 volta de  $E_1 \Rightarrow 3$  voltas de  $E_2$ .

$$E_2 : E_3 \Rightarrow \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

Ou seja, 1 volta de  $E_2 \Rightarrow \frac{1}{5}$  volta de  $E_3$ .

$$E_1 : E_3 \Rightarrow \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

Ou seja, 1 volta de  $E_1 \Rightarrow \frac{3}{5}$  volta de  $E_3$ .

Transformando essas relações para linguagem de função, podemos dizer que o acoplamento:

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3,$$

pode ser compreendido do seguinte modo:

Considere cada par de engrenagens adjacente,  $E_1$  com  $E_2$ , e,  $E_2$  com  $E_3$ , temos que,

$$\begin{aligned}
 E_1 &\rightarrow E_2 \\
 f_1: R^+ &\rightarrow R^+ \\
 x &\mapsto 3x
 \end{aligned}$$

Ou seja,  $f_1(x) = 3x$

$$\begin{aligned}
 E_2 &\rightarrow E_3 \\
 f_2: R^+ &\rightarrow R^+ \\
 x &\mapsto \frac{1}{5}x
 \end{aligned}$$

Ou seja,  $f_2(x) = \frac{1}{5}x$

Deste modo, para termos a situação  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$ , precisamos da composição  $f_1 \circ f_2$ , que como vimos na seção anterior, se dá pela multiplicação dos coeficientes angulares ou de proporcionalidade de cada função,

$$f_1 \circ f_2 = f_1(f_2(x)) = 3 \cdot f_2(x) = 3 \cdot \frac{1}{5}x = \frac{3}{5}x$$

Contudo, note que essa mesma função é obtida quando se considera apenas as engrenagens  $E_1$  e  $E_3$ ,

$$\begin{aligned}
 E_1 &\rightarrow E_3 \\
 f_3: R^+ &\rightarrow R^+ \\
 x &\mapsto \frac{3}{5}x
 \end{aligned}$$

Ou seja,  $f_3(x) = \frac{3}{5}x$ .

Deste modo vemos que para efeito de quantidade de voltas, a engrenagem intermediária  $E_2$  é dispensável.

Como vimos, as composições entre funções lineares, se dá pelo produto dos coeficientes angulares (de proporcionalidade) das funções envolvidas.

Engrenagens que sofrem as mesmas variações angulares dão os mesmos giros (variação angular = giro)

Quando temos engrenagens idênticas, vimos que são as funções identidades que as descrevem, pois quando uma der um giro a outra também dará, pois sofrendo as mesmas variações lineares (por estarem acopladas e serem idênticas) e possuindo os mesmos raios (mesmos dentes), sofrem as mesmas variações angulares.

Vimos que em um Trem Composto de engrenagens, a principal característica é a presença de um eixo em que está acoplado pelo menos duas engrenagens. Nesta

configuração, independente dos tamanhos dessas engrenagens afirmamos que elas dão as mesmas quantidades de giros, pois o eixo transmite a mesma variação angular de uma à outra. Como as funções que estamos trabalhando são relacionadas aos giros no processo de interação das engrenagens, dizemos que este caso também é descrito por função identidade.

Passemos agora à análise de um Trem Composto de Engrenagens, como o exemplificado na Fig. 20. Consideremos um sistema constituído por 4 engrenagens ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ ) com as seguintes configurações ilustradas na Fig. 20, onde  $E_1$  é a engrenagem motora do sistema e  $E_4$  é a engrenagem de saída. Vamos analisar separadamente as funções nos processos de interação de cada duas engrenagens que estão acopladas (a primeira engrenagem será a de entrada e a segunda a de saída)

$$E_1 \rightarrow E_2 \Rightarrow \mathbf{f(x) = ax}$$

$$E_2 \rightarrow E_3 \Rightarrow \mathbf{g(x) = x}$$

$$E_3 \rightarrow E_4 \Rightarrow \mathbf{h(x) = cx}$$

onde  $x$  é a quantidade de giros da engrenagens de entrada e  $f(x), g(x), h(x)$  as quantidades de giros das engrenagens de saída.

Devido ao acoplamento entre as engrenagens, a engrenagem  $E_1$  faz com que a cada um de seus giros, a engrenagem  $E_2$  gire  $a$  vezes. Essa quantidade de giros é transferida pelo eixo para a engrenagem  $E_3$  que também gira  $a$  vezes a cada giro da engrenagem  $E_1$ . A engrenagem  $E_3$  por sua vez, faz com que a engrenagem  $E_4$  gire  $c$  vezes, a medida que ela dá um giro. Porém, como  $E_3$  está dando  $a$  giros a cada giro de  $E_1$ , ela fará com que  $E_4$  gire  $ac$  vezes a quantidade de giros de  $E_1$ . Como vimos, no processo de composição de função a função composta resultante é obtida pelo produto dos coeficientes angulares (proporcionalidades) de cada função.

Assim, podemos determinar a quantidade de giros da engrenagem de saída do sistema em função da quantidade de giros da engrenagem de entrada. Para isso, basta compor as funções envolvidas.

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(cx)) = f(cx) = acx.$$

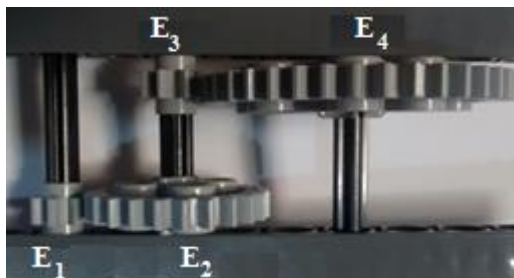


Figura – 20: Trem Composto de Engrenagens

Matematicamente, para a situação ilustrada acima, temos que as interações entre engrenagens  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4$  podem ser modeladas por função (duas a duas engrenagens adjacentes) e posteriormente compondo as funções obtidas teremos como averiguar qual o torque que  $E_1$  emprega sobre  $E_4$ .

Considerando  $E_1$  como a engrenagem motora segue:

$E_1 = 8$  dentes,  $E_2 = 24$  dentes,  $E_3 = 8$  dentes e  $E_4 = 40$  dentes. Vamos inicialmente determinar os coeficientes de proporcionalidades para cada função.

$$E_1 : E_2 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$E_2 : E_3 = 1$$

$$E_3 : E_4 = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

Observe que  $E_2$  e  $E_3$  não estão acopladas diretamente, dente com dente, mas sim por um eixo que liga seus centros. Neste caso, os mesmos giros sofridos por  $E_2$  são transferidos para  $E_3$  por meio desse eixo de ligação, por isso dizemos que a proporcionalidade entre os giros de  $E_2$  e  $E_3$  é 1, pois elas girarão a mesma quantidade de voltas, porque o acoplamento pelo eixo faz com que tenham a mesma variação angular.

De posse dos coeficientes angulares de cada função que será descrita passemos a determinação de suas leis de formação.

$$E_1 \rightarrow E_2$$

$$f_1 : R^+ \rightarrow R^+$$

$$x \mapsto \frac{1}{3}x$$

Logo,  $f_1(x) = \frac{1}{3}x$



$$\begin{aligned}
 E_2 &\rightarrow E_3 \\
 f_2: R^+ &\rightarrow R^+ \\
 x &\mapsto x
 \end{aligned}$$

Logo,  $f_2(x) = x$

$$\begin{aligned}
 E_3 &\rightarrow E_4 \\
 f_3: R^+ &\rightarrow R^+ \\
 x &\mapsto \frac{1}{5}x
 \end{aligned}$$

Logo,  $f_3(x) = \frac{1}{5}x$ .

Fazendo,

$$f_1 \circ f_2 \circ f_3 = f_1(f_2(f_3(x))) = \frac{1}{3}f_2(f_3(x)) = \frac{1}{3}f_3(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}x = \frac{1}{15}x$$

Assim, neste caso, vemos que quando a engrenagem motora  $E_1$  dá um giro, a engrenagem de saída  $E_4$  dá  $1/15$  de volta. Portanto, vemos que esse sistema foi montado para se ter uma redução na quantidade de giros na engrenagem de saída. Do contrário, caso os dentes da engrenagem  $E_1$  tivessem acoplados diretamente com os de  $E_4$ , teríamos uma redução de apenas  $1/5$  de giros, o que reforça a ideia de que o processo foi de composição.

#### 4.1.7 Função Inversa

O conceito de função inversa é outro que exploramos em nosso objeto de estudo. A inversa de uma função tem por objetivo trocar o domínio pelo contradomínio e vice-versa, de modo que haja uma nova relação de função entre o novo domínio e o novo contradomínio. Essa nova relação de correspondência, que denominamos imagem é a inversa da função inicial. Assim como as funções compostas, a função inversa é outro tipo de função determinada por uma previamente escolhida.

Na determinação da função inversa, podemos destacar duas características principais:

1. O contradomínio de  $f$  coincide com sua imagem, ou seja, todo elemento do contradomínio é correspondente de algum elemento do domínio (ser sobrejetiva).

2. Cada elemento do contradomínio de  $f$  é imagem de um único elemento do domínio (ser injetiva)

É necessário que a função  $f$  satisfaça essas duas condições para que seja invertível, ou seja, possuir inversa. Funções que satisfazem essas condições são denominadas bijetoras. Assim, dizemos que apenas as funções bijetoras possuem inversa.

Definição de Função Inversa: Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma bijeção dada. A *função inversa* de  $f$  é a função  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  tal que, para cada  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , temos:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Proposição: Se  $f$  é uma função monótona estritamente crescente ou monótona estritamente decrescente, então existe a função inversa de  $f$ , a qual é do mesmo tipo, i.e., respectivamente monótona estritamente crescente ou monótona estritamente decrescente<sup>5</sup>.

Para o caso que estamos estudando, considere a função  $E(x) = 3x$ , descrita pela interação de engrenagens, conforme Fig. 9.

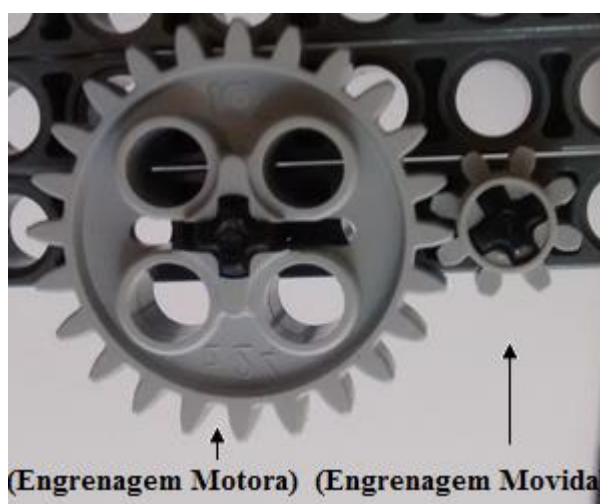


Figura – 9: Interação de engrenagens descrita pela função  $E(x) = 3x$

Nela vemos que a cada giro da Engrenagem Motora, corresponde a três giros da Engrenagem Moviada, isto porque a engrenagem  $E$  possui 24 dentes enquanto a engrenagem  $A$  possui 8 dentes. Então, sua inversa  $E^{-1}$ , troca as funções de Motora e Moviada, neste novo caso, cada giro da Engrenagem Motora, corresponde a um terço de giro da engrenagem moviada, conforme Fig. 10.

<sup>5</sup> Esta proposição é melhor discutida no livro “Funções, Limite e Continuidade” (Ribbenboim, 2012, p. 105,106).

$$E^{-1}(x) = \frac{x}{3}$$

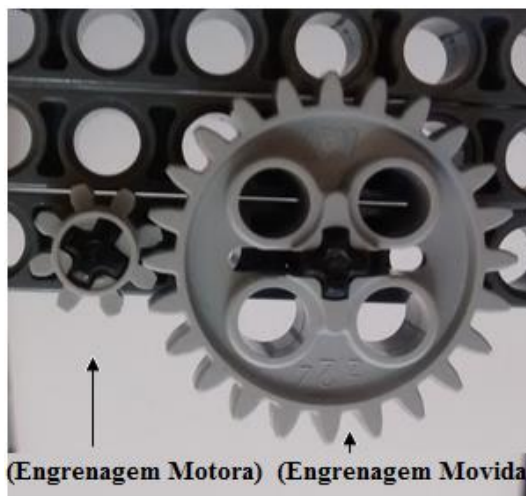


Figura – 10: Interação de engrenagens descrita pela função  $E(x) = \frac{1}{3}x$

Observe que enquanto  $E(x)$  aumenta a quantidade de giros dado pela engrenagem  $A$  à cada giro de  $E$ , sua inversa  $E^{-1}(x)$  os reduz, isto porque agora a engrenagem motora é a  $A$ , enquanto a movida é a  $E$ , em outras palavras, porque cada giro da engrenagem  $A$  corresponde a um terço do giro da engrenagem  $E$ .

## 5 APLICAÇÕES

O presente trabalho foi estabelecido com o intuito de responder algumas questões por nós levantadas quanto a uma nova proposta e/ou metodologia de abordar função na sala de aula.

O que nos intrigava era que não queríamos dar exemplos práticos de aplicação, mas se possível, materializar a função, compreendendo o que é e como “funciona” o  $f(x)$ .

A primeira instrução dada pelo orientador foi quanto a utilização da robótica como ferramenta de auxílio para o ensino da matemática, mais precisamente, utilizando o Kit NXT. Tínhamos que encontrar um objeto de estudo, foi quando surgiu a ideia de explorar um relógio analógico feito de LEGO – Classic Clock, conforme Fig. 11.



Figura – 11: Relógio Analógico Classic Clock, visão frontal, traseira e lateral.

A partir desse ponto, nos esforçamos em como ensinar a matemática contida nele. A matemática que mais nos chamou a atenção foi a da proporcionalidade entre as engrenagens do relógio, e conseqüentemente, o conceito de função afim.

Explorando um pouco mais, vimos que o tipo de função afim a ser abordado, era o caso especial de funções lineares. Então, as relações, interações entre as engrenagens passou a ter papel de maior relevância e o relógio se restringiu em apenas um modelo lúdico onde é notório a percepção dessas interações com um fim prático.

Sabemos o Kit NXT, por nós escolhido, possibilita uma vasta gama de opções para explorar função linear, bem como inúmeros outros conceitos, com exemplos interativos. Porém, buscamos algo simples, de fácil compreensão, pois tínhamos que exemplos um pouco

mais elaborados em um primeiro momento, acabariam por remontar uma resistência ainda maior de compreender a matemática das funções, apesar de muito provavelmente serem mais interessantes. Portanto, consideramos que estes exemplos podem e devem ser explorados posteriormente, após a apropriação de alguns saberes mais pertinentes de matemática.

Durante nossa exploração do relógio analógico, percebemos a existência de possibilidades para além da matemática, abordagens que podiam ser feitas nas áreas da física e mecânica. No que tange a matemática, questões de proporcionalidade e mais especificamente às funções lineares e as possíveis composições e inversões que podiam ser feitas. Então, tentamos aqui descrever por meio de uma sequência didática, os passos que o professor pode seguir para fazer a exploração do tema em sala de aula.

Oportunamente, ressaltamos que escolhemos 8 tipos de engrenagens do Kit NXT, conforme Fig. 12.

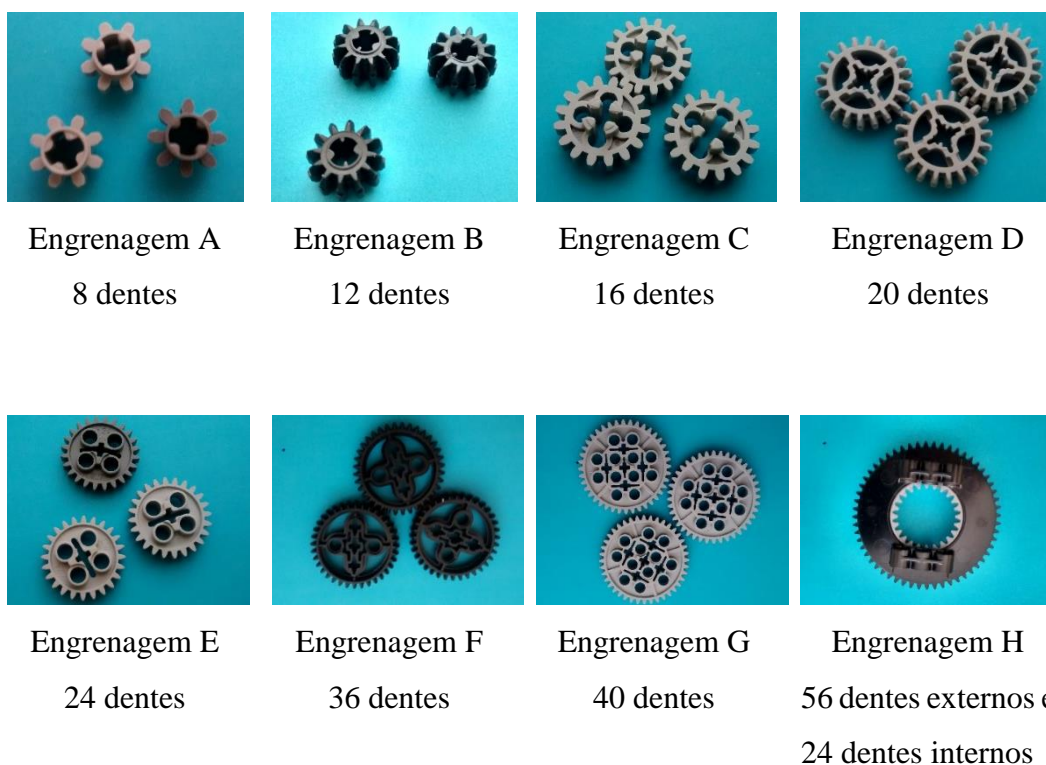


Figura – 12: Conjunto de principais engrenagens do Kit NXT

Inicialmente vamos definir como variável independente o giro dado por cada tipo de engrenagem e como variável dependente o número de voltas sofridas pela engrenagem do tipo A ao ser combinada com as demais engrenagens.

Assim precisamos saber se com essa relação temos uma situação de função bem definida.

Seja  $P$  o conjunto definido pelos giros das 8 engrenagens  $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  (quantidade real positiva),  $Q$  o conjunto definido pelas quantidades de giros dados pela engrenagem A (quantidade real positiva), e seja  $f$  a relação que associa o giro de cada tipo de engrenagem com os giros da engrenagem A. Observe pela Fig. 12 que a engrenagem  $H$  é de dois tipos (parte externa e interna),

Podemos afirmar que existe uma relação de proporcionalidade em  $f$  baseado no fato que se segue.

Elon et al (1997), chama nossa atenção para um fato bastante interessante de que existem casos onde o Teorema precisa ser aplicado a grandezas (como massa, área e no nosso caso, giros, por exemplo) cujas medidas são expressas somente por números positivos. Deste modo, temos uma função crescente  $f: R^+ \rightarrow R^+$ , onde  $R^+ = \{x \in R; x > 0\}$  é o conjunto dos números positivos. Assim, as afirmações (a), (b) e (c) do Teorema devem ser compreendidas assim:

$$(a+) f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \text{ para todo } n \in N \text{ e todo } x \in R^+.$$

$$(b+) \text{ Pondo } a = f(1), \text{ tem-se } f(x) = ax, \text{ para todo } x \in R^+.$$

$$(c+) f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ para qualquer } x, y \text{ reais.}$$

Pelo item  $(a^+)$  do Teorema acima, temos que para qualquer  $x_0 \in R^+$  fixado, devemos ter  $f(nx_0) = nf(x_0) \forall n \in R$ . Assim, se  $f(x_0) = k$ ,  $f(nx_0) = nk$ . Porém como exemplificar isso usando as engrenagens?

Considere uma situação de interação de duas engrenagens, uma do tipo C e outra do tipo A, e seja  $f$  a função que associa os giros de C com os giros de A. Por observação sabemos que cada giro de C (16 dentes) equivale a dois giros de A (8 dentes). Consideremos a seguinte situação:

Seja  $x_0 = 0,5$ . Por visualização/experimentação sabemos que  $f(0,5) = 1$ , ou seja, que meia volta da engrenagem C equivale a uma volta da engrenagem A.

Dizemos então que:

$$n = 1$$

$$f(1 \cdot 0,5) = 1 \cdot f(0,5) = f(0,5) = 1$$

$$n = 2$$

$$f(2 \cdot 0,5) = 2f(0,5) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2$$

Pelo item ( $b^+$ ), designamos  $a = f(1)$ , e fazemos  $f(x) = ax, \forall x \in R^+$ , logo a função de interação entre as engrenagens  $A$  e  $C$  é de fato definida por:

$$\begin{aligned} C &\rightarrow A \\ f: R^+ &\rightarrow R^+ \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

Logo,  $f(x) = 2x$ ,

onde  $x$  são os giros da engrenagem  $C$  e  $f(x)$  os giros da engrenagem  $A$ .

Sistematicamente, quando tivermos uma interação entre duas engrenagens  $U$  e  $V$ , ou seja, quando  $U$  e  $V$  tiverem acopladas, sendo  $U$  a engrenagem motora e  $V$  a engrenagem movida, compreenderemos assim:

$$\begin{aligned} U &\rightarrow V, \text{ (aplicação da engrenagem } U \text{ na engrenagem } V) \\ f_i: R &\rightarrow R, \text{ (pode ser associada a uma função linear dos reais nos reais)} \\ x &\rightarrow f_i(x) = K \cdot x, \quad K \in R, \end{aligned}$$

onde qualquer giro  $x$  em  $U$ , provocará  $K \cdot x$  giros em  $V$ , com  $K \in R$ .

Para não deixar as expressões muito elaboradas, vamos nos deter apenas na lei de formação das funções envolvidas, assim o domínio e o contradomínio ficarão subentendidos serem o conjunto dos reais.

Note que este  $K$ , é um número real, que pode ser considerado como o coeficiente de proporcionalidade de  $U$  para  $V$ , também chamado de coeficiente angular. Vale recordar que esse número é obtido pela razão dos raios das engrenagens de  $U$  para  $V$ , ou pela razão das quantidades de números de dentes.

Agora uma vez cientes de que as interações entre as engrenagens podem ser modeladas por meio de uma função linear passemos para uma proposta metodológica de ensino.

Dentre as diversas possibilidades de ensino escolhemos a proposta de Sequência Didática para nortear nossa prática.

### **5.1 Sequência Didática de Matemática: ensinando Funções Lineares por meio do Kit de Robótica da Mindstorms NXT LEGO®**

Objetivo:

Compreender os conceitos de valores numéricos da Função Linear, bem como as possibilidades de composição e inversão entre as mesmas.

Série alvo:

9º ano do Fundamental II e 1ª Série do Ensino Médio

Tempo estimado:

Entre 5 a 8 aulas de 40 minutos

Material necessário:

Kit NXT

Desenvolvimento:

Por meio de análise prévia envolvendo os conteúdos, propusemos as seguintes atividades na tentativa de materializar ou concretizar conceitos abstratos envolvendo as funções lineares. O intuito não é apenas mostrar uma aplicação prática, mas sim de fazer com que o aluno consiga visualizar e tocar naquilo que outrora era abstrato, conseguindo fazer correlações com os conteúdos explanados ou não até o momento.

1º dia:

Primeira etapa – conversação

Nesta etapa retomaremos com os alunos por meio de perguntas direcionadas conceitos básicos de função e se já foi falado também abordaremos os de função afim/linear, bem como os de proporcionalidade. Caso contrário, durante a aula vamos construindo esse conceito.

Segunda etapa – identificando o sentido dos giros

De posse de todas as engrenagens pinos e barras disponíveis do Kit NXT, pede-se aos alunos que construam o que denominamos de Trem de Engrenagens no qual vamos conjecturar o sentido dos giros a medida que vamos compondo o sistema engrenagens. De modo que cheguem à seguinte conclusão, conforme demonstrado na Fig. 13.





Quantidade par: giros contrários

Quantidade ímpar: giros no mesmo sentido

Figura – 13: Orientação dos giros entre as engrenagens motora e movida – Trem Simples.

### Terceira etapa – construindo funções identidades

Nesta etapa pede-se aos alunos que façam interações com as engrenagens, duas ou mais, de modo que todas girem a mesma quantidade de voltas, ou seja, um giro de uma resulte em um giro da outra. Seguem algumas possibilidades, demonstradas conforme Fig. 14.



Figura – 14: Exemplos de função identidade descritas por engrenagens

Assim, define-se neste tipo de interação a função identidade.

É importante ressaltar que acoplamentos com as engrenagens B, D e F, não é possível sob uma mesma viga, pois diferentemente das outras engrenagens que tem os dentes retos, essas engrenagens tem os dentes bichanfrados o que requer mais de uma viga para se fazer o acoplamento entre elas, ou entre elas e uma outra com dentes retos.

2º dia

Primeira etapa – conversação

Inicialmente vamos retomar com os alunos por meio de exemplos no quadro-negro questões de proporcionalidade direta e inversa. Depois abordaremos com os alunos que de modo sistêmico, a proporcionalidade entre os giros de engrenagem se dá pela medida dos raios uma vez que:

Considere  $C$  a função comprimento da circunferência relacionada a cada engrenagem. Sejam as engrenagens  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , onde,  $r_1 = ar_2$ , são raios e  $a$  número real positivo. Então, como os giros são voltas completas, seguem:

$$C(\epsilon_1) = 2\pi r_1$$

$$C(\epsilon_2) = 2\pi r_2$$

Como  $r_1 = ar_2$ , então:

$$C(\epsilon_1) = 2\pi ar_2 = a \cdot 2\pi r_2 = a \cdot C(\epsilon_2),$$

pois já vimos que a interação de engrenagens e seus respectivos giros podem ser descritos por uma função linear.

Contudo, para não tornar o trabalho exaustivo não vamos trabalhar com medidas dos raios das engrenagens, e sim com a quantidade de dentes que as mesmas possuem.

Deste modo, nessa aula pediremos aos alunos que contem os dentes de cada engrenagem, conforme mostrado na Fig. 12.

O objetivo dessa aula é que os alunos identifiquem a existência de engrenagens múltiplas no que tange a quantidade de dentes.

Segunda etapa – identificando proporções e construindo funções lineares

Nessa aula, podemos fazer uma abordagem distinta da apresentada até agora. Vamos definir o domínio  $P$  das funções como sendo o conjunto dos reais positivos, cada uma das 8 engrenagens ao se interagir com a engrenagem A será vista como distintas funções, conforme Fig. 15.

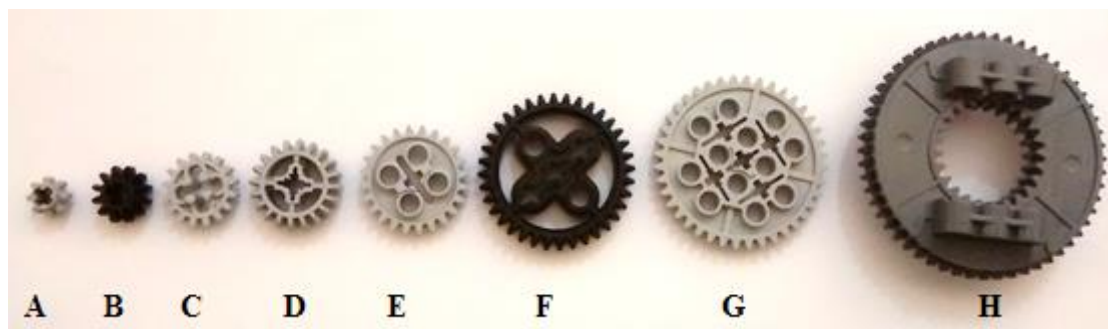


Figura – 15: Tipos de engrenagens motoras que interagem com a do tipo A designando funções

O contradomínio  $Q$  é definido como sendo os reais positivos, e o conjunto imagem  $I$  como sendo os números de voltas sofridas pelas pela engrenagem do tipo A, conforme Fig. 16.

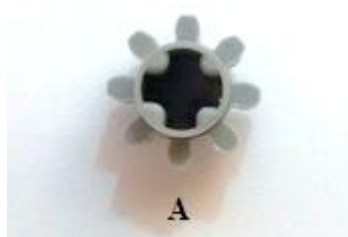


Figura – 16: Engrenagem Moviada do tipo A

Observe que  $Q$  também é real. De posse das quantidades de dentes das engrenagens, pede-se aos alunos que construam estruturas nas quais seja possível identificar quantos giros são desencadeados pela engrenagem movida A, ao serem combinadas com as demais (A, B, C, D, E, F, G, H). Seguem algumas situações, descritas na Fig. 17.

Situação 1



$$A(x) = x$$

Situação 2



$$B(x) = \frac{3}{2}x$$

Situação 3



$$C(x) = 2x$$

Situação 4



$$D(x) = \frac{5}{2}x$$

Situação 5



$$E(x) = 3x$$

Situação 6



$$F(x) = \frac{9}{2}x$$

Situação 7



$$G(x) = 5x$$

Situação 8



$$H(x) = 7x$$

Figura – 17: Exemplos de combinações entre as engrenagens e os tipos de função por elas descritas.

O papel do professor neste instante é de, caso o aluno não consiga, fazer com que ele observe que nas situações acima ilustradas, Situação 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, perceba as seguintes proporções,  $(1, 3/2, 2, 5/2, 3, 9/2, 5, 7):1$  que se refere as proporções dos dentes de cada tipo de engrenagem  $(A, B, C, D, E, F, G, H)$  para a os da engrenagem A. Ou caso tenha dificuldade com os números fracionários, multiplique por 2 e identifique as seguintes proporções de giros,  $(2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 14):2$ .

Imediatamente após essa análise pode se definir as funções  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$ ,  $D(x)$ ,  $E(x)$ ,  $F(x)$  e  $H(x)$  de domínio P e contradomínio Q, ilustradas na Fig. 11.

3º dia

Primeira etapa – Conversação e inversão de funções

Já no terceiro dia de aula podemos abordar a inversão das funções onde pergunta-se aos alunos qual a fração de giro é dado por cada tipo de engrenagem a medida que se gira a engrenagem A.

A sugestão que damos aqui é que se construa com os alunos de modo abstrato a lei de formação de cada função inversa e só depois peça para que eles observem o que ocorre na prática. Assim teremos as seguintes funções:

$$A^{-1}(x) = x$$

$$B^{-1}(x) = \frac{2}{3}x$$

$$C^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$$

$$D^{-1}(x) = \frac{2}{5}x$$

$$E^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$$

$$F^{-1}(x) = \frac{2}{9}x$$

$$G^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$$

$$H^{-1}(x) = \frac{1}{7}x$$

Segunda etapa – Composição de funções (1)

Esta etapa apresenta estruturas de composição um pouco mais complexas, por isso, o professor pode definir funções compostas, dar vários exemplos numéricos e

posteriormente apresentar alguns exemplos com as engrenagens do kit. O professor deve dar ênfase na importância de se trabalhar com engrenagens ligadas por um mesmo eixo para compor funções, de modo a transferir a quantidade de giros de uma para outra, até se obter a estrutura desejada, ou seja, trabalhar com Trem Composto de Engrenagens. Veja os seguintes exemplos, na Fig. 18.

$$(GoG)(x) = G(G(x)) = G(5x) = 5.5x = 25(x)$$



$$GoD(x) = G(D(x)) = G(3x) = 5.3x = 15(x)$$



Figura – 18: Algumas situações de composição de função descritas por engrenagens.

É importante ressaltar que apesar de oportuno, questões como velocidade angular e torque devem ser mencionados, porém não priorizados.

A partir daí pode-se pedir aos alunos que componham duas a duas, todas as funções descritas acima. Também que abordem a inversão das funções

Além disso pode-se reafirmar os desejos de potencializar ou amenizar os giros, neste caso servindo-se da inversão de funções, mostrando aos alunos a relevância da aplicação das engrenagens na mecânica.

4 ° dia

Composição de funções (2)

Acreditando que os alunos estejam preparados para mais desafios, podemos pedir aos mesmos que componham três ou mais engrenagens e que depois façam os cálculos para averiguarem os resultados dos giros. Desafios como redução mínima ou potencialização máxima de giros podem ser lançados.

5° e 6ª dia

Os últimos dias de aula dessa sequência didática será destinado a montagem do relógio 9695-Classic-Clock com o Kit NXT (Anexo A). Acreditamos ser necessário umas três aulas para se concluir todas as etapas da montagem com a respectiva programação.

O professor pode dividir a turma em grupos de no máximo três alunos, onde cada grupo construirá o seu relógio. As atividades decorrentes podem ser as de alterar os valores numéricos na programação. Modificar o tempo de aparição do cuco, a velocidade do ponteiro dos segundos, o ângulo entre cada intervalo de tempo do ponteiro dos segundos.

Pode-se pedir aos alunos que tentem definir uma função que descreva as relações entre os giros do ponteiro dos segundos para os dos minutos e das horas. Além disso, pode-se pedir para que detalhem os processos de interação de todas as engrenagens envolvidas no movimento dos ponteiros dos segundos e deixar como desafio as interações existentes entre as engrenagens envolvidas no movimento dos ponteiros dos minutos e das horas, como trataremos na próxima seção. Também como proposta de atividade sugere-se aos alunos que acertem os relógios e que determinem por escrito e executem como realizar essa tarefa.

## 5.2 Estudo das interações entre as engrenagens do Relógio Analógico Classic-Clock



Figura – 21:Relógio Analógico Classic-Clock



O relógio Analógico Classic-Clock, que tem o manual construção apresentado em anexo e também disponível em LEGO mindstorms (2010), tem três ponteiros que são denominados ponteiros dos segundos, dos minutos e das horas, que funcionam iguais aos relógios comerciais.

O ponteiro dos segundos tem um período de  $T = \frac{1}{60}F$ , por isso leva 60 períodos para dar um volta completa em torno do seu eixo, cada período aqui chamamos de segundo e a volta completa de minuto.

De igual modo, o ponteiro dos minutos também possui um período de  $T = \frac{1}{60}F$ . Neste caso, cada período corresponde a uma volta dos segundos, que chamamos de minuto. Assim, o ponteiro dos minutos leva 60 períodos para dar uma volta completa, ou seja, leva 60 minutos.

Já no ponteiro das horas, o período é de  $T = \frac{1}{12}F$ . Aqui cada período corresponde a uma volta do ponteiro dos minutos, que chamamos de hora. Neste caso, o ponteiro das horas leva 12 períodos para dar uma volta completa, ou seja, leva 12 horas.

Portanto, podemos dizer que para termos uma volta completa no ponteiro das horas, precisamos de 720 ciclos do ponteiro dos segundos e 60 ciclos do ponteiro dos minutos. Passemos então a análise:

Adotaremos índice pra cada engrenagem afim de quantificar quantas de cada tipo estão envolvidas no processo. Além das engrenagens já mencionadas vamos trabalhar com mais uma denominada engrenagem  $X$ . (Veja Fig. – 22)



Figura – 22: Engrenagem  $X$  do Kit NXT

Observamos que o mover de todos os ponteiros estão na dependência do deslocar da engrenagem motora  $M_1$  (veja Fig. 23). Logo os giros  $M_1$  que são os mesmos do motor, é o domínio das aplicações entre as interações que provocarão o deslocar dos ponteiros dos segundos, minutos e horas. Assim teremos três estudos a fazer, entre  $M_1$ , os ponteiros dos segundos, e todas as engrenagens movidas que estiverem no meio dessa aplicação, bem como



entre  $M_1$ , o ponteiro dos minutos e as engrenagens que intermediarem essas aplicações e de modo análogo entre  $M_1$  e o ponteiro das horas.

Temos ainda como ressalva que como a engrenagem  $X$  é diferente das demais, quanto sua forma em geral, bem como a de seus dentes, nossa unidade base de giro ainda será os relacionados pela engrenagem  $A$ .

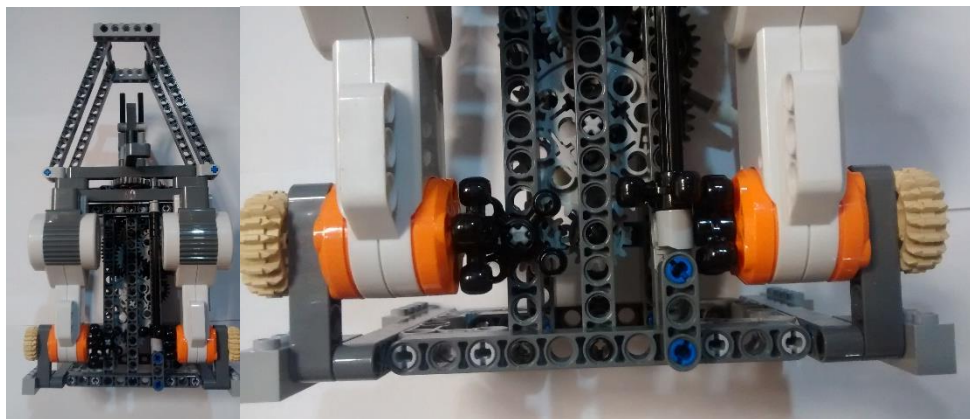


Figura – 23: Detalhe da engrenagem motora  $M_1$  em contato direto com o motor.

### 5.2.1 Estudo das interações para obtenção dos segundos

Neste processo estão envolvidas as seguintes engrenagens:

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow A_1 \rightarrow s$$

$s$  é o ponteiro dos segundos - veja Fig. 24.



Figura – 24: Engrenagens para o funcionamento do ponteiro dos segundos – ordem da esquerda pra direita.

Vamos analisar cada relação entre duas engrenagens consecutivas:

1)  $M_1 \rightarrow M_2$ , estão acopladas diretamente, logo como são do mesmo tipo são descritas por uma função identidade:

$$f_1(x) = x$$

2)  $M_2 \rightarrow C_1$  estão ligadas por um mesmo eixo, logo o mesmo giro de  $M_2$  será transmitido para  $C_1$ , assim essa relação também é descrita por uma função identidade:

$$f_2(x) = x$$

Logo o processo  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow C_1$ , pode ser entendido como a composição das funções  $(f_1 \circ f_2)(x) = x$

3)  $C_1 \rightarrow C_2$  estão ligadas diretamente, como são do mesmo tipo estabelecem relação de identidade, assim a função que descreve essa relação é:

$$f_3(x) = x$$

Então as relações  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$ , são modeladas pela composição

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = x$$

A engrenagem  $A_1$ , bem como o ponteiro dos segundos estão acoplados sobre o mesmo eixo de  $C_2$ , portanto, sujeitos ao mesmo giro, disto concluir que:

$$C_2 \rightarrow A_1 = A_1 \rightarrow s$$

$$f_3(x) = f_4(x) = x$$

Portanto, as interações entre as engrenagens,

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow A_1 \rightarrow s,$$

que são modeladas pelas composições,

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x) = x,$$

nos diz que cada giro da engrenagem  $M_1$ , ou seja, cada giro do motor, vai resultar em um giro do ponteiro ( $s$ ) dos segundos.

Logo temos uma relação de identidade entre a engrenagem motriz  $M_1$  e o ponteiro dos segundos  $s$ .

### 5.2.2 Estudo das interações para obtenção dos minutos

Para o ponteiro dos minutos seguem as interações a partir da engrenagem  $A_1$ .

$$A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1 \rightarrow A_2 \rightarrow E_2 \rightarrow B_2 \rightarrow E_3 \rightarrow m$$

$m$  é o ponteiro dos minutos – Veja Fig. 25.

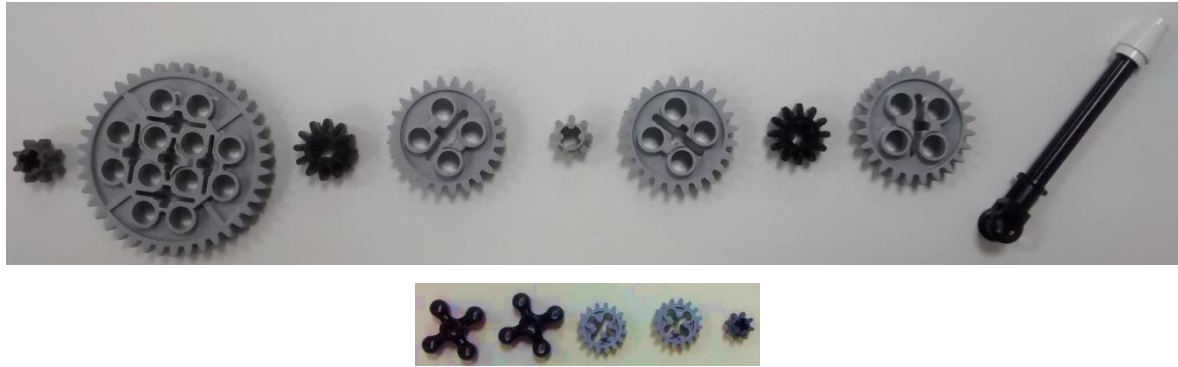


Figura – 25: Engrenagens envolvidas no processo de funcionamento dos minutos

A figura acima mostra que engrenagens dos segundos estão associadas com as dos minutos que estão em destaque.

Como a última relação que envolvia  $A_1$  era de identidade ( $f_3$ ), seguem a seguinte análise de cada relação para duas engrenagens consecutivas:

1)  $A_1 \rightarrow G_1$ , estão ligadas diretamente numa relação de redução. Esta relação foi dada anteriormente como a função inversa  $G^{-1}$ . Porém vamos defini-la por:

$$f_5(x) = \frac{1}{5}x$$

2)  $G_1 \rightarrow B_1$ , estão acopladas por um mesmo eixo, assim se estabelece uma relação de identidade entre elas, portanto o mesmo giro sofrido por  $G_1$ , será transmitido a  $B_1$

$$f_6(x) = x$$

Assim das interações entre as engrenagens  $A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1$ , segue:

$$(f_5 \circ f_6)(x) = \frac{1}{5}x$$

3)  $B_1 \rightarrow E_1$ , estão acopladas diretamente num processo de redução. Esta relação é dada pela função:

$$f_7(x) = \frac{1}{2}x,$$

Logo temos para as relações de  $A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1$ , as seguintes composições:

$$(f_5 \circ f_6 \circ f_7)(x) = \frac{1}{10}x$$

4)  $E_1 \rightarrow A_2$ , estão acopladas por um mesmo eixo, logo,

$$f_8(x) = x$$

Dizemos então que as interações entre as engrenagens  $A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1 \rightarrow A_2$ , são descritas pelas seguintes relações de funções:

$$(f_5 \circ f_6 \circ f_7 \circ f_8)(x) = \frac{1}{10}x$$

5)  $A_2 \rightarrow E_2$ , estão acopladas diretamente em uma relação de redução, a função que descreve o processo é dada por:

$$f_9(x) = \frac{1}{3}x$$

Assim das interações entre  $A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1 \rightarrow A_2 \rightarrow E_2$ , seguem as seguintes relações de função:

$$(f_5 \circ f_6 \circ f_7 \circ f_8 \circ f_9)(x) = \frac{1}{30}x$$

6)  $E_2 \rightarrow B_2$ , estão sobre um mesmo eixo, logo descreve uma relação de identidade, e a função que descreve essa relação é dada por:

$$f_{10}(x) = x$$

Logo, as interações entre as engrenagens

$A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1 \rightarrow A_2 \rightarrow E_2 \rightarrow B_2$ , são descritas pelas relações de funções:

$$(f_5 \circ f_6 \circ f_7 \circ f_8 \circ f_9 \circ f_{10})(x) = \frac{1}{30}x$$

7)  $B_2 \rightarrow E_3$ , estão acopladas diretamente em uma relação de redução descrita pela função:

$$f_{11}(x) = \frac{1}{2}x$$

Deste modo, as interações entre as engrenagens

$$A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1 \rightarrow A_2 \rightarrow E_2 \rightarrow B_2 \rightarrow E_3$$

são descritas pelas seguintes relações de funções:

$$(f_5 \circ f_6 \circ f_7 \circ f_8 \circ f_9 \circ f_{10} \circ f_{11})(x) = \frac{1}{60}x$$

8)  $(A_1 \rightarrow G_1 \rightarrow B_1 \rightarrow E_1 \rightarrow A_2 \rightarrow E_2 \rightarrow B_2 \rightarrow E_3) \rightarrow m$ , nos diz que as interações entre essas engrenagens é aplicada diretamente em  $m$  (ponteiro dos minutos).

Lembrando que  $x$  é decorrente da relação de identidade entre  $M_1 \rightarrow M_2$ , podemos dizer que cada giro de  $M_1$  corresponde a  $\frac{1}{60}$  de  $m$ , ou seja, 60 giros de  $M_1$  corresponde a um giro de  $m$ . Como cada giro de  $M_1$  corresponde a 1 minuto, dizemos que  $m$  leva 60 minutos pra dar uma volta completa, ou seja, 1 hora.

### 5.2.3 Estudo das interações para obtenção das horas

Para o ponteiro das horas seguem as interações a partir da engrenagem  $E_3$ , conforme Fig. 26.

$$E_3 \rightarrow B_3 \rightarrow E_4 \rightarrow B_4 \rightarrow E_5 \rightarrow A_3 \rightarrow H_1 (\text{internamente}) \rightarrow h$$

$h$  é o ponteiro das horas.



Figura – 26: Engrenagens envolvidas no processo de funcionamento das horas.

A figura acima mostra que engrenagens dos segundos e minutos estão associadas com a das horas que estão em destaque.

Vimos que na última composição, as interações entre as engrenagens até  $E_3$  foi descrita por:

$$(f_5 \circ f_6 \circ f_7 \circ f_8 \circ f_9 \circ f_{10} \circ f_{11})(x) = \frac{1}{60}x. \text{ Chamando essa composição de } g(x) \text{ e}$$

analisando agora as interações entre as engrenagens para o ponteiro das horas segue:

- 1)  $E_3 \rightarrow B_3$ , estão acopladas em um mesmo eixo, logo descrevem uma relação de identidade, então:

$$f_{12}(x) = x$$

Assim, para as interações entre as engrenagens  $\dots \rightarrow E_3 \rightarrow B_3$ , segue as relações de função:

$$(g \circ f_{12})(x) = \frac{1}{60}x$$

2)  $B_3 \rightarrow E_4$ , descreve uma relação de redução entre as engrenagens, logo a função que descreve essa situação é:

$$f_{13} = \frac{1}{2}x$$

Portanto, para as interações  $\dots \rightarrow E_3 \rightarrow B_3 \rightarrow E_4$ , temos as seguintes funções associadas:

$$(g \circ f_{12} \circ f_{13})(x) = \frac{1}{120}x$$

3)  $E_4 \rightarrow B_4$ , estão em um mesmo eixo, logo a relação é de identidade, por isso a função associada é:

$$f_{14} = x$$

Quanto as composições das funções associadas temos:

$$\dots \rightarrow E_3 \rightarrow B_3 \rightarrow E_4 \rightarrow B_4, \text{ relacionadas com } (g \circ f_{12} \circ f_{13} \circ f_{14})(x) = \frac{1}{120}x$$

4)  $B_4 \rightarrow E_5$ , trata-se de uma relação de redução, onde a função que a descreve é dada por:

$$f_{15}(x) = \frac{1}{2}x$$

Considerando todas as interações até o momento, temos que as composições que descreve a atual situação entre  $\dots \rightarrow E_3 \rightarrow B_3 \rightarrow E_4 \rightarrow B_4 \rightarrow E_5$ , são dadas por:

$$(g \circ f_{12} \circ f_{13} \circ f_{14} \circ f_{15})(x) = \frac{1}{240}x$$

5)  $E_5 \rightarrow A_3$ , estão acopladas pelo mesmo eixo, assim,  $f_{16}(x) = x$  é a função que descreve essa relação de identidade. Logo, para as interações:

$\dots \rightarrow E_3 \rightarrow B_3 \rightarrow E_4 \rightarrow B_4 \rightarrow E_5 \rightarrow A_3$ , temos as seguintes composições associadas:

$$(g \circ f_{12} \circ f_{13} \circ f_{14} \circ f_{15} \circ f_{16})(x) = \frac{1}{240}x$$

6)  $A_3 \rightarrow H_1$  (*internamente*), descreve uma situação de redução, para a qual temos a seguinte relação de função associada:

$$f_{17}(x) = \frac{1}{3}x.$$

Considerando as engrenagens associadas até agora e as composições de funções a elas relacionadas, temos:

$$\dots \rightarrow E_3 \rightarrow B_3 \rightarrow E_4 \rightarrow B_4 \rightarrow E_5 \rightarrow A_3 \rightarrow H_1 \text{ (internamente)}$$

$$(g \circ f_{12} \circ f_{13} \circ f_{14} \circ f_{15} \circ f_{16} \circ f_{17})(x) = \frac{1}{720}x$$

Como o ponteiro das horas  $h$  está acoplado na engrenagem  $H_1$  e que  $x$  é o número de giros dados pela engrenagem  $M_1$ , segue que a cada 720 voltas de  $M_1$ , o ponteiro  $h$  das horas dá uma volta completa. E como cada volta de  $M_1$  corresponde a 1 minuto, temos que o ponteiro das horas leva 720 minutos pra dar uma volta completa.

Abaixo na Fig. 27, segue um resumo das funções dos giros de cada ponteiro.

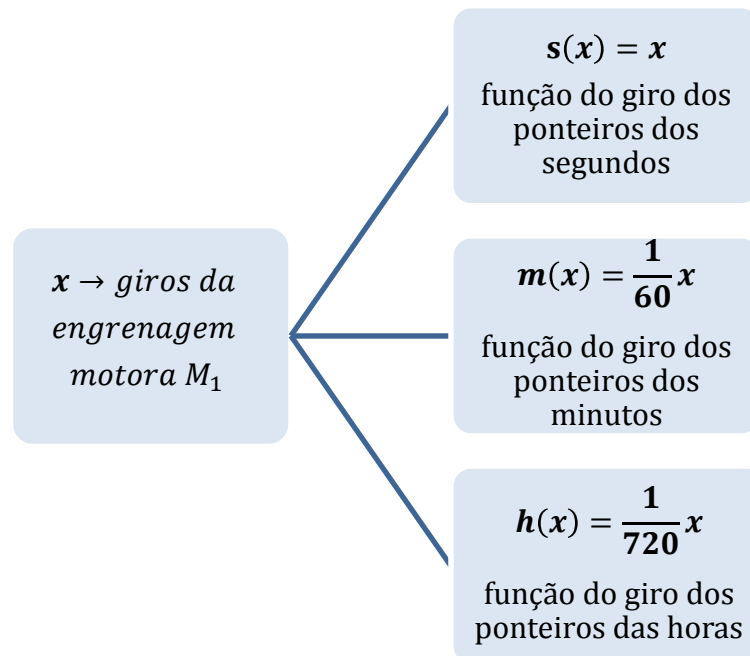


Figura - 27: Funções dos giros dos ponteiros dos relógios

#### 5.2.4 Programação do Relógio Analógico Classic-Clock

A parte de programação do relógio é bem simples, e consiste basicamente em lançar um comando para que o *Brick* faça com que a engrenagem  $M_1$  de um giro por minuto, em um loop infinito.

A ação se completa quando colocamos  $M_1$  girar  $6^\circ$  graus por segundo.

Quanto a parte da automação do cuco, ela ocorre independente de  $M_1$ , ou seja, independente do motor que faz com que  $M_1$  gire. Ela é feita por outro motor que faz três voltas completa de acordo com um temporizador, no meio do processo o cuco canta. Para este caso, colocamos para que o cuco seja ativado a cada 1 minuto, porém este tempo pode ser ajustado conforme a necessidade. Além disso, foi adicionado um som para que quando ativado, o cuco faça seu barulho característico. Abaixo segue na Fig. 28, uma visão geral dos blocos utilizados. Na Fig. 29, tem-se a programação do bloco do motor A do primeiro *loop*. Na Fig. 30, a programação do temporizador ainda no primeiro *loop*. Já nas figuras – 31, 32, 33, 34, temos respectivamente a programação do cuco no segundo *loop*, realizado com um temporizador, bloco do motor B, bloco de Som e novamente bloco do motor B.

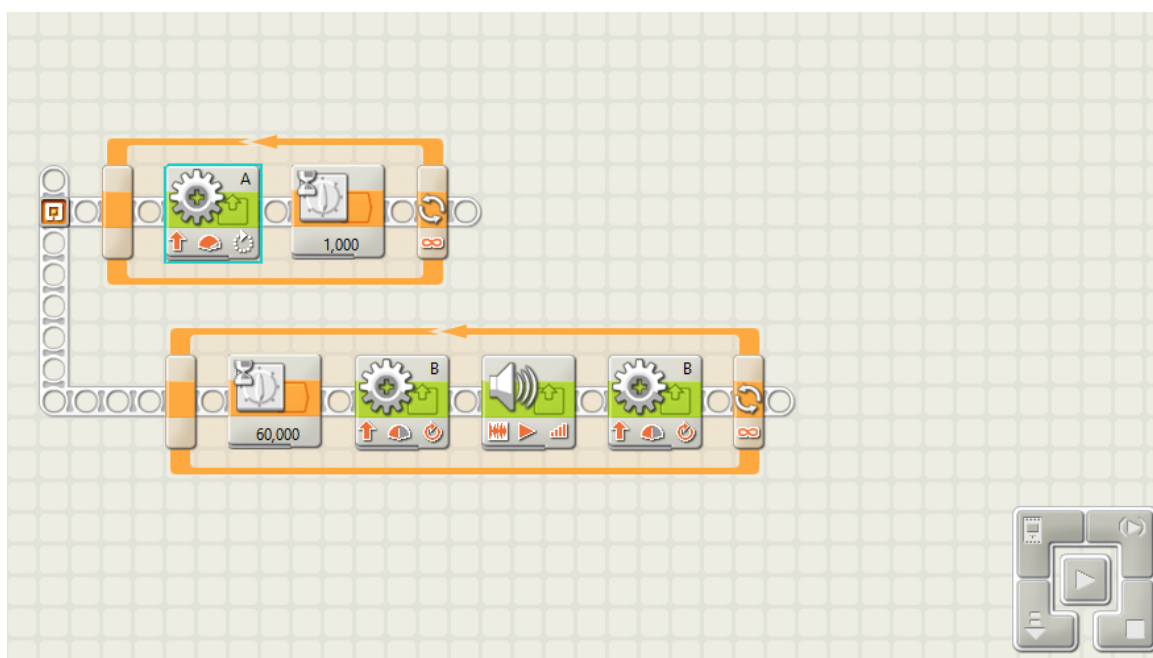


Figura 28: Visão geral dos blocos utilizados na programação



Figura – 29: Configuração do Bloco do Motor A do primeiro *loop*



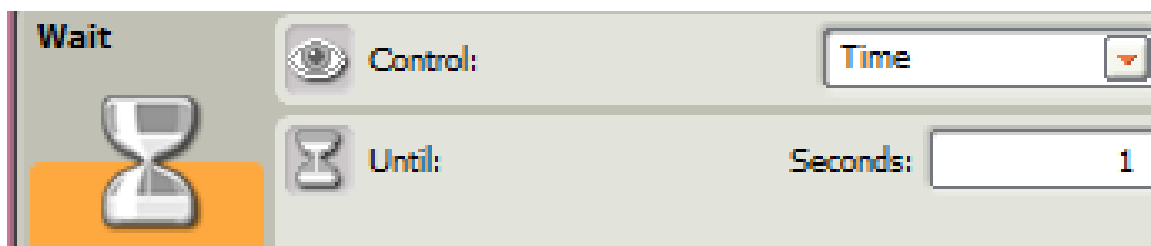


Figura – 30: Configuração do temporizador do primeiro *loop*

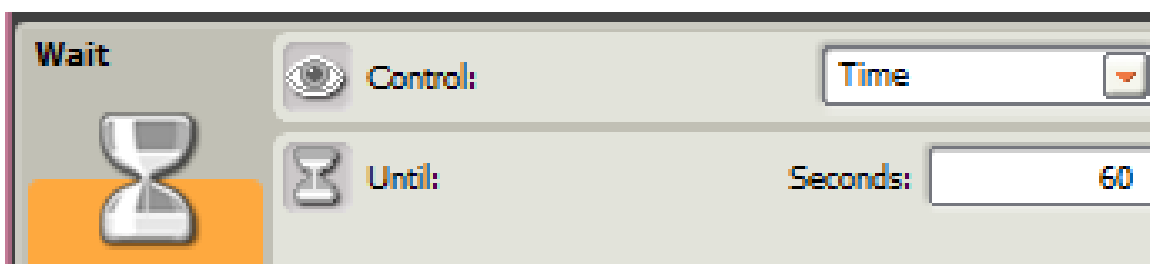


Figura – 31: Configuração do temporizador do segundo *loop*



Figura – 29: Configuração do Bloco do Motor B no segundo *loop*

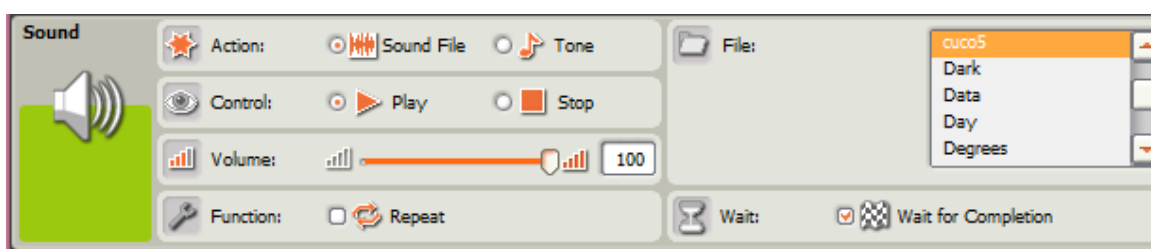


Figura – 29: Configuração do Bloco de áudio para o cuco no segundo *loop*



Figura – 29 Configuração do Bloco do Motor B no segundo *loop*

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É imensurável os benefícios e o crescimento pessoal/profissional que este trabalho nos trouxe. Benefícios que vão para além dos conteúdos estudados. Nos referimos a reflexão sobre a prática docente e sobretudo, mudanças no agir, no modo de compreender o aluno, ao processo de socialização e interação que o momento de pesquisa promove, que não fica escrito em nenhum TCC, dissertação ou tese.

Diferentemente de quando saímos da graduação, agora professores, pudemos formatar o trabalho de modo que este se adequasse de fato a realidade dos alunos. Falamos de problemas que muitos de nós vivenciamos como a busca por aulas agradáveis e diferenciadas.

Quanto ao desenvolver deste trabalho, foi incrível a experiência em ver seu escopo sendo delineado a medida que avançávamos na pesquisa. De modo que a mesma divergiu do seu foco inicial na busca por uma melhor forma de agradar ao programa e atender nossas expectativas, sem perder sua essência.

Conseguimos modelar as funções que descrevem os giros dados pelas engrenagens do relógio Classic-Clock, repercutindo no sincronismo existente no ponteiro dos segundos, minutos e horas. Melhor que isso, na busca em como fazer essa descrição, descobrimos um meio de ensinar função linear utilizando as peças do Kit NXT e pudemos apresentar uma proposta metodológica para abordar a temática em sala de aula, tendo como auxílio o Kit de robótica educacional da NXT.

Gostamos muito de trabalhar com o Kit Mindstorms NXT da LEGO®, devido às múltiplas possibilidades que o mesmo promove no processo de aprendizagem, principalmente por ver que nosso objeto de estudo podia ser explorado também por outras áreas da matemática, além da física e da mecânica. Além de constatar que sua utilização não fica restrita a atividades que usam protótipos robóticos e que mesmo não sendo um robô pronto, trabalhar com peças ou acoplagens delas, como fizemos e propusemos na sequência didática, não deixa de ter caráter lúdico e desafiador.

Esta proposta de atividade também teve significativa relevância por diversos fatores, entre eles, pela própria busca na pesquisa, pela adequação aos questionamentos levantados, pois estamos certos que se não obtivemos, chegamos bem próximo de exemplos da materialização das funções lineares. Nosso contentamento, principalmente por parte de quem escreve esse texto, foi o de que muitas vezes quando pensamos em uma situação e logo já identificamos a qual área da matemática sua compreensão melhor se efetiva, raramente

buscamos verificar sua valia dentro da teoria e neste trabalho essa identificação pôde ser feita. Por isso, podemos alegar que chegamos bem próximo do nosso objetivo, se é que não o alcançamos.

Servimo-nos do modelo de Sequência Didática para fornecer um passo-a-passo ao professor e não apenas uma atividade isolada que mais seria caracterizada como um recorte dentro da exploração do tema. Assim o professor tem uma sequência lógica de etapas a seguir podendo faze-lo sob a forma de um mini projeto ou oficina.

Optamos por uma abordagem simples, que tem muito mais de LEGO<sup>®</sup> do que Logo, isso porque acreditamos que a atividade proposta nesse formato não pode ser mais complexa que a própria abordagem teórica, pois sendo assim estaria fadada rapidamente ao fracasso.

Não poderíamos deixar de afirmar e reafirmar nossa satisfação em ter participado deste programa de Pós-Graduação, pois sabemos que este é um momento ímpar para a vida de qualquer professor. Nossa satisfação não é apenas na oportunidade de se fazer um curso de mestrado, mas principalmente por ser um curso direcionado ao professor, à sua qualificação.

Diante de todas as argumentações que já fizemos para o professor quanto aos benefícios da inovação de sua prática, aos benefícios de se utilizar o kit NXT, ao emprego da robótica educacional nas Unidades Escolares, sabemos que a melhor metodologia de ensino é a inconformidade e a insatisfação de sua regência. Pois só o incômodo da prática que promove mudanças na própria prática. E vivemos em uma sociedade de constante mudanças. Convidamos e convocamos a todos os professores a se dedicarem mais, a serem mais criativos, a observarem que a educação, formação de seus alunos, dos cidadãos de sua cidade, seu Estado e país está nas suas mãos. Cientes de todas as intempéries que a profissão traz consigo, não podemos desistir, pois ser professor é para poucos, para os escolhidos, para os capacitados, para aqueles que tem coragem de doar um pouco de si, o de melhor, para fazer uma sociedade também melhor.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A.L.O.S., SANT'ANA, R.M.T. **Algumas reflexões sobre a inserção das novas tecnologias nas práticas docente**. Pesquisas em Discurso Pedagógico 2011. Disponível em: <<http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/17876/17876.PDF>>. Acesso em: 22 jun. 2014.

ARGENTO, H. **Teoria construtivista**. 2005. Disponível em: <[http://www.robertexto.com/archivo5/teoria\\_construtivista.htm/](http://www.robertexto.com/archivo5/teoria_construtivista.htm/)>. Acesso em 20 jun. 2014

AZEVEDO, S., AGLAÉ, A., PITTA, R., 2010, Minicurso: Introdução a Robótica Educacional. **Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência**. Disponível em: <<http://www.sbpcnet.org.br/livro/62ra/minicursos/MC%20Samuel%20Azevedo.pdf>>. Acesso em: 11 maio 2014.

BENITTI, F. B. V. et al. **Experimentação com robótica educativa no ensino médio: ambiente, atividades e resultados**. Blumenau: Departamento de Sistemas e Computação Universidade Regional de Blumenau, 2009 Disponível em: < <http://robolab.inf.furb.br/robolab/artigos/robolab/wie2009.pdf>>. Acesso em: 22 jan. 2014.

CABRAL, C. P. **Robótica educacional e resolução de problemas: uma abordagem microgenética da construção do conhecimento**. 2010. 142 f. Dissertação (mestrado em educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação, 2011.

CARRETERO, Mario. **Construir e Ensinar as Ciências Sociais**. São Paulo: Artmed, 1997.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. v. 1. (Coleção Matemática Completa)

GUEDES, A. L., KLEBER, F. M. **Usando a robótica como meio educativo**. Unoesc & Ciências, Joaçaba, v. 1, n. 2, p. 199-208, jul./dez. 2010.

LEGO mindstorms. LEGO Group, 2010. Apresenta o kit educacional LEGO Mindstorms e as instruções de construção de vários modelos robóticos. Disponível em:

<[http://www.vmg.vil.ee/Robotika/Lego9695/9695\\_Classic\\_Clock100.pdf](http://www.vmg.vil.ee/Robotika/Lego9695/9695_Classic_Clock100.pdf)>. Acesso em: 12 mar. 2014.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática)

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. p. 206. (Coleção do Professor de Matemática)

MELO, M. M. L. **Robótica e resolução de problemas: uma experiência com o Sistema LEGO Mindstorms no 12º ano**. 2009. 188 f. Dissertação (mestrado em ciências da educação), Universidade de Lisboa, Área de Especialização em Tecnologias Educativas. Lisboa, 2009.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: introdução à análise funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. v. 3. (Coleção do Professor de Matemática)

PINTO, M. C. **Aplicação de arquitetura pedagógica em curso de robótica educacional com hardware livre**. 2011. 158 f. Dissertação (mestrado em informática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Núcleo de Computação Eletrônica. Rio de Janeiro, 2011.

PRETTO, Nelson. 1996. **Uma escola sem/com futuro** – educação e multimídia. Campinas: Papirus.

RABELLO, E., PASSOS, J. S. **Vygotsky e o desenvolvimento humano**. 2002. Disponível em: <[www.josesilveira.com/artigos/vygotsky.pdf](http://www.josesilveira.com/artigos/vygotsky.pdf)>. Acesso em: 22 jun. 2014.

REZENDE, F. As novas tecnologias na prática pedagógica sob a perspectiva construtivista. **Ensaio: pesquisa em educação em ciências**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 1-18, març. 2002. Disponível em: <<http://www.portal.fae.ufmg.br/ceer/index.php/ensaio/article.viewFile/13/45>>. Acesso em 15 Abr. 2014.

RIBENBOIM, Paulo. **Funções, Limites e Continuidade**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. p. 215. (Coleção Textos Universitários)

SANTOS, F. Robótica Educacional: Geometria da direção de triciclos com drive governor. **Revista eletrônica TECCEN**, Vassouras, v. 2, n. 1, p. 1-7, out.-dez. 2008.

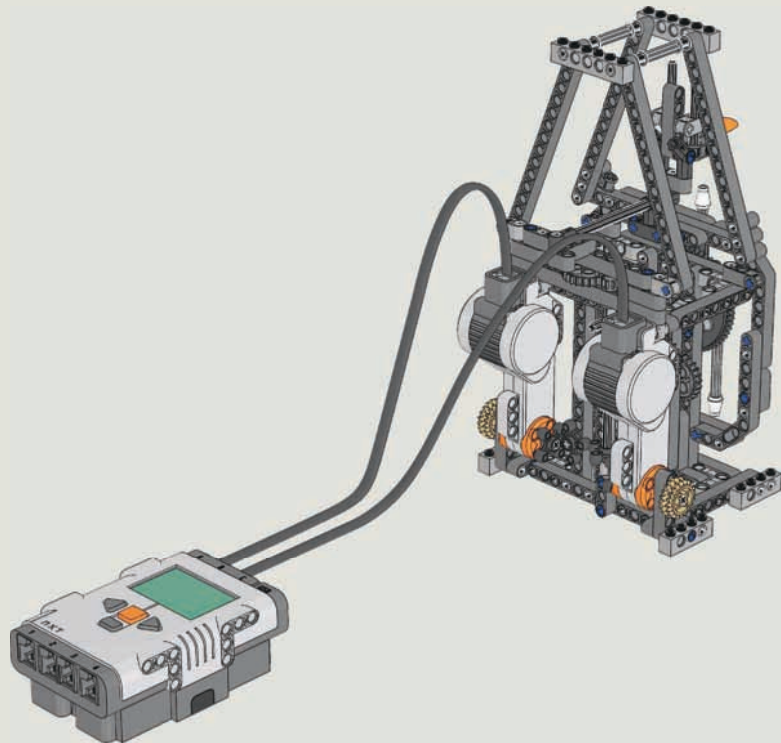
SILVA, A. A. R. S. **Robótica e educação**: uma possibilidade de inserção sócio-digital. 2010. 120 f. Dissertação (mestrado em educação), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Natal, 2010.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Curitiba: BPP, 1991. p. 92. (Livro digitalizado pelos funcionários da seção braile da Biblioteca Pública do Paraná). Disponível em:<[http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/51792/mod\\_resource/content/1/A%20forma%C3%A7%C3%A3o%20Social%20da%20Mente.doc](http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/51792/mod_resource/content/1/A%20forma%C3%A7%C3%A3o%20Social%20da%20Mente.doc)>. Acesso em: 05 jun. 2014.

\_\_\_\_\_. **Pensamento e Linguagem**. 4. ed. São Paulo: Martins fontes, 2008. p. 193. (Psicologia e Pedagogia)

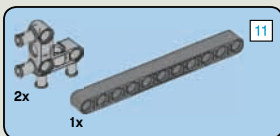
## ANEXO A

# 9695 + 9797

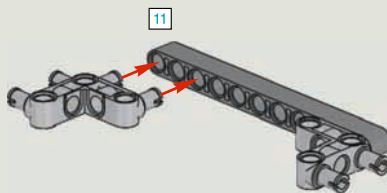


## Classic Clock

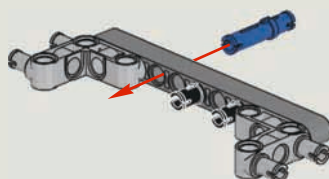
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



1



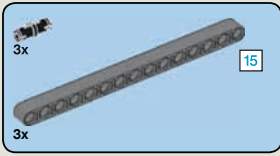
2



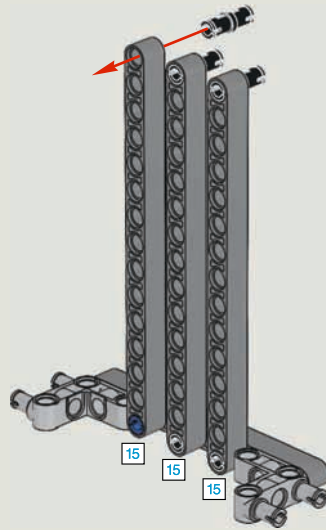
## Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.





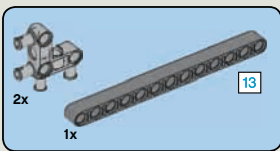
3



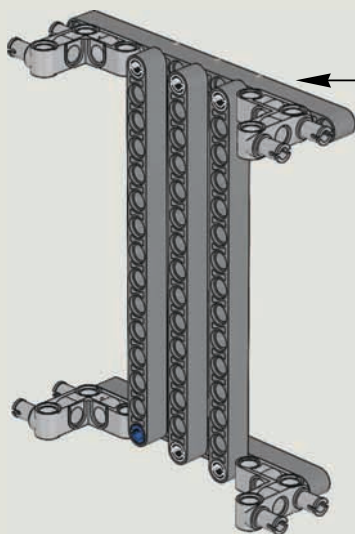
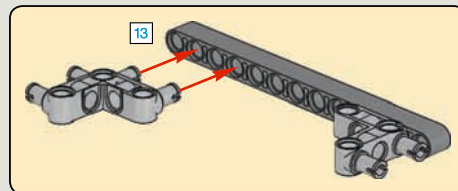
**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

3



4



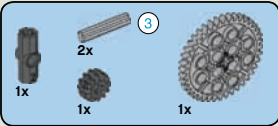
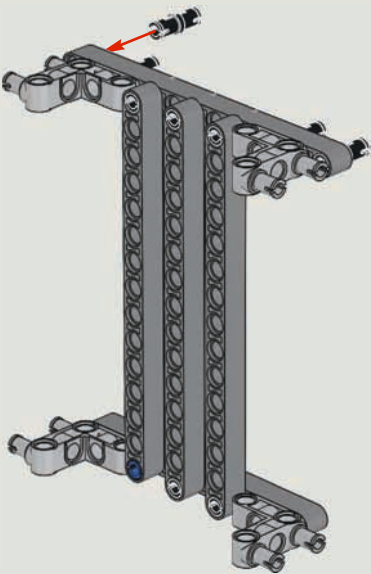
**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

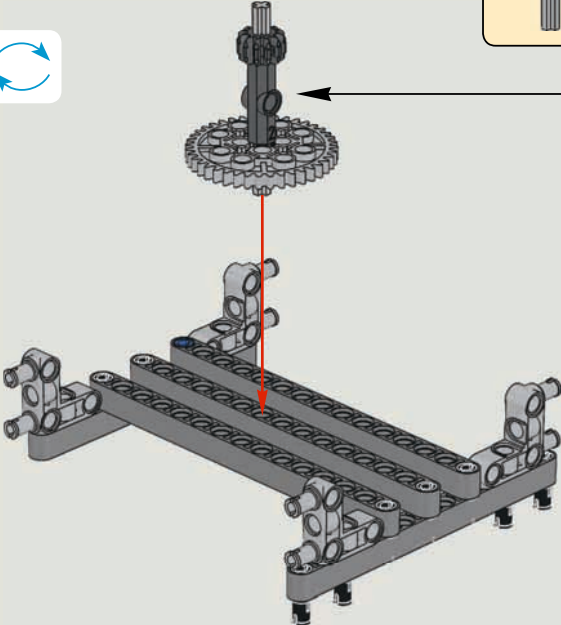
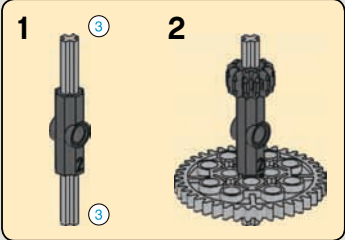
4

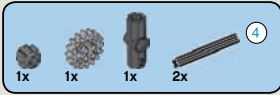


# 5

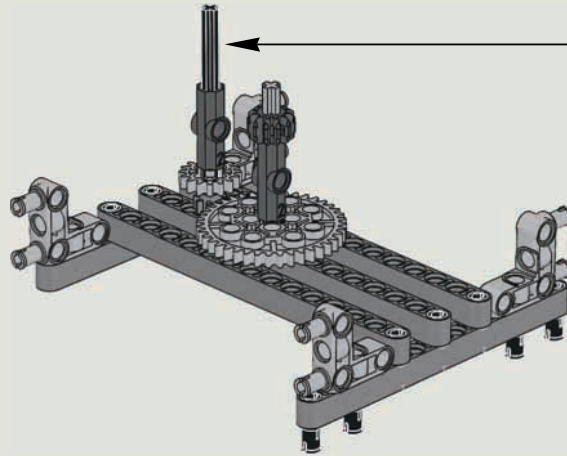
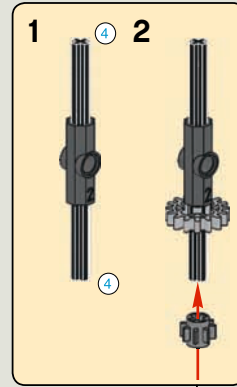


# 6





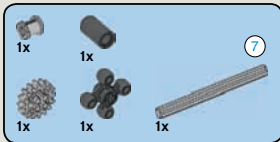
7



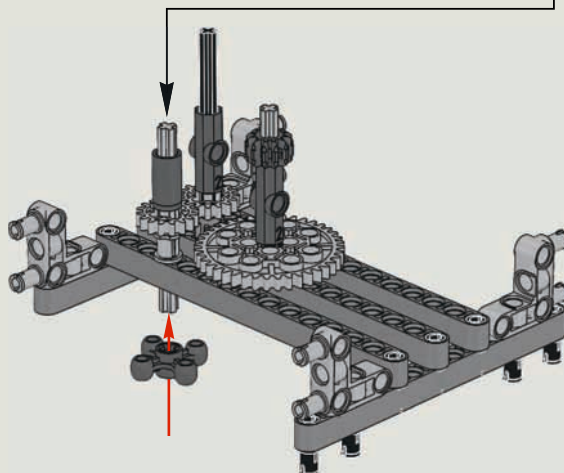
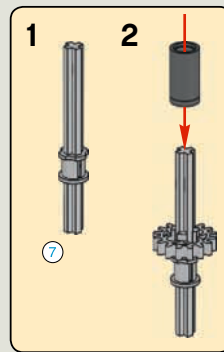
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

7



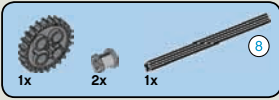
8



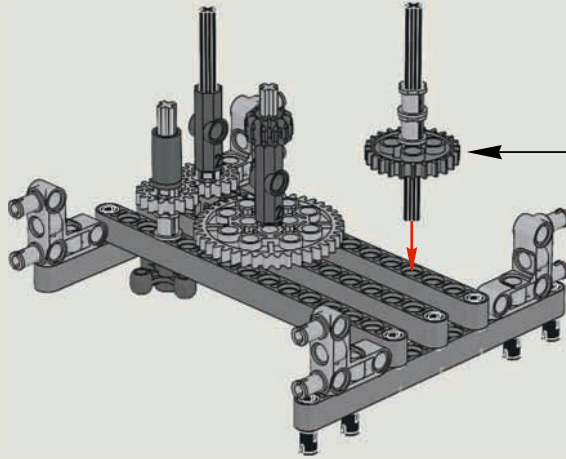
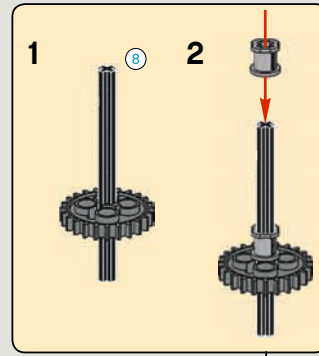
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

8



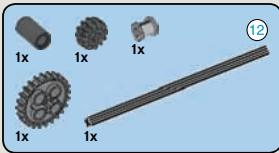
9



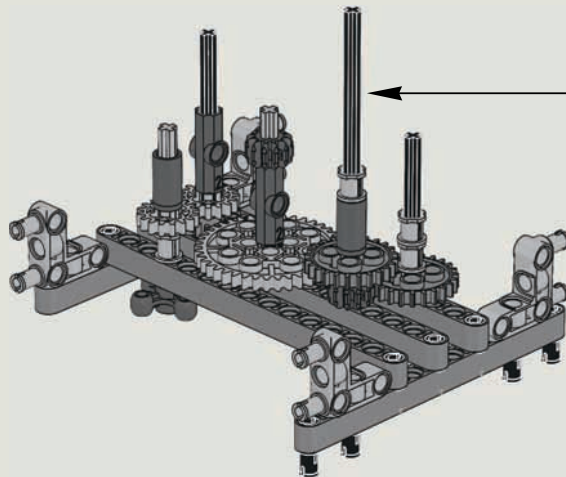
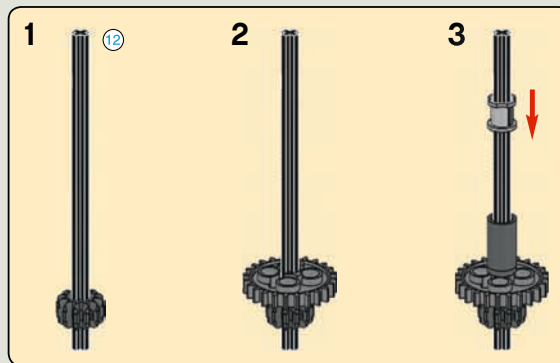
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

9



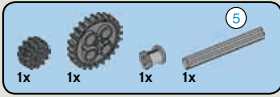
10



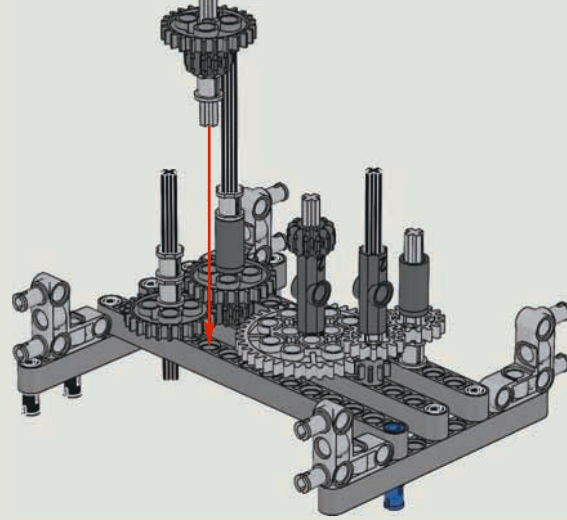
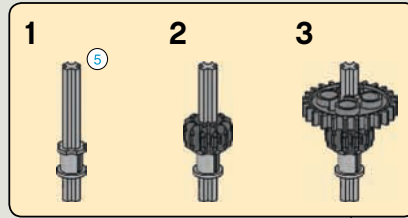
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

10



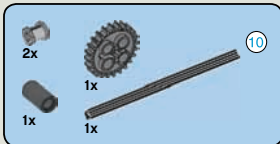
11



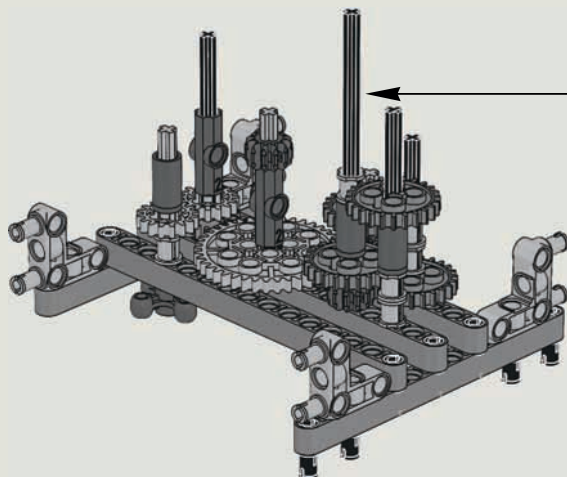
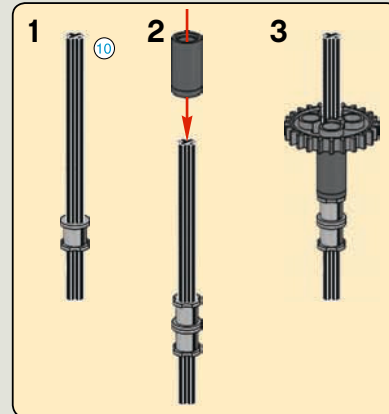
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

11



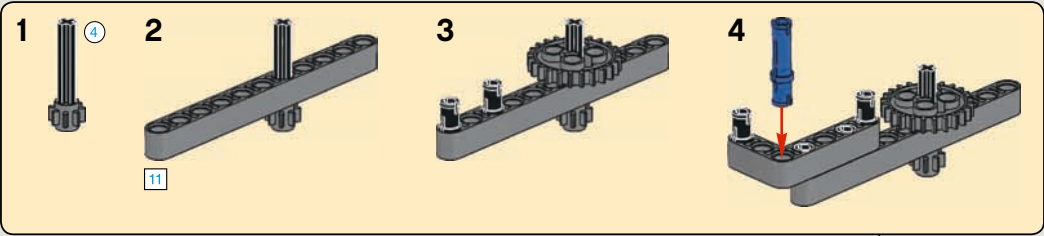
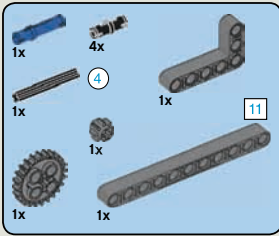
12



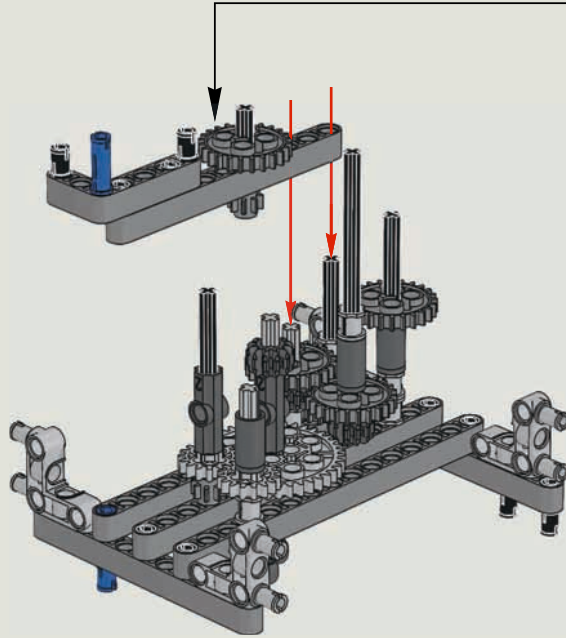
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

12

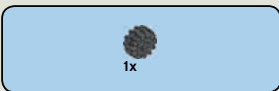


# 13

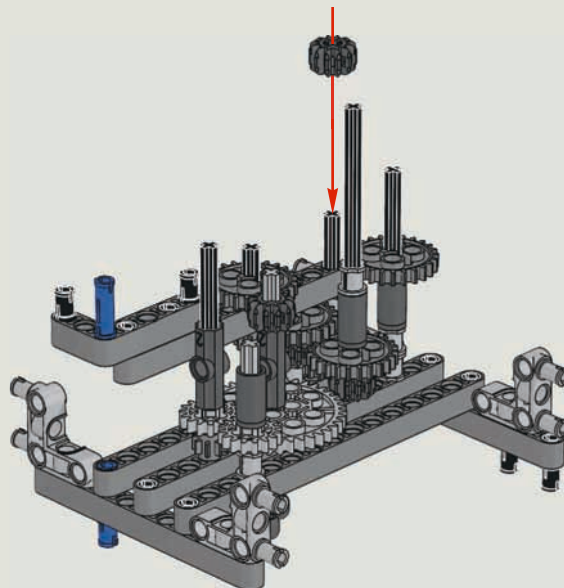


## Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



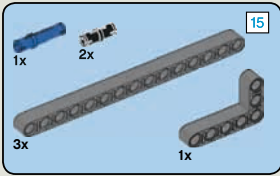
# 14



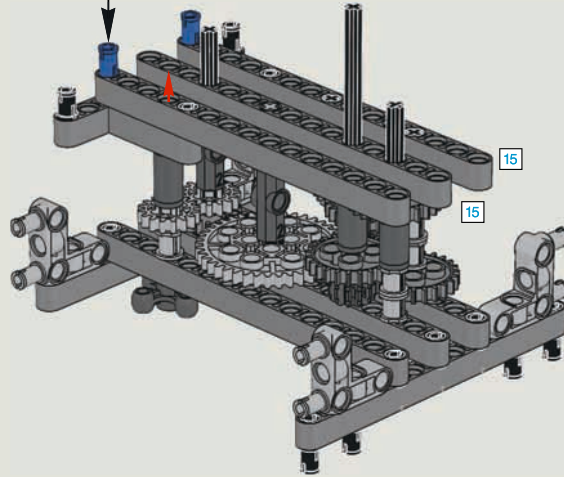
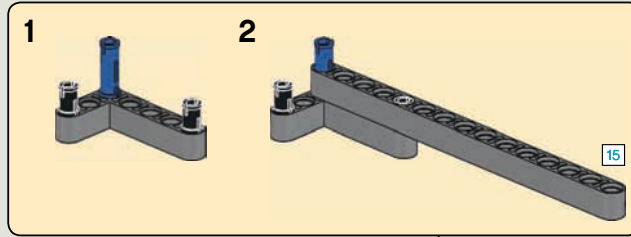
## Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.





15

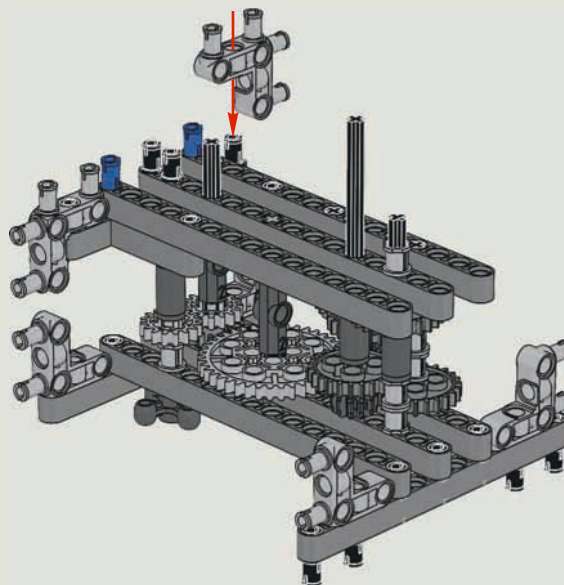


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

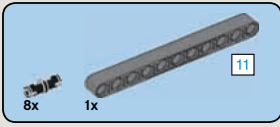


16

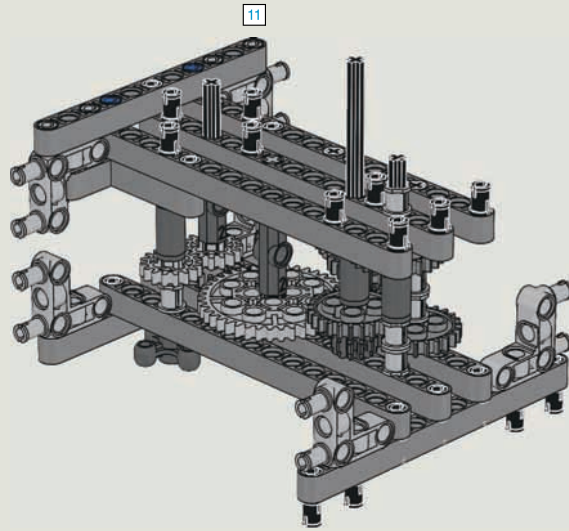


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



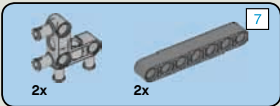
17



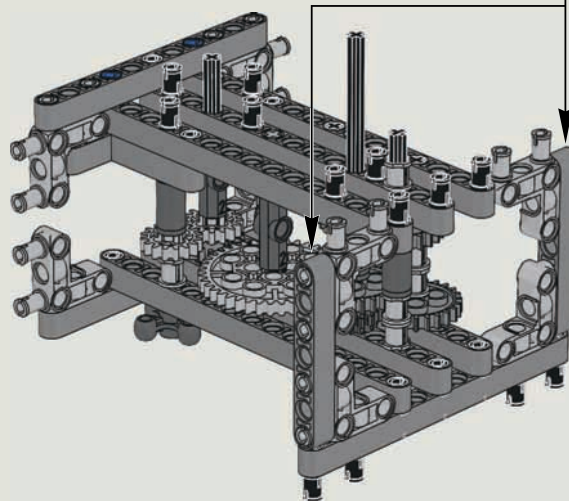
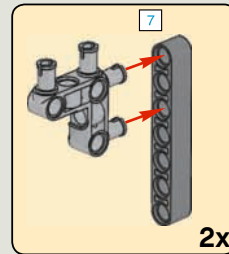
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

17



18

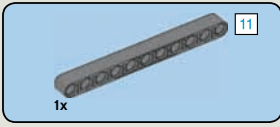


Classic Clock

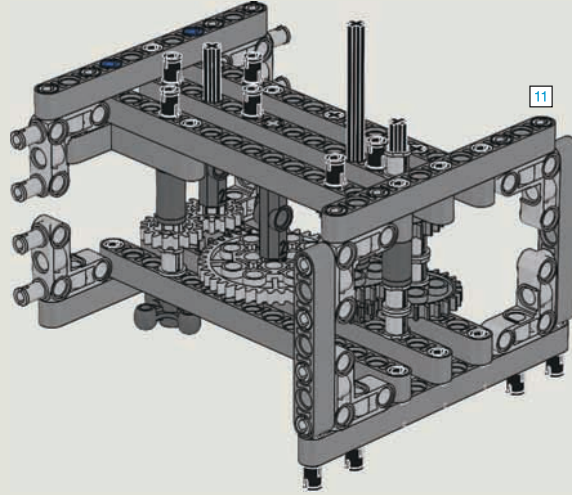
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

18





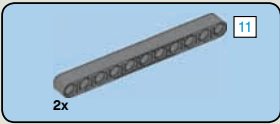
19



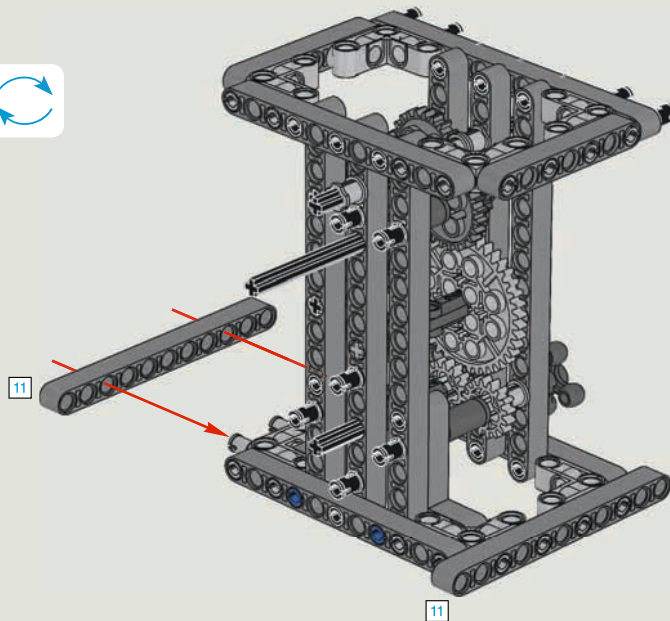
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

19



20



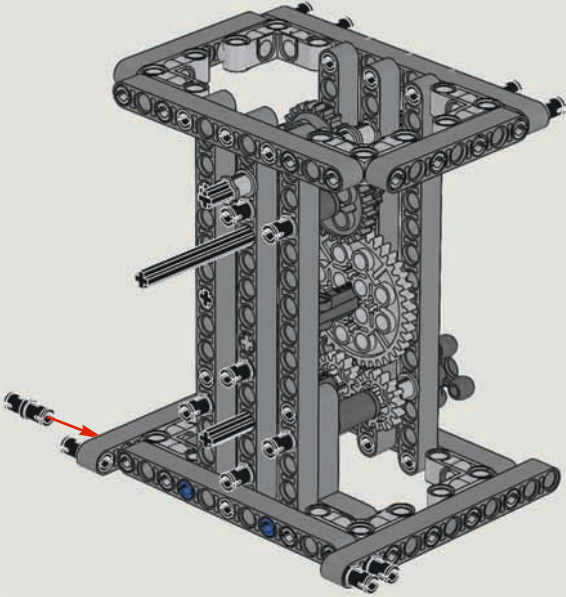
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

20



# 21

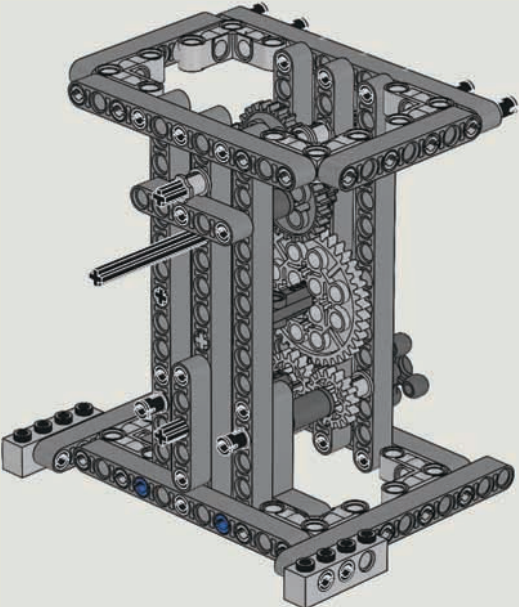


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



# 22

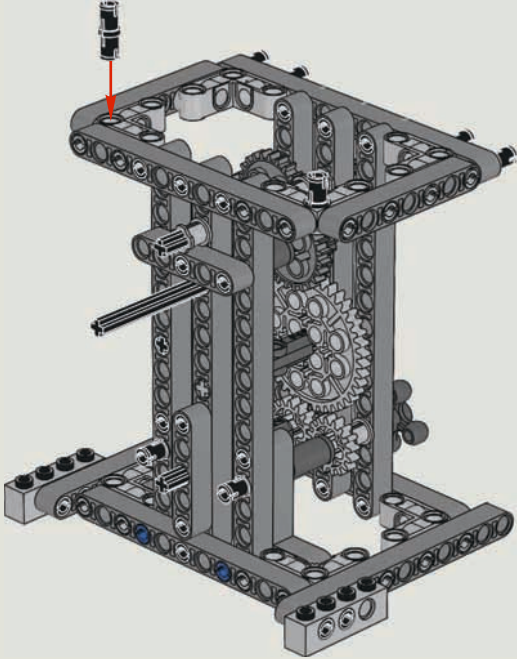


**Classic Clock**

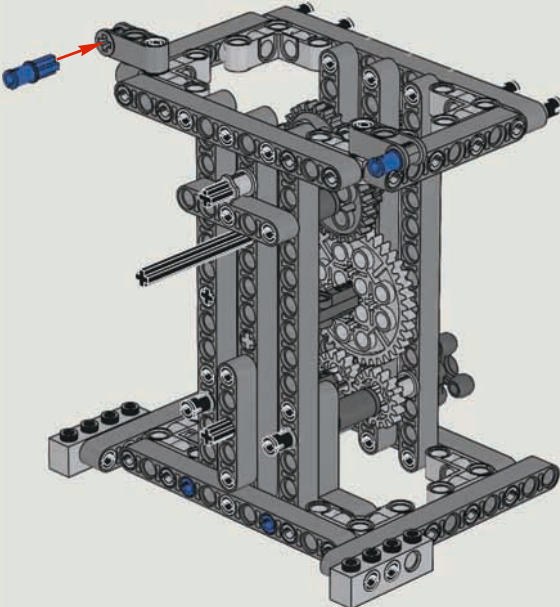
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

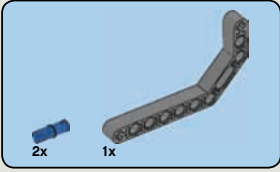
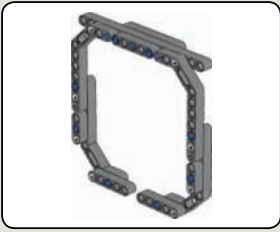


# 23

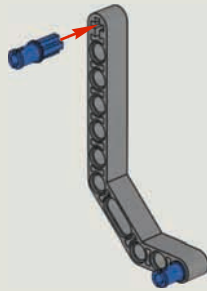


# 24





1

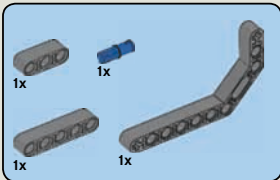
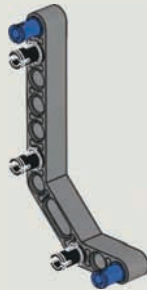


Classic Clock

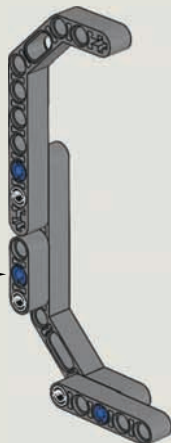
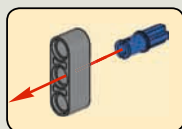
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



2



3

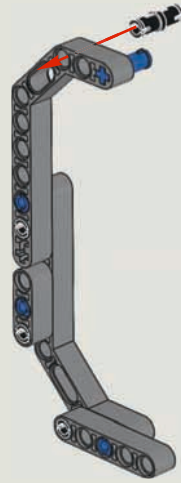


Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

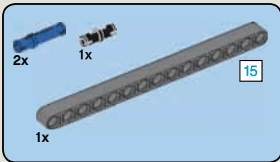


4

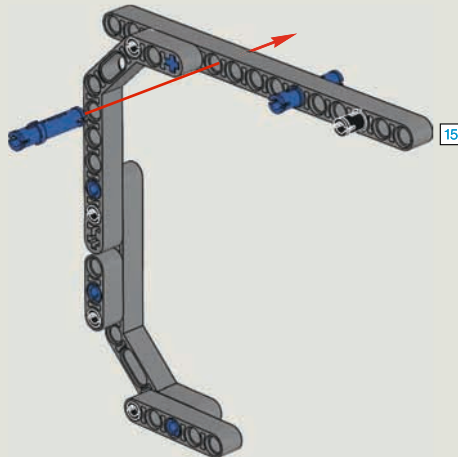


Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



5

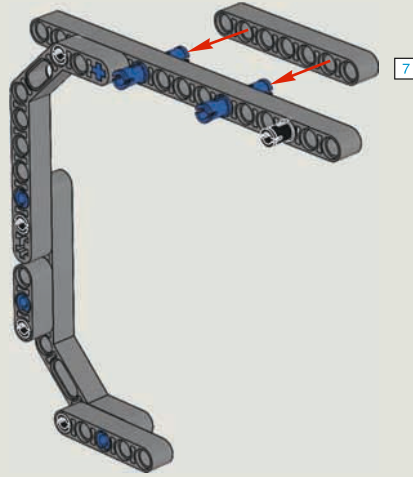


Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



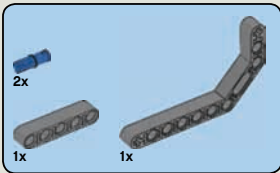
6



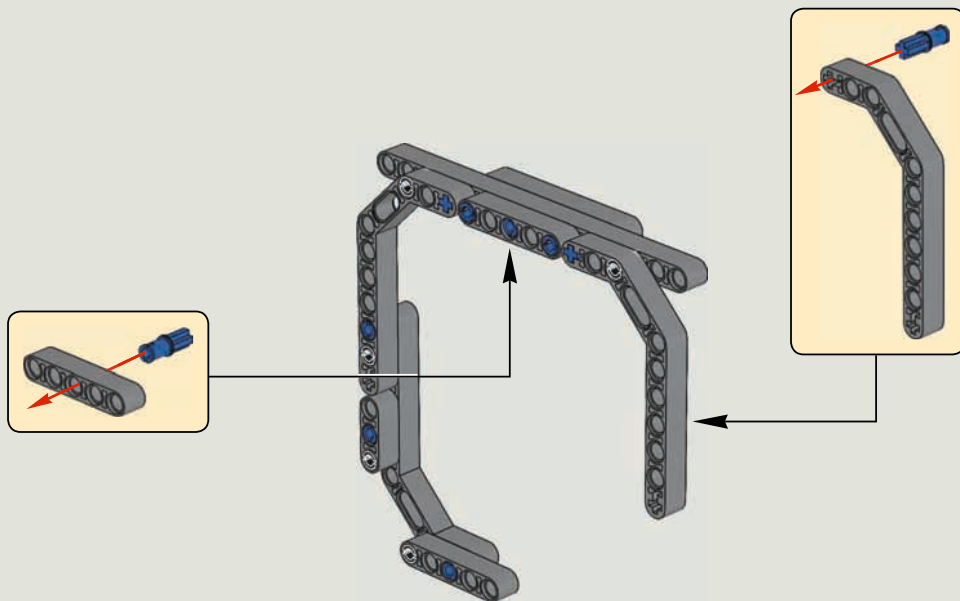
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

29



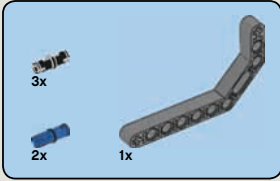
7



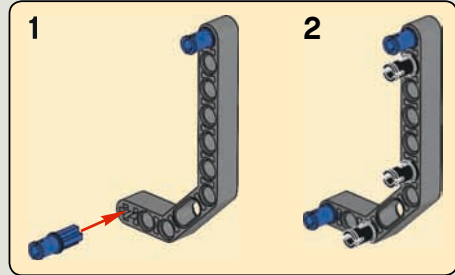
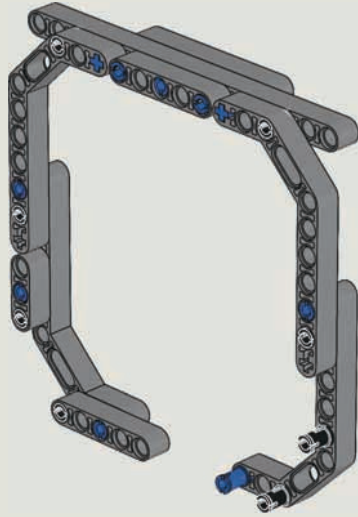
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

30



8

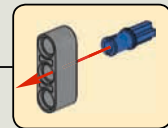
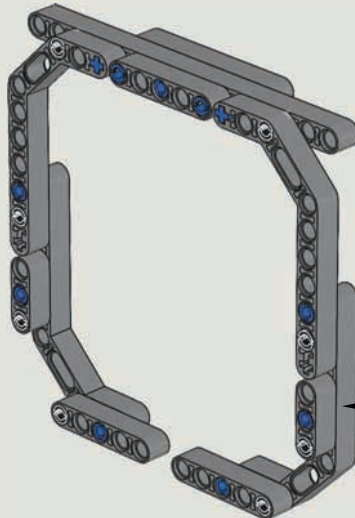


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



9

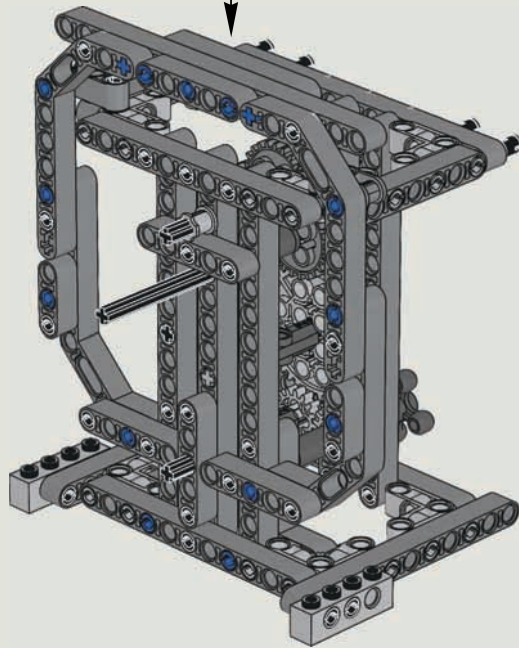


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



25

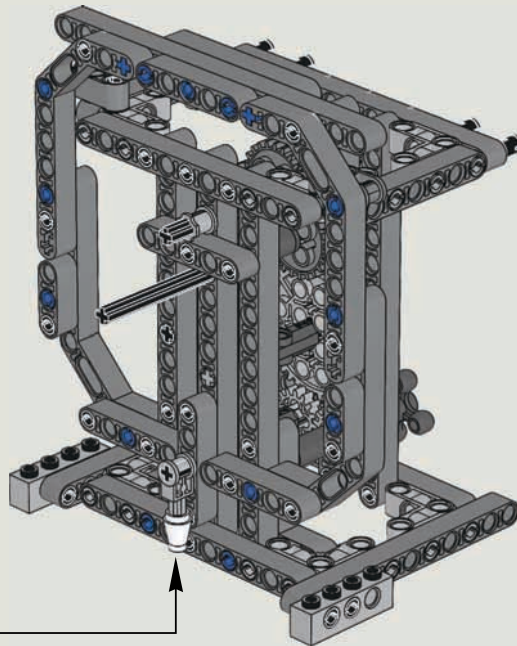


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



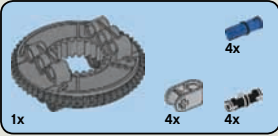
26



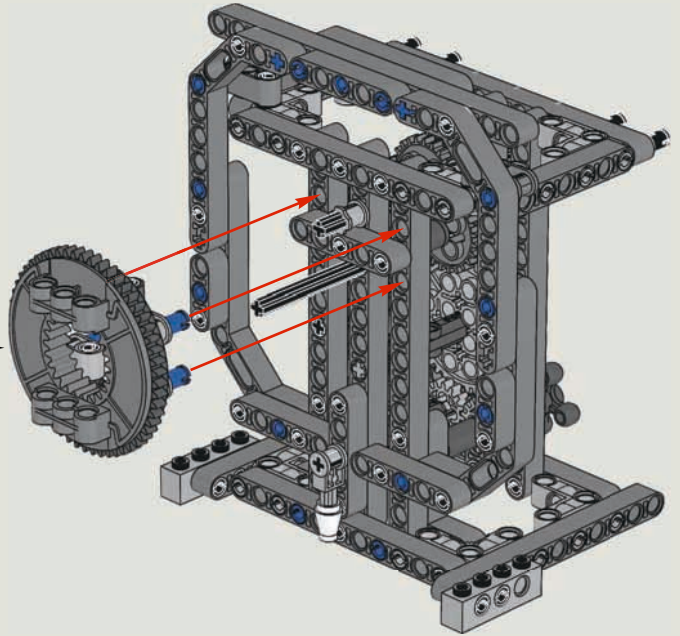
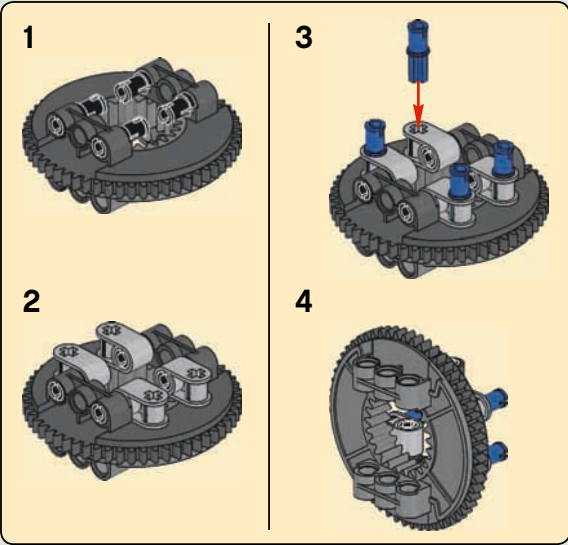
**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



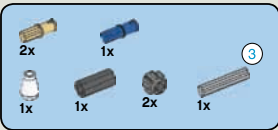


# 27

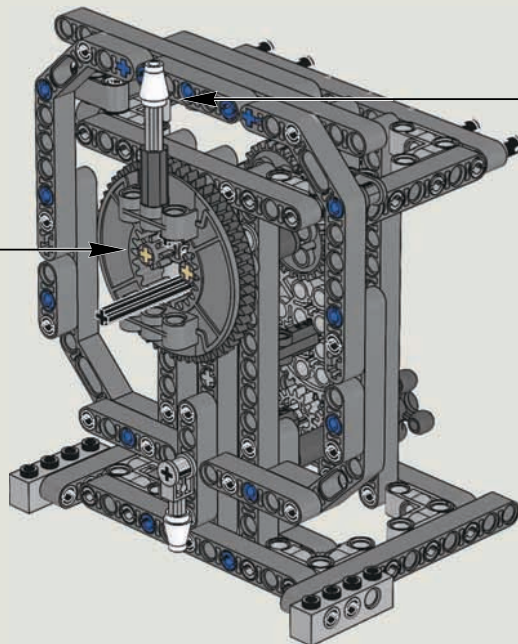
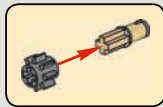
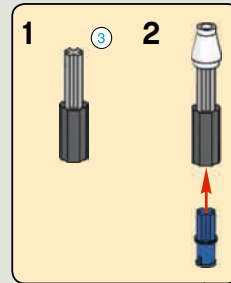


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

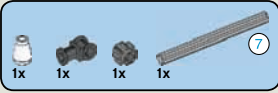


# 28

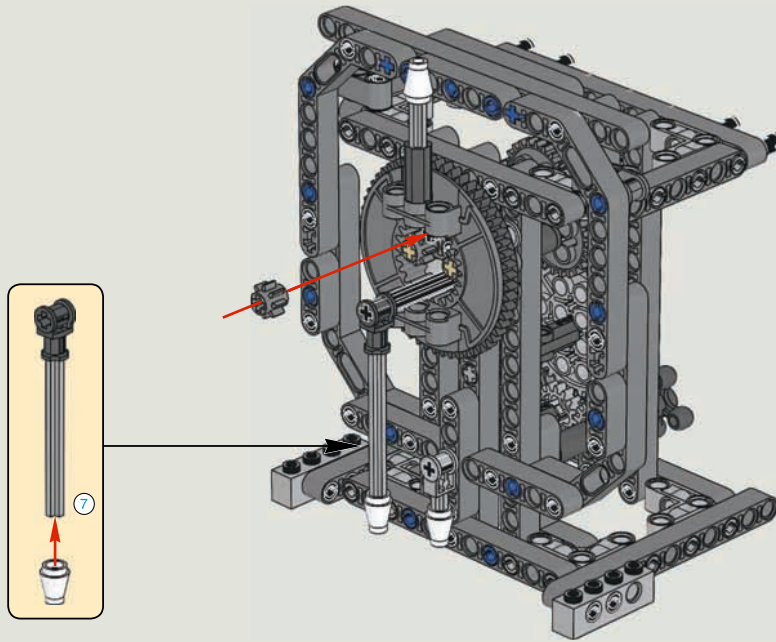


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



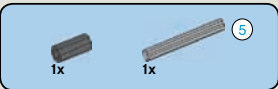
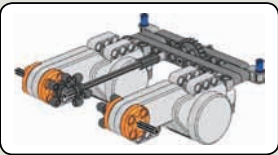
29



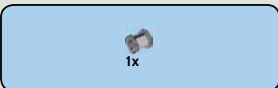
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

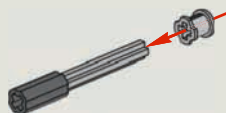
37



1



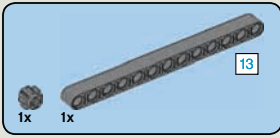
2



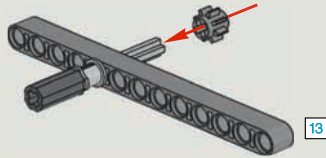
Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

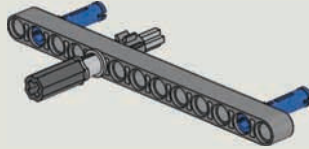
38



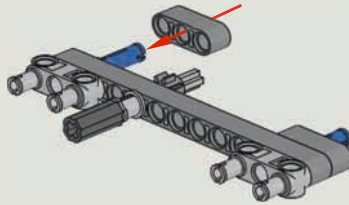
3



4



5

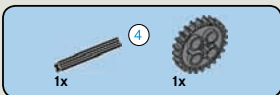
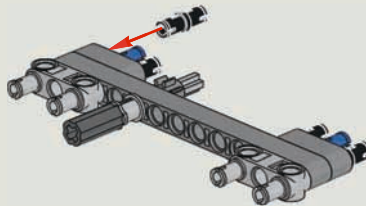


Classic Clock

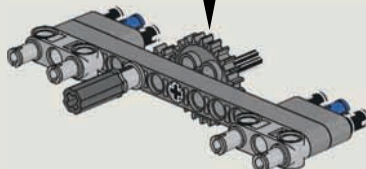
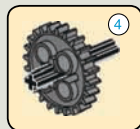
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



6

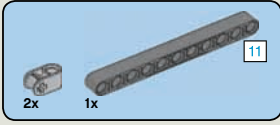


7

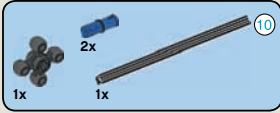
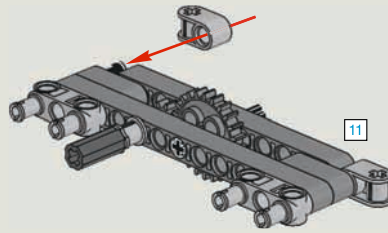


Classic Clock

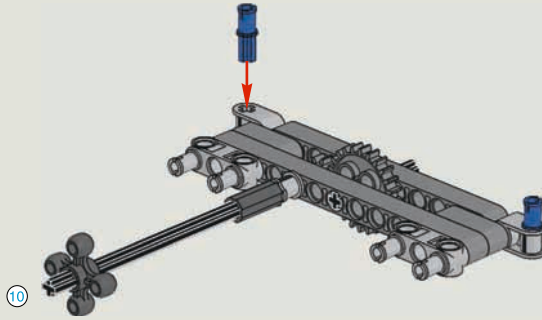
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



8

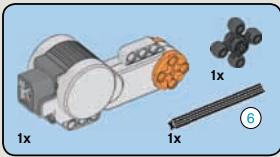


9

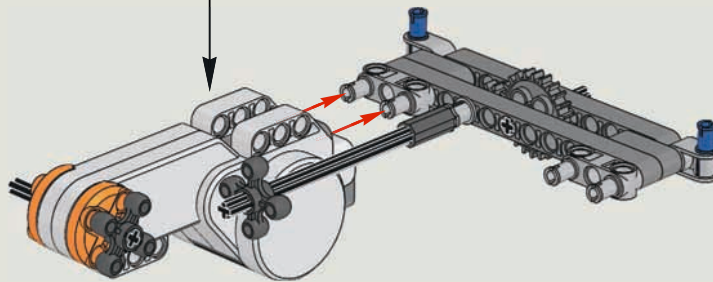
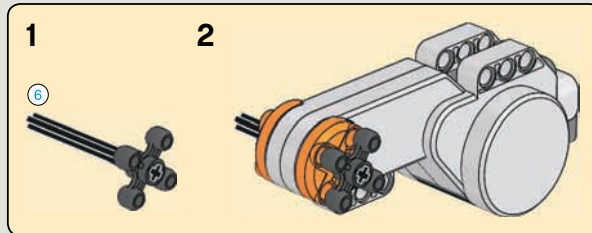


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

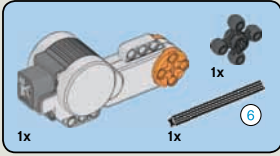


10

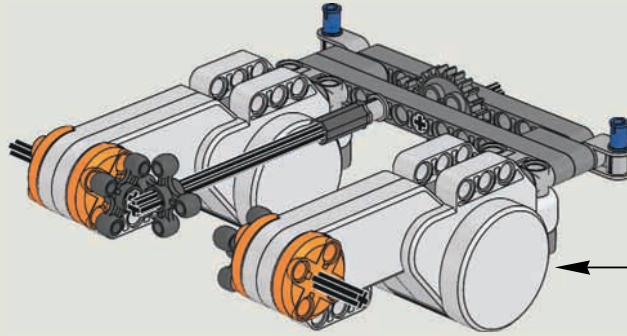
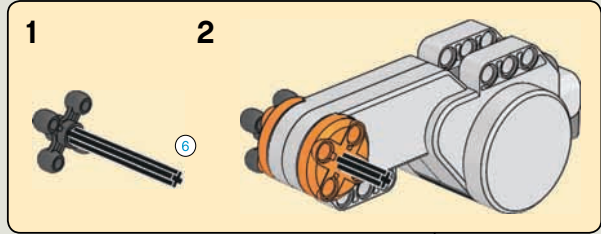


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



11

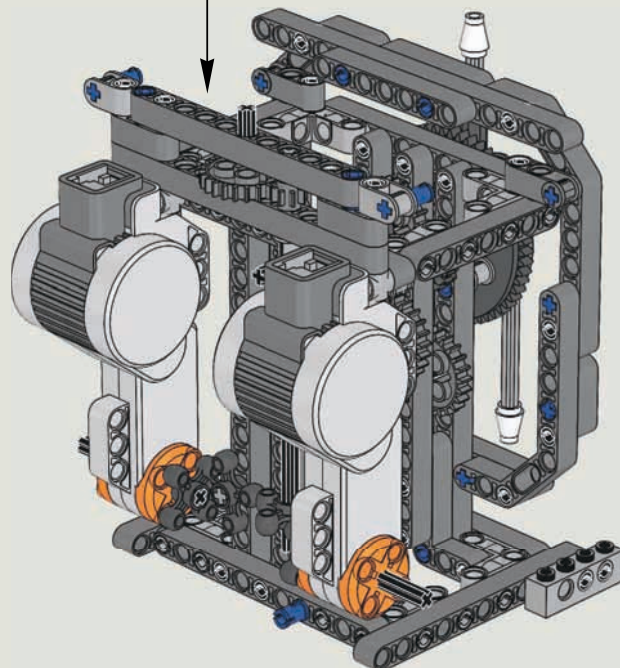


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

43

30



**Classic Clock**

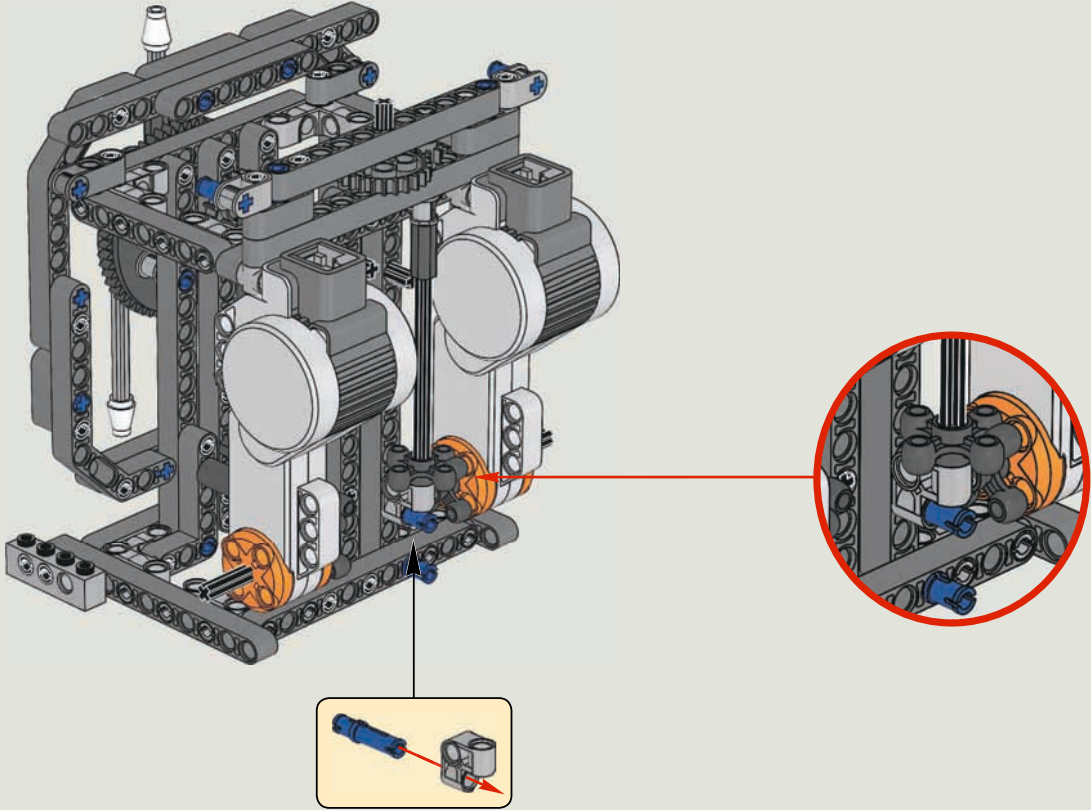
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

44





# 31

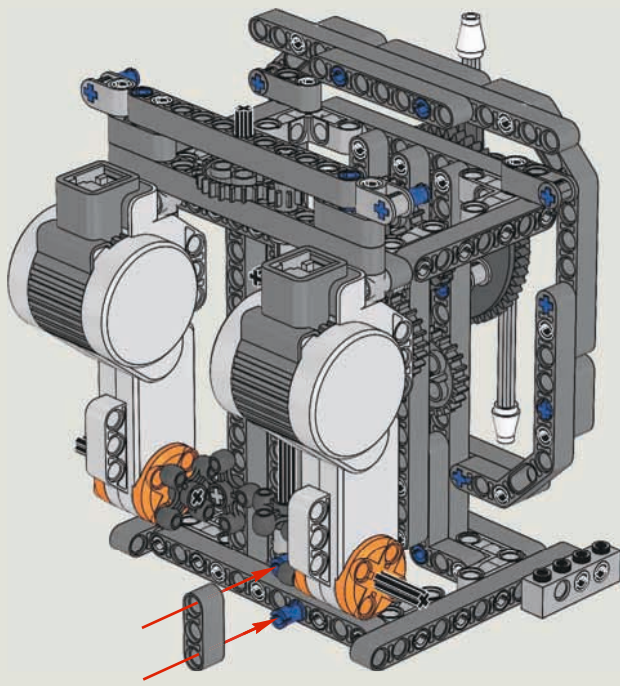


### Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

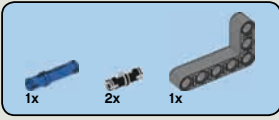


# 32

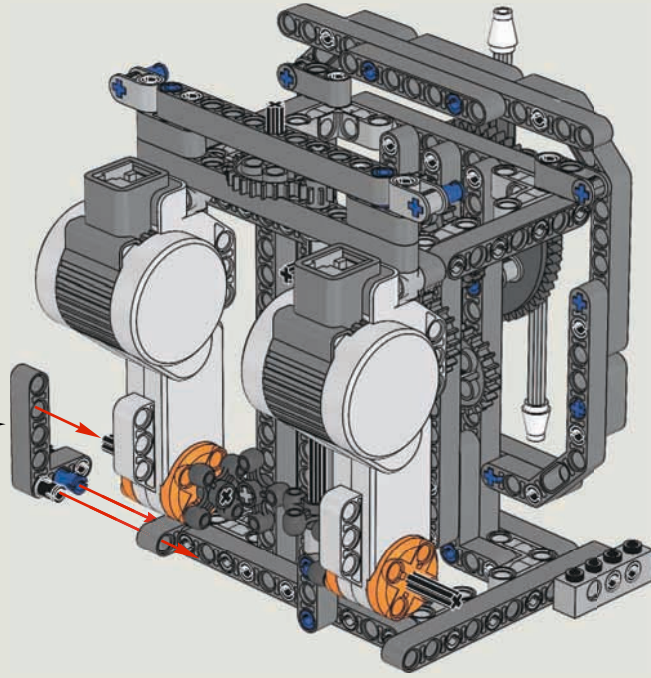
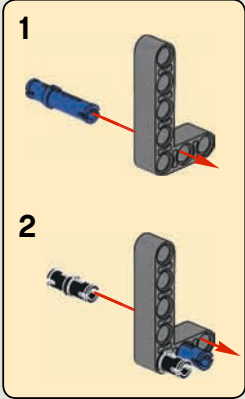


### Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

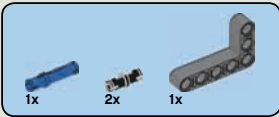


# 33

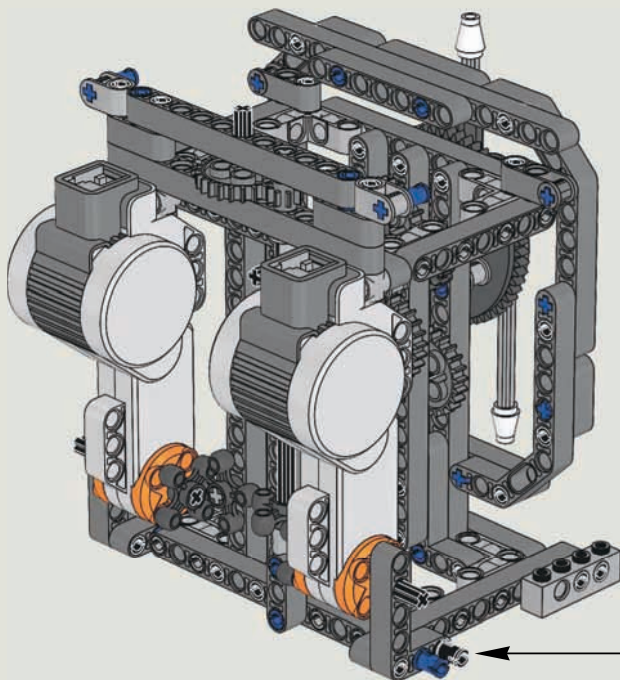
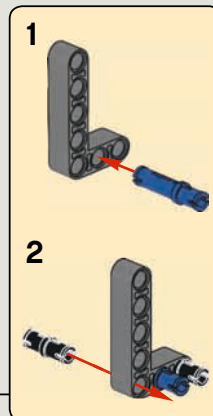


### Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



# 34

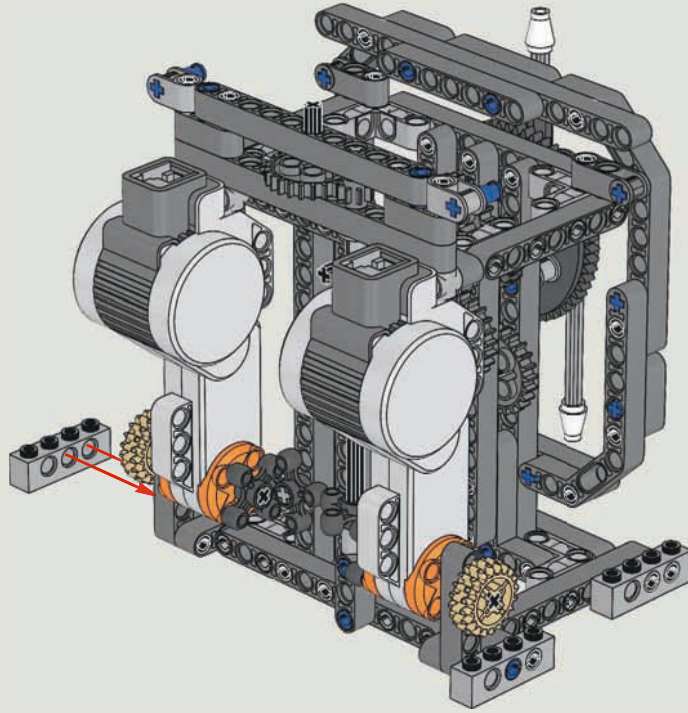


### Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

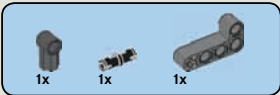


# 35

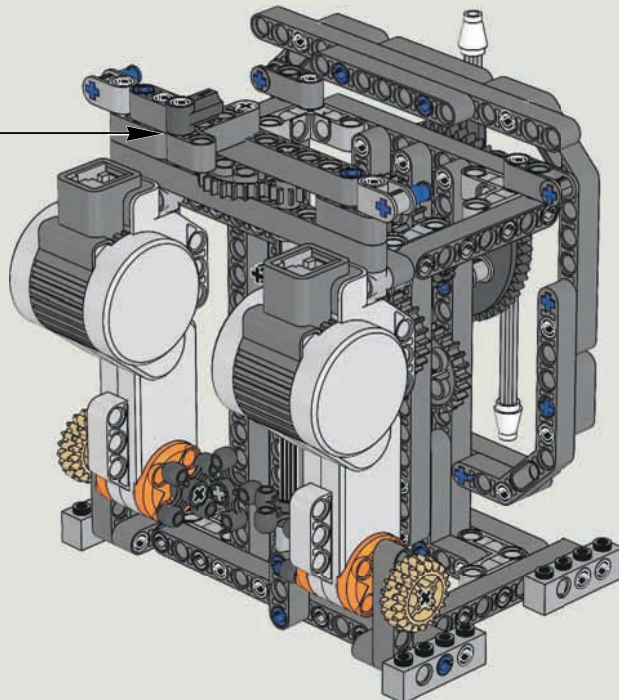
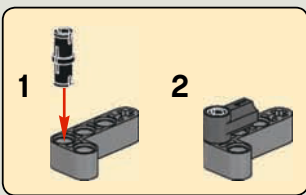


### Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



# 36



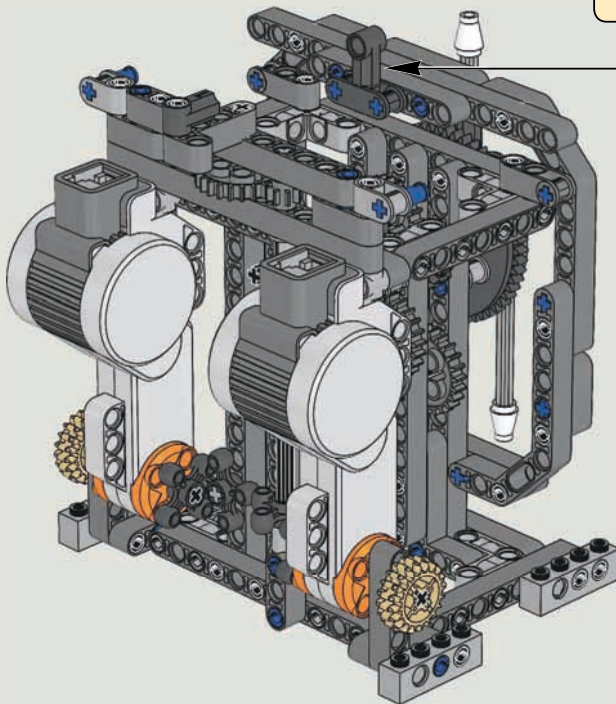
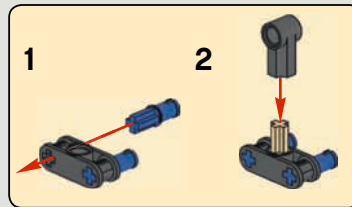
### Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



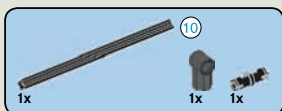


37

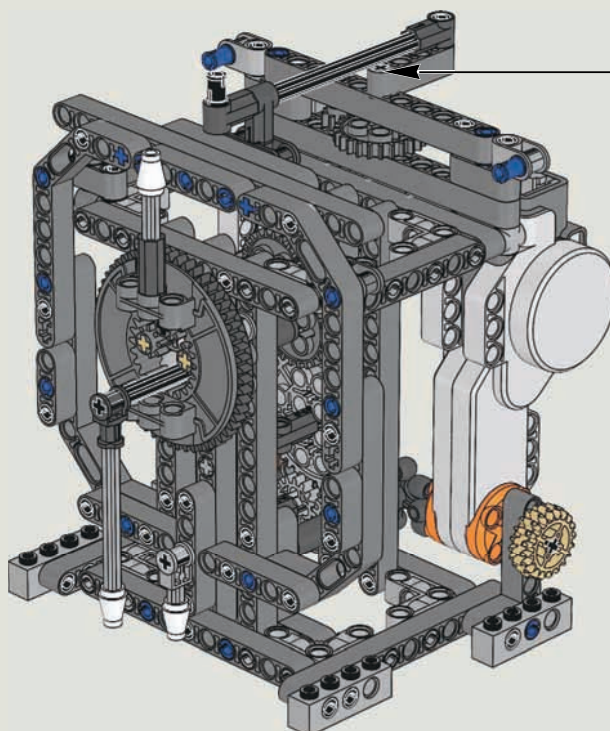
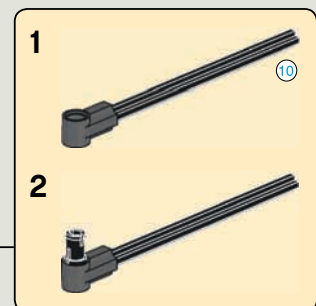


Classic Clock

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

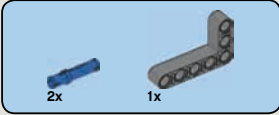


38

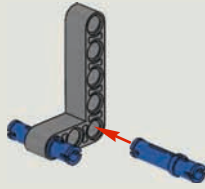


Classic Clock

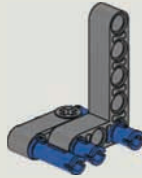
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



1



2

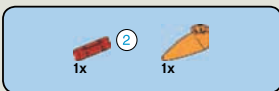
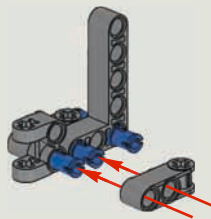


**Classic Clock**

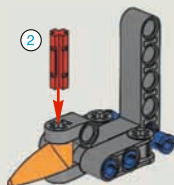
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



3

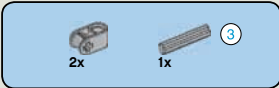


4

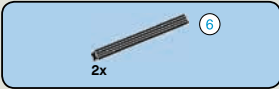
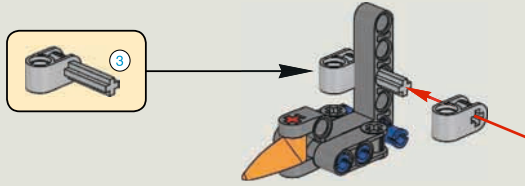


**Classic Clock**

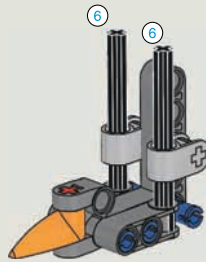
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



5



6

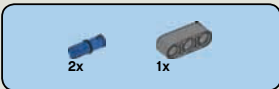
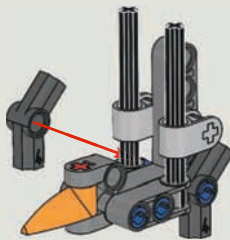


**Classic Clock**

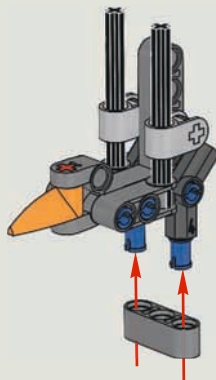
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



7



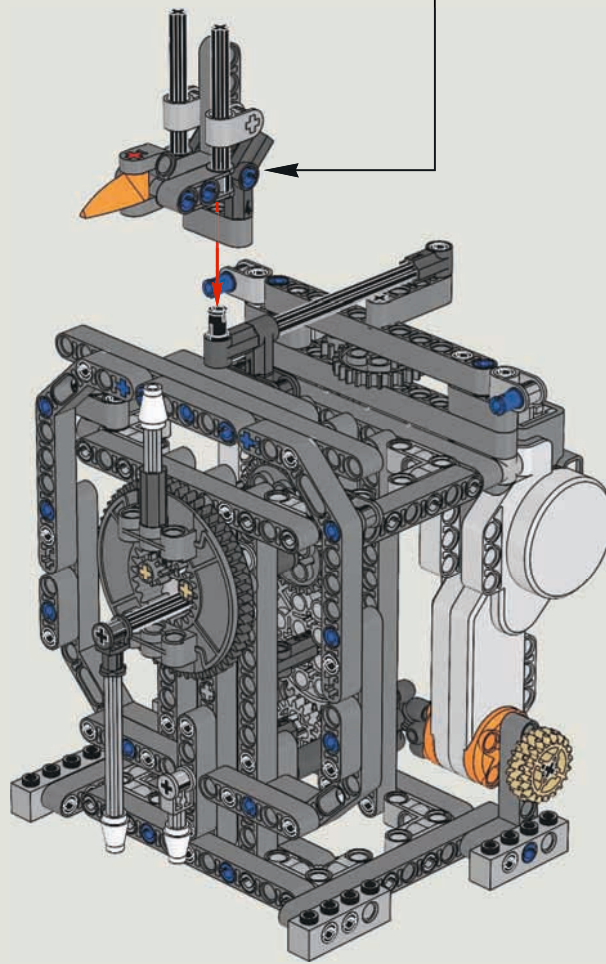
8



**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

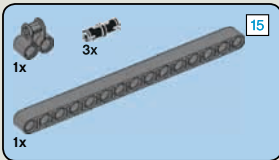
39



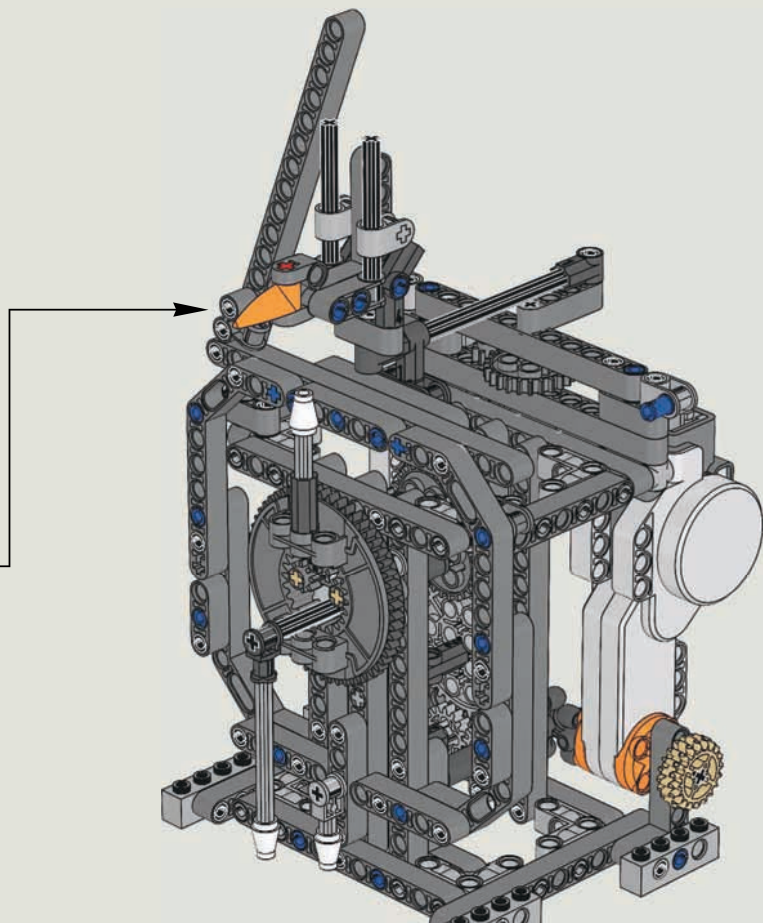
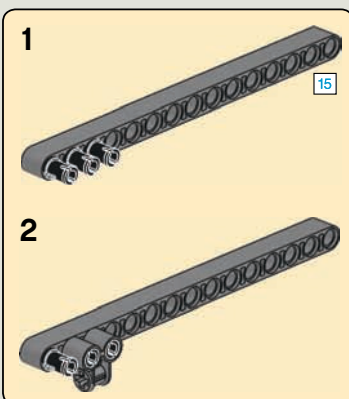
**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

57



40

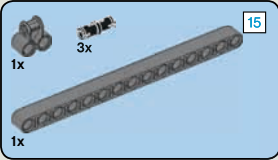


**Classic Clock**

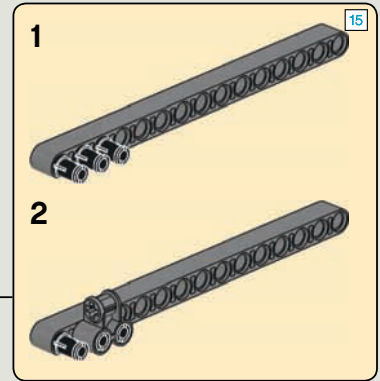
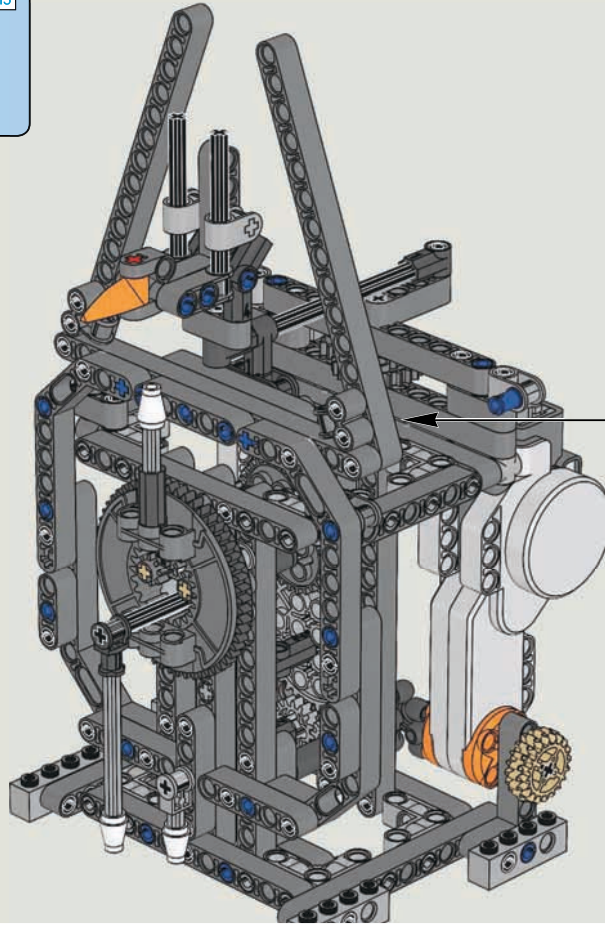
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

58



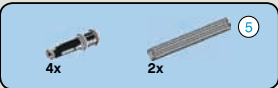


41

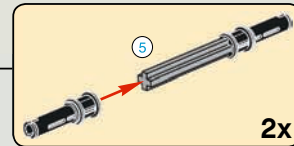
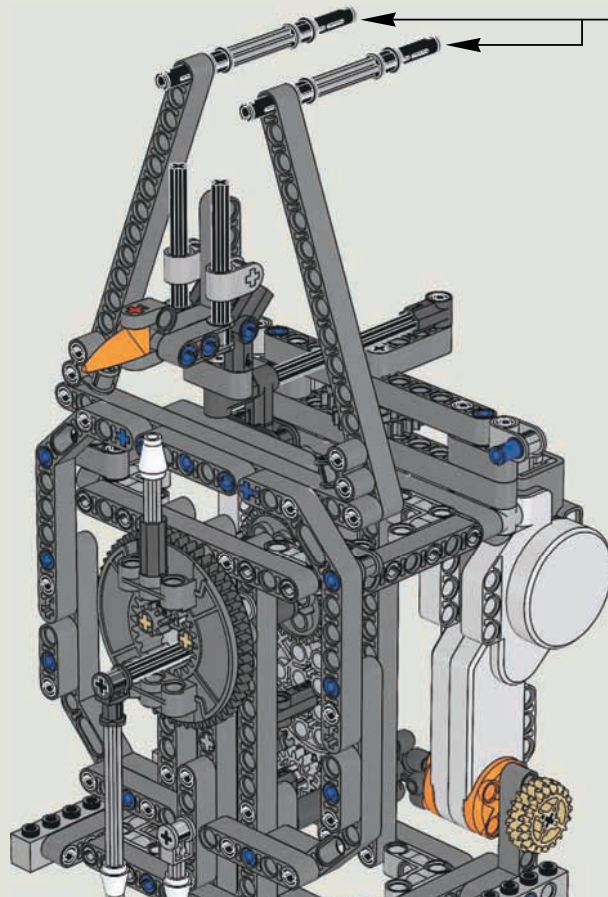


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

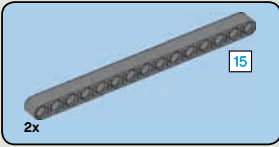


42

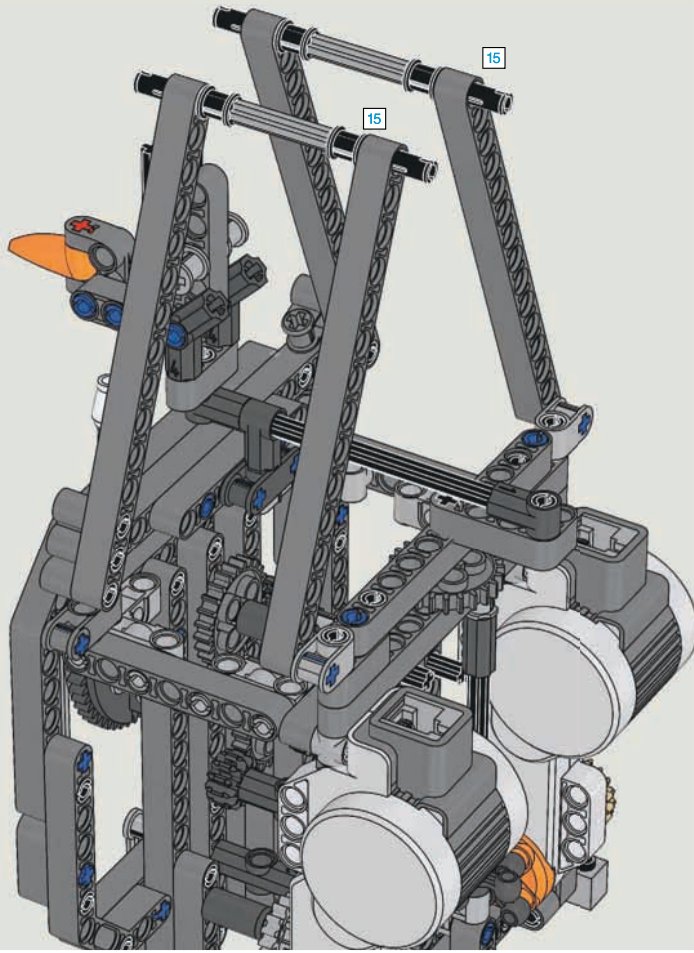


**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



43



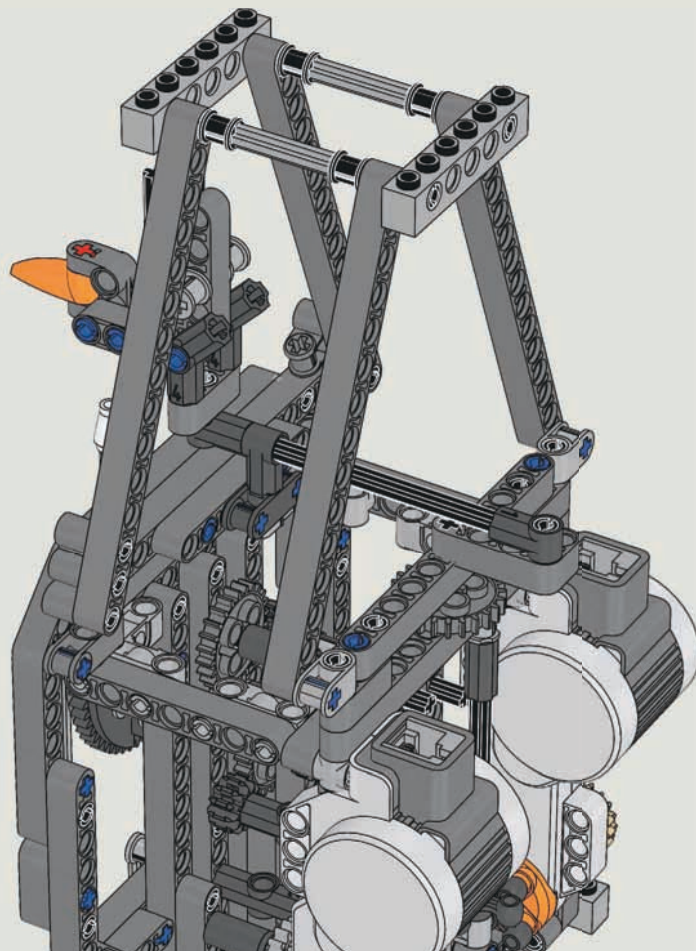
**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

61



44

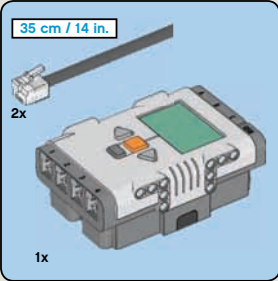


**Classic Clock**

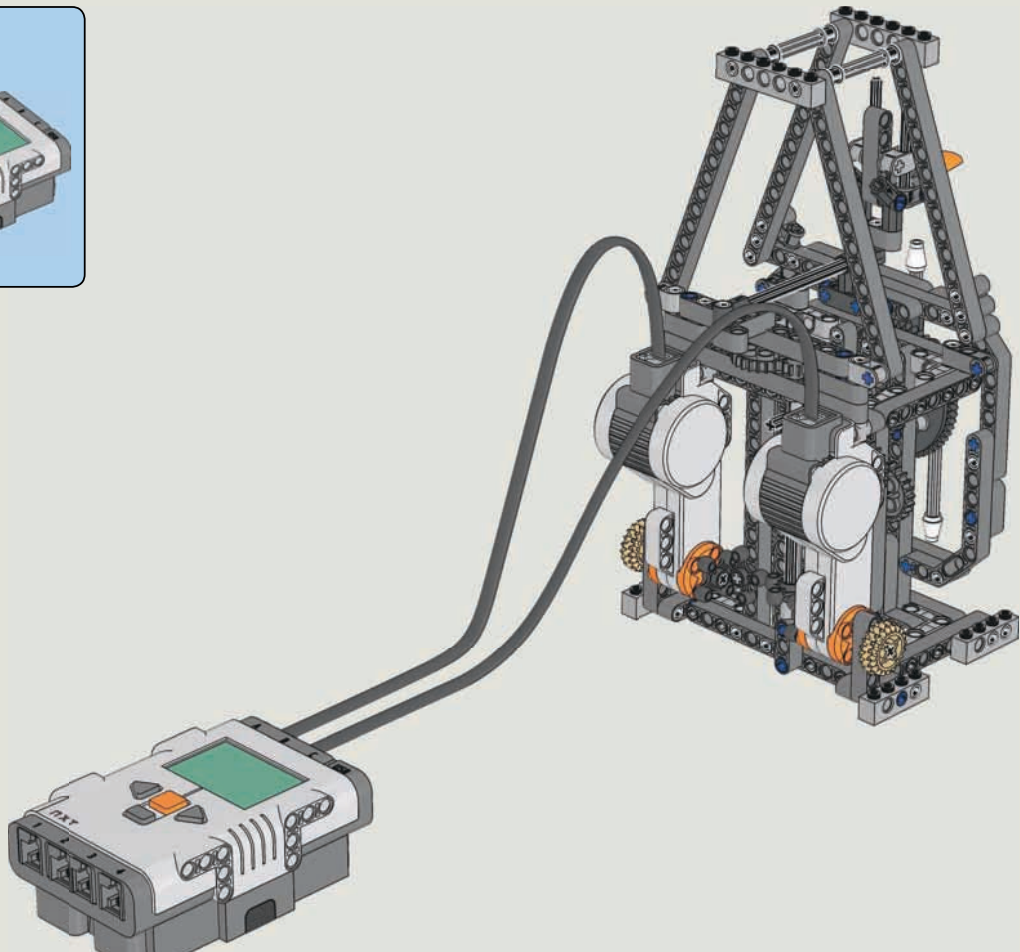
LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.

62



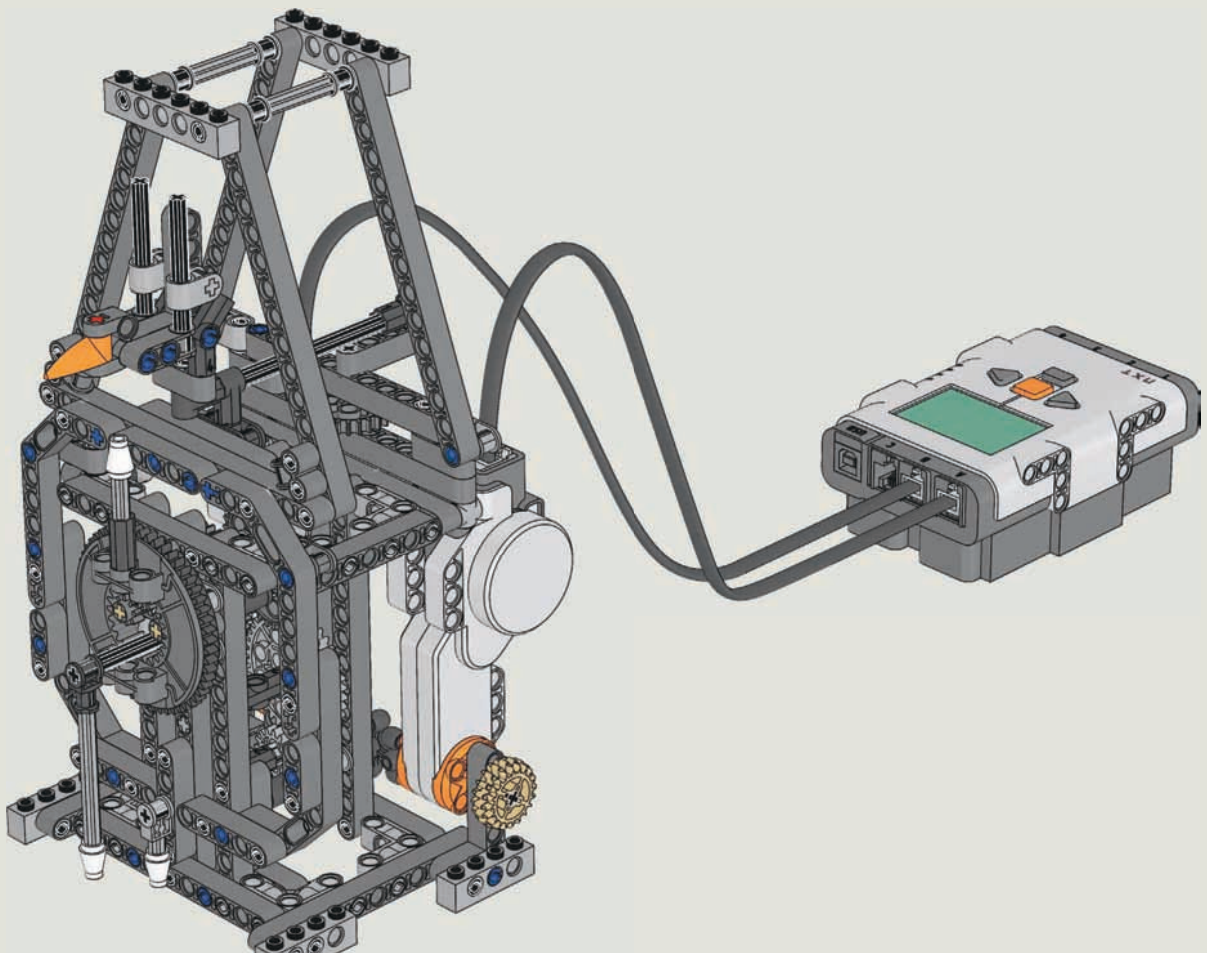


45



**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.



**Classic Clock**

LEGO, the LEGO logo, MINDSTORMS and the MINDSTORMS logo are trademarks of the/son des marques de commerce de/son marcas registradas de LEGO Group. ©2010 The LEGO Group.