Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

O Método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio

Claudio Umberto de Melo

Catalão

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Claudio Umberto de Melo				
E-mail:	C_umberto@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Instituto Federal Goiano				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País: Brasil	UF:	BR	CNPJ:	00.889.834/0001-08	
Título:	O Método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio				
Palavras-chave:	Equações Polinomiais, Polinômios e Características das raízes.				
Título em outra língua:	The Cardano's method and your application in high school				
Palavras-chave em outra língua:	Polynomial equations, polynomial and Characteristic Roots.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa:	15/08/2014				
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT				
Orientador (a):	Porfírio Azevedo dos Santos Júnior				
E-mail:	Porfirio0806@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Claudio Umberto de Melo

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 21 / 08 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Claudio Umberto de Melo

O Método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior.

Catalão

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BSCAC/UFG

Melo, Claudio Umberto.

M528m O Método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio [manuscrito] / Claudio Umberto de Melo. - 2014.
75 f. : il., figs, tabs.

Orientador(a): Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras

1. Equações Polinomiais. 2. Polinômios. 3. Característicva das Raízes. I. Título.

CDU: 514.11

Claudio Umberto de Melo

"O Método de Cardano e Sua Aplicação no Ensino Médio"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 15 de Agosto de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – IFG/ Goiânia

Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC

Claudio Umberto de Melo graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - Campus Catalão, no ano de 1994.

Dedico este trabalho para Simone, minha companheira que amo muito e aos meus filhos Reginaldo Marques de Melo, Ana Clara Carneiro Fernandes de Melo e Guilherme Carneiro Fernandes de Melo

Agradecimentos

A Deus, pela vida e por todos os dons dados a mim.
Aos meus pais, pelos exemplos e pelo carinho dedicado a mim.
Aos meus filhos, Reginaldo, Ana Clara e Guilherme, pelos quais encontro forças para vencer mais um dia.
A CAPES, pelo apoio financeiro.
Ao Professor Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior, por sua dedicação e paciência.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre o método de Cardano aplicado em equações polinomiais do 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}$ e a utilização em sala, do 3º ano do Ensino Médio, trabalhando com o procedimento sem o uso de fórmula para determinar uma raiz de equação polinomial do 3º grau. A aplicação deste método busca possibilitar aos alunos um enriquecimento intelectual relevante para futuros estudos das ciências exatas. Neste trabalho não foi utilizado uma avaliação diagnóstica para analisar o nível de compreensão do tema, apenas buscou aplicar o procedimento utilizado por Cardano, em sala de aula, e principalmente apresentar uma demonstração deste procedimento para uma equação na forma geral do 3º grau. O estudo traz uma abordagem histórica das resoluções das equações, posteriormente, uma fundamentação teórica para o estudo dos polinômios, destacando os principais teoremas, proposições e definições fundamentais para o estudo das funções polinomiais. Além disso, destaca o estudo das características das raízes de uma equação do 3º grau de forma analítica e gráfica, onde apresentamos uma resolução analítica para as equações do 4º grau. Contudo, concluímos que a aplicação deste estudo demonstra que os alunos apresentam maior facilidade para encontrar uma raiz de uma equação na forma geral, assim como as demais raízes. Portanto, o procedimento utilizado em sala apresenta um método para encontrar pelo menos uma raiz de uma equação do 3º grau, sem a utilização de fórmula.

Palavras-chave: Equações Polinomiais, Polinômios e Característica das Raízes.

Abstract

This work presents a study on the Cardano's method applied in 3rd degree polynomial equations of the form $x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}$ and use in the classroom, the 3rd year of high school, working with the procedure without the use of formula to determine a root of 3rd degree polynomial equation. The application of this method searches enable to students a relevant intellectual enrichment for future studies of the exact sciences. In this work not used a diagnostic evaluation to analyse the level of understanding of theme, only search to apply the procedure used by Cardano, in the classroom, and especially present a demonstration of this procedure to an equation in the general form of the 3rd degree. The study brings a historical approach of the resolutions of the equations, after, a theoretical foundation for the study of polynomials, detaching the theorems main, propositions and key definitions for the study of the polynomial functions. Moreover, detach the study of the characteristics of the roots of an equation of the 3rd degree of analytical and graphical form, where we present an analytical resolution for the 4th degree equations. However, we conclude that the application of this study demonstrates that students have greater facility to find a root of an equation in the general form, as well as the other roots. Therefore, the procedure used in classroom presents a method to find at least one root of an equation of the 3rd degree, without the use of formula.

Keywords

Polynomial equations, polynomial and Characteristic Roots.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A redução da carga horária da disciplina de matemática na rede pública de ensino, principalmente no ensino médio, ocasionada pela inserção de novas disciplinas no currículo básico, faz com que os professores se adequem em relação a forma de ministrar os conteúdos de matemática. Desta forma, esta redução leva os professores a priorizarem determinados conteúdos a serem ministrados, bem como, a metodologia a ser utilizada. Esta situação faz com que sejam utilizadas, em sala de aula, fórmulas prontas e mecanizadas, levando o aluno à prática da memorização de fórmulas.

A vivência em sala de aula, principalmente no ensino médio nas escolas públicas, desvelou a dificuldade dos alunos em resolver equações polinomiais. Essa dificuldade motivou a buscar uma metodologia que auxilie os alunos na compreensão da resolução das equações polinomiais. Na busca de sanar essas dificuldades, propomos que o estudo das equações polinomiais deva ser construído conjuntamente com o aluno, levando-o a descobrir como essas fórmulas surgiram e porque surgiram.

A necessidade de dominar uma técnica para solucionar as equações polinomiais vem desafiando os matemáticos desde a Mesopotâmia quando foram encontrados os primeiros registros de soluções para algumas equações do 1º e 2º graus. Desde então as equações polinomiais podem ser encontradas em diversas situações problemas, principalmente as equações de grau menor ou igual a 3, por isso merece um estudo mais aprofundado.

Quando desenvolvemos o estudo dos polinômios, deparamos com o seguinte questionamento: qual é a melhor estratégia para trabalharmos os métodos de resolução de equações polinomiais? Esta é uma indagação que muitas vezes fica sem resposta, pois com o passar dos anos, o número de aulas de matemática, principalmente nas escolas públicas vem sendo reduzidas e acaba obrigando os professores a priorizarem determinados conteúdos ou simplesmente apresentarem fórmulas prontas. Essa prática de ensino contradiz os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN) que orienta que o conhecimento deva ser construído conjuntamente com o aluno, utilizando uma perspectiva sócio histórica do tema.

Diante dessas inquietações, neste trabalho, propomos estudar uma maneira, que possibilite amenizar o estudo de raízes de funções polinomiais de grau menor ou igual a 4. Para tanto baseamos este estudo no artigo do Professor Elon Larges Lima [3]. Portanto, objetivamos estudar o procedimento teorizado por Cardano para determinar uma raiz de equações polinomiais de 3º grau. Além disso buscamos construir, passo-a-passo, conceitos para determinar as raízes das equações de 1º ao 4º grau.

Nas Preliminares, fizemos um levantamento histórico dos primeiros registros das resoluções das equações do 1º grau surgidos no Egito Antigo. A partir daí o desenvolvimento dos polinômios, de uma forma mais complexa, foi identificado nos escritos cuneiformes da antiga Mesopotâmia, que só foram decifrados no começo do século XIX por Grotefende. Somente no século XII, com a tradução do livro de Alkhowarizi (780 - 850), que a álgebra começou a se expandir pela Europa. Após o século XVI, com os estudos de Cardano, a álgebra retomou o seu desenvolvimento e com isso os matemáticos perceberam que os números reais não eram suficientes, nascendo, então, as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos. Por fim, definimos conceitualmente as funções polinomiais sobre um anel de integridade K, apresentamos resultados importantes, em especial, o algoritmo de Horner-Rufinni para encontrarmos as raízes das equações polinomiais.

Na Seção, Equações Polinomiais, apresentamos um método para resolução das equações de 1º ao 4º grau, sendo o enfoque determinar as raízes desde as equações de 1º e 2º grau, sem a utilização de fórmulas. Nas equações de 3º grau, aplicamos uma substituição de variável e reduzimos à forma $x^3 + px + q = 0, \quad (*) \quad p, q \in \mathbb{N}$ e aplicamos o procedimento de Cardano para encontrar uma raiz. Em seguida, determinamos as demais raízes e se essas são reais ou complexas. Apresentamos, também, através da representação gráfica da função polinomial associada à equação $(*)$, uma maneira para que o aluno possa perceber, de forma concreta, a existência de uma ou mais raízes reais.

Nas Considerações Finais, concluímos que os resultados do procedimento aplicado em sala de aula, demonstram que é possível trabalhar com equações de 3º grau de uma forma geral, não só nos casos particulares conforme orientam os PCN's. Os resultados mostram, também, a necessidade de um aumento do número de aulas de matemática no Ensino Médio para que os conteúdos de Matemática possam ser trabalhados sob uma perspectiva sócio histórica.

1 Aspectos Históricos

Os primeiros registros dos polinômios encontrados nos papiros do Egito antigo pediam a solução de equações lineares, "da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b e c eram conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de 'aha'"(BOYER, 2002, p. 11). Essas formas de cálculos eram exercícios para jovens estudantes e embora fossem usados de forma prática, os escribas as utilizavam como forma de enigmas ou recreações matemáticas. O desenvolvimento dos polinômios de forma mais complexa foi identificado nos escritos cuneiformes[1] da antiga Mesopotâmia[2]. Os povos que ali habitavam eram denominados de babilônios. Muitos dos registros matemáticos dos babilônios, encontrados em centenas de tabletas de barro, só foram decifrados no começo do século XIX por Grotefende, mas somente no final do século XX que começaram a aparecer exposições substanciais da matemática mesopotâmica. Nesse registro, foi observado que os babilônios não possuíam dificuldades na solução da equação quadrática completa, pois eles tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Segundo Boyer, 2002, os babilônios podiam "transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores". Como o alfabeto não tinha sido inventado, não utilizavam letras para designar quantidades desconhecidas, porém palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam para os cálculos, mesmo que usados num sentido abstrato.

Com a expansão e o domínio do Império Romano na Europa o interesse pela Matemática acabou sendo reduzido, por isso não temos grandes marcos históricos registrados nessa área do conhecimento. Somente a partir do século XII, com a tradução do livro Hisab al-jabr wal-mugabala, de AlKhowarazi (780 - 850) do árabe para o latim, que se pode considerar como o início da álgebra na Europa, merecendo o título de "pai da álgebra".

Os principais matemáticos dessa época vieram da Itália das cidades de Genova,

[1]A escrita cuneiforme é considerada o mais antigo sistema de escrita. Realizada pelos babilônicos, essa forma de escrita era representada por símbolos iconográficos que eram talhados com estiletes, no formato de cunha, em tabletas de barro mole, que eram colocadas, posteriormente, ao sol ou em fornos para secarem.

[2]A Mesopotâmia era uma região localizada entre os rios Tigre e Eufrates, que compreende o atual Iraque

Pisa, Milão, Florença e Veneza, principais centros comerciais e onde começaram a surgir trabalhos importantes no domínio da resolução de equações. Nessa época viveu um dos maiores matemáticos da Europa da Idade Média: Leonardo de Pisa (1175-1250) conhecido como Fibonacci. Em 1202 escreveu seu mais famoso livro, Liber Abaci. Essa obra apresentou questões relacionadas com equações do 2º e 3º grau que o autor aprendeu com autores árabes, a exemplo de uma das equações estudadas foi $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Até o século XVI não houve grandes acontecimentos para a evolução da álgebra. Somente em meados do século mencionado que houve um avanço na descoberta de fórmulas algébricas para a resolução de equações do 3º e 4º grau, porém com uma linguagem geométrica e verbal.

Segundo Domingues e Iezzi, 2003, em 1591 o francês François Viète (1540 - 1603), em sua obra Introdução à Arte Analítica, criou o cálculo literal, introduzindo a linguagem das fórmulas na matemática. Pela primeira vez foi possível escrever genericamente uma equação do segundo grau. Apesar do uso de vogais e consoantes para representar variáveis e as constantes não ter vingado, foi uma revolução na matemática. Hoje o uso de constantes letras nos cálculos matemáticos é de práxis comum. Foi também no século XVI, na Itália, que a evolução dos conceitos de álgebra ganhou um importante componente.

Por volta de 1510, Scipione Del Ferro (1465 - 1526), professor da Universidade de Bolonha, personagem sobre cuja vida quase não se sabe, encontrou uma fórmula para resolver as equações do 3º grau do tipo $x^3 + cx + d = 0$. Del Ferro não publicou a sua descoberta, porém repassou a dois de seus discípulos, Annibale Della Nave (mais tarde seu genro e sucessor na cadeira de Matemática em Bolonha) e Antônio Maria Fiore o segredo da solução dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número"($x^3 + px = q$) e "cubo igual a coisas e número"($x^3 = px + q$). Para Antônio Maria Fiore deu a regra e não a prova. Fiore apropriou-se deste mérito, e com este conhecimento em mãos resolveu desafiar Niccolo Tartaglia[3] (1499 - 1557) para um "duelo intelectual" que era muito comum nesta época, os quais eram presididos por alguma autoridade e muitas vezes com uma grande audiência. Essas disputas muitas vezes definiam a permanência ou não de alguns professores universitários na cátedra. Como consequência, Niccolo Tartaglia acabou descobrindo um método para a resolução de equações do tipo $x^3 + cx + d = 0$ e também para o tipo $x^3 + bx^2 + d = 0$ o qual Fiore não conhecia. Em sua disputa Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo as equações do terceiro grau

[3]Conceituado matemático e professor em Veneza e que havia derrotado vários desafiantes.

e Tartaglia, por sua vez, propôs uma lista de problemas diversificados. Segundo Boyer, 2002, Tartaglia não tinha o costume de divulgar o método de resolução e sim apenas os resultados encontrados, mas desta vez, acabou apresentando este método a um amigo Gerônimo Cardano (1501 - 1576), um grande matemático que vivia em Milão, ao qual pediu que não divulgasse este método. Com a ajuda do discípulo Ludovico Ferrari (1522 - 1565), Cardano conseguiu demonstrar o método desenvolvido por Tartaglia para resolver equações do tipo $x^3 + cx = d$. Em 1542, após analisar os manuscritos de Del Ferro, Cardano encontrou a fórmula $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, a qual era utilizada para resolver equações da forma $x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{N}$ e a publicou, em 1545, em seu livro Ars Magna, ficando com todo o crédito. A partir daí foi possível resolver equações do 3º grau no caso geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e equações do 4º grau da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

As resoluções de equações sempre fascinaram os matemáticos ao longo da história, os Babilônios já conseguiam resolver algumas equações do 2º grau completando quadrados, os gregos resolviam algumas equações também do 2º grau com régua e compasso. Na idade média durante a ascensão do Cristianismo, o desenvolvimento da Matemática se deve aos Árabes e os Hindús. Os Híndús realizaram pesquisas na Álgebra e no século XI o matemático Sridhara desenvolve a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que é conhecida como fórmula de BasKara, que, em alguns casos, poderia ser representada pelo número $b^2 - 4ac < 0$, mas isso não era um problema, visto que, o que importava, eram equações que tinham $b^2 - 4ac > 0$.

No século XVI, ressurgiu na Europa o interesse pelo estudo da Matemática e em uma disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução de equações de 3º grau, perceberam que os números reais não eram suficientes, nascendo então as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos.

No século XVII, René Descartes em uma passagem de seu livro Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade escreveu a seguinte frase: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Ás vezes elas são imaginárias".

Por esse motivo, até hoje o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário, termo que se consagrou juntamente com a expressão "número complexo". Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Leonardo Euler, o qual foi notável em seu empenho na melhoria da simbologia. Especialmente, quando, estava em expansão o Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Newton e Leibniz. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler destacamos o i substituindo $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, utilizando $i^2 = -1$ para este estudo. Mas, esta ideia utilizada por Euler só foi aceita a partir dos resultadoss publicados por Gauss apresentando uma nova estrutura de conjunto numérico, que hoje denominamos números complexos.

Um dos fatos que levou ao surgimento deste novo conjunto numérico, foram equações polinomiais que não possuíam raízes no universo dos números reais, por exemplo, $x^2 + 1 = 0$.

2 Preliminares

Os conceitos abordados nesta seção serão importantes para os principais casos estudados neste trabalho.

2.1 Números Complexos

Definição 1. *Um número complexo z é escrito na forma de um par ordenado (a, b), onde $a, b \in \mathbb{R}$, ou na forma $z = a + bi$, onde $i = \sqrt{-1}$. Em termos de notação de conjunto usa-se a letra $\mathbb{C}$ para designar o conjunto dos números complexos e a notação é:*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \quad | a, b \in \mathbb{R} \quad e \quad i^2 = -1\}.$$

Consideremos um número complexo, $z = a + bi$, podemos destacar:
(1) A parte real de z é representada por $Re(z) = a$ e a parte imaginária de z é representada por $Im(z) = b$;
(2) Quando $b = 0$ implica em $z = a$, dizemos que z é um número complexo real;
(3) Quando $a = 0$ implica em $z = bi$, dizemos que z é um número imaginário puro;
(4) Quando $a = 0$ e $b = 1$ implica em $z = i$, dizemos que z é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos.

Sejam os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$. Definimos a adição e a multiplicação ente os números complexos z e w, respectivamente por:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ z.w &= (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Seja o número complexo $z = a + bi$. Definimos o módulo do número complexo z, como sendo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definição 2. *Seja um número complexo z representado por $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Seu conjugado é dado por $\overline{z}$ sendo representado por $\overline{z} = a - bi$.*

Lema 1. *Se z e w são complexos não nulos quaisquer, então:*

(a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$;

(b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\quad \overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$; $\quad \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \left(\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}\right)$;

(c) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$;

(d)$|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Demonstração. *(a)* Seja $z = a + bi$. Temos

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow z = \overline{z}.$$

(b) Sendo $z = a + bi$, $w = c + di$, temos:

$$\overline{z} + \overline{w} \;=\; (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w};$$

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) = \overline{z}.\overline{w}; \end{aligned}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \;=\; \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}.\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{\overline{\left(\frac{z}{w}\right).w}}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

(c) Segue de *(b)*, por indução sobre n.

(d) Sendo $z.\overline{z} = |z|^2$, temos que:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z.\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}.$$

□

2.2 Anel

Definição 3. *Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio K e um par de operações, respectivamente, uma adição $(x, y) \mapsto x + y$, e uma multiplicação $(x, y) \mapsto xy$. Chamamos $(K, +, .)$ de anel se:*

i) $(K, +)$ é um grupo abeliano:

a) se $a, b, c \in K$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$;

b) se $a, b \in K$, então $a + b = b + a$;

c) existe um elemento $0_k \in K$ tal que, $a + 0_k = a, \forall a \in K$;

d) $\forall a \in K, \quad \exists (-a) \in K$, tal que $a + (-a) = 0_k$;

ii) A multiplicação goza da propriedade associativa:

$$\text{se } a, b, c \in K, \text{ então } a(bc) = (ab)c.$$

iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é:

$$\text{se } a, b, c \in K, \text{ então } a(b + c) = ab + bc.$$

Se um anel $(K, +, .)$ satisfaz a propriedade:
iv) $\exists 1 \in K, 0 \neq 1$, tal que $x.1 = 1.x = x. \quad \forall x \in K$, então dizemos que $(K, +, .)$ é um **anel com unidade 1.**

v) $\forall x, y \in K, x.y = y.x$, então dizemos que $(K, +, .)$ é um **anel comutativo**.

vi) $\forall x, y \in K, x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, então dizemos que $(K, +, .)$ é um **anel sem divisores de zero.**

Se $K, +, .$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, dizemos que $(K, +, .)$ é um **domínio de Integridade.**

Se um domínio de Integridade $(K, +, .)$ satisfaz a propriedade:
vii) $\forall x \in K, x \neq 0, \exists y \in K$ tal que $x.y = y.x = 1$, dizemos que $(K, +, .)$ é **um corpo.**

Exemplo 1.

i) anel dos números inteiros;

ii) anel dos números racionais;

iii) anel dos números reais;

iv) anel dos números complexos.

Exemplo 2. *Todos os anéis numéricos, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, são domínios de integridade.*

Proposição 1. *Todo corpo é um domínio de integridade.*

Demonstração. Seja K um corpo e $a, b \in K$, tais que $a.b = 0$.
Suponhamos inicialmente que $a \neq 0$, e portanto a é inversível. Multiplicando os dois membros da igualdade $a.b = 0$, por a^{-1}:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}.0 = 0.$$

Mas $a^{-1}(ab) = b$, então $b = 0$.
Por outro lado, para $b \neq 0$ o caso é análogo.
Então um produto de dois fatores de K não pode ser nulo sem que um deles seja nulo.
Logo K é um domínio de integridade. □

2.3 Polinômios

Neste trabalho quando se tratar de um domínio de integridade infinito usamos K e quando relacionar ao conjunto das funções polinomiais sobre um domínio de integridade K usamos $K[X]$.

De um ponto de vista algébrico, funções polinomiais reais podem ser encaradas como polinômios de coeficientes reais.

Definição 4. *Uma sequência $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ de elementos de K é dita quase toda nula se existir $n \geq 0$ tal que*

$$a_n = a_{n+1} = \cdots = 0.$$

Exemplo 3. *São consideradas sequências quase toda nula.*

$$(0, 0, 0, 0, ...) \text{ e } (1, 2, 3, 4, ..., n, 0, 0, 0, ...).$$

Definição 5. *Um polinômio sobre (ou com coeficientes em) K é uma expressão $f = f(X)$, com $f(X) \in K[X]$ do tipo*

$$f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots = \sum_{s \geq 0} a_sX^s,$$

onde $(a_0, a_1, a_2, ...)$ é uma sequência quase toda nula de elementos de K.

Dado um polinômio $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots$ sobre K, adotamos as seguintes convenções:

i) Os elementos $a_i \in K$ são denominados os **coeficientes** de f;

ii) Quando $a_i = 0$ omitimos, sempre que for conveniente, o termo a_iX_i. Em particular, como a sequência $(a_0, a_1, a_3, \cdots)$ é quase toda nula, existe um inteiro $n \geq 0$ para o qual podemos escrever,

$$f(X) = \sum_{s=0}^{n} a_sX^s;$$

iii) Quando $a_i = \pm 1$, escreve-se $\pm X^i$, ao invés de $(\pm 1)X^i$, para o termo correspondente de f;

iv) O polinômio $0 = 0 + 0X + 0X^2 + \cdots$ é denominado o **polinômio identicamente nulo** sobre K.

Lema 2. *Se $(a_s)_{s\geq 0}$ e $(b_s)_{s\geq 0}$ são sequências quase todas nulas de elementos de K, então também são quase todas nulas as sequências $(a_s \pm b_s)_{s\geq 0}$ e $(c_s)_{s\geq 0}$, onde*

$$c_s = \sum_{i+j=s} a_ib_j, \quad com \quad i, j \geq 0.$$

Demonstração. Sejam m, n dois números inteiros positivos, tais que $a_i = 0$ e $b_j = 0$, para $i > n$ e $j > m$, respectivamente. Considere $s > m, n$, assim $a_s = 0$ e $b_s = 0$, logo $(a_s \pm b_s) = 0$. Portanto, a sequência $(a_s \pm b_s)_{s\geq 0}$ é uma sequência quase toda nula.

Por outro lado, se $s > m + n$ e $i + j = s$, com $i, j \geq 0$, onde a_s e b_s são sequências quase toda nula, então:

$$k = i + j \geq n + m \Rightarrow i > n \quad \text{e} \quad j > m \quad \text{ou} \quad i > n \quad \text{ou} \quad j > m.$$

Para $i > n$ e $j > m$, temos:

$$a_i = 0 \quad \text{e} \quad b_j = 0.$$

Para $i > n$ ou $j > m$, temos:

$$a_i = 0 \quad \text{ou} \quad b_j = 0.$$

Em ambos os casos, temos:

$$c_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j = 0 \quad \text{com} \quad i, j \geq 0.$$

$\square$

Definição 6. *Dados em $K[X]$ os polinômios*

$$f(X) = \sum_{s\geq 0} a_s X^s \quad e \quad g(X) = \sum_{s\geq 0} b_s X^s, \quad a_s, b_s \in K.$$

A soma e o produto de f e g, denotados, respectivamente, por $f+g$ e $f.g$. Assim,

$$(f+g)(X) = \sum_{s\geq 0} a_s X^s + \sum_{s\geq 0} b_s X^s = \sum_{s\geq 0} (a_s + b_s) X^s$$

e

$$(f.g)(X) = \sum_{s\geq 0} c_s X^s, \quad onde \quad c_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j, \quad com \quad i, j \geq 0$$

Dados os polinômios $f, g, h \in K[X]$, estes gozam das seguintes propriedades:

i) Comutatividade: $f + g = g + f$ e $f.g = g.f$;

ii) Associatividade: $(f + g) + h = f + (g + h)$ e $(f.g).h = f.(g.h)$;

iii) Distributividade: $f.(g + h) = f.g + f.h$.

Exemplo 4. *Considere os polinômios de coeficientes reais $f(X) = 1 + 2X + 3X^3$ e $g(X) = X + 2X^3$.*

Então

$$(f + g)(X) = f(X) + g(X) = 1 + 2X + 3X^3 + X + 2X^3 = 1 + 3X + 5X^3.$$

e

$$
\begin{aligned}
(f.g)(X) &= (1+2X+3X^3).(X+2X^3) \\
&= 1.(X+2X^3)+2X.(X+2X^3)+3X^3.(X+2X^3) \\
&= X+2X^3+2X^2+4X^4+3X^4+6X^6) \\
&= X+2X^2+2X^3+7X^4+6X^6.
\end{aligned}
$$

Definição 7. *Seja $f(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n \in K[X]\setminus\{0\}$, com $a_n \neq 0$, e $a_m=0$ para todo $m>n$. Assim, temos que a sequência $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ é quase toda nula, então o inteiro não negativo n é o grau de f, e denotamos $\partial f = n$.*

Proposição 2. *Sejam $f,g\in K[X]\setminus\{0\}$, temos que:*

i) Se $f+g\neq 0$, então $\partial(f+g)\leq$ máx$\{\partial f,\partial g\}$.

ii) Se $f.g\neq 0$, então $\partial(f.g)=\partial f+\partial g$.

Demonstração. Sejam $\partial f=n$ e $\partial g=m$, com

$$
f(X)=\sum_{s=0}^{n} a_sX^s \quad \text{e} \quad g(X)=\sum_{s=0}^{m} b_sX^s, \quad a_s,b_s\in K.
$$

i) Considere dois casos:

1º caso: $n\neq m \quad \text{e} \quad n>m.$

$$
\begin{aligned}
(f+g)(X) &= \sum_{s=0}^{n} a_sX^s+\sum_{s=0}^{m} b_sX^s \\
&= \sum_{s=0}^{m} a_sX^s+\sum_{s=m+1}^{n} a_sX^s+\sum_{s=0}^{m} b_sX^s \\
&= \sum_{s=0}^{m} (a_s+b_s)X^s+\sum_{s=m+1}^{n} a_sX^s
\end{aligned}
$$

Logo o $\partial(f+g)=n=\text{máx}\{\partial f,\partial g\}$.

2º caso: $n=m$

$$
\begin{aligned}
(f+g)(X) &= \sum_{s=0}^{n} a_s X^s + \sum_{s=0}^{m} b_s X^s \\
&= \sum_{s=0}^{n} a_s X^s + \sum_{s=0}^{n} b_s X^s \\
&= \sum_{s=0}^{n} (a_s + b_s) X^s.
\end{aligned}
$$

Devemos verificar agora se: $(a_n + b_n) = 0$ ou $(a_n + b_n) \neq 0$.

- $(a_n + b_n) = 0 \Rightarrow \partial(f+g) < n = \text{máx}\{\partial f, \partial g\}$.
- $(a_n + b_n) \neq 0 \Rightarrow \partial(f+g) = n = \text{máx}\{\partial f, \partial g\}$.

Portanto em qualquer um dos dois casos temos que: $\partial(f+g) \leq \text{máx}\{\partial f, \partial g\}$.

ii) Pela Definição 6, temos que:

$$(f.g)(X) = \sum_{s \geq 0} c_s X^s, \quad \text{onde} \quad c_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j, \quad \text{com} \quad i, j \geq 0.$$

Daí, $\partial(f.g) = s$. Como $s = i + j$, com $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ e $j = 0, 1, 2, \cdots, m$, temos que $s = n + m$.

Temos que $a_n b_m \neq 0$, pois as sequência, $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ e $(b_0, b_1, \cdots, b_m)$, são quase toda nula, com $a_i = 0$ para $i > n$ e $b_j = 0$, para $j > m$.

Logo,

$$\partial(f.g) = s = n + m = \partial f + \partial g.$$

□

Definição 8. *Valor numérico de um polinômio $f(X) \in K[X]$ é obtido pela substituição da variável X por um elemento $\alpha \in K$.*

Exemplo 5. *Determinar o valor numérico do polinômio $f(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X + 1$ para $X = 2$.*

O valor numérico é obtido substituindo a variável X por 2 no polinômio e realizando as operações devidas, assim,

$f(2) = 2^4 - 3(2)^3 + 2(2)^2 - 6(2) + 1 = 16 - 24 + 8 - 12 + 1 = -11$.

Portanto, $f(2) = -11$.

Lema 3 (Algoritmo da Divisão)**.** *Dados os polinômios não nulos $f(X), g(X) \in K[X]$, então existem polinômios $q(X), r(X) \in K[X]$ tal que $f(X) = q(X).g(X) + r(X)$, onde $r(X) = 0$ ou $\partial r(X) < \partial g(X)$.*

Demonstração. A prova é na verdade nada mais que o processo de "divisão longa" a qual é usada na escola para dividir um polinômio por outro. Se $\partial f(X) < \partial g(X)$ não há nada para provar. Basta colocar $q(X) = 0$, e $r(X) = f(X)$, e certamente teremos $f(X) = 0.g(X) + f(X)$, onde $\partial r(X) \leq \partial g(X)$ ou $f(X) = 0$.
Considere agora $\partial f(X) \geq \partial g(X)$. Sejam,

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \text{ e}$$
$$g(X) = b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0, \text{ onde } a_n \neq 0, b_m \neq 0 \text{ e } n \geq m.$$

Tomando $f_1(X) = f(X) - \left(\dfrac{a_n}{b_m}\right) X^{n-m} g(X)$. Assim, $\partial f_1(X) \leq n - 1$, então por indução sobre o grau de $f(X)$, podemos supor que $f_1(X) = q_1(X).g(X) + r(X)$ onde $r(X) = 0$ ou $\partial r(X) < \partial g(X)$.
Substituindo $f_1(X)$, temos:

$$\begin{aligned} f(X) - \left(\frac{a_n}{b_m}\right) X^{n-m} g(X) &= q_1(X).g(X) + r(X) \Rightarrow \\ f(X) &= \left(\frac{a_n}{b_m}\right) X^{n-m} g(X) + q_1(X).g(X) + r(X) \Rightarrow \\ f(X) &= \left(\left(\frac{a_n}{b_m}\right) X^{n-m} + q_1(X)\right).g(X) + r(X). \end{aligned}$$

Considerando, $q(X) = \left(\dfrac{a_n}{b_m}\right) X^{n-m} + q_1(X)$, temos

$$f(X) = q(X).g(X) + r(X), \quad \text{com} \quad q(X), r(X) \in K[X],$$

onde $r(X) = 0 \quad$ ou $\quad \partial r(X) < \partial g(X)$. □

Exemplo 6. *O polinômio $f(X) = X^3 + X^2 + X + 3$ pode ser escrito como $(X+1)(X^2+1)+2$, ou seja, $X^3 + X^2 + X + 3 = (X+1)(X^2+1)+2$.*
Sendo $g(X) = X^2 + 1$ e $q(X) = X + 1$ e $r(X) = 2$, temos que:

$$f(x) = q(X).g(X) + r(X), \quad \textit{com} \quad \partial r(X) < \partial g(X).$$

2.4 Algoritmo Prático da Divisão de Polinômios

Para dividir um polinômio $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ por $g(X) = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$ com $n \geq m$ e $a_n, b_m \neq 0$, devemos dividir o termo a_nX^n pelo termo b_mX^m obtendo como resultado

$$c_{n-m} = (a_n.b_m^{-1})X^{n-m}, \quad \text{com} \quad a_n, b_m \in K.$$

Em seguida multiplica-se c_{n-m} por $g(X)$ e subtrai de $f(X)$ obtendo $r_1(X)$. Se o grau de $r_1(X)$ for menor que o grau de $g(X)$ a divisão encerra. Caso contrário, devemos repetir o processo, isto é, dividir o termo de maior potência de $r_1(X)$ pelo termo b_mX^m, multiplicando o resultado obtido pelo polinômio $g(X)$ e subtrai pelo polinômio $r_1(X)$. O procedimento termina quando o grau de $r_s(X)$ for menor que o grau de $g(X)$, onde o polinômio $q(X)$ é obtido pela somatória dos termos do quociente da divisão.

Exemplo 7. *Dividir o polinômio* $f(X) = X^3 + X^2 + X + 3$ *por* $g(X) = X^2 + 1$, *onde* $f(X), g(X) \in \mathbb{R}[X]$.

Pelo procedimento descrito acima temos que $c_1 = \left(\dfrac{X^3}{X^2}\right) = X$ multiplicando este valor pelo polinômio $g(X)$ e subtraindo de $f(X)$ obtemos $r_1(X) = X^2+3$, como o grau de $r_1(X)$ e igual ao grau de $g(X)$ devemos prosseguir com a divisão. Dividindo agora o termo de maior grau de $r_1(X)$ pelo termo X^2, obtemos $c_0 = 1$, multiplicando c_{s-1} por $g(X)$ e subtraindo de $r_1(X)$, obtemos como resultado $r_2(X) = 2$. Como o grau de $r_2(X)$ é menor que o grau de $g(X)$, a divisão está completa. Portanto, temos como resultado, $r_2(X) = 2$, $q(X) = X + 1$. Assim,

$$X^3 + X^2 + X + 3 = (X + 1)(X^2 + 1) + 2.$$

Outra maneira de efetuar a divisão dos polinômios pode ser através do procedimento prático conhecido como divisão da chave(análogo ao númerico).

$X^3 + X^2 + X + 3$	$X^2 + 1$
$-X^3 - X$	X
$X^2 + 3$	$X + 1$
$-X^2 - 1$	
2	

Assim,

$$X^3 + X^2 + X + 3 = (X + 1)(X^2 + 1) + 2.$$

2.5 Raizes de Polinômios

Definição 9. *Para* $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in K[X]$*, a função polinomial associada a* f *é a função* $p : K \longrightarrow K$ *dada, para* $x \in K$*, por*

$$p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0.$$

Quando $f(X) = c$*, a função polinomial associada é a função constante* $p(x) = c$ *para todo* $x \in K$*.*

Definição 10. *Chamamos de equação algébrica ou polinomial toda equação que pode ser escrita na forma* $p(x) = 0$*, onde* $p(x)$ *representa a função polinomial associada a* f*, dado por*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ *é uma sequência quase toda nula, com* $x \in \mathbb{C}$*, tal que* $a_n \neq 0$*.*

Definição 11. *Seja* $f \in K[X]$ *um polinômio, com função polinomial associada* $p : K \longrightarrow K$*. Um elemento* $\alpha \in K$ *é uma raiz de* f *se* $p(\alpha) = 0$*.*

O conjunto de todas as raízes da equação polinomial recebe o nome de conjunto solução da equação.

Exemplo 8. *O número 2 é raiz do polinômio* $X^3 - 2X^2 + X - 2$*, pois*

$$p(2) = 2^3 - 2.2^2 + 2 - 2 = 0.$$

Exemplo 9. *Determine as raízes da função polinomial* $p(x) = x^2 - 4x + 5$*.*

Devemos encontrar um valor α, tal que $p(\alpha) = 0$, ou seja,

$$\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0.$$

Somando -1 em ambos os lados temos:

$$\begin{gathered} \alpha^2 - 4\alpha + 4 = -1 \Rightarrow \\ (\alpha - 2)^2 = -1 \Rightarrow \alpha - 2 = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \\ \alpha = 2 \pm \sqrt{-1} \Rightarrow \alpha = 2 \pm i. \end{gathered}$$

Assim, existem dois valores para α tais que $p(\alpha) = 0$, ou seja, a função polinomial $p(x)$ possui duas raízes complexas.

Proposição 3 (Teste da raiz). *Se $f \in K[X] \setminus \{0\}$ e $\alpha \in K$, então:*

i. α é raiz de f se, e só se, $(X - \alpha)|f(X)$ em $K[X]$;

ii. Se α for raiz de f, então existe um maior inteiro positivo m tal que $(X - \alpha)^m$ divide $f(x)$ em $K[X]$;

iii. Se $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ forem raízes duas a duas distintas de f, então o polinômio $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_s)$ divide $f(X)$ em $K[X]$.

Demonstração. ($\Rightarrow$)*i)* Pelo algoritmo da divisão temos a existência de polinômios $q[X], r[X] \in K[X]$ tais que

$$f(X) = (X - \alpha)q(X) + r(X), \quad \text{com} \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad \partial r < \partial(X - \alpha) = 1.$$

Assim, $r(X) = c$, um polinômio constante. Daí,

$$f(X) = (X - \alpha)q(X) + c.$$

Sendo $p(x)$ a função polinomial associada ao polinômio $f(X)$, temos que

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + c.$$

E, sendo α raiz de f, pela Definição 11, temos

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + c = 0 \Longrightarrow c = 0.$$

Portanto,

$$f(X) = (X - \alpha)q(X).$$

Logo, $(X - \alpha)|f(x)$.
($\Leftarrow$) Considere $(X - \alpha)|f(X)$. Assim $f(X)$ poderá ser escrito como:

$$f(X) = (X - \alpha)g(X).$$

Sendo $p(x)$ a função polinomial associada a $f(X)$, temos que:

$$p(x) = (x - \alpha)g(x).$$

Calculando $p(\alpha)$, com $\alpha \in K$, obtemos

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)g(\alpha) = 0.$$

Logo, α é raíz de f.

ii) Pelo Lema 3, se $m > \partial f$ e sendo $\partial(X-\alpha)^m = m$, então $(X-\alpha)^m$ não divide $f(X)$.
Portanto, existe um maior inteiro $m < \partial f$ tal que $(X-\alpha)^m$ divide $f(X)$.
iii) Sendo α_1 raiz de f, pelo item i, temos que $(X-\alpha_1)|f(X)$, isto é, $f(X) = (X-\alpha_1).q_1(X), \quad \text{com} \quad q_1(X) \in K[X]$.
Considerando a função polinomial $p(x)$ e $g_1(x)$ associada aos polinômios $f(X)$ e $q_1(X)$ respectivamente, temos:

$$p(x) = (x-\alpha_1)g_1(x).$$

Sendo α_2 raiz de f e $\alpha_2 \neq \alpha_1$, temos:

$$p(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)g_1(\alpha_2) = 0 \Longrightarrow g_1(\alpha_2) = 0.$$

Logo, α_2 é raiz de $q_1(X)$, isto é, $q_1(X) = (X-\alpha_2)h(X)$. Dai,

$$f(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)h(X),$$

logo, $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ divide $f(X)$.
Repetindo o procedimento para as s raízes, temos que
$(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_s)$ divide $f(X)$ em $K[X]$. $\square$

Proposição 4 (Horner - Rufinni). *Seja $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ um polinômio mônico sobre K, isto é, $a_n = 1$. Se $\alpha \in K$ é uma raiz de f e*

$$g(X) = X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \cdots + b_1X + b_0,$$

onde $g(X) \in K[X]$ é o quociente da divisão de $f(X)$ por $(X-\alpha)$, então temos

$$\begin{cases} b_{n-2} = \alpha + a_{n-1} \\ b_{n-3} = \alpha b_{n-2} + a_{n-2} \\ \dots \\ b_{n-1-i} = \alpha b_{n-i} + a_{n-i} \\ \dots \\ b_0 = \alpha b_1 + a_1. \end{cases}$$

Demonstração. Podemos escrever o polinômio $g(X)$, como

$$g(X) = X^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-1-i} X^{n-1-i}.$$

Como $g(X)$ é quociente da divisão de $f(X)$ por $(X - \alpha)$, então temos:

$$\begin{aligned} f(X) &= (X-\alpha)g(X) \\ &= (X-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}X^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}X^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha b_{n-1-i}X^{n-1-i} \\ &= b_{n-1}X^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-1-i}X^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-2} \alpha b_{n-1-i}X^{n-1-i} - \alpha b_0 \\ &= X^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-1-i}X^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha b_{n-i}X^{n-i} - \alpha b_0 \\ &= X^n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_{n-1-i} - \alpha b_{n-i})X^{n-i} - \alpha b_0. \quad (*) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} f(X) &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_o \\ &= X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}X^{n-i} + a_0. \quad (**) \end{aligned}$$

Assim, de $(*)$ e $(**)$, temos

$$X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}X^{n-i} + a_0 = X^n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_{n-1-i} - \alpha b_{n-i})X^{n-i} - \alpha b_0.$$

Daí, comparando a igualdade entre os polinômios, com $1 \leq i \leq n-1$, temos:

$$\begin{cases} b_{n-2} = \alpha + a_{n-1} \\ b_{n-3} = \alpha b_{n-2} + a_{n-2} \\ \cdots \\ b_{n-1-i} = \alpha b_{n-i} + a_{n-i} \\ \cdots \\ b_0 = \alpha b_1 + a_1. \end{cases}$$

□

2.6 Algoritmo de Horner - Rufinni

O algoritmo que apresentamos pode ser utilizado para verificar se um $\alpha \in K$ é raiz de um polinômio $f(X) \in K[X]$.

α	$a_n = 1$	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
	$\alpha b_{n-1} + a_{n-1}$	$\alpha(\alpha b_{n-1} + a_{n-1}) + a_{n-2}$	$\cdots$	$\alpha b_1 + a_1$	$\alpha b_0 + a_0$	
	$b_{n-1} = 1$	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	

Os valores da primeira linha são os coeficientes do polinômio $f(X)$ e os valores da terceira linha são os coeficientes do polinômio quociente da divisão de $f(X)$ por $(X - \alpha)$.

Exemplo 10. *Verifique que* 4 *é raiz do polinômio* $f(X) = X^4 + 2X^3 - 13X^2 - 38X - 24$ *e encontre, com o auxílio do algoritmo de Horner - Rufinni, o quociente da divisão de* $f(X)$ *por* $(X - 4)$.

Temos que $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = -13$, $a_1 = -38$, $a_0 = -24$ e $\alpha = 4$.
Vamos montar o algoritmo.

4	1	2	- 13	- 38	-24
	1	6	11	6	0

Através do algoritmo, podemos observar que:

$$b_3 = 1, \quad b_2 = 6, \quad b_1 = 11, \quad b_0 = 6.$$

Como $\alpha b_0 + a_0 = 0$, temos que 4 é raíz de $f(X)$. Logo, o quociente da divisão de $f(X)$ por $(X - 4)$ é $g(X) = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$.

Corolário 1. *Se $f \in K[X] \setminus \{0\}$, então f possui no máximo ∂f raízes em K.*

Demonstração. Desenvolvendo a prova por indução sobre o grau de f.

Se $\partial f = 0$, então existe um $c \in K \setminus \{0\}$ tal que $f(X) = c$. Daí, a função polinomial associada a f é a funçao $p(x) = c$, e segue que o número de raízes de f é 0, isto e, igual ao ∂f.

Seja agora f um polinômio de grau positivo, e suponhamos que a afirmação do enunciado seja válida para todos os polinômios de graus menores que ∂f. Se f não tiver raízes em K, nada há a fazer. Por outro lado, se $\alpha \in K$ é uma raiz de f e m o maior natural tal que $f(X) = (X - \alpha)^m q(X)$, para algum polinômio $q \in K[X]$. Como $\partial q = \partial f - m < \partial f$, segue da hipótese de indução que q tem no máximo ∂q raízes em K.

Agora, se $\beta \neq \alpha$, $\beta \in K$ é raiz de f, temos

$$0 = p(\beta) = (\beta - \alpha)^m q(\beta)$$

Logo, β é raiz de $q(X)$.

Portanto, o número de raízes de f é igual a m mais o número de raízes de $q(X)$, e segue, que f possui no máximo $m + \partial q = \partial f$ raízes em K. □

Teorema 1 (Teorema de Gauss)**.** *Todo polinômio $f \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ possui ao menos uma raiz complexa.*

Uma consequência imediata do teorema fundamental da álgebra é o seguinte

Corolário 2. *Se $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ é um polinômio, com $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ e grau $n \geq 1$, então existem n números complexos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que*

$$f(X) = a_n(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n).$$

Demonstração. Façamos a prova por indução sobre n, $\partial f = n$. Se $n = 1$, imediato. Caso contrário, suponhamos, por indução sobre n, isto é, o corolário é válido para todo polinômio de coeficientes complexos de grau menor ou igual a $n-1$.

Se $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ é uma raíz de f, o teste da raiz garante a existência de um polinômio g, também de coeficientes complexos, tal que $f(X) = (X - \alpha_1)g(X)$. Note que g tem grau $n-1$ e coeficiente a_n; portanto, por hipótese de indução existem $\alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tais que $g(X) = a_n(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_n)$. Logo,

$$f(X) = (X - \alpha_1)g(X) = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\cdots(X - \alpha_n),$$

e nada mais há a fazer. $\square$

Teorema 2. *Seja o polinômio* $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ *com* $a_n \neq 0$, *com coeficientes reais. Se o número complexo* $z = a + bi$, *com* $b \neq 0$ *é uma raiz da função polinomial, então o complexo, conjugado,* $z = a - bi$, *também será raiz da função polinomial.*

Demonstração. A função polinomial associada a $f(X)$ é dada por

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{com} \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Seja α raiz de $p(x)$, com $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Por hipótese, se $\alpha = a + bi$, com $b \neq 0$ é raíz da função polinomial $p(x)$, isto é, $p(\alpha) = 0$. Assim,

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a\alpha + a_0 = 0.$$

Tomando o conjugado de ambos os lados da equação e aplicando as propriedades de conjugado, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0} &= \overline{0} \Rightarrow \\
\overline{a_n\alpha^n} + \overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_2\alpha^2} + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} &= \overline{0} \Rightarrow \\
a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + a_2\overline{\alpha^2} + a_1\overline{\alpha} + a_0 &= 0 \Rightarrow \\
a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_2(\overline{\alpha})^2 + a_1\overline{\alpha} + a_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $p(\overline{\alpha}) = 0$, ou seja, $\overline{\alpha}$ é raiz da função polinomial. $\square$

Proposição 5 (Fórmula de Cardano)**.** *Dado um polinômio $f(X) \in K[X]$, definido por $f(X) = X^3+pX+q$. Então um $\alpha \in K$, dado por $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ é uma raiz de $f(X)$.*

Demonstração. Considerando $f(x) = x^3 + px + q$ como sendo a função polinomial associada a $f(X)$, e calculando o valor de $f(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)^3 \\
&+ p\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)+q \\
&= -\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}+3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)} \\
&+ 3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \\
&+ p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+q \\
&= +3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\left(-\frac{p^3}{27}\right)}+3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\left(-\frac{p^3}{27}\right)} \\
&+ p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
&= -p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \\
&+ p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=0
\end{aligned}
$$

Portanto α é uma raiz de $f(X)$. □

2.7 Derivada de um Polinômio

Os conceitos abordados sobre derivadas, serão importantes para estudar as caracteristicas das raízes de uma função polinomial do 3º grau da forma $x^3 + px + q$ para $p < 0$.

Definição 12. *Para um polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[X]$, *definimos sua derivada* $p' \in K[X]$ *como o polinômio*

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1, \text{ se } \partial p > 0.$$

Caso contrário, definimos $p'(x) = 0$.

Exemplo 11. *Determine a derivada dos seguintes polinômios abaixo:*
(a) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 3x$
(b) $p(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x^2 + x - 3$

Usando a Definição 12, temos:
(a) $p'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 3$.
(b) $p'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 6x + 1$.

Definição 13. *Dada a função* $f : I \to \mathbb{R}$, *um ponto* $x_0 \in I$ *é chamado de*

i) ponto de máximo da função quando $f(x_0) \geq f(x)$ *para todo* $x \in I$;

ii) ponto de mínimo da função quando $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Teorema 3. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável em* x_0, *onde* x_0 *é um ponto no interior do domínio de* f (D_f). *Uma condição necessária para que* x_0 *seja um ponto de máximo ou de mínimo local é que* $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que x_0 seja ponto de máximo local. Assim, existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{em} \quad]x_0 - r, x_0 + r[\quad \cap \quad D_f.$$

Como, por hipótese, $x_0 \in D_f$, podemos escolher r de modo que $]x_0 - r, x_0 + r[\quad \subset \quad D_f$. Assim,

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in \quad]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Como f é derivável em x_0, os limites laterais

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existem e são iguais a $f'(x_0)$. Mas,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Para $x_0 < x < x_0 + r$, temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

.

Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \quad (*)$$

Para $x_0 - r < x < x_0$, temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Assim,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \quad (**)$$

Logo, de $(*)$ e $(**)$, temos que $f'(x_0) = 0$. □

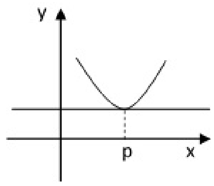
Teorema 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivada de 2^a ordem contínua no intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Então,*
(a) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ é ponto de mínimo local.
(b) $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ é ponto de máximo local.

Demonstração. (a) Como f'' é contínua em I e $f''(x_0) > 0$, então existe um $r > 0$, tal que $]x_0 - r, x_0 + r[$ esteja contido em I.
Logo,

$$f''(x) > 0 \quad \text{em} \quad]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Assim, f' é estritamente crescente neste intervalo. Como $f'(x_0) = 0$, resulta:

$$\begin{cases} f'(x) < 0, x \in \quad]x_0 - r, x_0[\\ f'(x) > 0, x \in \quad]x_0, x_0 + r[. \end{cases}$$



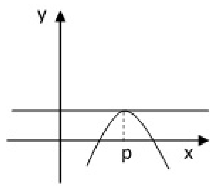
Portanto, f é estritamente decrescente em $]x_0 - r, x_0[$ e estritamente crescente em $]x_0, x_0 + r[$.
Logo, x_0 é ponto de mínimo local.

(b) Como f'' é contínua em I e $f''(x_0) < 0$, então existe um $r > 0$, tal que $]x_0 - r, x_0 + r[$ esteja contido em I. E ainda,

$$f''(x) < 0 \text{ em }]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Assim, f' é estritamente decrescente neste intervalo. Como $f'(x_0) = 0$, resulta:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, x \in \quad]x_0 - r, x_0[\\ f'(x) < 0 x \in \quad]x_0, x_0 + r[. \end{cases}$$



Portanto, f é estritamente crescente em $]x_0 - r, x_0[$ e estritamente decrescente em $]x_0, x_0 + r[$.
Logo, x_0 é ponto de máximo local. $\square$

3 Equações polinomiais

Nesta seção faremos o estudo dos procedimentos para resolver equações de 1º ao 3º grau. Estudaremos de uma forma detalhada o procedimento utilizado por Cardano para determinar uma raiz de uma função polinomial do 3º grau. Realizaremos o estudo das características das raízes de uma função polinommial do 3º grau de uma forma algébrica e utililazemos a representação gráfica de algumas funções para comprovar o que foi realizado algebricamente.

No 6º ano, segunda fase do ensino fundamental já se desenvolve uma pré-álgebra, mas é no 9º ano que os conceitos algébricos são ampliados, buscando desenvolver esses conceitos em situações problemas. Neste momento o aluno começa a reconhecer diferentes funções da álgebra, representando problemas por meio de equações e conhecendo a "sintaxe"(regras para resolução de uma equação). O currículo do Ensino Médio busca propiciar aos alunos um aprofundamento nos conhecimentos sobre conjuntos numéricos e álgebra, de uma forma articulada com outros conceitos, bem como sobre uma perspectiva sócio-histórica da origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. Conforme destaca os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

O estudo dos polinômios no Ensino Médio nem sempre é abordado nas escolas da rede pública, uma vez que o planejamento dos conteúdos depende do número de aulas destinadas à disciplina e com isso muitas vezes leva o professor a priorizar conteúdos determinados pelos livros didáticos adotados pela instituição, fazendo uma abordagem "superficial" dos polinômios, principalmente, os polinômios de 3º e 4º graus.

Para estudar as equações polinomiais como orientam os PCN's, trabalhamos com a construção do conhecimento, desenvolvendo o processo para encontrar as raízes de uma equação polinomial e não só as fórmulas. Para tanto foi necessário fazer um estudo preliminar de números complexos, algorítmo de Horner - Rufinni, sendo este utilizado para efetuar divisão entre polinômios e neste trabalho com o intuito de verificar se um valor α é ou não uma raiz de uma função polinomial e por último um breve estudo de derivadas de uma função polinomial com o intuito de estudar as características das raízes de uma função polinomial do 3º grau

3.1 Métodos para Resolver uma Equação Polinomial

Existem vários métodos para resolver uma equação polinomial, iremos estudar principalmente o método de Cardano para resolver equações de 3º e 4º graus, buscando aplicar o método de Cardano para trabalhar com os alunos do Ensino Médio,desenvolvendo com eles este procedimento sem utilização da fórmula de Cardano.

3.1.1 Equação do 1º Grau

Para determinar a raiz da equação $ax+b=0$, com $a \neq 0$, devemos somar em ambos os membros o termo $(-b)$, obtendo

$$ax + b - b = -b.$$

Assim, encontramos

$$ax = -b,$$

multiplicando os dois membros da equação por $\frac{1}{a}$, obtemos

$$\frac{1}{a}.ax = -b.\frac{1}{a}.$$

Portanto, $x = -\frac{b}{a}$ é a raiz da equação $ax + b = 0$.

3.1.2 Equação do 2º Grau

Para determinar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, primeiramente multiplicamos os dois membros da equação por $\frac{1}{a}$, obtendo

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0.$$

Em seguida somando $\left(-\frac{c}{a}\right)$ em ambos os membros da equação, temos

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = \left(-\frac{c}{a}\right).$$

Somando em ambos os membros da equação o termo "quadrado da metade do coeficiente do termo x", isto é, $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$, obtemos

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = \left(-\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Dessa forma, temos no primeiro membro um quadrado perfeito, então podemos escrever a nova equação como segue

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Daí, existem duas soluções para a equação anterior,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O radicando $b^2 - 4ac$ define as características das raízes:

- $b^2 - 4ac > 0$, teremos duas raízes reais distintas;
- $b^2 - 4ac = 0$, teremos duas raízes reais iguais, dizemos uma *raiz dupla*;
- $b^2 - 4ac < 0$, teremos duas raízes complexas, sendo uma conjugada da outra;

Exemplo 12. *Determine as raízes da equação* $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Usando o procedimento acima, temos:

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 6 &= 0 \Rightarrow x^2 + 5x = -6 \Rightarrow \\
x^2 + 5x + \left(\frac{25}{4}\right) &= -6 + \left(\frac{25}{4}\right) \Rightarrow \\
\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \Rightarrow x + \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \\
x &= -3 \quad \text{ou} \quad x = -2.
\end{aligned}$$

Logo, $x = -3$ e $x = -2$, são as raízes da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$. Escrevemos o conjunto solução como sendo $S = \{-3, -2\}$.

Exemplo 13. *Determine as raízes da equação* $x^2+4x+5=0$.

$$\begin{aligned} x^2+4x+5 &= 0 \Rightarrow x^2+4x=-5 \Rightarrow \\ x^2+4x+4 &= -5+4 \Rightarrow \\ (x+2)^2 &= -1 \Rightarrow \quad x+2=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow \quad x=-2\pm i \Rightarrow \\ x &= -2+i \quad \text{ou} \quad x=-2-i \end{aligned}$$

Logo, $x=-2+i$ e $x=-2-i$, são as raízes da equação $x^2+4x+5=0$. Escrevemos o conjunto solução como sendo $S=\{-2+i,-2-i\}$.

3.1.3 Equação do 3º Grau

Para determinar as raízes de uma equação do 3º grau, primeiramente utilizamos a fórmula de Cardano, dada por $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, sendo utilizada em equações do tipo $x^3+px+q=0$, a qual estudaremos com detalhes, e em seguida, utilizaremos o Algoritmo de Hornner - Rufinni, para efetuar a divisão do polinômio $x^3+px+q=0$ pelo polinîmio $(x-\alpha)$, onde α é a raiz encontrada pela fórmula de Cardano, obtemos como quociente um polinômio de grau 2. Daí, aplicamos o procedimento para uma equação do 2º grau.

Exemplo 14. *Determine as raízes da equação* $x^3-6x-9=0$

Temos que $q=-9$ e $p=-6$

Utilizando a fórmula de Cardano, temos

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2}+\sqrt{\frac{(-9)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2}-\sqrt{\frac{(-9)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{216}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{216}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}} \\ x &= \sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1} \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Através do algoritmo de Horner-Rufinni, temos

$$\alpha=3; \quad a_3=1; \quad a_2=0; \quad a_1=-6; \quad a_0=-9; \quad b_2=1; \quad b_1=3 \quad \text{e} \quad b_0=3.$$

3	1	0	- 6	- 9
	1	3	3	0

Podemos observar que o número 3 é raiz da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, pois o resto da divisão é igual a 0.
Assim, $x^3 - 6x - 9$ pode ser escrito como $(x-3)(x^2+3x+3)$. Para encontrar as outras raízes, basta encontrar as raízes da equação $x^2 + 3x + 3 = 0$.
Determinando as raízes da equação $x^2 + 3x + 3 = 0$, obtemos

$$x = \frac{-3+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}.$$

Logo, conjunto solução é dado por $S = \{3, \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}\}$.

Apresentamos o estudo realizado, conjuntamente com os alunos do Ensino Médio, dos procedimentos utilizados por Cardano para reduzir uma equação polinomial do 3º grau da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a, b, c, d \neq 0$, em uma equação polinomial do $3^o grau$ da forma $x^3 + px + q = 0$. E por fim, determinar as raízes dessa equação polinomial utilizando os procedimentos, sem o uso das fórmulas.

3.1.4 O Método de Cardano

Cardano sendo um verdadeiro discípulo de Al-Khowarizmi e, como os árabes, pensava em suas equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de categorias gerais. Por exemplo, uma equação cúbica da forma $x^3 + px = q$, era escrita como "um cubo e coisa igual a um número", com isso quando se escrevia "seja o cubo e seis vezes o lado igual a 20" queriam dizer $x^3 + 6x = 20$ (BOYER, 2002. p.195), a qual poderia ser resolvida substituindo x por $u - v$ e sendo $u.v$ igual a terça parte do coeficiente de x. Os critérios utilizados neste exemplo serão demonstrados na Proposição 6.
Assim, temos:

$$x = u - v \quad e \quad u.v = \frac{6}{3} = 2.$$

$$\begin{aligned} (u-v)^3 + 6(u-v) &= 20 \\ u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 6u - 6v &= 20. \end{aligned}$$

Sendo $u.v = 2$,

$$u^3 - 6u + 6v - v^3 + 6u - 6v = 20 \Rightarrow u^3 - v^3 = 20.$$

Como, $u.v = 2$ tem-se $v = \dfrac{2}{u}$.

$$u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^3 = 20.$$

Multiplicando por u^3, obtemos

$$u^6 - 20u^3 - 8 = 0.$$

Fazendo $u^3 = m$, tem-se

$$m^2 - 20m - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 10 + 2\sqrt{27} = 10 + 6\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ m_2 = 10 - 2\sqrt{27} = 10 - 6\sqrt{3}. \end{cases}$$

Sendo $u^3 = m$, obtemos

$$u = \sqrt[3]{m} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \\ \text{ou} \\ u_2 = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Temos que

$$u^3 - v^3 = 20 \Rightarrow v^3 = u^3 - 20.$$

Para $u_1 = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, tem-se

$$v_1^3 = 10 + 6\sqrt{3} - 20 \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{-10+6\sqrt{3}}.$$

Para $u_2 = \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$, tem-se

$$v_2^3 = 10 - 6\sqrt{3} - 20 \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{-10-6\sqrt{3}}.$$

Podemos verificar que:

- $u_1 = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{-10+6\sqrt{3}} = -u_2;$
- $u_2 = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{-10+6\sqrt{3}} = -u_1.$

Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{10+2\sqrt{27}} + \sqrt[3]{10-2\sqrt{27}}.$$

Para equações do tipo $x^3 = cx + d$ substituímos x por $u + v$, ao invés de $u - v$.

Exemplo 15. *Usando o método de Cardano determine uma raiz da equação* $x^3 = 9x + 16$. *Assim,*

$$\begin{aligned} (u+v)^3 &= 9(u+v)+16 \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 &= 9u + 9v + 16. \end{aligned}$$

Sendo $u.v = 3$, temos

$$\begin{aligned} u^3 + 9u + 9v + v^3 &= 9u + 9v + 16 \\ u^3 + v^3 &= 16. \end{aligned}$$

Como, $u.v = 3 \Rightarrow v = \dfrac{3}{u}$, segue que

$$u^3 + \left(\frac{3}{u}\right)^3 = 16$$

Multiplicando por u^3, obtemos

$$u^6 - 16u^3 + 27 = 0.$$

Fazendo $u^3 = m$, obtemos

$$m^2 - 16m + 27 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 8 + \sqrt{37} \\ \text{ou} \\ m_2 = 8 - \sqrt{37}. \end{cases}$$

Sendo $u^3 = m$, temos

$$u = \sqrt[3]{m} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} \\ \text{ou} \\ u_2 = \sqrt[3]{8 - 2\sqrt{37}}. \end{cases}$$

Temos que

$$u^3 + v^3 = 16 \Rightarrow v^3 = 16 - u^3.$$

Para $u_1 = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$, tem-se

$$v_1^3 = 16 - 8 - \sqrt{37} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}}.$$

Para $u_2 = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}}$, tem-se

$$v_2^3 = 16 - 8 + \sqrt{37} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}.$$

Podemos verificar que:

- $u_1 = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} = u_2$;
- $u_2 = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} = u_1$.

Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}}.$$

Vejamos agora como Cardano chegou na fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

3.1.5 Equação da Forma $x^3 + px = q$

Proposição 6. *Seja $x^3 + px = q(*)$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Utilizando os procedimentos de Cardano, determine uma raiz da equação $(*)$.*

Demonstração. Substituindo x por $u - v$ e $u.v = \frac{p}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} (u-v)^3 + p(u-v) &= q \\ u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv &= q. \end{aligned}$$

Sendo $u.v = \frac{p}{3}$, temos

$$\begin{aligned} u^3 - pu + pv - v^3 + pu - pv &= q \\ u^3 - v^3 &= q. \end{aligned}$$

Como, $u.v = \frac{p}{3} \Rightarrow v = \frac{p}{3u}$. Assim,

$$u^3 - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q.$$

Multiplicando por u^3, obtemos

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Fazendo $u^3 = m$, obtemos

$$m^2 - qm - \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ \text{ou} \\ m_2 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Sendo, $u^3 = m$, temos

$$u = \sqrt[3]{m} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ \text{ou} \\ u_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

Temos que,

$$u^3 - v^3 = q \Rightarrow v^3 = u^3 - q.$$

Para $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, tem-se

$v_1^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - q \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$

Para $u_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, tem-se

$v_2^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - q \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$

Podemos observar que:

- $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -u_2;$

- $u_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -u_1.$

Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

□

3.1.6 Equação da Forma $x^3 = px + q$

Proposição 7. *Seja $x^3 = px + q(**)$, com $p, q \in \mathbb{N}$ Utilizando os procedimentos de Cardano, determine uma raiz da equação $(**)$.*

Demonstração. Substituindo x por $u + v$ e $u.v = \frac{p}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} (u+v)^3 &= p(u+v) + q \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 &= pu + pv + q. \end{aligned}$$

Sendo $u.v = \dfrac{p}{3}$, temos

$$\begin{aligned} u^3 + pu + pv + v^3 &= pu + pv + q \\ u^3 + v^3 &= q. \end{aligned}$$

Como, $u.v = \dfrac{p}{3} \Rightarrow v = \dfrac{p}{3u}$. Assim,

$$u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q.$$

Multiplicando por u^3, obtemos

$$u^6 - qu^3 + \frac{p^3}{27} = 0.$$

Fazendo $u^3 = m$, obtemos

$$m^2 - qm + \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}} \\ \qquad\text{ou} \\ m_2 = \dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Sendo, $u^3 = m$, temos

$$u = \sqrt[3]{m} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}} \\ \qquad\text{ou} \\ u_2 = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

Temos que,

$$u^3 + v^3 = q \Rightarrow v^3 = q - u^3.$$

Para $u_1 = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}}$, tem-se

$v_1^3 = q - \dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}}.$

Para $u_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$, tem-se

$v_2^3 = q - \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$.

Podemos observar que:

- $u_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = u_2$;
- $u_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = u_1$.

Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

□

Ao analisar as raízes das equações: $(*)$ e $(**)$, verificamos que se diferem apenas no sinal do termo $\frac{p^3}{27}$. Isso ocorre porque o termo px, na equação $(**)$, está do lado direito da igualdade, enquanto na equação $(*)$ se encontra do lado esquerdo da igualdade. Motivo este que realizamos a substituição de x na equação $(**)$ por $u + v$, ao invés, de $u - v$. Porém, o mais relevante é o procedimento utilizado para determinar uma raiz.

3.1.7 Equação da Forma $x^3 + px + q = 0$

Este caso representa a generalização dos casos anteriores. Os casos apresentados anteriormente tem o intuito de mostrar o procedimento utilizado, por Cardano, para encontrar uma raiz de uma equação do 3º grau.

Proposição 8. *Seja $x^3 + px + q = 0 (* * *)$, com $p, q \in \mathbb{R}$. Utilizando os procedimentos de Cardano, determine uma raiz da equação $(* * *)$.*

Demonstração. Como o termo px na equação $(***)$ está do lado esquerdo da igualdade, utilizamos o mesmo procedimento da equação $(*)$, ou seja, substituindo x por $u - v$ e $u.v = \frac{p}{3}$. Assim,

$$\begin{aligned} (u-v)^3 + p(u-v) + q &= 0 \\ u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + pu - pv + q &= 0. \end{aligned}$$

Sendo $u.v = \dfrac{p}{3}$, temos

$$\begin{aligned} u^3 - pu + pv - v^3 + pu - pv + q &= 0 \\ u^3 - v^3 + q &= 0. \end{aligned}$$

Como $u.v = \dfrac{p}{3} \Rightarrow v = \dfrac{p}{3u}$

$$u^3 - \left(\frac{p}{3u}\right)^3 + q = 0.$$

Multiplicando por u^3, obtemos

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Fazendo $u^3 = m$, obtemos

$$m^2 + qm - \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}} \\ \text{ou} \\ m_2 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Sendo, $u^3 = m$, temos

$$u = \sqrt[3]{m} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} \\ \text{ou} \\ u_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

Temos que,

$$u^3 - v^3 + q = 0 \Rightarrow v^3 = u^3 + q.$$

Para $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, tem-se

$v_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + q \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$

Para $u_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, tem-se

$v_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + q \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$

Podemos observar que:

- $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -u_2;$

- $u_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -u_1.$

Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

□

Exemplo 16. *Utilizando o procedimento de Cardano, determine uma raiz da equação* $x^3 + 3x + 4 = 0$.

Como o termo $3x$ está do lado esquerdo da igualdade, então devemos substituir x por $u - v$ e $u.v = \frac{3}{3} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} (u-v)^3 + 3(u-v) + 4 &= 0 \\ u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3u - 3v + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Sendo $u.v = 1$, temos

$$\begin{aligned} u^3 - 3u + 3v - v^3 + 3u - 3v + 4 &= 0 \\ u^3 - v^3 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Como $u.v = 1 \Rightarrow v = \dfrac{1}{u}$, segue que

$$u^3 - \left(\frac{1}{u}\right)^3 + 4 = 0.$$

Multiplicando por u^3, obtemos

$$u^6 + 4u^3 - 1 = 0.$$

Fazendo $u^3 = m$, obtemos

$$m^2 + 4m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -2 + \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ m_2 = -2 - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Sendo, $u^3 = m$, temos

$$u = \sqrt[3]{m} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ u_2 = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{5}}. \end{cases}$$

Temos que,

$$u^3 - v^3 + 4 = 0 \Rightarrow v^3 = u^3 + 4$$

Para $u_1 = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}$, tem-se
$v_1^3 = 4 - 2 + \sqrt{5} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$.
Para $u_2 = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{5}}$, tem-se
$v_2^3 = 4 - 2 - \sqrt{5} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

Podemos observar que:

- $u_1 = \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} \Rightarrow v_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = -u_2$
- $u_2 = \sqrt[3]{-2-\sqrt{5}} \Rightarrow v_2 = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -u_1$

Sendo assim,

$$x = \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{5}}$$

3.1.8 Equação da Forma Geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Neste tópico mostramos que uma equação geral do 3º grau pode ser reduzida ao caso anterior.

Proposição 9. *Seja $ax^3+bx^2+cx+d = 0(****)$, com $a, b, c, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Utilizando os procedimentos de Cardano, determine uma raiz da equação $(****)$.*

Demonstração. Primeiro devemos escrever a equação $(****)$ na forma $x^3+px+q = 0$. Dividindo a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ por a, obtemos

$$x^3 + \left(\frac{b}{a}\right)x^2 + \left(\frac{c}{a}\right)x + \frac{d}{a} = 0.$$

Substituindo x por $y - \dfrac{b}{3a}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} &= 0 \\
y^3 - \frac{by^2}{a} + \frac{b^2y}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{by^2}{a} - \frac{2b^2y}{3a^2} + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{cy}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} &= 0 \\
y^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Ao fazer a substituição de x por $y - \dfrac{b}{3a}$ as características das raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ não se altera, apenas sofre um deslocamento horizontal, que é dado por $\dfrac{b}{3a}$.

Fazendo $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$ e $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$, obtemos a equação do tipo $y^3 + py + q = 0$. Portanto, pela Proposição 8, temos

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Como $x = y - \dfrac{b}{3a}$, temos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a},$$

onde $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$ e $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$. $\square$

3.1.9 Características das raízes de uma equação do 3º Grau

De acordo com o Corolário 2, uma equação polinomial do 3º grau possui 3 raízes complexas e pelo Teorema 2, pelo menos uma raiz é real. Assim, surge questionamentos como: o que define a quantidade de raízes reais? Como podemos determinar o número de raízes reais? Para responder a estes questionamentos, estudamos a relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial do 3º grau.

Seja a equação polinomial

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (1)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
A equação polinomial (1), pode ser representada pela função polinomial

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Reescrevendo a função polinômial na forma

$$h(s) = s^3 + ps + q, \quad \text{com} \quad x = s - \frac{b}{3a},$$

onde $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a^2}$) e $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$.

Para estudar a característica das raízes, separamos para valores de p e q os seguintes casos:

1º Caso: $p = 0$ e $q = 0$

Obtemos a função polinomial $h(s) = s^3$. Neste caso, possui uma raiz real tripla, que é $s = 0$.

2º Caso: $p = 0$ e $q \neq 0$.

Considere α como sendo uma raiz real de $h(s)$, pelo item $i)$ da Proposição 3, temos

$$h(s) = (s - \alpha)g(s), \quad \text{onde} \quad g(s) \in \mathbb{R}[X].$$

Devemos então determinar a característica das raízes de $g(s)$, para tanto vamos utilizar o algoritmo de Horner-Rufinni. Temos que:

$$a_3 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = 0; \quad a_0 = q; \quad b_2 = 1; \quad b_1 = \alpha; \quad b_0 = \alpha^2.$$

α	1	0	0	q
	1	α	α^2	0

Assim,

$$g(s) = s^2 + \alpha s + \alpha^2.$$

Daí,

$$s = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-3\alpha^2}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{3\alpha^2}i}{2}.$$

Logo, as raízes de $g(s)$ são:

$$s = \frac{-\alpha + \sqrt{3\alpha^2}i}{2} \quad \text{ou} \quad s = \frac{-\alpha - \sqrt{3\alpha^2}i}{2}.$$

Portanto, para $p = 0$ e $q \neq 0$ a função polinomial $h(s) = s^3 + ps + q$, possui duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real.

3º caso: $p > 0$ e $q = 0$.

Assim, obtemos a função polinomial $h(s) = s^3 + ps$. Como não temos o termo q, temos que $s = 0$ é uma raíz de $h(s)$. Assim, pelo item $i)$ da Proposição 3, podemos escrever

$$h(s) = sg(s), \quad \text{onde} \quad g(s) \in \mathbb{R}[X].$$

Assim, $g(s) = s^2 + p$.

Daí,

$$s = \pm\sqrt{-p} = \pm\sqrt{p}i.$$

Logo, as raízes de $g(s)$ são:

$$s = \sqrt{p}i \quad \text{ou} \quad s = -\sqrt{p}i.$$

Portanto, para $p > 0$ e $q = 0$ a função polinomial $h(s) = s^3 + ps + q$, possui duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real.

4º caso: $p < 0$ e $q = 0$.

Seja $p = -a$, onde $a = |p|$.
Assim, obtemos a função polinomial $h(s) = s^3 - as$. Como não temos o termo q, temos que $s = 0$ é uma raíz de $h(s)$. Assim, pelo item $i)$ da Proposição 3, podemos escrever

$$h(s) = sg(s), \quad \text{onde} \quad g(s) \in \mathbb{R}[X].$$

Assim, $g(s) = s^2 - a$.

Daí,

$$s = \pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{|p|}.$$

Logo, as raízes de $g(s)$ são:

$$s = \sqrt{|p|} \quad \text{ou} \quad s = -\sqrt{|p|}.$$

Portanto, para $p > 0$ e $q = 0$ a função polinomial $h(s) = s^3 + ps + q$, possui três raízes reais distintas.

5º Caso: $p > 0$ e $q \neq 0$.

Assim, obtemos a função polinomial $h(s) = s^3 + ps + q$. Considere α como sendo uma raiz real de $h(s)$. Assim, pelo item $i)$ da Proposição 3, podemos escrever

$$h(s) = (s - \alpha)g(s), \quad \text{onde} \quad g(s) \in \mathbb{R}[X].$$

Devemos então determinar a característica das raízes de $g(s)$, para isso vamos utilizar o algoritmo de Horner-Rufinni.

Temos que:

$$a_3 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = p; \quad a_0 = q; \quad b_2 = 1; \quad b_1 = \alpha; \quad b_0 = \alpha^2 + p.$$

α	1	0	p	q
	1	α	$\alpha^2 + p$	$\alpha^3 + p\alpha + q = 0$

Assim,

$$g(s) = s^2 + \alpha s + \alpha^2 + p.$$

Daí,

$$s = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-3\alpha^2 - 4p}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{3\alpha^2 + 4p}i}{2}.$$

Logo, as raízes de $g(s)$ são:

$$s = \frac{-\alpha + \sqrt{3\alpha^2 + 4p}i}{2} \quad \text{ou} \quad s = \frac{-\alpha - \sqrt{3\alpha^2 + 4p}i}{2}.$$

Portanto, para $p > 0$ e $q \neq 0$ a função polinomial $h(s) = s^3 + ps + q$, possui duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real.

6º Caso: $p < 0$ e $q \neq 0$

Seja $p = -a$, onde $a = |p|$

Assim, obtemos a função polinomial $h(s) = s^3 - as + q$. Considere α como sendo uma raiz real de $h(s)$. Assim, pelo item $i)$ da Proposição 3, podemos escrever

$$h(s) = (s - \alpha)g(s), \quad \text{onde} \quad g(s) \in \mathbb{R}[X].$$

Devemos então determinar a característica das raízes de $g(s)$, para isso vamos utilizar o algoritmo de Horner-Rufinni.
Temos que:

$$a_3 = 1; \quad a_2 = 0; \quad a_1 = -a; \quad a_0 = q; \quad b_2 = 1; \quad b_1 = \alpha; \quad b_0 = \alpha^2 - a.$$

α	1	0	$-a$	q
	1	α	$\alpha^2 - a$	$\alpha^3 - a\alpha + q = 0$

Assim,

$$g(s) = s^2 + \alpha s + \alpha^2 - a.$$

Daí,

$$s = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-3\alpha^2 + 4a}}{2}. \quad (\triangle)$$

Logo, as raízes de $g(s)$ são:

$$s = \frac{-\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 4a}}{2} \quad \text{ou} \quad s = \frac{-\alpha - \sqrt{-3\alpha^2 + 4a}}{2}.$$

Neste caso, para determinar as características das raízes de $g(s)$ devemos estudar o sinal do radicando da igualdade $(\triangle)$. Assim, o sinal do radicando depende de α, mas queremos uma relação com os coeficientes e não com a raiz real. Entao estudamos a relação de α com p e q, no resto da divisão entre $h(s)$ por $(s-\alpha)$, uma vez que sabemos que é igual a zero. Ao analisar este resto, encontramos novamente uma equação do 3º grau com os mesmos coeficientes da equação $h(s)$. Precisamos então aprofundar um pouco mais nossos estudos, sobre os polinômios, para buscar uma solução para este problema.

Assim, vamos estudar a característica das raízes da função polinomial $h(s) = s^3 - as + q$ usando o conceito de derivada e de máximo e mínimo de uma função polinomial.

Aplicando a Definição 12 na função polinomial $h(s) = s^3 - as + q$, obtemos

$$h'(s) = 3s^2 - a.$$

O Teorema 3, nos garante que: uma condição necessária para que s_0 seja um ponto de máximo ou de mínimo local é que $h'(s_0) = 0$. Assim, temos $3s^2 - a = 0$. Desta forma, obtemos

$$s_1 = \frac{\sqrt{3a}}{3} \quad \text{e} \quad s_2 = -\frac{\sqrt{3a}}{3}.$$

Precisamos classificar, em máximo ou mínimo, os pontos em que $h'(s) = 0$. Assim devemos calcular a segunda derivada da função polinômial $h(s) = s^3 - as + q$, para tanto aplicamos a Definição 12 na função polinomial $h'(s) = 3s^2 - a$, obtendo

$$h''(s) = 6s.$$

Sendo $h''(s_1) = 2\sqrt{3a} > 0$ e $h'(s_1) = 0$, pelo item (a) do teorema 4, temos que s_1 é um ponto de mínimo local e sendo $h''(s_2) = -2\sqrt{3a} < 0$ e $h'(s_1) = 0$, pelo item (b) do Teorema 4, temos que s_2 é um ponto de máximo local.

Como a função $h(s)$, possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local, vamos analisar o sinal de $h(s_1)h(s_2)$ para verificar se existe um $s \in]s_1, s_2[$, tal que $h(s) = 0$.

Temos que:

$$h(s_1) = \left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)^3 - a\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) + q = -\frac{2a\sqrt{3a}}{9} + q$$

e

$$h(s_2) = \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)^3 - a\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) + q = \frac{2a\sqrt{3a}}{9} + q$$

Determinando, $h(s_1)h(s_2)$, temos

$$h(s_1)h(s_2) = \left(q - \frac{2a\sqrt{3a}}{9}\right)\left(q + \frac{2a\sqrt{3a}}{9}\right) = q^2 - \frac{4a^3}{27}.$$

Para $h(s_1)h(s_2) = 0 \Rightarrow h(s_1) = 0$ e $h(s_2) = 0$ ou $h(s_1) = 0$ e $h(s_2) \neq 0$ ou $h(s_1) \neq 0$ e $h(s_2) = 0$. Isso ocorre quando:

$$q^2 - \frac{4a^3}{27} = 0 \Rightarrow q = \pm\frac{2a\sqrt{3a}}{9}.$$

Para $h(s_1)h(s_2) > 0 \Rightarrow h(s_1) < 0 \quad \text{e} \quad h(s_2) < 0$ ou $h(s_1) > 0 \quad \text{e} \quad h(s_2) > 0$. Isso ocorre quando:

$$q^2 - \frac{4a^3}{27} > 0 \Rightarrow q > \frac{2a\sqrt{3a}}{9} \quad \text{ou} \quad q < -\frac{2a\sqrt{3a}}{9}.$$

Para $h(s_1)h(s_2) < 0 \Rightarrow h(s_1) < 0 \quad \text{e} \quad h(s_2) > 0$ ou vice-versa. Isso ocorre quando:

$$q^2 - \frac{4a^3}{27} < 0 \Rightarrow -\frac{2a\sqrt{3a}}{9} < q < \frac{2a\sqrt{3a}}{9}.$$

Portanto, para $p < 0, \quad p = -a \quad \text{e} \quad a = |p|$ a função polinomial $h(s) = s^3 + ps + q$, tem-se:

- Três raízes reais, sendo uma dupla para $q = \pm\frac{2|p|\sqrt{3|p|}}{9}$;
- Três raízes reais distintas para $-\frac{2|p|\sqrt{3|p|}}{9} < q < \frac{2|p|\sqrt{3|p|}}{9}$;
- Uma raiz real e duas complexas para $q > \frac{2|p|\sqrt{3|p|}}{9}$ ou $q < -\frac{2|p|\sqrt{3|p|}}{9}$.

Resumindo, temos:

p	**q**	**característica da raiz**
0	0	raiz tripla igual a zero
0	$\neq 0$	uma raiz real e duas complexas
> 0	qualquer	uma raiz real e duas complexas
< 0	$\pm\frac{2\|p\|\sqrt{3\|p\|}}{9}$	três raízes reais sendo uma dupla
< 0	$-\frac{2\|p\|\sqrt{3\|p\|}}{9} < q < \frac{2\|p\|\sqrt{3\|p\|}}{9}$	três raízes reais distintas
< 0	$q > \frac{2\|p\|\sqrt{3\|p\|}}{9}$ ou $q < -\frac{2\|p\|\sqrt{3\|p\|}}{9}$	uma raiz real e duas complexas

3.2 Estudando a Característica das Raízes com Auxílio da Representação Gráfica

Na abordagem utilizada, em sala de aula, foram utilizados alguns exemplos de funções que possibilitassem a visualização dos alunos quando lhes apresentados representações gráficas. Representações estas, trabalhadas através do software *wplotpr*, o qual é um software livre de fácil acesso e compreensão, tanto para alunos quanto para os profissionais da educação.

Uma importante ferramenta para o estudo do comportamento das raízes de uma função polinomial é o uso de programas que possam construir gráficos de funções e manipular esses gráficos, como o software *wplotpr* já anteriormente referido. O uso deste tipo de software para analisar o comportamento de uma curva, possibilita ao aluno visualizar o que é feito algebricamente, facilitando a sua compreensâo.

Nesta seção, realizamos um estudo da característica das raízes de uma função polinomial d0 3º grau, relacionando com o que foi estudado algebricamente. Assim, os alunos podem verificar de uma maneira mais clara o que acontece quando realizamos a mudança de valor de p e q, bem como a relação que os valores de p e q têm com a característica das raízes da função polinomial do 3º grau.

Primeiro analisamos a relação existente entre os gráficos das funções polinomiais $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $h(s) = s^3 + ps + q$. Para encontrar a função polinomial $h(s)$ realizamos a substituição de x por $s - \dfrac{b}{3a}$. A partir desta análise podemos verificar o deslocamento horizontal mostrado algebricamente.

Utilizamos como exemplo as funções: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ e $h(s) = s^3 - s + 3$.

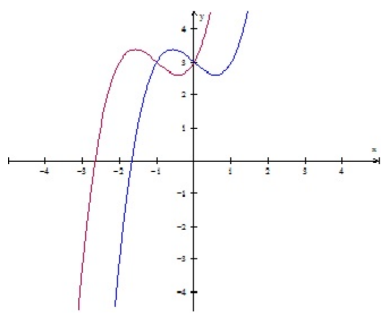


Figura 1: Gráfico das funções $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 3 \quad$ e $\quad h(s) = s^3 - s + 3$

Podemos observar que a representação gráfica de $f(x)$ e de $f(s)$ são semelhantes e se diferenciam apenas por um deslocamento lateral, o que mostra que a característica das raízes não se altera. Ou seja, a quantidade de raízes reais e complexas não se altera.

Vamos agora, estudar o comportamento do gráfico de uma função polinomial na forma $f(x) = x^3 + px + q$, para determinar a característica de cada raiz. Para que a raiz seja real é necessário que o gráfico intercepte o eixo OX. Assim, o número de raízes reais, está relacionado com o número de pontos em que o gráfico intercepta o eixo OX.

Utilizando como exemplo a função $f(x) = x^3$.

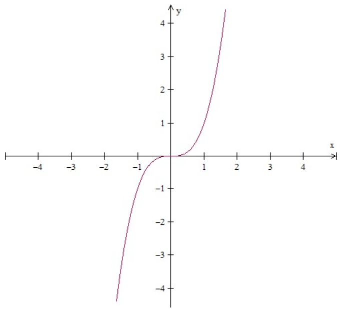


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^3$

Nesta função temos $p = 0$ e $q = 0$.

Podemos observar que o gráfico corta o eixo OX no ponto $x = 0$, com foi visto no 1º caso do estudo algébrico das características das raízes.

Fazendo $p = 0$ e variando q. Para isso, utilizamos as funções $f(x) = x^3 + 1$ e $h(s) = s^3 - 1$.

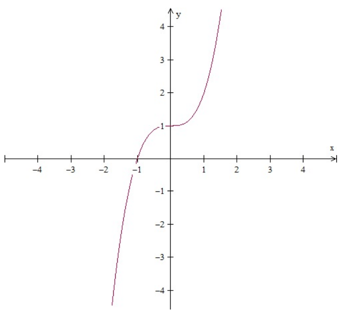


Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x^3 + 1$

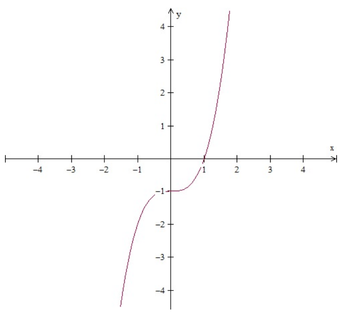


Figura 4: Gráfico da função $h(s) = s^3 - 1$

Podemos observar que, na Figura 3 e na Figura 4, temos $p = 0$ e $q \neq 0$. Assim, verifica o 2º caso estudado algebricamente, uma raiz real e duas complexas, pois o gráfico corta o eixo OX em apenas um ponto. Podemos verificar também que os gráficos sofre um deslocamento vertical, cortando o eixo OY no valor de q.

Fazendo $q = 0$ e variando p. Para isso, utilizamos as funções $f(x) = x^3 + x$ e $h(s) = s^3 - s$.

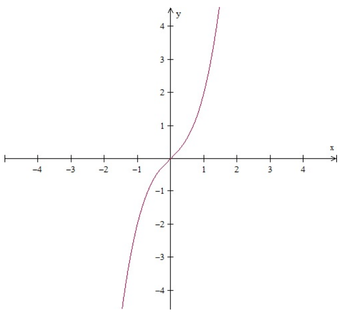


Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x^3 + x$

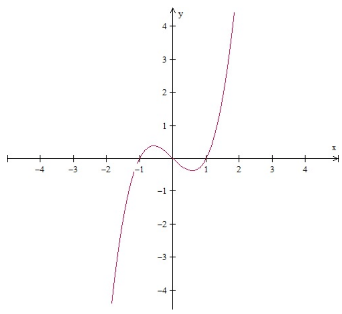


Figura 6: Gráfico da função $h(s) = s^3 - s$

Na Figura 5, temos para $p > 0$ e $q = 0$, enquanto na Figura 6, temos $p < 0$ e $q = 0$. Podemos verificar que agora os gráficos mudaram completamente o comportamento, assim a característica das raízes também. Temos na Figura 5 uma raíz real e duas complexas, já na figura 6 três raízes reais distintas.

Vamos mudar o valor de q e verificar se isto interfere no comportamento dos gráficos, para isso, utilizamos as funções $f(x) = x^3 + x + 1$ e $h(s) = s^3 - s + 1$.

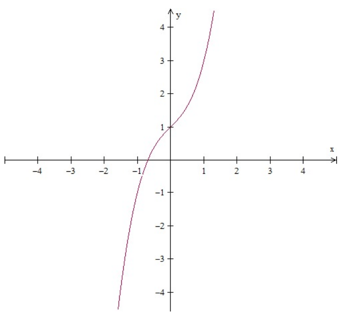


Figura 7: Gráfico da função $f(x) = x^3 + x + 1$

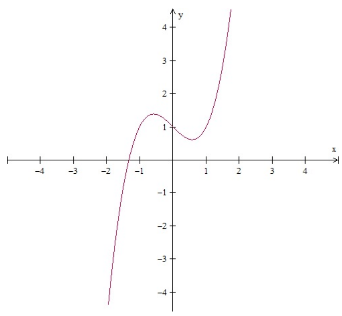


Figura 8: Gráfico da função $h(s) = s^3 - s + 1$

Note que, na Figura 7, temos $p > 0$ e $q = 1$, enquanto na Figura 8, $q < 0$ e $q = 1$. Podemos verificar que o gráfico da Figura 7 em relaçao ao gráfico da Figura 5, sofre apenas um deslocamento, sem alterar sua forma, e sem alterar o número de pontos que o gráfico, intercepta o eixo OX, isto mostra que a característica das raízes conserva-se, ou seja, uma raiz real e duas complexas. No gráfico da Figura 8, também sofreu apenas um deslocamento, sem alterar sua forma, em relação ao gráfico da Figura 6, mas o número de pontos que, o gráfico, intersepta o eixo OX, alterou completamente, assim a característica das raízes também. Logo. para $p > 0$ temos uma raiz real e duas complexas, como vimos algebricamente.

Vamos agora, fixar um valor para $p < 0$ e variar o valor de q, utilizando as funções $f(x) = x^3 - 3x + 1$ e $h(s) = s^3 - 3s + 2$.

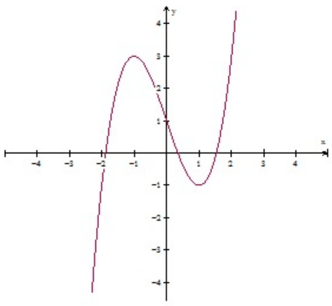


Figura 9: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$

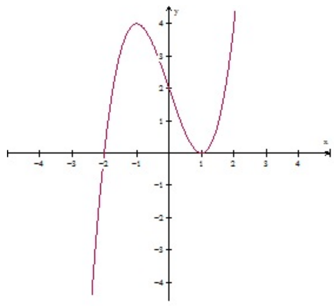


Figura 10: Gráfico da função $h(s) = s^3 - 3s + 2$

Na Figura 9, temos $p = -3$ e $q = 1$, enquanto na Figura 10, temos $p = -3$ e $q = 2$. Podemos verificar que o gráfico da Figura 9, temos três raízes reais distintos e na Figura 10, temos 3 raízes reais sendo uma dupla. Os gráficos mostram um mesmo comportamento, mas o gráfico da Figura 10 sofreu um deslocamento vertical, em relação ao gráfico da Figura 9, em ambos os casos o gráfico corta o eixo OX no ponto q. Assim, para um $q > 2$, deveremos ter uma raiz real e duas complexas como podemos verificar no gráfico representado, na Figura 11, para tanto utilizamos a função $f(x) = x^3 - 3x + 3$.

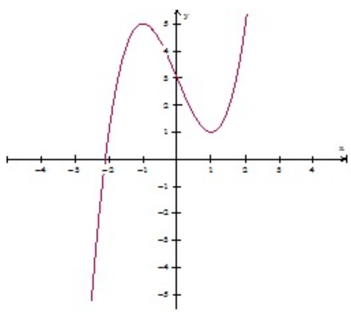


Figura 11: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 3$

Na abordagem realizada, em sala de aula, foram analisados outras representações gráficas, além das apresentadas neste trabalho, para que os alunos pudessem perceber a relação existente entre p e q com o comportamento de cada representação gráfica. Assim, se fez a verificação da característica das raízes, fazendo também uma relação do estudo gráfico com o estudo algébrico.

3.3 Equação do 4º Grau

Nesta seção, trabalhamos uma resolução algébrica, com os alunos do Ensino Médio, da equação polinomial $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, com $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}, a \neq 0$ mostrando a importância do procedimento de Cardano para a sua resolução.

Cardano embora achasse possível, não foi capaz de resolver, contudo o inclui no capítulo XXXIX da sua "*Ars Magna*" atribuindo a Ferrari a sua solução. A solução apresentada por Ferrari.
Nesta solução, dada por Ferrari, considera o primeiro termo igual a $\frac{6}{x}$, o segundo por x e o terceiro por $\frac{x^3}{6}$, assim temos a proporção contínua[4] e o produto das duas primeiras partes igual a 6.
Partindo de que a soma seja 10, temos:

$$\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6} = 10.$$

Multiplicando por $6x$, obtemos

$$x^4+6x^2+36 = 60x.$$

Completando o quadrado perfeito no primeiro membro temos:

$$\begin{aligned} x^4+6x^2+36+6x^2 &= 60x+6x^2 \\ x^4+12x^2+36 &= 60x+6x^2 \\ (x^2+6)^2 &= 6x^2+60x. \end{aligned}$$

Diante desta situação, necessitamos que o segundo membro também seja um quadrado perfeito de um polinômio em x. Assim, buscamos uma constante b, para que o segundo membro da equação acima se torne um quadrado. Assim,

$$(x^2+6+b)^2 = 6x^2+60x+b^2+2b(x^2+6).$$

[4]È toda proporção que apresenta os meios iguais.

Devemos então encontrar b, tal que

$$6x^2 + 60x + b^2 + 2b(x^2 + 6),$$

seja um quadrado perfeito de um polinômio em x. Mas

$$\begin{aligned} 6x^2 + 60x + b^2 + 2b(x^2 + 6) &= 6x^2 + 60x + b^2 + 2bx^2 + 12b \\ &= (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b). \end{aligned}$$

Para que seja um quadrado é necessário que:

$$60^2 - 4.(2b + 6).(b^2 + 12b) = 0.$$

Desenvolvendo a equação acima, temos

$$\begin{aligned} 3600 - 8b^3 - 120b^2 - 288b &= 0 \\ 8b^3 + 120b^2 + 288b &= 3600 \\ b^3 + 15b^2 + 36b &= 450. \end{aligned}$$

Desse modo a resolução da equação do 4º grau fica dependente da resolução da equação do 3º grau a qual já se conhecia a forma de resolução. Assim, Ferrari recorre a fórmula de Cardano.

É importante ressaltar que o procedimento utilizado por Ferrari nos permite resolver as equações tipos $ax^4 + cx^2 + dx + e = 0$ e $ax^4 + bx^3 + cx^2 + e = 0$.

Para resolver uma equação do 4º grau, devemos reduzí-la a um dos tipos citados acima.

Seja a equação polinomial

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \qquad (1)$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Dividindo toda a equação por a, temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Para eliminar o termo x^3 devemos substituindo x por $y - \frac{b}{4a}$,

$$(y - \frac{b}{4a})^4 + \frac{b}{a}(y - \frac{b}{4a})^3 + \frac{c}{a}(y - \frac{b}{4a})^2 + \frac{d}{a}(y - \frac{b}{4a}) + \frac{e}{a} = 0.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$y^4 + \left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right) y^2 + \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right) y + \left(\frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}\right) = 0.$$

Para facilitar os cálculos vamos escrever a equação na forma

$$y^4 + By^2 + Cy + D = 0, \qquad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} B &= \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2} \\ C &= \frac{b^3}{8a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a} \\ D &= \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}. \end{aligned}$$

Utilizamos o procedimento de Ferrari.

Somando $\frac{B^2}{4}$ em ambos os lados na equação (2), obtemos

$$y^4 + By^2 + Cy + D + \frac{B^2}{4} = \frac{B^2}{4}.$$

Assim,

$$\left(y^2 + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{B^2}{4} - Cy - D. \qquad (3)$$

Agora devemos encontrar um valor S de forma que o segundo membro da equação (3) seja um quadrado perfeito. Segue que

$$\left(y^2 + \frac{B}{2} + S\right)^2 = 2Sy^2 - Cy + \frac{B^2}{4} - D + S^2 + BS. \qquad (4)$$

Para que a expressão $2Sy^2 - Cy + \dfrac{B^2}{4} - D + S^2 + BS$, seja um polinômio quadrado em y, o discriminante deve ser igual a zero, ou seja,

$$C^2 - 8S\left(\frac{B^2}{4} - D + S^2 + BS\right) = 0.$$

Desenvolvendo obtemos a cúbica, em S.

$$8S^3 + 8BS^2 + \left(2B^2 - 8D\right)S - C^2 = 0. \qquad (5)$$

Considerando s_1 , como sendo uma solução da equação (5) e substituindo em (4) temos

$$\begin{aligned}
\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1\right)^2 &= 2s_1\left(y - \frac{C}{4s_1}\right)^2 \\
\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1\right)^2 &= (\sqrt{2s_1})^2\left(y - \frac{C}{4s_1}\right)^2 \\
\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1\right)^2 &= \left(\sqrt{2s_1}y - \frac{C\sqrt{2s_1}}{4s_1}\right)^2 \\
\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1\right)^2 &= \left(\sqrt{2s_1}y - \frac{C\sqrt{2s_1}}{2\sqrt{2s_1}}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1\right)^2 - \left(\sqrt{2s_1}y - \frac{C\sqrt{2s_1}}{2\sqrt{2s_1}}\right)^2 &= 0 \\
\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1 + \sqrt{2s_1}y - \frac{C\sqrt{2s_1}}{2\sqrt{2s_1}}\right)\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1 - \sqrt{2s_1}y + \frac{C\sqrt{2s_1}}{2\sqrt{2s_1}}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1 + \sqrt{2s_1}y - \frac{C\sqrt{2s_1}}{2\sqrt{2s_1}}\right) = 0 \qquad (6)$$

ou

$$\left(y^2 + \frac{B}{2} + s_1 - \sqrt{2s_1}y + \frac{C\sqrt{2s_1}}{2\sqrt{2s_1}}\right) = 0. \qquad (7)$$

Resolvendo (6), temos

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2s_1} + \sqrt{-2s_1 - 2B + \frac{C\sqrt{2s_1}}{s_1}}\right)$$

e

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2s_1} - \sqrt{-2s_1 - 2B + \frac{C\sqrt{2s_1}}{s_1}}\right).$$

Resolvendo (7), temos

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2s_1} + \sqrt{-2s_1 - 2B - \frac{C\sqrt{2s_1}}{s_1}}\right)$$

e

$$y_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2s_1} - \sqrt{-2s_1 - 2B - \frac{C\sqrt{2s_1}}{s_1}}\right).$$

Assim, as soluções da equação (1) é dado por

$$x = y_i - \frac{b}{4a},$$

onde $i = 1, 2, 3, 4$.

Quando na equação $y^4 + By^2 + Cy + D = 0$, o valor de C for zero, vamos obter uma equação da forma

$$y^4 + By^2 + D = 0.$$

Assim, não necessitaremos da cúbica auxiliar e, para encontrar as raízes devemos usar o seguinte procedimento

Somando $\dfrac{B^2}{4}$ em ambos os lados e desenvolvendo os cálculos, temos

$$\begin{aligned}
y^4 + By^2 + D + \frac{B^2}{4} &= \frac{B^2}{4} \\
\left(y^2 + \frac{B}{2}\right)^2 &= \frac{B^2}{4} - D \\
y^2 + \frac{B}{2} &= \pm\sqrt{\frac{B^2}{4} - D} \\
y &= \pm\sqrt{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - D}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 17. *Usando os procedimentos de Ferrari, determine as raízes da equação* $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

Primeiro devemos eliminar o termo x^3. Para isso, substituindo x por $y + \dfrac{5}{2}$.

$$\left(y + \frac{5}{2}\right)^4 - 10\left(y + \frac{5}{2}\right)^3 + 35\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - 50\left(y + \frac{5}{2}\right) + 24 = 0.$$

Desenvolvendo os cálculos, obteremos

$$y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} = 0.$$

Note que, neste caso, eliminamos os termos y^3 e y. Assim, não há a necessidade de usar uma cúbica auxiliar.

Logo, vamos desenvolver como se fosse uma equação polinomial do 2º grau.

$$
\begin{aligned}
y^4 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{16} + \frac{25}{16} &= \frac{25}{16} \Rightarrow \\
\left(y^2 - \frac{5}{4}\right)^2 &= -\frac{9}{16} + \frac{25}{16} \Rightarrow \\
\left(y^2 - \frac{5}{4}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \\
y^2 - \frac{5}{4} &= \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - \dfrac{5}{4} = 1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ \text{ou} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ y^2 - \dfrac{5}{4} = -1 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Logo, as raízes da equação $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ são: $x = 1, x = 2,$ $x = 3 \quad \text{e} \quad x = 4$

Assim como foi feito para as equações do 3º grau, podemos apresentar, ao aluno, de forma analítica e gráfica, utilizando os resultados estudados, que uma equação polinomial do 4º grau pode ter: todas as raízes reais, duas reais e duas complexas ou todas complexas.

4 Considerações finais

Após um breve estudo da história das equações polinomiais, podemos destacar a motivação dos matemáticos em superar os desafios e as dificuldades para encontrar uma técnica que pudesse determinar as raízes de equações de 3º e 4º graus.

O avanço das técnicas de resolução de equações polinomiais se deu através de desafios, propostos aos grandes matemáticos, que tinha como objetivo encontrar novas metodologias para suas resoluções.

No decorrer do desenvolvimento, em sala de aula, concluímos que o ensino de equações polinomiais não pode se restringir apenas ao estudo de equações de 1º e 2º graus e em alguns casos particulares de equações de 3º e 4º graus, como é abordado na maioria dos livros didáticos. O aluno do 3º ano do Ensino Médio possui condições para compreender as técnicas de resolução de equação com grau maior que 2 em sua forma geral, desde que as metodologias adotadas, pelo educador estejam voltadas à construção do conhecimento valorizando o aluno como partícipe desta construção. Logo, permitindo um aprofundamento no estudo dos polinômios.

Com relação ao estudo dos polinômios, pela longa experiência em sala de aula, pocebemos que os alunos possuem um grande desconhecimento do assunto, muitos não sabem, sequer tem noção de que se trata este tema. Isso mostra a necessidade de construir, conjuntamente com os alunos, os conceitos básicos mostrando a importância das fórmulas, como e quando utilizá-las. Neste trabalho apresentamos uma maneira de determinar uma raiz de uma equação do 3º grau, sem utilizar uma fórmula pronta. Contudo, este trabalho requer uma continução para desenvolver uma análise qualitativa do procedimento, utilizado por Cardano, em sala de aula. Entretanto o objetivo deste trabalho foi alcançado, pois demonstramos o procedimento utilizado por Cardano para equação geral do 3º grau. Além disso, como professor do Ensino Médio, apliquei este procedimento em sala, mostrando aos alunos este procedimento, sem fazer essa análise qualitativa do procedimento.

Para estudar o comportamento das raízes de uma equação do 3º grau, relacionando-as com seus coeficientes, utilizamos dois procedimentos: a) analítico através das teorias do conjunto de números complexos, do algoritmo de Horner-Rufinni e do conceito de derivadas; b) gráfico com o uso do programa *wplotpr*, possibilitando uma melhor visualizaçao do comportamento das raízes. Tais procedimentos estão diretamente interligados tornando-se peças fundamentais para a construção deste estudo, enriquecendo o conhecimento e a assimilação do mesmo.

Concluímos com este trabalho, que o estudo dos polinômios de grau maior que 2 apresenta uma complexidade mais elevada para encontrar as raízes das equações associadas. Mas, com a utilização dos procedimentos de Cardano para encontrar uma raiz de uma equação do 3º grau na forma geral, possibilita a inserção do estudo das funções polinomiais de 3º e 4º grau no grade curricular do 3º ano do Ensino Médio. O uso do dispositivo de Horner-Rufinni para reduzir a equação do 3º em uma equação do 2º grau, possibilita, encontrar as demais raízes. No estudo das características das raízes, quando utilizado os procedimentos com o uso de um software, o qual estabelece uma visualização, permitindo uma compreensão do conhecimento que esta sendo construído. O procedimento de Cardano, o algoritmo de Horner Ruffini e a utilização de um software é uma maneira eficaz de executar uma planejamento de acordo com as orientações do PCN's, considerando sempre a participação do aluno no processo, pois sabemos que o processo de ensino e aprendizagem está sempre em constante construção.

Referências

[1] BOYER,C.B., *História da Matemática*,Editora Edgard Blucher Ltda. 2002

[2] GONÇALVES, Adilson, *Introdução à álgebra*, 5ª. ed., Rio de Janeiro: IMPA. 2009

[3] Lima, Elon Lage, *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*, Rio de Janeiro: SBM. 1991.

[4] DOMINGUES, H.H.; IEZZI, G., *Álgebra Moderna*, São Paulo: Atual Editora. 2003.

[5] MUNIZ NETO, Antônio Caminha., *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*, Coleção do Professor de Matemática, 1ª.ed., Rio de Janeiro: SBM. 2012.

[6] McCarthy, Paul J.,*Algebraic extensions of fields*,2ª ed. New York: 1976.

[7] *Ciência da natureza, matemática e suas tecnoloias/Secretaria de Educação Básica - Brásilia - MEC/SEB. 2006*