UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
REGIONAL CATALÃO
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA PLANA

CLEITON DIAS MENDES

Catalão
2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	CLEITON DIAS MENDES				
E-mail:	cleitondiasm@yahoo.com.br				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [**X**]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor: Escola Estadual Antônio Luis Bastos					
Agência de fomento: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior				Sigla:	CAPES
País: Brasil	UF:	MG	CNPJ:	00889834/0001-08	
Título:	DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA PLANA				
Palavras-chave:	Matemática – Trigonometria – Geometria				
Título em outra língua:	Statements trigonometry identity using plane geometry				
Palavras-chave em outra língua:	Mathematics – Trigonometry – Geometry				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (06/08/2014)					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT				
Orientador (a):	PLÍNIO JOSÉ OLIVEIRA				
E-mail:	Plinio127@gmail.com				
Co-orientador(a):*	--				
E-mail:	--				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [**X**] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

CLEITON DIAS MENDES

DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA PLANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Plínio José Oliveira

Catalão

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
(GPT/BSCAC/UFG)

M538d

Mendes, Cleiton Dias.
Demonstrações trigonométricas via geometria plana [manuscrito] / Cleiton Dias Mendes. - 2014.
75 f.

Orientador: Profº. Dr. Plínio José Oliveira.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.
Bibliografia.

1. Matemática 2. Trigonometria. 3. Geometria. I. Título.

CDU: 514.11

Cleiton Dias Mendes

DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA PLANA

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06/08/2014, pela Banca Examinadora constituída pelosprofessores:

Prof. Dr. Plínio José Oliveira.
Departamento de Matemática da Regional Catalão - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Janser Moura Pereira .
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Departamento de Matemática da Regional Catalão - UFG

CLEITON DIAS MENDES

Graduou – se em Matemática na UFU – Universidade Federal de Uberlândia. Especializou – se no Ensino de Matemática pela FINOM – Faculdades Integradas do Noroeste de Minas. Atualmente trabalha como docente no ensino público da cidade de Uberlândia.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, pela atenção, amor e apoio em todos os momentos difíceis da minha vida desde a infância e a meus irmãos pela companhia e amor a mim dedicado. À minha esposa, que com sua coragem, otimismo e amor me incentivou cada dia desta jornada e ao meu filho que foi um presente de Deus em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Mestrado Profissional desenvolvido pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, pela oportunidade de aperfeiçoamento profissional e realização de trabalhos em minha área de trabalho e pesquisa.

Ao professor orientador pela atenção e paciência.

Aos amigos Carlos, Gilmar e Marcelo que sem eles seria mais difícil meus estudos, por isso deixarão saudades desta época de amizade.

Aos colegas de turma e professores pelo seu auxílio nas tarefas desenvolvidas durante o curso e apoio na revisão deste trabalho.

À CAPES pela provisão da bolsa de mestrado.

RESUMO

Mendes, Cleiton Dias. **Demonstrações Trigonométricas Via Geometria Plana**. Catalão, 2014. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Matemática, Regional Catalão, Universidade Federal de Goiás.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar as demonstrações de algumas relações trigonométricas utilizando somente a geometria plana. Este procedimento foi realizado visto que a maioria dos livros didáticos apresentam demonstrações quase que somente algébricas. Desejamos desta forma, apresentar aos professores e aos alunos de matemática do ensino médio e/ou superior, as demonstrações de identidades trigonométricas utilizando a geometria. Para isso foi considerado o ciclo trigonométrico apenas no primeiro quadrante, tal que dado um ângulo α qualquer temos $\alpha < 90°$, estendendo o raciocínio aos demais quadrantes.

Palavras-chaves: Matemática, Trigonometria, Geometria.

ABSTRACT

Mendes, Cleiton Dias. **Statements trigonometry identity using plane geometry**. Catalão, 2014. Completion of couse work, Department of Mathematics, Regional Catalão, Federal University of Goiás.

This work has been presented with some trigonometric connections statements only using plane geometry. This proceeding has been realized because we observed that a didactic book only presents algebraic statements. We wish in this way, presents to mathematics teachers and students in high or upper school, trigonometry statements identity using geometry. For this, It has been considered trigonometry cycle only in the first quadrant, given an angle such that α have any α < 90°, extending the reasoning to the other quadrants.

Key words: Mathematics, Trigonometry, Geometry.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

INTRODUCÃO

O termo trigonometria (trigono: triângulo e metria: medidas) é o estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Nos triângulos retângulos quando as relações constituem os chamados ângulos notáveis, 30º, 45º e 60º, elas possuem valores conhecidos fracionários representados para as relações seno, cosseno e tangente. Nos triângulos que não possuem ângulo reto, as condições são adaptadas na busca pela relação entre os ângulos e os lados como, por exemplo, a utilização da lei dos senos e lei dos cossenos. Nessa perspectiva há situações em que efetuar medidas envolvendo distância entre objetos que não são diretamente acessíveis precisam de mecanismos que facilitam o entendimento. A trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos.

Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática auxiliando na atividade humana, tais como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia, etc.

> "A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido". (LIMA, 2006, p.240)

Deve-se ressaltar que a Trigonometria objetivou a elaboração dos estudos das funções trigonométricas, relacionadas aos ângulos e aos fenômenos periódicos. A partir do século XV, a modernidade dos cálculos criou novas situações teóricas e práticas relacionadas aos estudos dos ângulos e das medidas. Com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz, a Trigonometria ganhou moldes definitivos no cenário da Matemática, sendo constantemente empregada em outras ciências, como Medicina, Engenharia, Física (ondulatória, óptica), Química, Geografia, Astronomia, Biologia, Cartografia, Navegação entre outras. (BRASIL ESCOLA, NOE, acessado em 20-05-2014)

Com a importância dada à trigonometria e a dificuldade dos educandos em entender os procedimentos algébricos utilizados para mostrar a veracidade das identidades trigonométricas, vê-se a necessidade de abordar, nos livros didáticos, a trigonometria de maneira mais intuitiva, utilizando como recurso a geometria euclidiana nas demonstrações não só nas demonstrações elementares, mas também nas mais complexas. Dessa forma, podemos satisfazer a dois tipos de raciocínio, intuitivo e algébrico, visto que alguns alunos podem compreender melhor álgebra enquanto que outros a geometria.

A clareza do processo demonstrativo é uma estratégia de fundamental importância visto que propicia ao aluno a lembrança de “como fazer” ou o caminho a ser seguido para se chegar a uma conclusão satisfatória.

Para o bom funcionamento desse algoritmo compreendemos que utilizando argumentos básicos de geometria, um exemplo é a semelhança de triângulos, o teorema de Pitágoras, as relações métricas nos triângulos e conceitos geométricos simples como, a noção de ponto, segmento e reta. Podemos assim, transmitir ao aluno a materialização do abstrato das identidades trigonométricas.

Faz-se uma recapitulação de algumas definições e conceitos cuja utilização poderá ser utilizada nas demonstrações posteriores. As definições de seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente são enunciadas de maneira direta, a partir do triângulo retângulo. Relações métricas no triângulo são desenvolvidas utilizando a semelhança de triângulos.

Pode-se dizer que Identidade Trigonométrica é uma equação envolvendo funções trigonométricas, que é verdadeira para todos os valores assumidos pelas variáveis envolvidas. Estas identidades são úteis sempre que expressões envolvendo funções trigonométricas devam ser simplificadas. Uma importante aplicação é a integração de funções não trigonométricas: um truque comum envolve primeiro usar a integração por substituição com uma função trigonométrica e então simplificar a integral resultante com uma identidade trigonométrica.

Nos livros didáticos do ensino médio a abordagem é feita de maneira que o aluno compreenda as demonstrações mais simples que são aquelas que requerem menor complexidade. Foi feito uma revisão dessas demonstrações e acrescentadas outras onde entende - se que o aluno é capaz de compreender e reproduzir tal demonstração com facilidade.

Finalmente apresenta-se a questão histórica envolvendo as identidades trigonométricas mostrando duas abordagens, as identidades de Ptolomeu e Viéte.

Conclui-se que a importância dada às demonstrações no ensino é importante para a consolidação dos processos de aprendizagem e compreensão. A aplicação dos resultados é variada, ficando na maioria das vezes mais claro ao raciocínio.

CAPÍTULO II

DEFINIÇÕES ELEMENTARES

2.1 Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. (GIOVANNI JÚNIOR, 2009; MORI, 2012)

A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos são os dois lados que o formam. Portanto no triângulo abaixo obtém-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{2.1}$$

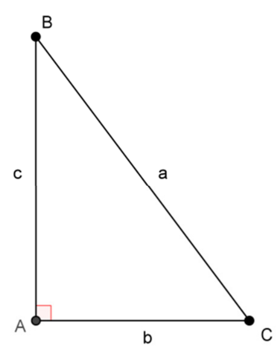

Figura 2.1: Triângulo retângulo ABC.

2.2 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando há correspondência entre os vértices de um e do outro triângulo, de modo que os ângulos dos vértices correspondentes sejam iguais sendo assim a razão entre os comprimentos do lados correspondentes é a mesma. (MUNIZ, 2012)

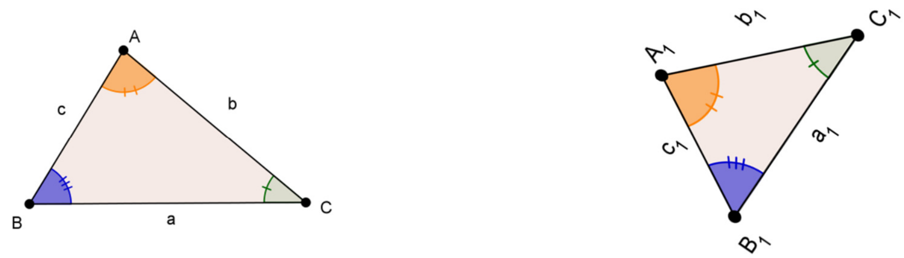

Figura 2.2: Dois triângulos semelhantes

Logo estabelecendo a correspondência de vértices $A \to A_1, B \to B_1, C \to C_1$, teremos assim $\widehat{A} = \widehat{A_1}$, $\widehat{B} = \widehat{B_1}$ e $\widehat{C} = \widehat{C_1}$ existindo k > 0 tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = K$

2.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Como a hipotenusa é sempre o maior lado no triângulo retângulo, o quociente entre a medida de um cateto e a medida da hipotenusa será sempre um número menor que 1. Se β, por exemplo, for um ângulo agudo do triângulo retângulo, tem-se que sen $\beta < 1$ e cos $\beta < 1$, o mesmo ocorrendo para o outro ângulo agudo deste. (GIOVANNI JÚNIOR, 2009; MORI, 2012; DANTE, 2009; IEZZI, 2009; ANDRINI, 2012)

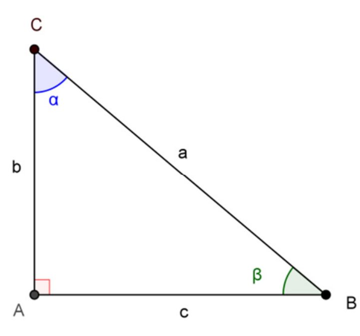

Figura 2.3.: Triângulo Retângulo ABC

Considere os ângulos agudos do triângulo retângulo ABC, Figura 2.1(Fig.2.1), definimos:

I) Seno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa:

$$sen(\beta) = \frac{b}{a} \text{ e } sen(\alpha) = \frac{c}{a} \tag{2.2}$$

II) Cosseno de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é a razão entre o cateto adjacente a este ângulo e a hipotenusa:

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \text{ e } \cos(\alpha) = \frac{b}{a} \tag{2.3}$$

III) Tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto a este ângulo e o seu cateto adjacente:

$$\text{tg }(\beta) = \frac{\text{b}}{\text{c}} \text{ e } tg(\alpha) = \frac{c}{b} \tag{2.4}$$

IV) Secante de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente:

$$\sec(\beta) = \frac{\text{a}}{\text{c}} \text{ e } \sec(\alpha) = \frac{a}{b} \tag{2.5}$$

V) Cossecante de um ângulo agudo em um triângulo é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto:

$$\text{cossec }(\beta) = \frac{\text{a}}{\text{b}} \text{ e } \text{cossec}(\alpha) = \frac{a}{c} \tag{2.6}$$

VI) Cotangente de um ângulo agudo em um triângulo é a razão entre o cateto adjacente a este pelo seu cateto oposto:

$$\text{cotg }(\beta) = \frac{\text{c}}{\text{b}} \text{ e } cotg(\alpha) = \frac{b}{c} \tag{2.7}$$

2.4 Definições no ciclo trigonométrico

Define-se ciclo trigonométrico como sendo um círculo de raio unitário de centro na origem do sistema cartesiano.(IEZZI, 2012)

Assim estabelecemos as relações de seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e a cotangente de um ângulo β qualquer, conforme a Fig. 2.4 e Legenda 2.1.

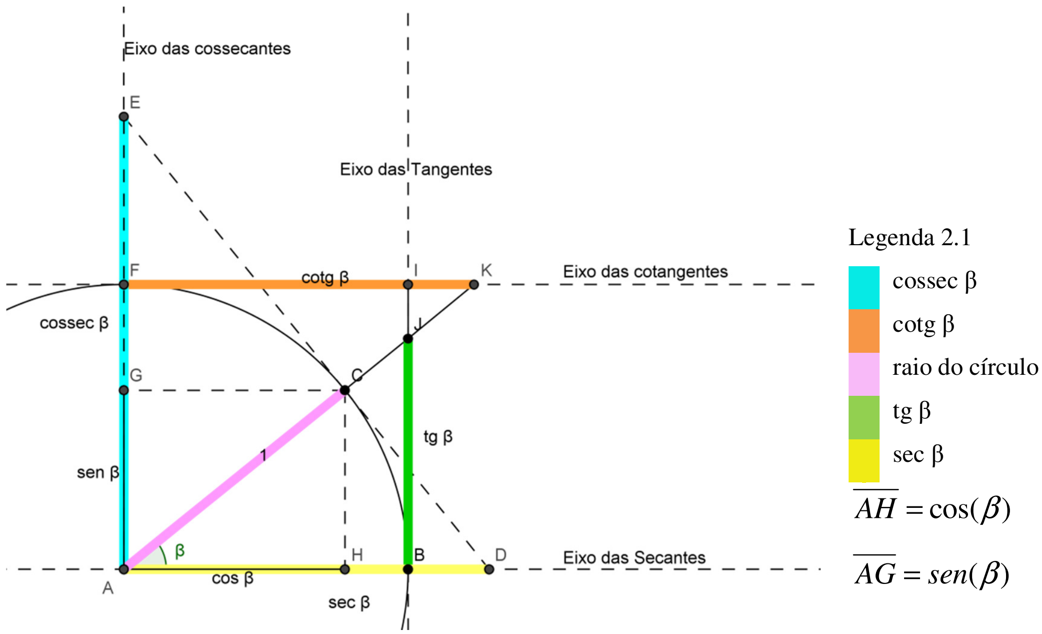

Figura 2.4:Ciclo trigonométrico e as definições das relações trigonométricas fundamentais.

Definindo os segmentos, na Fig. 2.4, observa-se que a reta tangente ao círculo no ponto C intercepta os prolongamentos dos eixos coordenados no ponto D e E em relação ao eixo x e y respectivamente.

Prolongando o segmento $\overline{AC}$, obtém-se o ponto J no eixo das tangentes e o ponto k no eixo das cotangentes, logo:

$$B\hat{A}C = \beta \tag{2.8}$$

$$\overline{AC} = 1 \tag{2.9}$$

$$\overline{BJ} = tg(\beta) \tag{2.10}$$

$$\overline{AG} = sen(\beta) \tag{2.11}$$

$\overline{AH} = \cos(\beta)$ (2.12)

$\overline{BJ} = tg(\beta)$ (2.13)

$\overline{AE} = \text{cossec}(\beta)$ .... (2.14)

$\overline{AD} = \sec(\beta)$ (2.15)

$\overline{FK} = cotg(\beta)$ (2.16)

2.5 Relações métricas no triângulo retângulo

Considerando um triângulo retângulo qualquer, onde H é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ tem-se:

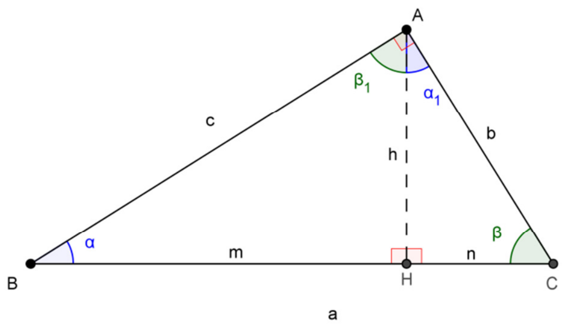

Figura 2.5: Triângulo Retângulo genérico com ângulo reto em A.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° logo tém-se que $\alpha + \beta = 90^\circ$ e $\alpha + \beta_1 = 90^\circ$ então, $\beta = \beta_1$, analogamente $\alpha = \alpha_1$.(GIOVANNI JÚNIOR, 2009)

Assim os triângulos ABC, ABH e ACH são semelhantes entre si, ou seja, possui ângulos correspondentes congruentes. (DANTE, 2009; IEZZI, 2009; ANDRINI, 2012)

Portanto, vamos analisar as relações entre os triângulos ABC e ABH.

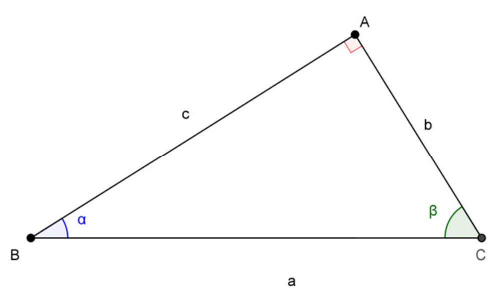

Figura 2.6: Triângulo Retângulo ABC

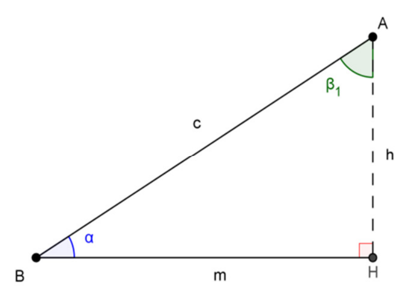

Figura 2.7: Triângulo Retângulo ABH

A partir da Figura 2.6 e Figura 2.7, triângulos semelhantes, encontra-se as seguintes proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \tag{2.17}$$

Como resultado obtém-se as relações:

$$a.h = b.c \tag{2.18}$$

$$c^2 = a.m \tag{2.19}$$

$$b.m = c.h \tag{2.20}$$

Observando agora a semelhança dos triângulos ABC e ACH, obtém-se:

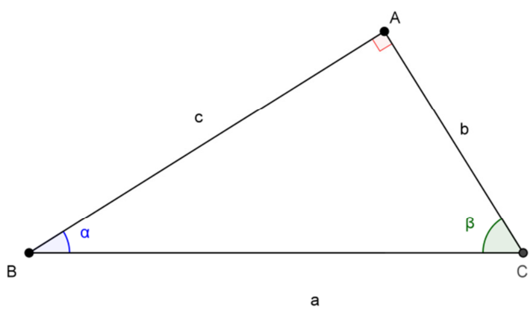

Figura 2.8: Triângulo ABC

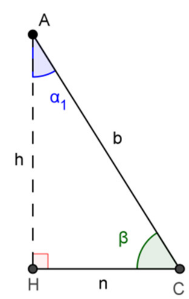

Figura 2.9: Triângulo ACH

Fazendo as relações de semelhança para os triângulos descritos na Fig. 2.8 e Fig. 2.9 obtém-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \tag{2.21}$$

Consegue-se a partir da proporção acima as seguintes relações:

$$b^2 = a.n \tag{2.22}$$

$$a.h = b.c \tag{2.23}$$

$$b.h = c.n \tag{2.24}$$

Agora as relações de semelhança dos triângulos ABH e ACH:

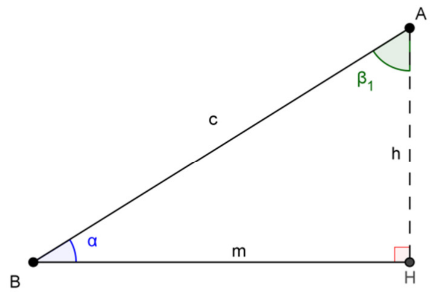

Figura 2.10: Triângulo ABH

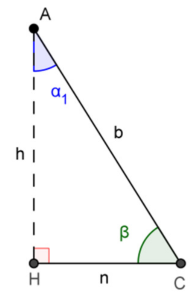

Figura 2.11: Triângulo ACH

Desenvolvendo as razões de semelhança obtém – se:

$$\frac{c}{b}=\frac{h}{n}=\frac{m}{h} \tag{2.25}$$

Segue destas razões as seguintes relações:

$$c.n=b.h \tag{2.26}$$

$$c.h=b.m \tag{2.27}$$

$$h^2=m.n \tag{2.28}$$

2.6 Lei do cosseno

Em todo triângulo o quadrado de um dos lados é dado pela soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto destes pelo cosseno do ângulo formado entre eles. (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2001)

Toma-se um triângulo qualquer de vértices A, B e C:

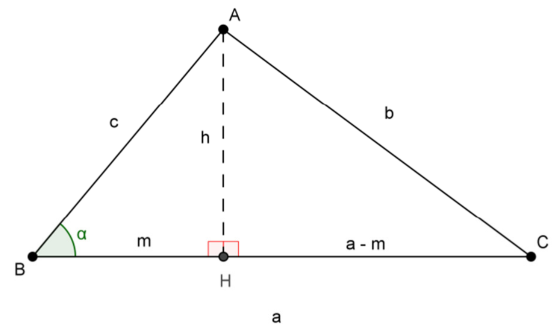

Figura 2.12: Triângulo genérico de vértices A, B e C

A projeção ortogonal do vértice A sobre o lado $\overline{BC}$ determina o ponto H. Assim analisamos dois triângulos retângulos ABH e ACH.

Aplicando o teorema de Pitágoras em cada um deles conseguimos as seguintes relações:

$$b^2 = h^2 + (a-m)^2 \tag{2.29}$$

$$c^2 = h^2 + m^2 \tag{2.30}$$

Subtraindo-se membro a membro e termo a termo a equação (2.30) pela (2.29) obtém-se:

$$c^2 - b^2 = h^2 - h^2 + m^2 - (a-m)^2 \tag{2.31}$$

$$c^2 = b^2 + m^2 - (a^2 - 2am + m^2) \tag{2.32}$$

$$c^2 = b^2 + m^2 - a^2 + 2am - m^2 \tag{2.33}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2am \tag{2.34}$$

Por meio da definição de cosseno para o ângulo α no triângulo ABH tem-se:

$$\cos(\alpha) = \frac{m}{c} \tag{2.35}$$

$$m = c.\cos(\alpha) \tag{2.36}$$

Substituindo-se o valor de m de (2.36) em (2.35) obtém-se:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos(\alpha) \qquad (2.37)$$

Portanto a equação (1.4.9) recebe a denominação de Lei do Cosseno.

2.7 Lei do seno

A razão entre o lado de um triângulo qualquer pelo valor do seno do ângulo oposto a este lado é igual ao dobro do raio da circunferência que circunscreve esse triângulo, o mesmo ocorrendo para todos os ângulos deste triângulo (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2001).

Construindo um triângulo genérico ABC e circunscrevendo-o por um círculo, obtém-se:

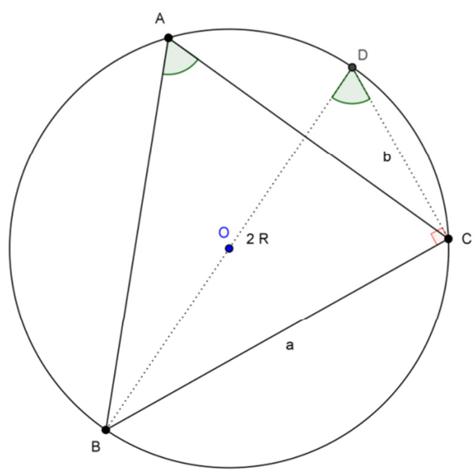

Figura 2.13: Triângulo genérico ABC inscrito em uma circunferência

Marca-se um ponto D, conforme Figura 2.13, tal que o segmento $\overline{BD}$ passa pelo centro da circunferência. O triângulo BDC é retângulo no vértice C, pois $B\widehat{C}D$ é ângulo inscrito no arco de meia volta, ou seja, um semicírculo com o diâmetro sendo um dos lados do triângulo BCD. Logo:

$$sen(\widehat{D}) = \frac{a}{2.R} \qquad (2.38)$$

$$2.R = \frac{a}{sen(\widehat{D})} \qquad (2.39)$$

Observa-se que o ângulo $\widehat{D}$ e $\hat{A}$ são congruentes, pois são ângulos inscritos sob o mesmo arco BC, logo:

$$sen(\widehat{D}) = sen(\widehat{A}) \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) em (2.39) tem-se:

$$2.R = \frac{a}{sen(\widehat{A})} \tag{2.41}$$

Analogamente, alterando-se o vértice de referência, vértice B e depois C, com o mesmo raciocínio, obtém-se as seguintes relações:

$$2.R = \frac{b}{sen(\widehat{B})} \tag{2.42}$$

$$2.R = \frac{c}{sen(\widehat{C})} \tag{2.43}$$

Portanto a partir de (2.41), (2.42) e (2.43) obtém-se a relação denominada de Lei dos senos:

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})} = 2.R \tag{2.44}$$

CAPÍTULO III

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

3.1 $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

Para demonstrar a identidade (3.1) considere o ciclo trigonométrico da Fig. 3.1. B e F são projeções ortogonais do ponto C. Portanto $\overline{AB}=\cos(\alpha)$ e $\overline{AF}=sen(\alpha)=\overline{BC}$. O triângulo ABC é triângulo retângulo, e por meio do teorema de Pitágoras têm-se a seguinte equação: $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$, denominada de relação fundamental da trigonometria. (DANTE, 2010; SMOLE, 2010; RIBEIRO, 2010; IEZZI, 2010)

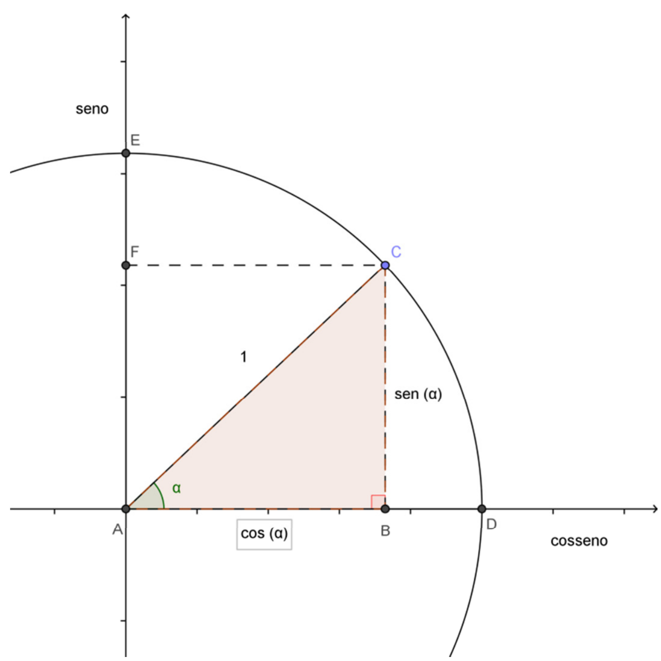

Figura 3.1: Relação fundamental.

3.2 $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

Na Fig. 3.2, por definição $\overline{AF} = \sec(\beta)$.

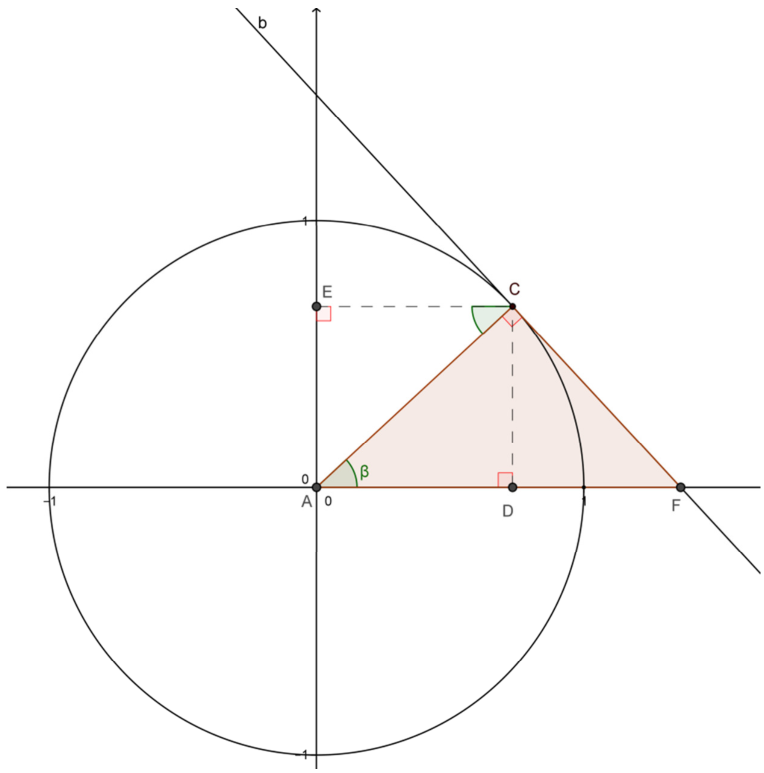

Figura 3.2: Secante de um ângulo.

Queremos relacionar o segmento $\overline{AF}$ com as relações sen (β) e cos (β). Como a reta b é a reta tangente a circunferência de raio 1 no ponto C, temos $\overline{AD} = \cos(\beta)$ e $\overline{AE} = sen(\beta)$. Tem-se que os triângulos DAC e CAF são semelhantes, pois possuem dois ângulos congruentes, $C\hat{A}D$ comum aos dois triângulos e $C\hat{D}A$ e $A\hat{C}F$ retos.

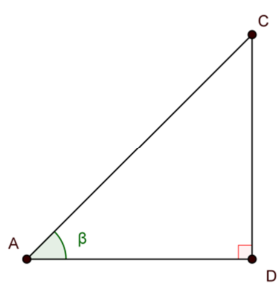

Figura 3.3: Triângulo Retângulo DAC

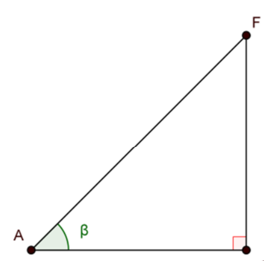

Figura 3.4: Triângulo Retângulo CAF

Assim é possível observar as seguintes relações de semelhança, sendo $\overline{AC} = 1$:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\overline{AF}} = \frac{\cos(\beta)}{1} \tag{3.2}$$

$$\frac{\overline{AF}}{1} = \frac{1}{\cos(\beta)} \tag{3.3}$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{\cos(\beta)} \tag{3.4}$$

Como $\overline{AF} = \sec(\beta)$, tem-se:

$$\sec(\beta) = \frac{1}{\cos(\beta)} \tag{3.5}$$

3.3 $\cos\sec(\beta) = \dfrac{1}{sen(\beta)}$

Na Figura 3.5, por definição $\overline{AF} = \text{cossec}(\beta)$, então:

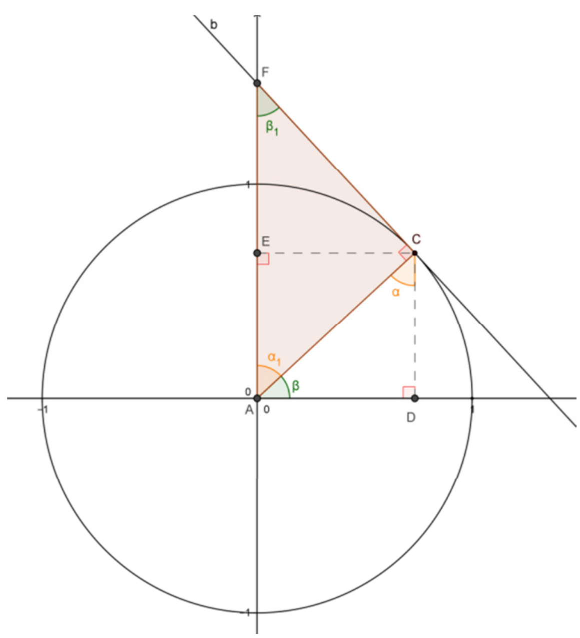

Figura 3.5: Cossecante de um ângulo.

Considerando o círculo trigonométrico da figura 3.5, temos $\overline{AC}=1$, $\overline{AD}=\cos(\beta)$ e $\overline{AE}=sen(\beta)$.

Assim estabelecemos a relação do segmento $\overline{AF}$ com cos (β) e sen (β). No triângulo DAC temos que $\beta+\alpha=90°$, e ainda $\beta+\alpha_1=90°$, pois são complementares. Concluímos que $\alpha=\alpha_1$, assim $\beta=\beta_1$ resultando que os triângulos DAC, CAF são semelhantes. Ainda observa-se a semelhança entre estes e o triângulo CAE visto que os ângulos $A\hat{C}E$ e $C\hat{A}D$ são opostos pelo vértice, portanto congruentes.
Então podemos estabelecer as seguintes relações:

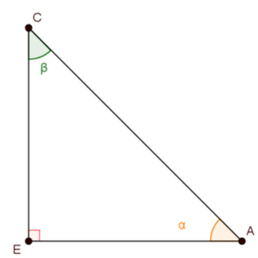

Figura 3.6: Triângulo Retângulo ECA

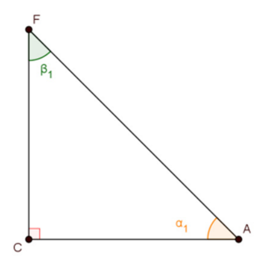

Figura 3.7: Triângulo Retângulo CAF

Portanto pela semelhança dos triângulos ECA e CAF obtém-se:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \tag{3.6}$$

$$\frac{\overline{AF}}{1}=\frac{1}{sen(\beta)} \tag{3.7}$$

Como por definição $\overline{AF}=\text{cossec}(\beta)$, temos:

$$\text{cossec}(\beta)=\frac{1}{sen(\beta)} \tag{3.8}$$

Diretamente pode-se obter o mesmo resultado analisando o triângulo CAF e aplicando a fórmula (2.22), logo:

$$(\overline{AC})^2 = \overline{AE}.\overline{AF} \tag{3.9}$$

$$1 = sen(\beta).\overline{AF} \tag{3.10}$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{sen(\beta)} = \cos\sec(\beta) \tag{3.11}$$

3.4 $tg(\beta) = \dfrac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}$

Tracemos a reta $\overleftrightarrow{BF}$ tangente à circunferência no ponto B, conforme figura 3.8, tem-se que o prolongamento do segmento $\overline{AC}$ intercepta $\overleftrightarrow{BF}$ no ponto F.

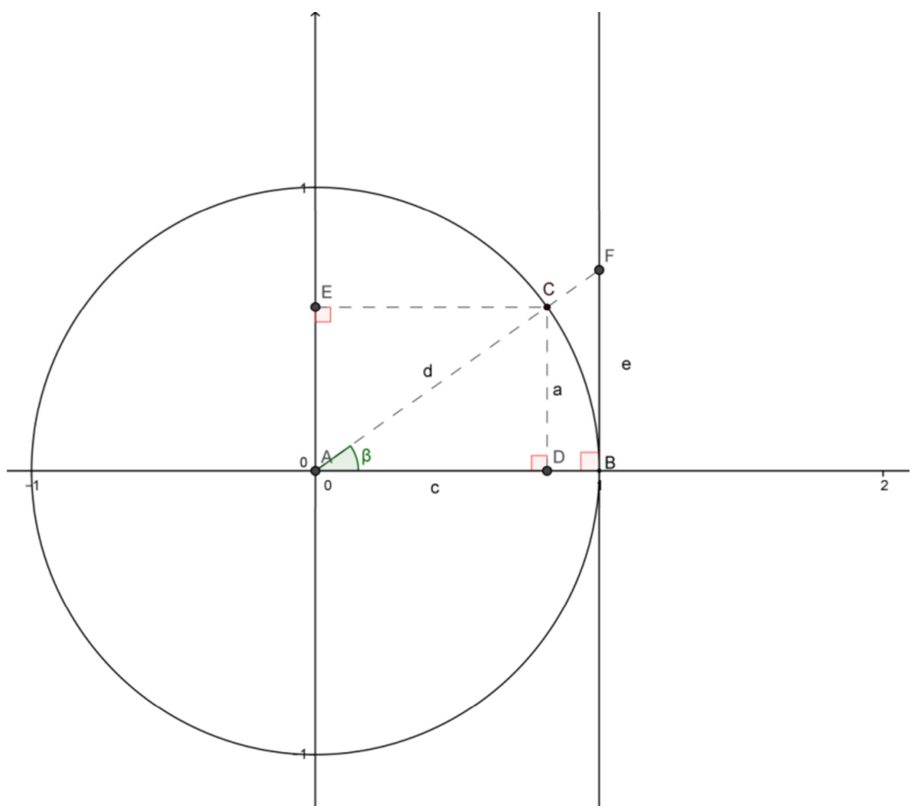

Figura 3.8: Tangente

Sendo a reta $\overleftrightarrow{BF}$ tangente à circunferência no ponto B pretende – se identificar qual a relação do segmento $\overline{BF}$ com as relações seno e cosseno de um ângulo β qualquer.

Note que $\beta = F\hat{A}B$ é comum aos triângulos FAB e CAD. Assim como $\overline{FB}$ é paralelo a $\overline{CD}$ tem-se que os ângulos $A\hat{C}D$ e $A\hat{F}B$ são congruentes. Logo, estes triângulos são semelhantes.

Assim, obtém-se:

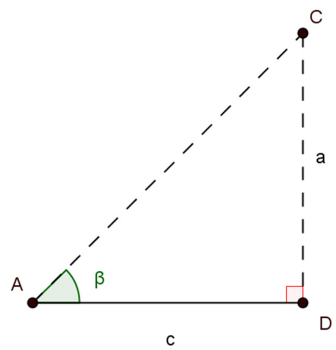

Figura 3.9: Triângulo Retângulo

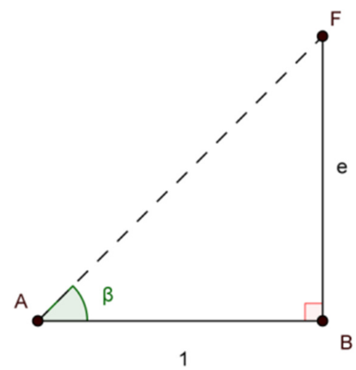

Figura 3.10: Triângulo Retângulo BAF

Pela semelhança acima obtém – se a relação de proporção:

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{1} \qquad (3.12)$$

$$\frac{e}{1} = \frac{a}{c} \qquad (3.13)$$

$$\overline{BF} = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)} \qquad (3.14)$$

Como $\overline{BF} = tg(\beta)$ por definição, logo:

$$tg(\beta) = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)} \qquad (3.15)$$

3.5 $cotg(\beta) = \dfrac{1}{tg(\beta)}$

Traçamos a reta $\overleftrightarrow{GF}$ tangente à circunferência no ponto G de modo que o prolongamento do segmento $\overline{AC}$ seja o ponto F representado na figura seguinte.

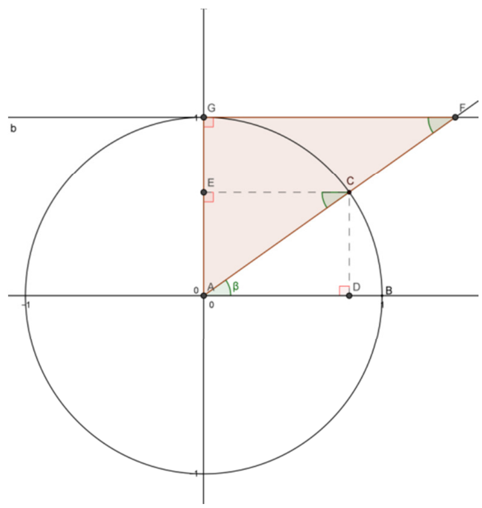

Figura 3.11: Cotangente

Estabelecemos a relação do segmento $\overline{GF}$ com o $sen(\beta)$ e $\cos(\beta)$. No ciclo trigonométrico $\overline{AD} = \cos(\beta)$, $\overline{AE} = sen(\beta)$. Como os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{EC}$ e $\overline{GF}$ são paralelos e os ângulos $D\hat{A}C$, $A\hat{C}E$ e $A\hat{F}G$ são congruentes (alternos internos). Logo os triângulos ECA e GFA são semelhantes, pois possuem dois ângulos congruentes.

Assim, teremos as relações de proporção da Fig. 3.12 e Fig. 3.13:

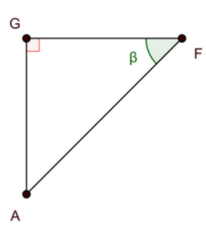

Figura 3.12: Triângulo Retângulo AFG

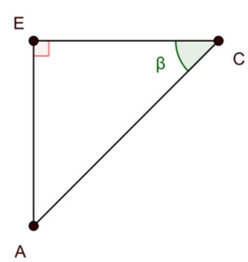

Figura 3.13: Triângulo Retângulo ACE

Conclui-se que:

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{GF}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{GA}} \qquad (3.16)$$

$$\overline{GF}=\frac{\overline{EC}.\overline{GA}}{\overline{EA}} \qquad (3.17)$$

$$\overline{GF}=\frac{\cos(\beta).1}{sen(\beta)} \qquad (3.18)$$

$$\overline{GF}=\frac{\cos(\beta)}{sen(\beta)} \qquad (3.19)$$

Como por definição $\overline{GF}=cotg(\beta)$, então a cotangente de um ângulo é a razão de seu cosseno pelo seu seno ou o inverso de sua tangente. Logo:

$$cotg(\beta)=\frac{\cos(\beta)}{sen(\beta)}=\frac{1}{tg(\beta)} \qquad (3.20)$$

3.6 $\sec^2(\beta)=1+tg^2(\beta)$ e $\cos\sec^2(\beta)=1+cotg^2(\beta)$

Seja C o círculo trigonométrico, conforme figura a seguir. Então:

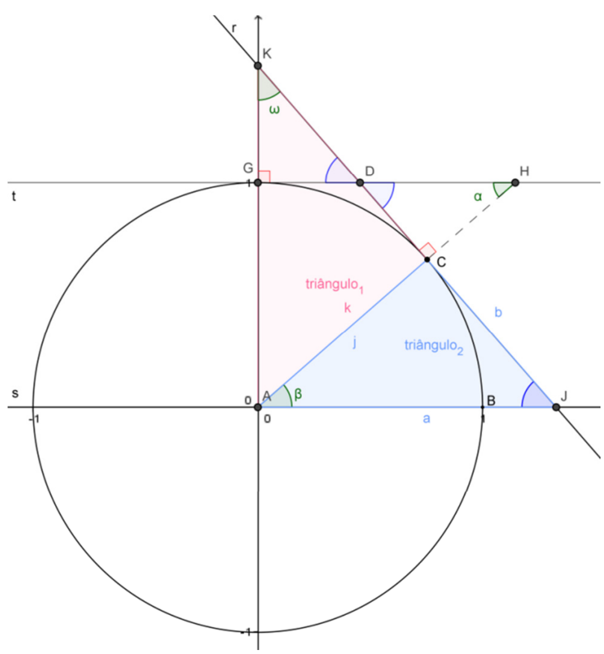

Figura 3.14: Relação entre secante e tangente

Demonstração:

Na Figura 3.14, mostraremos que β ≡ ω.

Traçamos a reta t de tal forma que esta seja tangente a circunferência no ponto G, logo que t ∥ s, sendo que s é a representação do eixo x, então como são alternos internos, β ≡ α. Tome agora a reta r de forma que esta seja tangente à circunferência no ponto C. logo temos que $C\widehat{D}H$ é congruente a $G\widehat{D}K$, pois são opostos pelo vértice e como $D\widehat{C}H$ e $D\widehat{G}K$ são retos logo, os triângulos GKD e CDH são semelhantes resultado que ω ≡ α.

Portanto β ≡ ω.

Assim os triângulos ACK e ACJ são semelhantes, ou seja, os lados correspondentes são proporcionais, então:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} = \frac{1}{\overline{CJ}} \tag{3.21}$$

$$\frac{\cos\sec(\beta)}{\sec(\beta)} = \frac{1}{\overline{CJ}} \tag{3.22}$$

$$\overline{CJ} = \frac{\sec(\beta)}{\cos\sec(\beta)} \tag{3.23}$$

$$\overline{CJ} = \frac{\operatorname{se}n(\beta)}{\cos(\beta)} = tg(\beta) \tag{3.24}$$

Agora aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CAJ, obtém-se:

$$(\overline{AJ})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CJ})^2 \tag{3.25}$$

$$\sec^2(\beta) = 1 + tg^2(\beta) \tag{3.26}$$

Relacionando os lados correspondentes nos triângulos ACK e ACJ, consegue-se:

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} \tag{3.27}$$

$$\frac{\overline{CK}}{1} = \frac{\cos\sec(\beta)}{\sec(\beta)} \tag{3.28}$$

$$\overline{CK} = \frac{\cos\sec(\beta)}{\sec(\beta)} = cotg(\beta) \tag{3.29}$$

Observamos que aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACK, obtém-se:

$$(\overline{AK})^2 = (\overline{CK})^2 + (\overline{AC})^2 \tag{3.30}$$

$$\cos\sec^2(\beta) = cotg^2(\beta) + 1 \tag{3.31}$$

■

Observa-se na literatura dos livros didáticos de matemática uma apresentação da equação (3.26) e (3.31) como uma relação decorrente, ou seja, consequência de álgebra baseada na relação (3.15) fazendo a demonstração algébrica como podemos exemplificar abaixo. (IEZZI, 2010, p.38)

$$1 + tg^2(\beta) = 1 + \frac{sen^2(\beta)}{\cos^2(\beta)} = \frac{\cos^2(\beta)}{\cos^2(\beta)} + \frac{sen^2(\beta)}{\cos^2(\beta)} = \frac{\cos^2(\beta) + sen^2(\beta)}{\cos^2(\beta)} = \frac{1}{\cos^2(\beta)} = \sec^2(\beta) \tag{3.32}$$

Também usando a verificação numérica pode-se estimular a compreensão do aluno sobre a veracidade de tal relação, a qual é feita substituindo β por um ângulo com valores notáveis como β = 30°. Então:

$$1 + tg^2(30^o) = 1 + \frac{sen^2(30^o)}{\cos^2(30^o)} = \frac{\cos^2(30^o)}{\cos^2(30^o)} + \frac{sen^2(30^o)}{\cos^2(30^o)} = \frac{\cos^2(30^o) + sen^2(30^o)}{\cos^2(30^o)} = \frac{1}{\cos^2(30^o)} = \sec^2(30^o) \tag{3.33}$$

Portanto, verifica-se que as fórmulas (3.26) e (3.31) possuem uma representação geométrica.

Em decorrência do estudo feito na Figura 3.14, pode-se estabelecer a relação dos lados da figura com seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente do ângulo β.

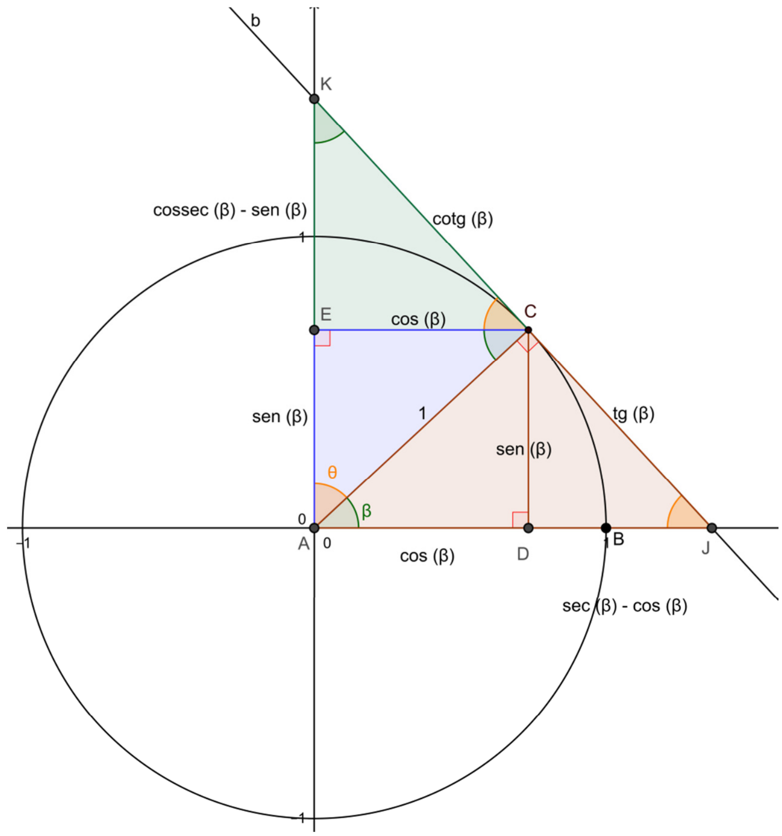

Figura 3.15: Relação entre as medidas dos segmentos em função de seno e cosseno de β.

Observa-se que nos triângulos CEA e CDA será possível estabelecer as seguintes relações quando aplicamos as definições de seno e cosseno para os ângulos β e Θ:

$$sen(\beta) = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \tag{3.34}$$

Como AC = 1, raio da circunferência então:

$$sen(\beta) = \overline{DC} \tag{3.35}$$

Agora desenvolvendo para o ângulo Θ a relação do cosseno e obtém-se:

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \tag{3.36}$$

Do mesmo modo como AC = 1, conclui-se que:

$$\cos(\theta) = \overline{AE} \tag{3.37}$$

Portanto como no ciclo trigonométrico $\overline{CD} = \overline{AE}$ consegue-se:

$$sen(\beta) = \cos(\theta) \tag{3.38}$$

Conclui-se das observações feitas em (3.35), (3.37) e (3.38) que o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complemento.

3.8 $\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha)$

A Figura 3.16 mostra a relação entre os ângulos α e 2α, sendo $\beta = 2\alpha$.

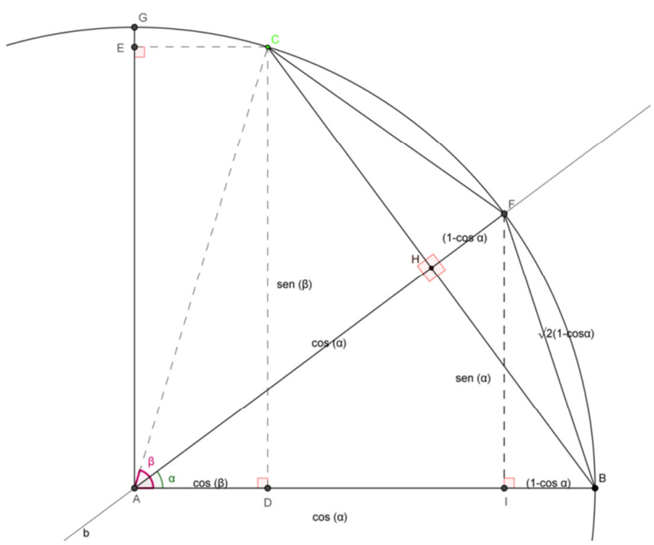

Figura 3.16: Relações de cos 2α.

Sendo o ângulo $\alpha = B\hat{A}F$ tem-se das definições no ciclo trigonométrico:

$$\overline{AB} = 1 \tag{3.39}$$

$$\overline{AI} = \cos(\alpha) \tag{3.40}$$

$$\overline{FI} = sen(\alpha) \tag{3.41}$$

Por outro lado se o ângulo $\beta = 2\alpha$, obtém-se:

$$\beta = B\hat{A}C \tag{3.42}$$

$$\overline{AD} = \cos(\beta) \tag{3.43}$$

$$\overline{CD} = sen(\beta) \tag{3.44}$$

Relacionando essas definições com os lados da Fig. 3.16, então:

$$\overline{BI} = \overline{AB} - \overline{AI} \tag{3.45}$$

$$\overline{BI} = 1 - \cos(\alpha) \tag{3.46}$$

Como o ponto I é a projeção de F sobre o eixo x (representado pelo segmento $\overline{AB}$) então o ângulo $B\hat{I}F$ é reto. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BIF consegue-se a relação:

$$(\overline{BF})^2 = (\overline{BI})^2 + (\overline{FI})^2 \tag{3.47}$$

Que substituindo as relações pertinentes tem-se:

$$(\overline{BF})^2 = \left[1 - \cos(\alpha)\right]^2 + sen^2(\alpha) \tag{3.48}$$

$$(\overline{BF})^2 = 1 - 2\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) \tag{3.49}$$

$$(\overline{BF})^2 = 1 - 2\cos(\alpha) + 1 \tag{3.50}$$

$$(\overline{BF})^2 = 2\left[1 - \cos(\alpha)\right] \tag{3.51}$$

Verifica-se também, que os triângulos BIF e FHB são congruentes e $\overline{AF}$ é a bissetriz de β, pois:

$$\beta = 2\alpha = \alpha + \alpha \tag{3.52}$$

Como $H\hat{A}C = \beta - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha = H\hat{A}B$, e os ângulos $A\widehat{H}C$ e $A\widehat{H}B$ são ângulos retos, logo os triângulos AHC e AHB são semelhantes. Ainda pode-se observar que o lado $\overline{AH}$ é comum aos dois triângulos e $\overline{AC} = 1 = \overline{AB}$. Portanto os triângulos AHC e AHB são congruentes obtendo que $\overline{CH} = \overline{HB}$.

Por outro lado, como $\overline{AF}$ é bissetriz de $B\hat{A}C$, então o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{AF}$ no ponto H, pois $\overline{AH}$ é altura do triângulo isósceles ACB.

Os triângulos FHB e BIF tem o lado $\overline{BF}$ em comum e o lado $\overline{IF}$ é congruente a $\overline{BH}$.

Como $B\hat{I}F$ e $B\widehat{H}F$, então pelo caso de congruência LLA (lado, lado, ângulo) os referidos triângulos são congruentes. Assim:

$$\overline{FH} = \overline{BI} = [1 - \cos(\alpha)] \tag{3.53}$$

$$\overline{BH} = \overline{FI} = sen(\alpha) \tag{3.54}$$

A partir desse resultado:

$$\overline{FH} = [1 - \cos(\alpha)] \tag{3.55}$$

$$\overline{AH} = \cos(\alpha) \tag{3.56}$$

$$\overline{AF} = 1 \tag{3.57}$$

Portanto, analisa-se o triângulo ACB aplicando a lei dos cossenos para o ângulo $B\hat{A}C = \beta$, obtendo-se:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 - 2(\overline{AB})(\overline{AC})\cos(\beta) \tag{3.58}$$

$$[2sen(\alpha)]^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos(\beta) \tag{3.59}$$

$$4sen^2(\alpha) = 2 - 2\cos(\beta) \tag{3.60}$$

$$2\cos(\beta) = 2 - 4sen^2(\alpha) \tag{3.61}$$

$$\cos(\beta) = 1 - 2sen^2(\alpha) \tag{3.62}$$

Como $\beta = 2\alpha$ conclui-se:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha) \tag{3.63}$$

Ainda tem-se:

$$sen^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \tag{3.64}$$

Usando a substituição da relação fundamental obtém-se:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha) \tag{3.65}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\left[1 - \cos^2(\alpha)\right] \tag{3.66}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 + 2\cos^2(\alpha) \tag{3.67}$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \tag{3.68}$$

Conclui-se também que:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \tag{3.69}$$

Pode-se ainda entender a equação (3.68) como:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha) \tag{3.70}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha) \tag{3.71}$$

Substituindo a relação fundamental obtém-se:

$$\cos(2\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - sen^2(\alpha) \tag{3.72}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - \left[1 - \cos^2(\alpha)\right] \tag{3.73}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - sen^2(\alpha) - 1 + \cos^2(\alpha) \tag{3.74}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) \tag{3.75}$$

■

3.9 $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\cos(\alpha)$

Vamos mostrar como estabelecer uma relação entre o arco duplo e o valor de seno e cosseno da metade desse arco.

Fazendo-se uma análise da Figura 3.17 obtemos a semelhança dos triângulos DCB e IAF.

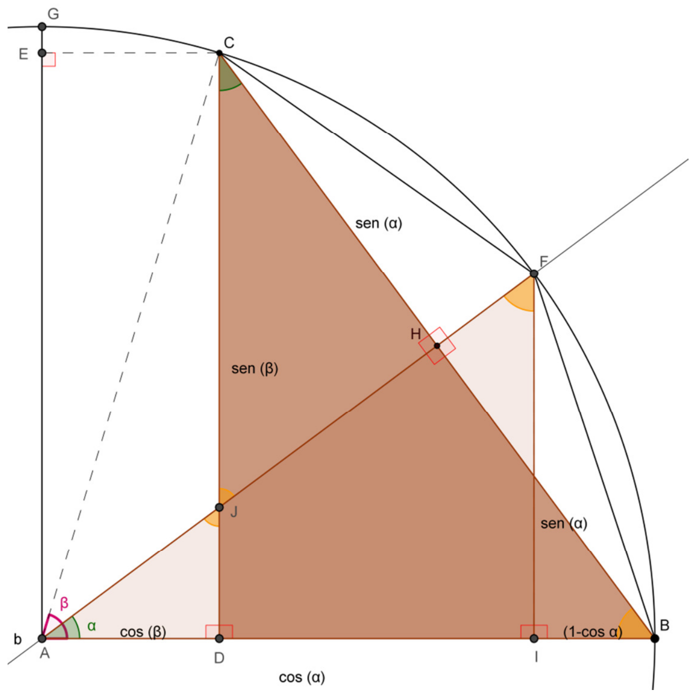

Figura 3.17: Relações de sen 2α.

Como $A\hat{J}D$ e $A\hat{F}I$ são correspondentes sendo $A\hat{J}D$ e $C\hat{J}H$ opostos pelo vértice, tem-se que $A\hat{F}I$ e $C\hat{J}H$ são congruentes. Logo os triângulos HJC e AFI são semelhantes, ou seja, possuem dois ângulos congruentes e dois ângulos retos.

Então, como $J\hat{C}H$ é comum aos triângulos retângulos HJC e DBC, logo estes também são semelhantes.

Portanto tem-se a semelhança dos triângulos AFI e DCB, logo:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AI}} \tag{3.76}$$

$$\overline{CB}.\overline{AI} = \overline{AF}.\overline{DC} \tag{3.77}$$

$$\left[sen(\alpha) + sen(\alpha)\right].\cos(\alpha) = 1.sen(\beta) \tag{3.78}$$

$$2.sen(\alpha).\cos(\alpha) = 1.sen(\beta) \tag{3.79}$$

Como, por construção, $\beta = 2\alpha$ em, então:

$$sen(2\alpha) = 2.sen(\alpha).\cos(\alpha) \tag{3.80}$$

■

3.10 $tg(2\alpha) = \dfrac{2.tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}$ e $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha).tg(\beta)}$

Seja a figura a seguir com β = 2α:

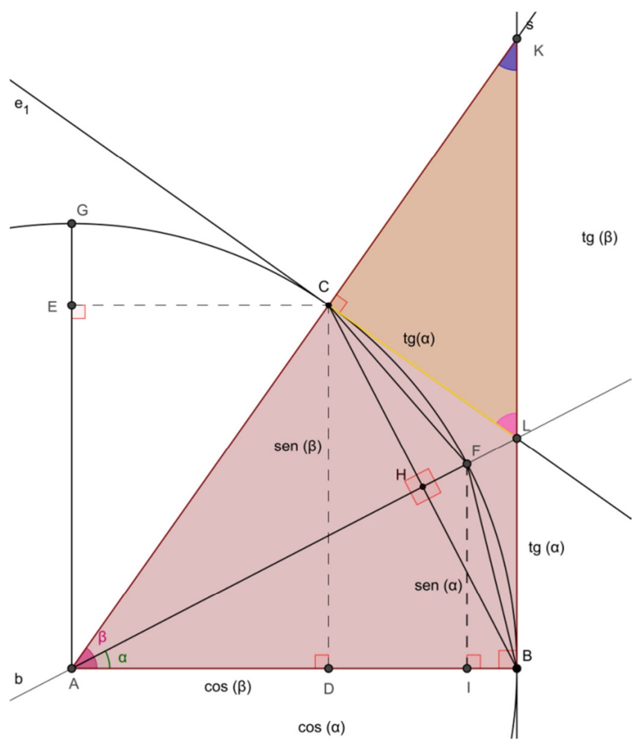

Figura 3.18: Relação da tangente de 2α.

Temos que os triângulos BAK e CLK são semelhantes, pois o ângulo $\widehat{K}$ é comum aos dois triângulos sendo que os ângulos $A\hat{B}K$ e $L\hat{C}K$ são retos.

Então a relação de semelhança pode-se estabelecer:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} \tag{3.81}$$

Como $\overline{BK}$ = tg (β), $\overline{AB}$ = 1 e $\overline{CL}$ = tg (α), pois $\overleftrightarrow{AL}$ é bissetriz de β e como $\overline{CL}$ é perpendicular em relação a $\overline{AK}$ no ponto C e $\overline{LB}$ é perpendicular a $\overline{AB}$ no ponto B. Assim $\overline{CL} = \overline{LB} = tg(\alpha)$. Portanto encontra-se uma correspondência para $\overline{CK}$, ou seja, analisa-se o triângulo CLK, como o ângulo $K\hat{C}L$ é reto então poderemos aplicar o Teorema de Pitágoras obtendo:

$$(\overline{LK})^2 = (\overline{CL})^2 + (\overline{CK})^2 \tag{3.82}$$

Percebe-se que na relação do teorema de Pitágoras em (3.82):

$$\overline{LK} = \overline{BK} - \overline{BL} \Rightarrow \overline{LK} = tg(\beta) - tg(\alpha) \tag{3.83}$$

Como CL = tg (α) substitui-se esses resultados na relação (3.82), obtendo:

$$\left[tg(\beta) - tg(\alpha)\right]^2 = tg^2(\alpha) + (\overline{CK})^2 \tag{3.84}$$

$$(\overline{CK})^2 = \left[tg(\beta) - tg(\alpha)\right]^2 - tg^2(\alpha) \tag{3.85}$$

$$(\overline{CK})^2 = tg^2(\beta) - 2.tg(\beta).tg(\alpha) + tg^2(\alpha) - tg^2(\alpha) \tag{3.86}$$

$$(\overline{CK})^2 = tg^2(\beta) - 2.tg(\beta).tg(\alpha) \tag{3.87}$$

De (3.81) extrai-se:

$$\overline{AB}.\overline{CK} = \overline{BK}.\overline{CL} \tag{3.88}$$

$$\overline{CK} = tg(\beta).tg(\alpha) \tag{3.89}$$

Agora, se ambos os membros desta equação for elevado ao quadrado, obtém-se que:

$$(\overline{CK})^2 = tg^2(\beta).tg^2(\alpha) \tag{3.90}$$

Portanto, de (3.87) e (3.90), conclui-se que:

$$tg^2(\beta) - 2.tg(\beta).tg(\alpha) = tg^2(\beta).tg^2(\alpha) \tag{3.91}$$

$$tg^2(\beta) = tg^2(\beta).tg^2(\alpha) + 2.tg(\beta).tg(\alpha) \tag{3.92}$$

$$tg^2(\beta) = tg(\beta).\left[tg(\beta).tg^2(\alpha) + 2.tg(\alpha)\right] \tag{3.93}$$

$$\frac{tg^2(\beta)}{tg(\beta)} = \left[tg(\beta).tg^2(\alpha) + 2.tg(\alpha)\right] \tag{3.94}$$

$$tg(\beta) = \left[tg(\beta).tg^2(\alpha) + 2.tg(\alpha)\right] \tag{3.95}$$

$$tg(\beta) - tg(\beta).tg^2(\alpha) = 2.tg(\alpha) \tag{3.96}$$

$$tg(\beta).\left[1 - tg^2(\alpha)\right] = 2.tg(\alpha) \tag{3.97}$$

$$tg(\beta) = \frac{2.tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)} \tag{3.98}$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2.tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)} \tag{3.99}$$

■

Outra maneira de realizar a demonstração é substituindo algumas relações já conhecidas e fazendo a verificação algébrica como segue:

$$\frac{2.tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)} = \frac{2.\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1 - \frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{\frac{2.sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\frac{\cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{2.sen(\alpha).\cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)} = \frac{sen(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = tg(2\alpha)$$

(3.100)

A verificação numérica pode ser pensada quando, por exemplo, α = 30° e β = 60° obtém-se:

$$\frac{2.tg(30^o)}{1 - tg^2(30^o)} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{6}{9}} = 2.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{9}{6} = \frac{18\sqrt{3}}{18} = \sqrt{3} = tg(60^o) \tag{3.101}$$

Verifica-se então que a identidade é verdadeira.

Agora, mostra-se a relação tg(α+β), genericamente, fazendo estudo na Fig.3.18:

$Demonstra\tilde{c}ao$:

Toma-se um ângulo α e β no primeiro quadrante com α > β. Baixa-se a altura do triângulo AGF referente ao vértice F e base $\overline{AG}$. Observa-se a semelhança entre os triângulos GTF, GDE e AGB, pois possuem ângulo reto e ângulo comum $A\hat{G}B$. Logo $G\hat{F}T$ e $G\hat{E}D$ são congruentes, sendo ambos iguais a $(\alpha+\beta)$.

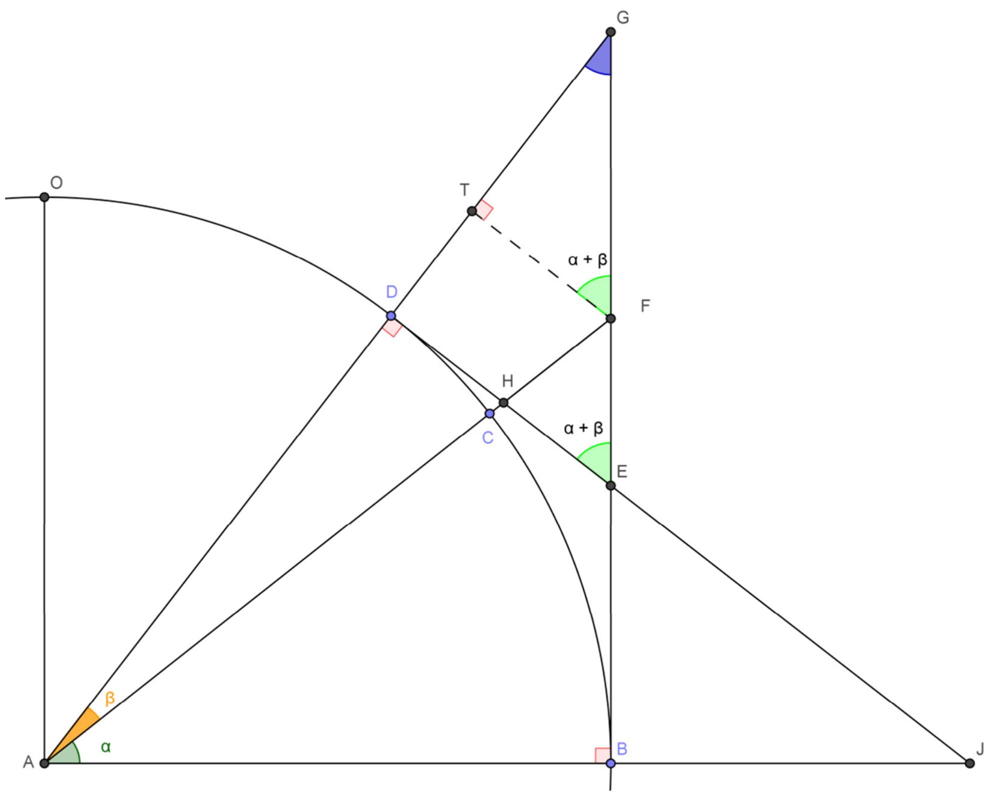

Figura 3.19: Relação da tangente da soma

Então, pelo teorema de Pitágoras no triângulo GBA, obtém-se:

$$(\overline{AG})^2 = (\overline{GB})^2 + (\overline{AB})^2 \tag{3.102}$$

Como $\overline{GB} = tg(\alpha+\beta)$ e $\overline{AB} = 1$, logo:

$$\overline{AG} = \sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1} \tag{3.103}$$

Ainda tem-se que, como $\overline{BF} = tg(\alpha)$ e $\overline{BG} = tg(\alpha+\beta)$ resultando que $\overline{GF} = tg(\alpha+\beta) - tg(\alpha)$, assim podemos estabelecer a proporção dos lados correspondentes utilizando a semelhança dos triângulos GTF com AGB, ou seja:

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{TG}}{\overline{BG}} \tag{3.103}$$

$$\frac{tg(\alpha+\beta) - tg(\alpha)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} = \frac{\overline{TG}}{tg(\alpha+\beta)} \tag{3.104}$$

$$\overline{TG} = \frac{tg^2(\alpha+\beta) - tg(\alpha+\beta).tg(\alpha)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.105}$$

Observa-se então que como $\overline{AT} = \overline{AG} - \overline{TG}$, conclui-se:

$$\overline{AT} = \sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1} - \frac{tg^2(\alpha+\beta) - tg(\alpha+\beta).tg(\alpha)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.106}$$

$$\overline{AT} = \frac{\left[\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}\right]^2 - tg^2(\alpha+\beta) + tg(\alpha+\beta).tg(\alpha)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.107}$$

$$\overline{AT} = \frac{tg^2(\alpha+\beta) + 1 - tg^2(\alpha+\beta) + tg(\alpha+\beta).tg(\alpha)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.108}$$

$$\overline{TF} = tg(\beta).\frac{tg(\alpha+\beta).tg(\alpha)+1}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.109}$$

Da semelhança dos triângulos ADH e ATF, obtém-se:

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{TF}}{\overline{AT}} \tag{3.110}$$

Como $\overline{DH} = tg(\beta)$ e $\overline{AD} = 1$, então:

$$\frac{tg(\beta)}{1} = \frac{\overline{TF}}{\overline{AT}} \tag{3.111}$$

$$\overline{TF} = \overline{AT}.tg(\beta) \tag{3.112}$$

$$\overline{TF} = tg(\beta).\frac{tg(\alpha+\beta).tg(\alpha)+1}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.113}$$

$$\overline{TF} = \frac{tg(\alpha+\beta).tg(\alpha).tg(\beta)+tg(\beta)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.114}$$

Conclui-se o raciocínio quando se faz a semelhança dos triângulos TGF com AGB:

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{TF}}{\overline{AB}} \tag{3.115}$$

$$\overline{GF}.\overline{AB} = \overline{AG}.\overline{TF} \tag{3.116}$$

$$tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha) = \sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}.\frac{tg(\alpha+\beta).tg(\alpha).tg(\beta)+tg(\beta)}{\sqrt{tg^2(\alpha+\beta)+1}} \tag{3.117}$$

$$tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha) = tg(\alpha+\beta).tg(\alpha).tg(\beta)+tg(\beta) \tag{3.118}$$

$$tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha+\beta).tg(\alpha).tg(\beta) = tg(\alpha)+tg(\beta) \tag{3.119}$$

$$tg(\alpha+\beta).\left[1-tg(\alpha).tg(\beta)\right] = tg(\alpha)+tg(\beta) \tag{3.120}$$

Portanto:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha).tg(\beta)} \tag{3.121}$$

■

CAPÍTULO IV

FATORES HISTÓRICOS

4.1 Identidades de Ptolomeu

Neste capítulo relembra-se como Cláudio Ptolomeu demonstrou ainda naquela época, século II depois de Cristo, às identidades conhecidas da soma e diferença de arco para as relações de seno e cosseno.

Partindo inicialmente do "Teorema de Ptolomeu", a saber: "se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo, então $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\overline{DA}=\overline{AC}.\overline{BD}$ ". (MUNIZ,2012)

$Demonstra\c{c}\tilde{a}o$:

Seja um quadrilátero ABCD, circunscritível, traça-se as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Marca-se um ponto E na diagonal $\overline{AC}$ tal que a medida do ângulo $C\hat{B}D = A\hat{B}E$ conforme ilustração abaixo:

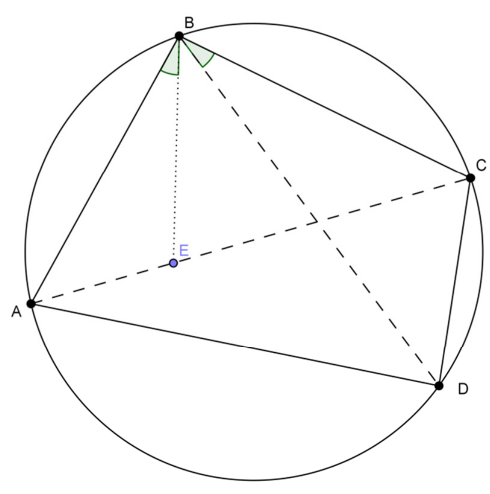

Figura 4.1: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

Como os ângulos $C\hat{D}B$ e $B\hat{A}C$ determinam o arco BC então os ângulos $B\hat{A}E$ e $C\hat{D}B$ tem a mesma medida:

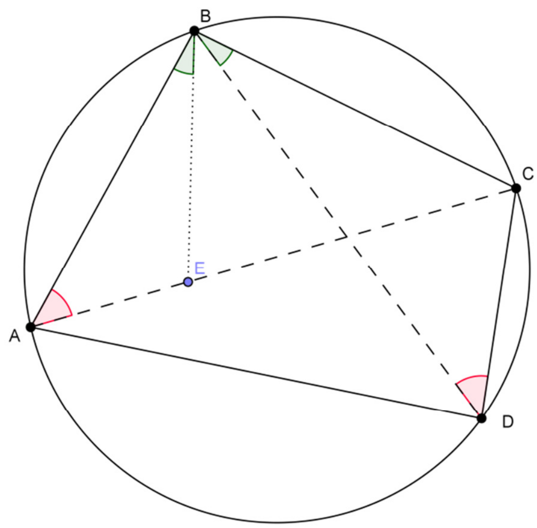

Figura 4.2: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

Percebe-se então, que os triângulos ABE e ACD são semelhantes. Assim:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \tag{4.1}$$

$$\overline{AB}.\overline{CD} = \overline{AE}.\overline{BD} \tag{4.2}$$

Observa-se ainda que os ângulos $B\hat{C}A$ e $B\hat{D}A$ possuem as mesmas medidas pois determinam o mesmo arco AB:

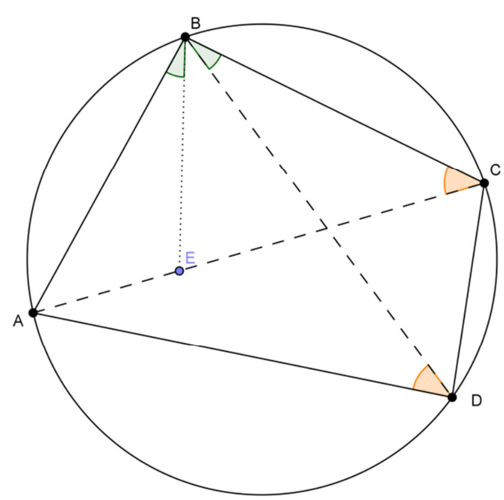

Figura 4.3: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

Como consequência do exposto na Fig. 4.3 os triângulos BCD e ABD são semelhantes:

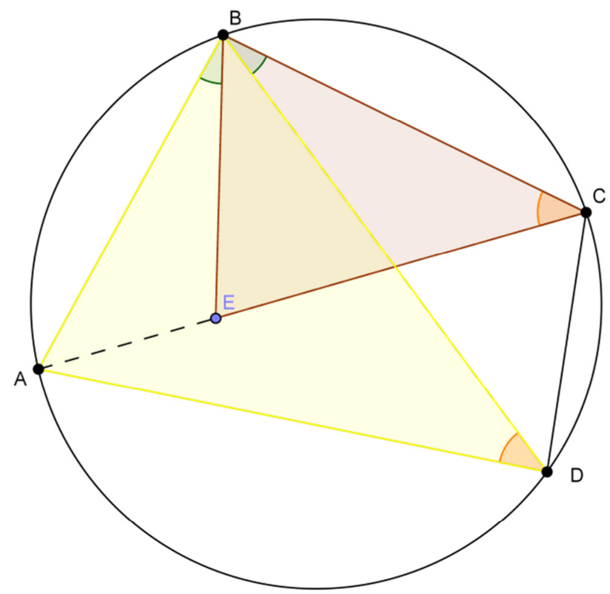

Figura 4.4: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

A partir da Fig. 4.4, monta-se as relações de proporção:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \tag{4.3}$$

$$\overline{AD}.\overline{BC} = \overline{BD}.\overline{EC} \tag{4.4}$$

Somando as equações (4.2) e (4.4) obtém-se:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AE}.\overline{BD} + \overline{BD}.\overline{EC} \tag{4.5}$$

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{BD}.\left(\overline{AE} + \overline{EC}\right) \tag{4.6}$$

Como $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$, segue:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{BD}.\overline{AC} \tag{4.7}$$

■

Portanto a partir desse teorema, Ptolomeu demonstrou-se as identidades da soma e diferença da relação seno e cosseno de dois ângulos.

Assim, vamos demonstrar que $sen(\beta-\alpha)=\cos(\alpha).sen(\beta)-\cos(\beta).sen(\alpha)$

Demonstração:

Seja o quadrilátero ABCD inscrito na circunferência Γ_1, então pelo Teorema de Ptolomeu $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AD}.\overline{BC}=\overline{BD}.\overline{AC}$. Vamos analisar o caso em que o segmento $\overline{AD}$ é o diâmetro desta circunferência. Então:

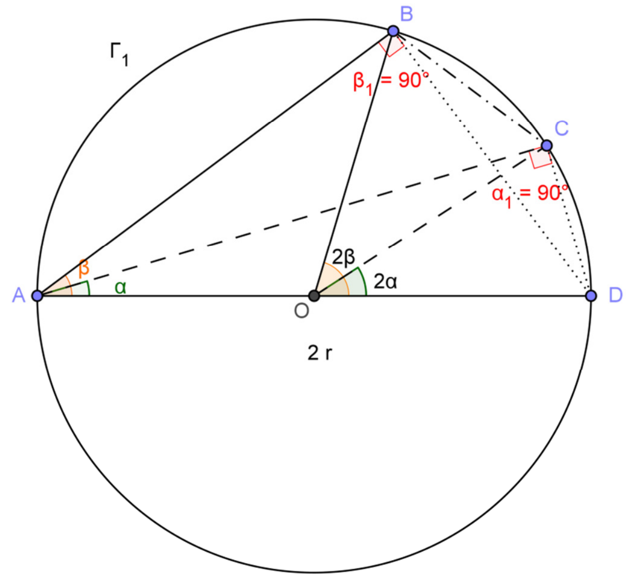

Figura 4.5: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

Observa-se que segmento $\overline{AD}=2r$ (diâmetro), a arco BD denota o ângulo central $B\hat{O}D=2\beta$ e o ângulo $B\hat{A}D=\beta$. Por outro lado o arco CD compreende o ângulo central $C\hat{O}D=2\alpha$ e $C\hat{A}D=\alpha$ (ângulos inscritos numa circunferência e ângulo central com mesma corda) como ABD é um triângulo retângulo em B (triângulo inscrito numa semicircunferência e um de seus lados sendo o diâmetro), logo:

$$sen(\beta)=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \tag{4.8}$$

$$\overline{BD}=2.r.sen(\beta) \tag{4.9}$$

Analogamente vê-se que o triângulo ACD também é retângulo, agora em C, portanto:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \tag{4.10}$$

$$\overline{CD} = 2.r.sen(\alpha) \tag{4.11}$$

Como $B\widehat{D}A = (90^o - \beta)$ e $C\widehat{D}A = (90^o - \alpha)$, aplicando a definição de seno de um ângulo obtém – se:

$$sen(90^o - \alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \tag{4.12}$$

$$\overline{AC} = 2.r.sen(90^o - \alpha) \tag{4.13}$$

$$sen(90^o - \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \tag{4.14}$$

$$\overline{AB} = 2.r.sen(90^o - \beta) \tag{4.15}$$

Como $B\widehat{A}C = (\beta - \alpha)$, com auxílio da lei dos senos obtém-se:

$$2.r = \frac{\overline{BC}}{sen(\beta - \alpha)} \tag{4.16}$$

$$\overline{BC} = 2.r.sen(\beta - \alpha) \tag{4.17}$$

Substituindo as relações encontradas em (4.15), (4.11), (4.17), (4.13) e (4.9) no Teorema de Ptolomeu, obtemos:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{DA} = \overline{AC}.\overline{BD} \tag{4.18}$$

$$2r.sen(90^o - \beta).2r.sen(\alpha) + 2r.sen(\beta - \alpha).2r = 2r.sen(90^o - \alpha).2r.sen(\beta) \tag{4.19}$$

$$4r^2.\left[sen(90^o - \beta).sen(\alpha)\right] + 4r^2.sen(\beta - \alpha) = 4r^2.\left[sen(90^o - \alpha).sen(\beta)\right] \tag{4.20}$$

Dividindo-se todos os termos da equação acima por 4.r² obtém-se:

$$\left[sen(90^o - \beta).sen(\alpha)\right] + sen(\beta - \alpha) = \left[sen(90^o - \alpha).sen(\beta)\right] \tag{4.21}$$

$$sen(\beta-\alpha)=\left[sen(90^o-\alpha).sen(\beta)\right]-\left[sen(90^o-\beta).sen(\alpha)\right] \quad (4.22)$$

Portanto como $sen(90^o-\alpha)=\cos(\alpha)$ e $sen(90^o-\beta)=\cos(\beta)$, apresentado em (3.38), a equação anterior torna-se:

$$sen(\beta-\alpha)=\cos(\alpha).sen(\beta)-\cos(\beta).sen(\alpha) \quad (4.23)$$

■

Demonstra-se agora que: $sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha).\cos(\beta)+\cos(\alpha).sen(\beta)$

Demonstração:

Seja um quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência, tal que a diagonal $\overline{BD}$ é o diâmetro desta circunferência.

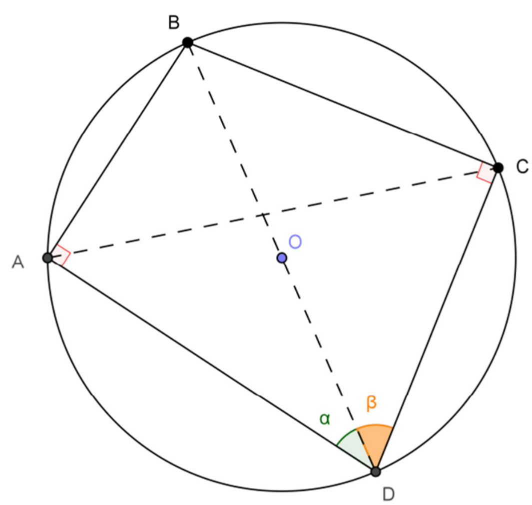

Figura 1.6: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

O triângulo ABD é retângulo, pois o ângulo $B\hat{A}D$ é reto visto que está inscrito em uma meia circunferência. Logo, pode-se observar que sendo α um ângulo agudo do triângulo ABD e aplicando as definições de seno para este ângulo α tem-se:

$$sen(\alpha)=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \quad (4.24)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \tag{4.25}$$

Com efeito, pode escrever as equações acima da seguinte maneira:

$$\overline{AB} = \overline{BD}.sen(\alpha) \tag{4.26}$$

$$\overline{AD} = \overline{BD}.\cos(\alpha) \tag{4.27}$$

Analogamente faz-se a mesma consideração para o triângulo retângulo BCD tal que o ângulo reto será $B\widehat{C}D$, obtendo-se:

$$sen(\beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \tag{4.28}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \tag{4.29}$$

Assim:

$$\overline{BC} = \overline{BD}.sen(\beta) \tag{4.30}$$

$$\overline{CD} = \overline{BD}.\cos(\beta) \tag{4.31}$$

Agora aplica – se a lei dos senos no triângulo inscrito ADC para o ângulo $(\alpha + \beta)$ e obtém – se:

$$\overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{sen(\alpha + \beta)} \tag{4.32}$$

$$\overline{AC} = \overline{BD}.sen(\alpha + \beta) \tag{4.33}$$

Substituindo as relações (4.33), (4.26), (4.31), (4.27) e (4.30) no teorema de Ptolomeu obtém – se:

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} \tag{4.34}$$

$$\overline{BD}.sen(\alpha+\beta).\overline{BD}=\overline{BD}.sen(\alpha).\overline{BD}.\cos(\beta)+\overline{BD}.\cos(\alpha).\overline{BD}.sen(\beta) \tag{4.35}$$

$$(\overline{BD})^2.sen(\alpha+\beta)=(\overline{BD})^2.sen(\alpha).\cos(\beta)+(\overline{BD})^2.\cos(\alpha).sen(\beta) \tag{4.36}$$

$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha).\cos(\beta)+\cos(\alpha).sen(\beta) \tag{4.37}$$

■

A figura a seguir é usada na demonstração do cosseno da soma de dois arcos:

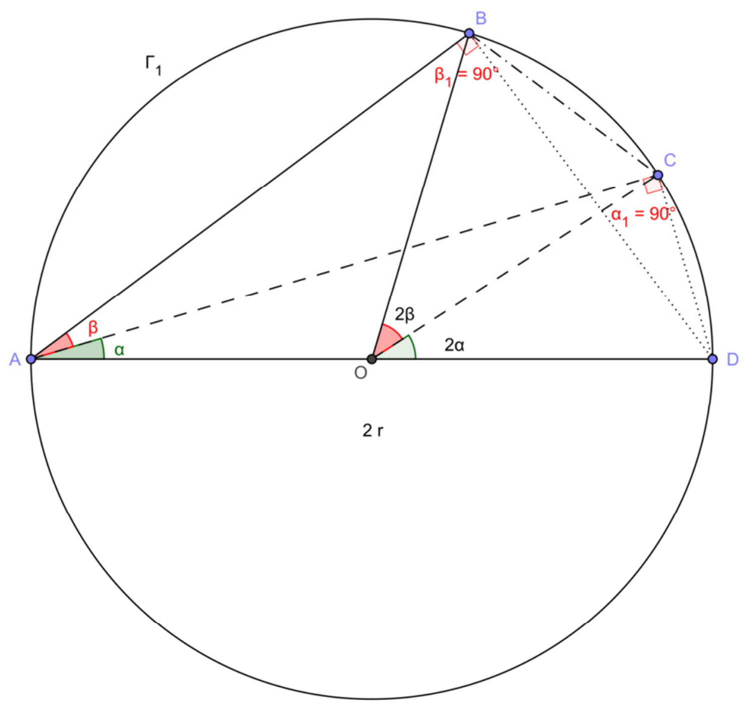

Figura 4.7: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

Demonstração:

Considere a figura anterior, ou seja, um quadrilátero inscrito em uma circunferência tal que um de seus lados é o diâmetro desta circunferência. Como o triângulo ABD está inscrito numa semicircunferência então $A\hat{B}D$ é reto. O mesmo acontece com o triângulo ACD sendo $A\hat{C}D$ reto. Então aplicando – se as definições de seno e cosseno dos ângulos α e β obtém-se:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \tag{4.38}$$

$$\overline{AB} = \cos(\alpha + \beta).2r \tag{4.39}$$

$$sen(\alpha + \beta) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \tag{4.40}$$

$$\overline{BD} = sen(\alpha + \beta).2r \tag{4.41}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \tag{4.42}$$

$$\overline{AC} = \cos(\alpha).2r \tag{4.43}$$

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \tag{4.44}$$

$$\overline{CD} = sen(\alpha).2r \tag{4.45}$$

Usando-se a lei do seno para o ângulo β no triângulo ABC obtém-se:

$$2r = \frac{\overline{BC}}{sen(\beta)} \tag{4.46}$$

$$\overline{BC} = sen(\beta).2r \tag{4.47}$$

Substituindo-se (4.43), (4.41), (4.39), (4.45) e (4.47) sendo AD = 2r, então:

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} \tag{4.48}$$

$$\cos(\alpha).2r.sen(\alpha + \beta).2r = \cos(\alpha + \beta).2r.sen(\alpha).2r + 2r.sen(\beta).2r \tag{4.49}$$

$$4r^2.\cos(\alpha).sen(\alpha + \beta) = 4r^2.\cos(\alpha + \beta).sen(\alpha) + 4r^2.sen(\beta) \tag{4.50}$$

Simplificando-se ambos os membros da equação (4.50) por 4r² tem-se:

$$\cos(\alpha).sen(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta).sen(\alpha) + sen(\beta) \tag{4.51}$$

Substitui-se em (4.51) o valor encontrado em (4.37) obtendo-se:

$$\cos(\alpha).\left[sen(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).sen(\beta)\right] = \cos(\alpha + \beta).sen(\alpha) + sen(\beta) \tag{4.52}$$

$$\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta) + \cos(\alpha).\cos(\alpha).sen(\beta) = \cos(\alpha + \beta).sen(\alpha) + sen(\beta) \tag{4.53}$$

$$\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta)+\cos(\alpha).\cos(\alpha).sen(\beta)-sen(\beta)=\cos(\alpha+\beta).sen(\alpha) \quad (4.54)$$

$$\cos(\alpha+\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta)-sen(\beta).\left[1-\cos^2(\alpha)\right] \quad (4.55)$$

$$\cos(\alpha+\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta)-sen(\beta).sen^2(\alpha) \quad (4.56)$$

Dividindo-se ambos os membros de (4.56) por sen (α), obtém-se:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha).\cos(\beta)-sen(\beta).sen(\alpha) \quad (4.57)$$

■

Efetuando – se uma análise quanto a mudança de posição dos ângulos no vértice A, demonstra-se o cosseno da diferença entre dois ângulos:

Demonstração:

Considere um quadrilátero inscrito em uma circunferência tal que um de seus lados é o diâmetro desta circunferência

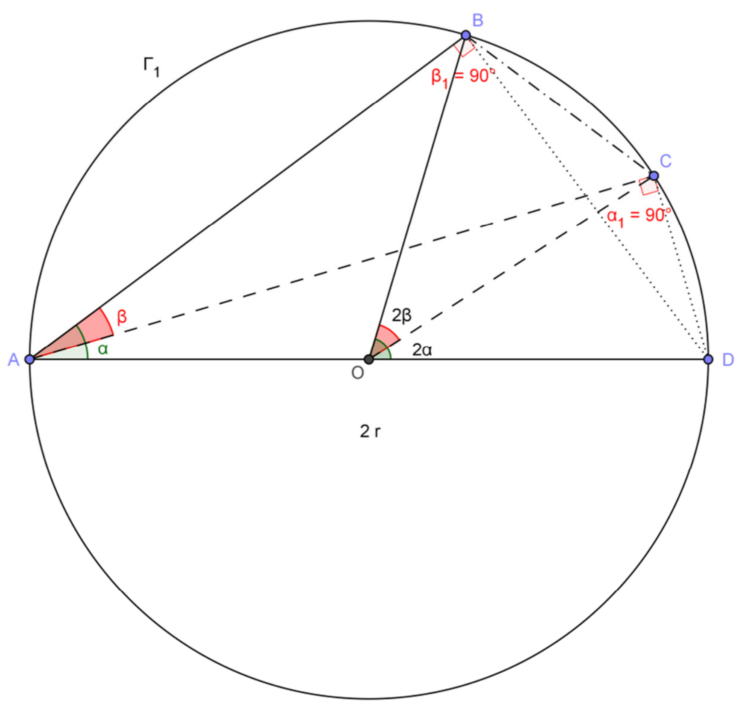

Figura 4.8: Quadrilátero ABCD inscrito em uma circunferência.

Analisando a Fig. 4.8 obtém – se as seguintes relações:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \tag{4.58}$$

$$\overline{AC}=2r.\cos(\alpha-\beta) \tag{4.59}$$

Usando a lei do seno no triângulo ABC obtém-se:

$$sen(\beta)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} \tag{4.60}$$

$$\overline{BC}=2r.sen(\beta) \tag{4.61}$$

No triângulo ABD consegue-se:

$$\cos(\alpha)=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \tag{4.62}$$

$$\overline{AB}=2r.\cos(\alpha) \tag{4.63}$$

$$sen(\alpha)=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \tag{4.64}$$

$$\overline{BD}=2r.sen(\alpha) \tag{4.65}$$

Ainda consegue-se:

$$sen(\alpha-\beta)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \tag{4.66}$$

$$\overline{CD}=2r.sen(\alpha-\beta) \tag{4.67}$$

Substitui-se então, (4.59), (4.65), (4.63), (4.67) e (4.61) no teorema de Ptolomeu sendo $\overline{AD}=2r$, então:

$$\overline{AD}.\overline{BD}=\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AD}.\overline{BC} \tag{4.68}$$

$$2r.\cos(\alpha-\beta).2r.sen(\alpha)=2r.\cos(\alpha).2r.sen(\alpha-\beta)+2r.2r.sen(\beta) \tag{4.69}$$

Simplificando a equação (4.69) por $4r^2$ obtém-se:

$$\cos(\alpha-\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).sen(\alpha-\beta)+sen(\beta) \quad (4.70)$$

Substituindo a equação (4.23) em (4.70) obtém-se:

$$\cos(\alpha-\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).\left[sen(\alpha).\cos(\beta)-sen(\beta).\cos(\alpha)\right]+sen(\beta) \quad (4.71)$$

$$\cos(\alpha-\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta)-sen(\beta).\cos(\alpha).\cos(\alpha)+sen(\beta) \quad (4.72)$$

Colocando-se o termo sen (β) no segundo membro em evidência obtém-se:

$$\cos(\alpha-\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta)+sen(\beta).\left[1-\cos^2(\alpha)\right] \quad (4.73)$$

Equivalendo-se a:

$$\cos(\alpha-\beta).sen(\alpha)=\cos(\alpha).sen(\alpha).\cos(\beta)+sen(\beta).sen^2(\alpha) \quad (4.74)$$

Dividindo – se a equação anterior por sen (α) consegue-se:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha).\cos(\beta)+sen(\beta).sen(\alpha) \quad (4.75)$$

■

4.2 Fórmula de Viète

Por volta do século XVI, na Europa, havia um crescente interesse em transformar produto de funções em soma ou diferença. Essas tentativas eram conhecidas com regras de prostaférese, cujo nome vem do grego prosthaphaeresis que significa adição e subtração.(EVES,2004)

Diante disso, François Viète também conhecido por Franciscus Vieta, um matemático francês em um de seus trabalhos propôs uma regra de prostaférese que demonstraremos como o auxilio da Figura 4.9 cujos ângulos relacionados são menores que o ângulo reto.

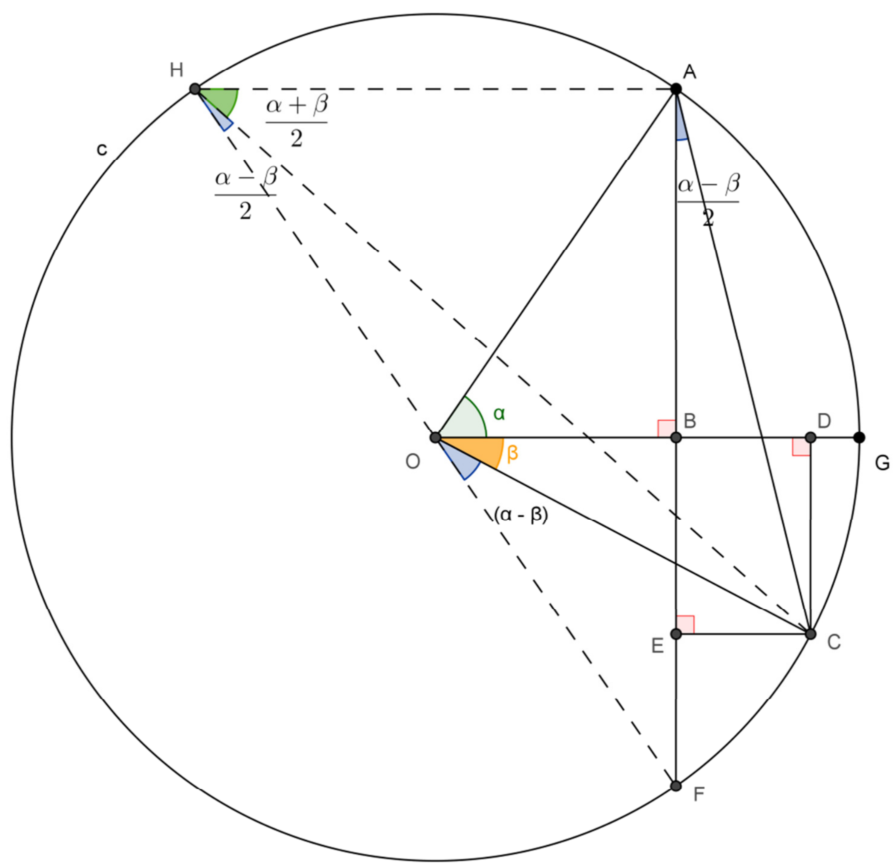

Figura 4.9: Círculo trigonométrico de raio 1

Demonstração:

Toma-se o ciclo trigonométrico, o qual por definição possui raio igual a 1 unidade, traça-se uma corda $\overline{AF}$ perpendicular ao raio $\overline{OG}$ em B. Diante disso constrói-se o ângulo α determinando o arco AG e o ângulo β, menor que α, determinando o arco GC. Tem-se ainda que D é a projeção de C em $\overline{OG}$ e o ponto E a projeção de C em $\overline{AF}$. Como o arco AG é igual GF então o arco CF determina o ângulo (α – β).

Observa-se que (α – β) é ângulo central da circunferência o qual determina o arco CF logo fazendo HF o diâmetro da circunferência, o ângulo $F\widehat{H}C$ será a metade de (α – β) assim:

$$F\widehat{H}C = \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{4.76}$$

Analogamente, tem-se que o arco AC é determinado pelo ângulo central (α + β) e pelo ângulo inscrito $C\widehat{H}A$ então:

$$C\widehat{H}A = \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{4.77}$$

Pela lei dos senos no triângulo AHC tem-se:

$$\overline{AC} = 2r.sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{4.78}$$

$$\overline{AC} = 2sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{4.79}$$

No triângulo retângulo AEC obtém-se:

$$\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \tag{4.80}$$

$$\overline{AE} = \overline{AC}.\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \tag{4.81}$$

Logo, dos triângulos ABO e CDO extrai-se:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \tag{4.82}$$

$$\overline{AB} = sen(\alpha) \tag{4.83}$$

$$sen(\beta) = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} \tag{4.84}$$

$$\overline{DC} = sen(\beta) \tag{4.85}$$

Tem-se ainda que $\overline{DC} = \overline{BE}$ então:

$$\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE} \tag{4.86}$$

Substituindo-se em (4.86) os valores de (4.43), (4.85) e (4.81) obtém-se:

$$sen(\alpha) + sen(\beta) = \overline{AC}.\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \tag{4.87}$$

Substituindo-se em (4.87) o resultado de (4.79) conclui-se:

$$sen(\alpha) + sen(\beta) = 2sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \tag{4.88}$$

Fazendo-se a troca de variáveis por:

$$A = \frac{\alpha + \beta}{2} \tag{4.89}$$

$$\alpha = 2A - \beta \tag{4.90}$$

$$B = \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{4.91}$$

$$\alpha = 2B + \beta \tag{4.92}$$

Igualando-se as equações (4.90) e (4.92) obtém-se:

$$2B + \beta = 2A - \beta \tag{4.93}$$

$$2\beta = 2A - 2B \tag{4.94}$$

$$2\beta = 2(A - B) \tag{4.95}$$

$$\beta = A - B \tag{4.96}$$

Substituindo (4.96) em (4.90) consegue-se:

$$\alpha = 2A - (A - B) \tag{4.97}$$

$$\alpha = A + B \tag{4.98}$$

Portanto a equação (4.88) com a substituição de (4.89), (4.91), (4.96) e (4.98) poderá ser escrita como:

$$sen(A + B) + sen(A - B) = 2.sen(A).\cos(B) \tag{4.99}$$

■

Por outro lado quando altera – se a posição do ângulo β para o mesmo quadrante do ângulo α obtém-se:

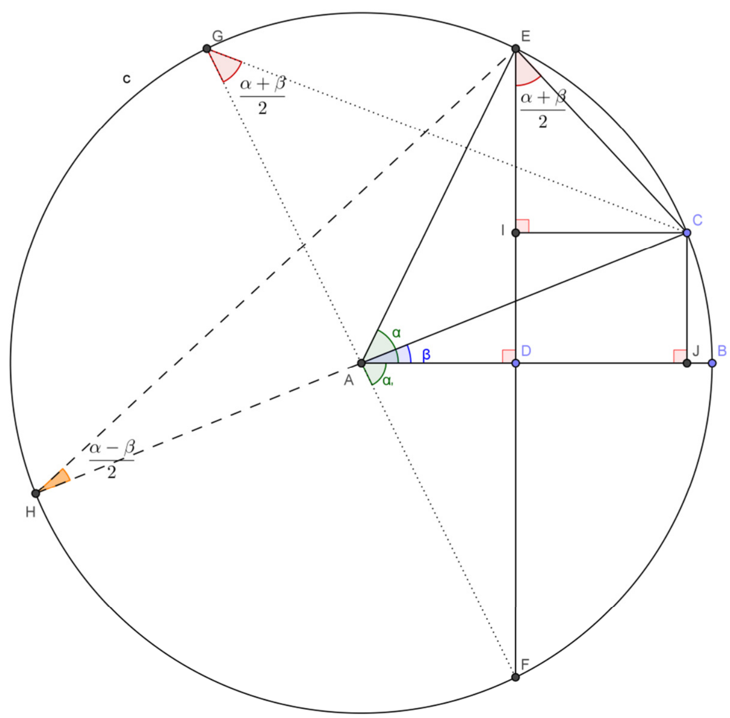

Figura 4.10: Círculo trigonométrico de raio 1

Demonstração:

Por construção temos, $E\hat{A}B = \alpha$ e como $E\hat{A}C$ e $E\hat{H}C$ determinam o mesmo arco EC, se $E\hat{A}C = \alpha - \beta$, então $E\hat{H}C = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$. Tem-se também que $B\hat{A}F = \alpha$ e $C\hat{A}F = \alpha + \beta$, como $C\hat{A}F$ e $C\hat{G}F$ determinam o mesmo arco CF, então $C\hat{G}F = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Pela lei do seno no triângulo EAC obtém-se:

$$\overline{EC} = 2r.sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \tag{4.100}$$

$$\overline{EC} = 2.sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \tag{4.101}$$

Tém – se que os ângulos $F\hat{E}C$ e $F\hat{G}C$ são congruentes medindo ambos $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ e sendo I a projeção de C em $\overline{EF}$ então:

$$sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\overline{IC}}{\overline{EC}} \tag{4.102}$$

$$\overline{IC} = \overline{EC}.sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{4.103}$$

Substituindo-se (4.101) em (4.103) obtém-se:

$$\overline{IC} = 2.sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tag{4.104}$$

Observa-se que $\overline{IC} = \overline{DJ}$, e que $\overline{DJ} = \overline{AJ} - \overline{AD}$, logo:

$$\overline{IC} = \overline{AJ} - \overline{AD} \tag{4.105}$$

$$\overline{IC} = \cos(\beta) - \cos(\alpha) \tag{4.106}$$

Substitui-se (4.106) em (4.104):

$$\cos(\beta)-\cos(\alpha)=2.sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (4.107)$$

Para melhor compreensão da fórmula descrita em (4.107) faz-se mudança de variável, ou seja, toma-se $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ e $B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ consequentemente:

$$2A=\alpha+\beta \quad (4.108)$$

$$\alpha=2A-\beta \quad (4.109)$$

$$2B=\alpha-\beta \quad (4.110)$$

Substitui-se (4.109) em (4.110) obtendo-se:

$$2B=2A-\beta-\beta \quad (4.111)$$

$$2\beta=2A-2B \quad (4.112)$$

$$\beta=A-B \quad (4.113)$$

Substitui-se (4.113) em (4.109) resultando em:

$$\alpha=2A-(A-B) \quad (4.114)$$

$$\alpha=2A-A+B \quad (4.115)$$

$$\alpha=A+B \quad (4.116)$$

Agora substituindo (4.116), (4.113) em (4.107):

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2.sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (4.117)$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2.sen(B).sen(A) \quad (4.118$$

■

Do mesmo modo, analisando a ilustração abaixo, temos:

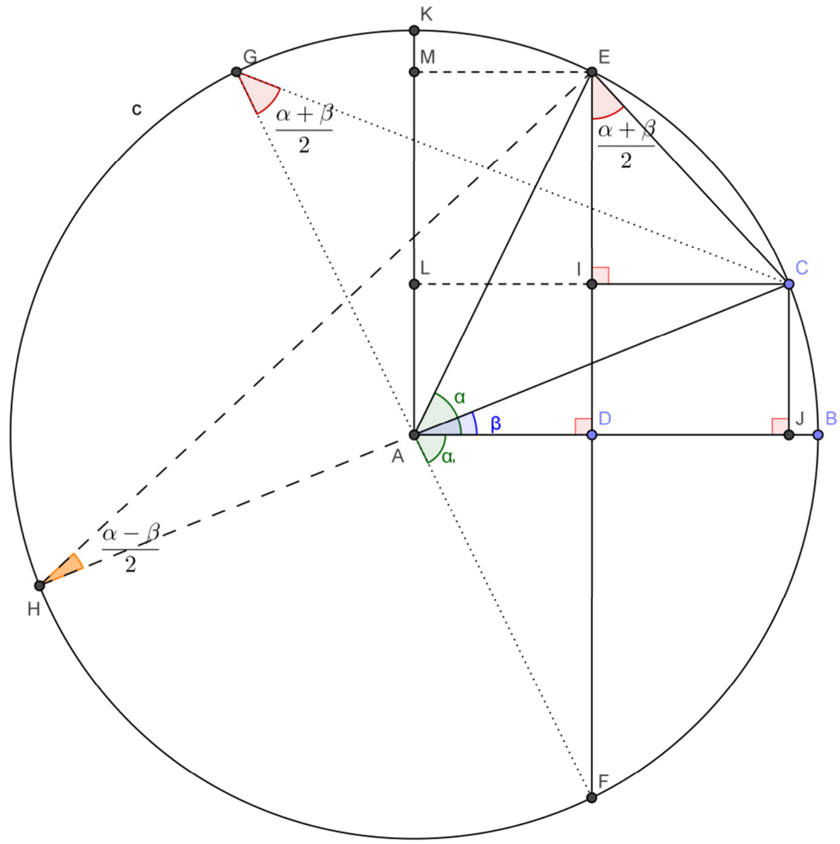

Figura 4.11: Círculo trigonométrico de raio 1.

Tem – se as mesmas condições sugeridas na Fig. 4.10 e acrescenta-se o segmento AK para representar no círculo trigonométrico o eixo dos senos sendo que o ponto L é a projeção de I neste eixo e M a projeção de E no mesmo eixo.

Então podemos seguir o mesmo raciocínio anterior.

Demonstração:

Pela lei do seno no triângulo EÂC obtém-se:

$$\overline{EC} = 2r.sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.119}$$

$$\overline{EC} = 2.sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{4.120}$$

Por outro lado no triângulo EIC:

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\overline{EI}}{\overline{EC}} \qquad (4.121)$$

$$\overline{EI}=\overline{EC}.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (4.122)$$

Substituindo (4.120) em (4.122) tem-se:

$$\overline{EI}=2.sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (4.123)$$

Faz-se consideração sobre o segmento EI como sendo ED – ID tal que ED = AM e ID = AL = CJ, então EI = AM – AL. Tem-se que AM = sen (α) e CJ = AL = sen (β) logo:

$$\overline{EI}=sen(\alpha)-sen(\beta) \qquad (4.124)$$

Substituindo (4.124) em (4.123) obtém-se:

$$sen(\alpha)-sen(\beta)=2.sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (4.125)$$

A mudança de variável é sugerida para facilitar o entendimento da equação anterior, então:

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (4.126)$$

$$2A=\alpha+\beta \qquad (4.127)$$

$$\alpha=2A-\beta \qquad (4.128)$$

$$B=\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4.129)$$

$$2B=\alpha-\beta \qquad (4.130)$$

Substitui-se (4.128) em (4.130) obtendo:

$$2B = (2A - \beta) - \beta \tag{4.131}$$

$$2B = 2A - 2\beta \tag{4.132}$$

$$\beta = A - B \tag{4.133}$$

Substituindo-se (4.133) em (4.130) consegue-se:

$$2B = \alpha - (A - B) \tag{4.134}$$

$$\alpha = A + B \tag{4.135}$$

Portanto substituindo-se (4.135), (4.133), (4.129) e (4.126) em (4.125) obtém-se:

$$sen(A+B) - sen(A-B) = 2.sen(B).\cos(A) \tag{4.136}$$

■

Viète ainda fez referência a uma última relação, com suporte da figura abaixo, pode-se fazer a demonstração.

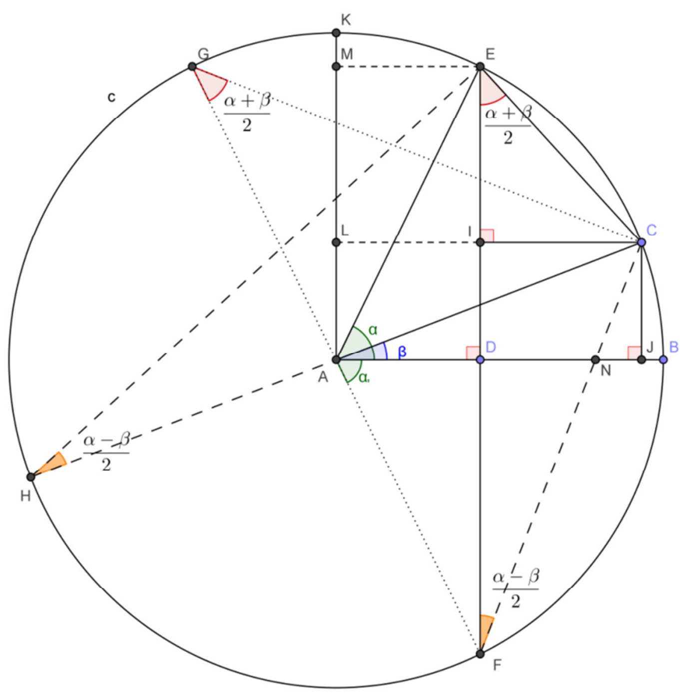

Figura 4.12: Círculo trigonométrico de raio 1.

Demonstração:

Observa-se o triângulo EIC e extrai-se a relação:

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\overline{EI}}{\overline{EC}} \tag{4.137}$$

Enquanto no Triângulo IFC obtém-se:

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\overline{IF}}{\overline{CF}} \tag{4.138}$$

Multiplicando membro a membro as equações (4.137) e (4.138) obtendo:

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{\overline{EI}.\overline{EC}}{\overline{EC}.\overline{CF}} \tag{4.139}$$

Na equação anterior vamos separadamente calcular o numerador e o denominador no segundo membro da equação. Então:

$$\overline{EI}=\overline{ED}-\overline{ID} \tag{4.140}$$

$$\overline{EI}=sen(\alpha)-sen(\beta) \tag{4.141}$$

Por outro lado:

$$\overline{IF}=\overline{ID}+\overline{DF} \tag{4.142}$$

Mas como DF = ED, logo:

$$\overline{IF}=\overline{ID}+\overline{ED} \tag{4.143}$$

$$\overline{IF}=sen(\alpha)+sen(\beta) \tag{4.144}$$

Portanto:

$$\overline{EI}.\overline{IF} = \left[sen(\alpha) - sen(\beta)\right].\left[sen(\alpha) + sen(\beta)\right] \tag{4.145}$$

$$\overline{EI}.\overline{IF} = sen(\alpha).sen(\alpha) + sen(\alpha).sen(\beta) - sen(\beta).sen(\alpha) - sen(\beta).sen(\beta) \tag{4.146}$$

$$\overline{EI}.\overline{IF} = sen^2(\alpha) - sen^2(\beta) \tag{4.147}$$

Substituindo-se sen² α, igual a (1 – cos² α) e sen² β, igual a (1 – cos² β) obtém-se de (4.147):

$$\overline{EI}.\overline{IF} = \left[1 - \cos^2(\alpha)\right] - \left[1 - \cos^2(\beta)\right] \tag{4.148}$$

$$\overline{EI}.\overline{IF} = 1 - \cos^2(\alpha) - 1 + \cos^2(\beta) \tag{4.149}$$

$$\overline{EI}.\overline{IF} = \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha) \tag{4.150}$$

$$\overline{EI}.\overline{IF} = \left[\cos(\beta) - \cos(\alpha)\right].\left[\cos(\beta) + \cos(\alpha)\right] \tag{4.151}$$

Calcula-se agora EC . CF, então aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos EIC e IFC obtém-se:

$$\overline{CF} = \sqrt{(\overline{IC})^2 + (\overline{IF})^2} \tag{4.152}$$

$$\overline{EC} = \sqrt{(\overline{EI})^2 + (\overline{CI})^2} \tag{4.153}$$

Logo:

$$\overline{CF}.\overline{EC} = \sqrt{(\overline{IC})^2 + (\overline{IF})^2}.\sqrt{(\overline{EI})^2 + (\overline{CI})^2} \tag{4.154}$$

$$\overline{CF}.\overline{EC} = \sqrt{\left[(\overline{IC})^2 + (\overline{IF})^2\right].\left[(\overline{EI})^2 + (\overline{CI})^2\right]} \tag{4.155}$$

Substituindo em (4.155) os valores de IC, IF, EI e IC obtém-se:

$$\overline{CF}.\overline{EC} = \sqrt{\left\{\left[\cos(\beta) - \cos(\alpha)\right]^2 + \left[sen(\beta) + sen(\alpha)\right]^2\right\}.\left\{\left[sen(\alpha) - sen(\beta)\right]^2 + \left[\cos(\beta) - \cos(\alpha)\right]^2\right\}} \tag{4.156}$$

Desenvolvendo a expressão dentro do radical da equação anterior obtemos:

$$\overline{CF}.\overline{EC} = \sqrt{4\cos^2(\beta) - 8\cos(\beta).\cos(\alpha) + 4\cos^2(\alpha)} \tag{4.157}$$

$$\overline{CF}.\overline{EC} = \sqrt{\left[2\cos(\beta) - 2\cos(\alpha)\right]^2} \tag{4.158}$$

$$\overline{CF}.\overline{EC} = 2\cos(\beta) - 2\cos(\alpha) \tag{4.159}$$

$$\overline{CF}.\overline{EC} = 2.\left[\cos(\beta) - \cos(\alpha)\right] \tag{4.160}$$

Portanto substituindo (4.160) e (4.151) em (4.139) obtém-se:

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\left[\cos(\beta) - \cos(\alpha)\right].\left[\cos(\beta) + \cos(\alpha)\right]}{2.\left[\cos(\beta) - \cos(\alpha)\right]} \tag{4.161}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\left[\cos(\beta) + \cos(\alpha)\right]}{2} \tag{4.162}$$

$$2.\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos(\beta) + \cos(\alpha) \tag{4.163}$$

Efetuando a mudança de variável obtemos:

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2} \tag{4.164}$$

$$\alpha + \beta = 2A \tag{4.165}$$

$$\alpha = 2A - \beta \tag{4.166}$$

Por outro lado:

$$B = \frac{\alpha-\beta}{2} \tag{4.167}$$

$$\alpha - \beta = 2B \tag{4.168}$$

$$\alpha = 2B + \beta \tag{4.169}$$

Portanto das equações (4.169) e (4.166) extrai – se:

$$2B+\beta=2A-\beta \tag{4.167}$$

$$2\beta=2A-2B \tag{4.168}$$

$$2\beta=2.(A-B) \tag{4.169}$$

$$\beta=A-B \tag{4.170}$$

Por conseguinte substituindo (4.170) em (4.169) obtém – se:

$$\alpha=2B+A-B \tag{4.171}$$

$$\alpha=A+B \tag{4.172}$$

A mudança de variável é concluída substituindo – se (4.172), (4.170), (4.167) e (4.164) em (4.163), logo:

$$2.\cos(A).\cos(B)=\cos(A+B)+\cos(A-B) \tag{3.2.105}$$

■

Podemos analisar um exemplo de aplicação de fórmulas que transformam soma em produto de funções.

Exemplo: Resolver a equação $sen(5x)+sen(x)=0$.

Solução:

Primeiramente, note que ficaria mais fácil se fosse uma equação na forma $A(x).B(x)=0$, o que indica diretamente que $A(x)=0$ ou $B(x)=0$.

Então se fizermos $A=3x$ e $B=3x$, teremos:

$sen(A+B)+sen(A-B)=2sen(A).\cos(B)$

$sen(3x+2x)+sen(3x-2x)=2sen(3x).\cos(2x)$

$sen(5x)+sen(x)=2sen(3x).\cos(2x)$

Podemos então, trabalhar com o segundo membro da equação anterior:

$2sen(3x).\cos(2x)=0$

O que ocorre se e somente se $sen(3x) = 0$ ou $\cos(2x) = 0$.

Podemos separar as possibilidades em:

1° caso: $sen(3x) = 0$

O arco de 3x é múltiplo de 180° para que seu seno seja nulo, logo $x = k.60^o$, para todo inteiro k.

2° caso: $\cos(2x) = 0$

O arco de 2x é múltiplo de 90° para que seu cosseno seja nulo, logo $x = 45^o + k.90^o$, para todo inteiro k.

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

Este Trabalho Final de Curso do PROFMAT objetivou elaborar um material capaz de ajudar os profissionais de educação matemática a desenvolverem o raciocínio por meio de demonstrações geométricas para as identidades trigonométricas.

Para tal, esta análise apoiou-se num conjunto de definições que contemplam os alicerces de cada demonstração apresentada. Realizou-se em primeiro lugar uma revisão dessas definições para em seguida poder as utilizar no presente trabalho.

Foi possível realizar demonstrações de relações trigonométricas, as quais não são usuais nos livros textos do ensino médio, tais como: tangente da soma de arcos, tangente do arco duplo, tangente da soma de arcos, seno e cosseno do arco duplo.

Uma contribuição importante deste trabalho foi a demonstração do seno e cosseno da soma e diferença de arcos utilizando o Teorema de Ptolomeu que afirma que se um quadrilátero é inscritível em uma circunferência então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais, haja visto que na literatura encontra – se apenas fragmentos desta demonstração.

Além das demonstrações geométricas de relações elementares neste trabalho utilizou – se as Identidades de Viète para demonstrar as regras de prostaférese.

Desta forma pode-se concluir que o mérito do trabalho é mostrar uma nova forma de apresentar trigonometria no ensino médio.

CAPÍTULO VI

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MUNIZ NETO, ANTONIO CAMINHA.
Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana/Caminha Muniz Neto.
1.ed. – Rio de Janeiro: SMB, 2012.

[2] CARMO. M. P. DO. MORGADO, A.C. E.WAGNER. Trigonometria, Números Complexos. Rio de Janeiro: SMB, 2001.

[3] LIMA, ELON LAGES. A matemática do ensino médio – volume 1 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Vagner, Augusto Morgado. 9. ed. – Rio de Janeiro: SBM 2006.

[4] DANTE, LUIZ ROBERTO. Matemática: contexto e aplicações - volume 2/ Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2010.

[5] SMOLE, KÁTIA CISTINA STOCCO. Matemática: ensino médio: volume 2 / Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. _ 6.ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

[6] RIBEIRO, JACKSON. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 2: ensino médio/Jackson Ribeiro. – São Paulo: Scipione, 2010.

[7] IEZZI, GELSON. Matemática: ciência e aplicações, 2: ensino médio/ Gelson Iezzi...[et al.] – 6.ed. – Saão Paulo: Saraiva, 2010.

[8] DANTE, LUIZ ROBERTO. Tudo é matemática- 9º ano/Luiz Roberto Dante. 3.ed. São Paulo: Ática 2009

[9] GIOVANNI JÚNIOR, JOSÉ RUY. A conquista da Matemática, 8º ano / José Ruy Giovanni Júnior, Benedito Castrucci. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

[10] GIOVANNI JÚNIOR, JOSÉ RUY. A conquista da Matemática, 9º ano / José Ruy Giovanni Júnior, Benedito Castrucci. Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

[11] MORI, IRACEMA. Matemática: Idéias e desafios, 9º ano/Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga.- 17 ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

[12] IEZZI, GELSON. Matemática e realidade: 9º ano/ Gelson IEzzi, OSAvaldo Dolce, Antonio Machado. – 6.ed. – São Paulo: Atual, 2009.

[13] ANDRINI, ÁLVARO. Praticando a Matemática, 9º ano / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 3. ed. Renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[14] EVES, HOWARD. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. – Campinas – SP- Editora Unicamp, 2004.