

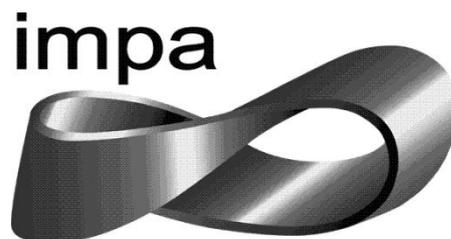
Alan Henriques de Sá

**Um experimento envolvendo o uso  
de calculadoras gráficas em uma  
escola pública**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E  
APLICADA**

**Rio de Janeiro  
Março de 2013**



**Alan Henriques de Sá**

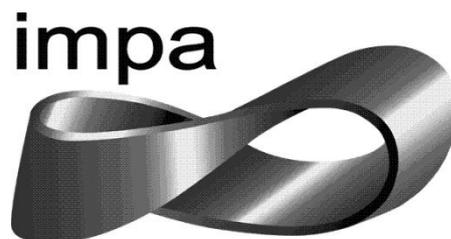
**Um experimento envolvendo o uso de  
calculadoras gráficas em uma escola pública**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IMPA como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovado pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro  
Março de 2013



**ALAN HENRIQUES DE SÁ**

**“UM EXPERIMENTO ENVOLVENDO O USO DE  
CALCULADORAS GRÁFICAS EM UMA ESCOLA PÚBLICA”.**

Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do IMPA. Aprovado pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho**  
Orientador  
IMPA

**Prof. Victor Augusto Giraldo**  
UFRJ

**Prof. Roberto Imbuzeiro Oliveira**  
IMPA

Rio de Janeiro, 01 de março de 2013.

Dedico este trabalho à minha esposa, Flávia, e aos meus filhos,  
Gabriel e Luiz Felipe.

# **AGRADECIMENTOS**

## **AGRADECIMENTOS ACADÊMICOS:**

Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho (orientador)

Prof. Victor Augusto Giraldo (componente da banca examinadora)

Prof. Roberto Imbuzeiro Oliveira (componente da banca examinadora)

## **AGRADECIMENTOS ADMINISTRATIVOS:**

Aos funcionários e alunos do Colégio Estadual Miguel Couto e aos professores do departamento de matemática da Escola Britânica do Rio de Janeiro.

## **AGRADECIMENTOS PESSOAIS:**

Cassio Roberto Machado Benite

Maria do Socorro Carneiro da Luz

Mario Luiz Nascimento

Aos meus colegas de Mestrado e a todos os amigos que sempre me incentivaram.

## **AGRADECIMENTOS INSTITUCIONAIS:**

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

## Resumo

Henriques de Sá, Alan; Carvalho, Paulo Cezar Pinto (Orientador). **Um experimento envolvendo o uso de calculadoras gráficas em uma escola pública**. Rio de Janeiro, 2013. 39p. Trabalho de Conclusão de Curso – IMPA.

O principal objetivo deste trabalho é avaliar o desempenho de alunos brasileiros de ensino médio de uma escola pública com relação ao uso de calculadoras gráficas em uma aula de matemática. São estes alunos capazes de usar a calculadora com desembaraço? O uso da calculadora pode aumentar o interesse nas aulas de matemática? A matemática pode ficar mais fácil de ser entendida? Para tanto, atividades relacionadas aos assuntos que estavam sendo estudados foram desenvolvidas com turmas do 2º e 3º anos do ensino médio do Colégio Estadual Miguel Couto, situado na cidade de Duque de Caxias, Estado do Rio de Janeiro. Para a turma do 2º ano foi elaborada uma atividade sobre operações com matrizes, cálculo de determinantes e resolução de sistemas lineares. Neste caso, os alunos foram estimulados a usar a matemática como ferramenta para entender a tecnologia. Os exercícios propostos tinham como objetivo levar os alunos a entender o funcionamento da calculadora. Para a turma do 3º ano foi elaborada uma atividade sobre funções afins. Neste caso, os estudantes fizeram uso da tecnologia como ferramenta para aprender matemática, manipulando a calculadora para inserir funções, obter tabelas e respectivos gráficos na tela, com o principal objetivo de entender a influência dos coeficientes angular e linear. Para efeito de comparação, foi também assistida uma aula de matemática na escola britânica em que a calculadora gráfica foi utilizada.

## Palavras-chave

Calculadoras gráficas, ensino médio, escola pública, aprendizagem, matemática, tecnologia.

## **Abstract**

Henriques de Sá, Alan; Carvalho, Paulo Cezar Pinto (Orientador). **An experiment involving the use of graphing calculators in a public school.** Rio de Janeiro, 2013. 39p. Course Completion Work – IMPA.

The main objective of this study is to evaluate the performance of Brazilian students in a public high school regarding the use of graphing calculators in a mathematics class. Are these students able to use the calculator easily? Can the use of calculator increase interest in mathematics classes? Can mathematics be more easily understood? Therefore, activities related to topics that were being studied were developed with the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> year high school classes in Colégio Estadual Miguel Couto, located in the city of Duque de Caxias, State of Rio de Janeiro. For the 2<sup>nd</sup> year class was prepared an activity on matrix operations, calculation of determinants and solving linear simultaneous equations. In this case, students were encouraged to use mathematics as a tool to understand the technology. The proposed exercises were intended to lead students to understand the resources of the calculator. For the 3<sup>rd</sup> year class was developed an activity related to functions. In this case, students made use of technology as a tool for learning mathematics by manipulating the calculator to insert functions, get tables and related graphs on the screen, with the main purpose of understanding the influence of gradient and y-intercept. For comparison purposes, a lesson was attended at Escola Britânica where the graphing calculator was used.

## **Keywords**

Graphing Calculators, high school, public school, learning, mathematics, technology.

## Sumário

1	Introdução	1
1.1.	O uso de calculadoras em escolas	1
1.2.	O uso de calculadoras gráficas em escolas internacionais	5
1.3.	O objetivo deste trabalho	8
2	Possibilidades de uso da calculadora gráfica	10
3	O uso da calculadora gráfica no 2º ano do ensino médio	17
4	O uso da calculadora gráfica no 3º ano do ensino médio	21
5	Uma aula na Escola Britânica com calculadoras gráficas	27
6	A análise das experiências	29
7	Conclusão	37
8	Bibliografia	40

# 1 Introdução<sup>1</sup>

## 1.1. O uso de calculadoras em escolas

Em diversos países, em particular em países do primeiro mundo, as calculadoras científicas e gráficas vêm sendo implantadas de forma obrigatória no cotidiano escolar, em parte devido ao grande avanço e disponibilidade de recursos tecnológicos que vem ocorrendo, especialmente nas duas últimas décadas. Tal movimento tem suscitado opiniões diversas quanto a real necessidade de sua utilização: uns concordam que o mundo moderno exige e cada vez mais exigirá dos cidadãos a capacidade de se utilizar tecnologia para resolver problemas; outros acham que o uso “precoce” da calculadora na escola pode ser um empecilho ao real aprendizado da matemática.

Segundo Tall (2001), nem sempre o uso das calculadoras e computadores tem sido bem sucedido. O manuseio das calculadoras em todas as aulas poderia dificultar a construção mental de relações aritméticas por parte dos alunos, pois eles iriam efetuar cálculos sem ter que pensar. Mas, bem usadas, as calculadoras podem ser muito benéficas.

Em nosso país essa discussão existe, mas, efetivamente, parece não haver qualquer possibilidade de se ter, em todas as nossas escolas, públicas e privadas, o uso da calculadora como um instrumento disponível e de apoio aos alunos para a aquisição dos conceitos matemáticos julgados importantes para todos os cidadãos.

Como um primeiro indicativo dessa tendência ao não uso de calculadoras, pode-se apontar os vestibulares das principais universidades brasileiras, onde é proibido o seu uso. Se a razão para isso for o fato de que nem todos os brasileiros podem comprar uma calculadora, tal argumento é, pelo menos, contraditório, uma vez que o candidato, ao ser aprovado em uma universidade pública, será obrigado

---

<sup>1</sup> Em colaboração com Cassio Roberto Machado Benite

a dispor de uma calculadora científica se for fazer, por exemplo, um curso de Engenharia, não importando se ele tem condições financeiras ou não de adquiri-la.

Além disso, parece ainda haver resistências por parte dos professores ao uso desse recurso em sala de aula, talvez por terem sido estudantes de escolas onde sempre estudaram sem calculadoras. No entanto, não há como negar a importância dessa máquina para quaisquer profissionais, das mais diversas áreas em todos os níveis: advogados, médicos, auxiliares de escritório, operadores de caixas de supermercado, dentre muitos outros, que dependem de máquinas de calcular para facilitar e otimizar o trabalho.

Segundo Borba & Selva (2009), concepções negativas a respeito do uso da calculadora por parte dos professores, que preconizavam que o uso desse recurso iria substituir o ensino das operações, ainda não foram completamente superadas. O desconhecimento de possibilidades de uso didático e a escassez de propostas nos livros didáticos de atividades a serem desenvolvidas junto aos estudantes são outros motivos que inibem professores de usarem esse recurso para fins de aprendizado dos estudantes.

Essa relutância ao uso de máquinas que fazem o trabalho antes feito apenas mentalmente não parte apenas dos professores, mas da crença geral do nosso povo de que o bom aluno de matemática é aquele que consegue fazer cálculos mentais (as quatro operações) rápidos e de forma correta. Pais de alunos e a população em geral vêem com certo preconceito a calculadora, acreditando, de certa forma, que o uso dela tornará fácil algo tradicionalmente difícil, porém necessário à vida.

Na realidade, no seu dia-a-dia, o cidadão comum é obrigado a lidar com problemas reais com números que, em geral, são “mal-comportados”, isto é, de difícil e demorado cálculo mental ou manual. Como exemplo, consideremos que uma pessoa que irá comprar um carro financiado pela taxa de 1,27% ao mês em 48 vezes. Essa pessoa, ao decidir se realiza ou não a compra, certamente adotará uma das seguintes opções: ou verifica o cálculo feito pelo vendedor da loja usando uma calculadora ou simplesmente confia no valor apresentado para as parcelas. Dificilmente alguém, mesmo sendo um profissional de nível superior da área de ciências exatas, fará um cálculo como esse usando apenas os velhos lápis e papel.

Diferentemente disso, vê-se na escola uma forçada adaptação da realidade para que os cálculos sejam feitos com números “bem-comportados”. Embora alguns livros didáticos já apresentem problemas onde se recomenda o uso de

calculadoras, a maioria dos livros formula problemas irreais, com o objetivo de tornar a resolução menos desagradável, com números que tornem os cálculos mais simples. Um exemplo disso é o estudo da trigonometria que se dá normalmente no 9º ano de escolaridade do ensino fundamental. Na grande maioria dos problemas, os triângulos retângulos só apresentam ângulos de 30°, 45° ou de 60° (além do de 90°), pois são aqueles que apresentam os valores mais simples para seno, cosseno e tangente. Essa adaptação deixa na cabeça dos alunos a seguinte pergunta: e se o ângulo for outro, diferente desses? Tal problema poderia ser evitado se o aluno dispusesse de uma calculadora, que o habilitaria a realizar o cálculo para quaisquer valores de ângulo.

Nos Estados Unidos, as calculadoras gráficas começaram a ser utilizadas em escolas no ensino médio há mais de vinte anos (DOERR & ZANGOR, 2000). O documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), recomenda o uso de calculadoras gráficas para oferecer aos estudantes novas abordagens, tais como a utilização de múltiplas representações para a investigação de ideias matemáticas.

Em Portugal, desde o início dos anos oitenta o uso de calculadoras é recomendado para o ensino de matemática. O documento Programa de Matemática do Ensino Básico (PONTE, et al., 2007) reforça essa tendência:

*“Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados.”*

No Brasil, vê-se com bons olhos a iniciativa de se incentivar o uso de computadores nas escolas, com argumento de assim poder preparar melhor as crianças para o mundo adulto, além de ser uma importante ferramenta de pesquisa, tornando a pesquisa em bibliotecas algo do passado. No entanto, quando se fala em usar a calculadora não se nota o mesmo entusiasmo, embora o investimento necessário seja muitíssimo menor.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, (BRASIL, 1998), classifica a calculadora como uma “tecnologia de comunicação” e incentiva o seu uso em sala de aula, conforme o texto a seguir:

*“Quanto ao uso da calculadora, constata-se que ela é um recurso útil para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação. A calculadora favorece a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução de situações-problema, pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos. Assim elas podem ser utilizadas como eficiente recurso para promover a aprendizagem de processos cognitivos.”*(BRASIL, 1998)

O documento “Orientações Curriculares para o Ensino Médio” (BRASIL, 2006) também mostra a importância da tecnologia no ensino da matemática:

*“Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.”* (BRASIL, 2006)

## 1.2.

### O uso de calculadoras gráficas em escolas internacionais

Um dos membros do grupo que elaborou este trabalho, Alan, é professor da Escola Britânica (*The British School of Rio de Janeiro*). É uma escola credenciada pelo CIS (*Council of International Schools*), ou seja, é uma escola denominada internacional. Existem, atualmente, em diversos países, escolas internacionais bilíngües, onde as aulas são ministradas no idioma inglês, com o principal objetivo de preparar os alunos para que possam ter condições de estudar em qualquer universidade do mundo. Para poder alcançar esse objetivo, o currículo escolar segue dois programas internacionais: o IGCSE (*International General Certificate of Secondary School*) e o IB (*International Baccalaureate*).

O primeiro é coordenado pela Universidade de Cambridge, na Inglaterra. Após dois anos de preparação (9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio), os alunos são submetidos a exames de todas as disciplinas, onde recebem conceitos de A até F. Confere-se o certificado ao aluno que for aprovado com o conceito mínimo C.

O segundo, também com dois anos de duração (2º e 3º anos do ensino médio), é coordenado pelo IBO (*International Baccalaureate Organization*), um órgão especializado em educação internacional, situado em Cardiff, País de Gales. Neste, o aluno estuda algumas disciplinas em caráter obrigatório (dentre elas a Matemática) e elege um conjunto de disciplinas com vistas a sua preparação para a Universidade. Ao final do curso, o aluno realiza exames das disciplinas que estudou, e em caso de aprovação, recebe um diploma e uma pontuação que, se for expressiva, o habilita a estudar em qualquer uma das diversas universidades do mundo que aceitam o IB como uma referência acadêmica.

O IB oferece matemática aos alunos em dois níveis: *Higher Level* e *Standard Level*, este último com duas opções, chamadas *Standard Level* e *Standard Level Studies*. Dessa forma, são três cursos com programas distintos. O curso *Higher Level* visa preparar os alunos para os cursos superiores na área de exatas, por isso assuntos como cálculo diferencial e integral, probabilidades e geometria analítica são estudados de forma aprofundada. Já os outros dois cursos têm por objetivo preparar os alunos para os cursos superiores das demais áreas, e,

embora estudem assuntos como cálculo diferencial e integral, o fazem de forma superficial.

Tanto no IGCSE como no IB, o aluno é preparado para dois tipos de exames de matemática: um sem auxílio da calculadora e outro em que aluno é avaliado, dentre outras coisas, na capacidade de usar uma calculadora gráfica como a da Figura 1 para a resolução de problemas. Em todos os exames, as questões são discursivas, nunca objetivas. No entanto, quando as questões podem ser resolvidas com o auxílio da calculadora, não é necessário indicar como o resultado foi obtido nem a sequência de teclas que foi utilizada. Basta apenas escrever o resultado. Em alguns casos, o aluno pode fazer os cálculos manualmente, mas, em geral, o tempo gasto é muito maior.

Na verdade, existem no mercado diversos modelos de diferentes fabricantes (Casio, Texas Instruments, HP, dentre outras), mas apenas alguns desses modelos podem ser utilizados. De um modo geral, as calculadoras gráficas que possuem CAS (*Computer Algebra System*) não podem ser utilizadas em exames porque são dotadas de um sistema que permite o trabalho com expressões simbólicas. Por exemplo, estas calculadoras são capazes de simplificar equações, encontrar a expressão para a derivada de uma função, dentre outras possibilidades.



**Figura 1**

Apesar de ser normalmente chamada “calculadora gráfica”, esta máquina não se restringe apenas a desenhar gráficos. Com ela, diversos cálculos matemáticos podem ser feitos, tais como operações com matrizes, cálculos de determinantes, cálculos de estatística, probabilidades, sequências de números reais, operações com números complexos, resolução de equações, planilhas eletrônicas, etc.

Em um estudo publicado em 2006, Idris encoraja o uso de calculadoras gráficas em razão das possibilidades que elas oferecem:

*“The use of TI-84 Plus graphing calculators is one of the avenues that can inject new excitement and enthusiasm into the mathematics teaching and learning process. One of the important criteria is that mathematics encourages logical thinking among students. Graphing calculator has the ability to draw and analyze graphs, carry out complex computations, numerically solve equations, perform matrix arithmetic, statistical analysis and plotting a graph.” (IDRIS, 2006)*

Na Escola Britânica, cada aluno deve possuir sua própria calculadora a partir do 9º ano de escolaridade, sendo parte de seu material para as aulas de matemática. Em geral, os alunos têm grande interesse em aprender usar a calculadora. Quando algum novo assunto está sendo estudado, é comum a pergunta: “Como se faz isso na calculadora?”. Ainda assim, é preciso dizer que nem todos usam a calculadora com grande interesse. Alguns perguntam: “Como vou fazer no vestibular?”.

### 1.3. O objetivo deste trabalho

O principal objetivo deste trabalho é avaliar o desempenho de alunos brasileiros de ensino médio de uma escola pública com relação ao uso de calculadoras gráficas em uma aula de matemática. São estes alunos capazes de usar a calculadora com desembaraço? O uso da calculadora pode aumentar o interesse nas aulas de matemática? A matemática pode ficar mais fácil de ser entendida? Estas são algumas das perguntas que procuraremos responder.

Para tanto, atividades relacionadas aos assuntos que estavam sendo estudados foram desenvolvidas com turmas do 2º e 3º anos do ensino médio do Colégio Estadual Miguel Couto, situado na cidade de Duque de Caxias, onde outro membro do grupo que elaborou este trabalho, Cassio, é professor. É uma escola pequena, com poucas salas de aula, mas que se encontra em ótimas condições de funcionamento. As turmas de ensino médio estudam no turno da noite, com poucos alunos fora da faixa etária considerada normal.

Um conjunto de doze calculadoras gráficas foi cedido pela Escola Britânica, permitindo que os alunos trabalhassem em duplas e, em alguns poucos casos, em grupos de três. As orientações para atividades foram conduzidas pelos membros do grupo com o auxílio do *software TI-SmartView*, da Texas Instruments (Figura 2), que é um emulador da calculadora gráfica TI-84. O colégio dispõe de um projetor multimídia e, assim, os alunos puderam visualizar os procedimentos para aprender a usar a calculadora.

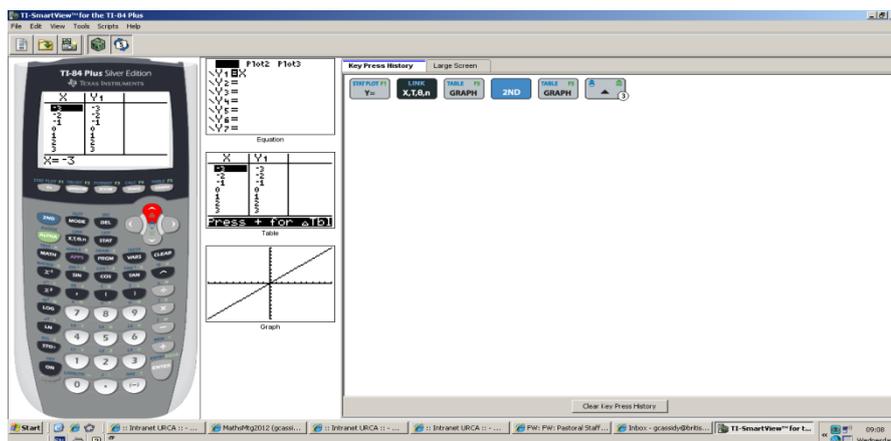


Figura 2

No endereço eletrônico <http://calculadorasgraficas.shutterfly.com>, podem ser vistos mais detalhes das atividades desenvolvidas no Colégio Estadual Miguel Couto, bem como fotos e outras informações importantes sobre o uso de calculadoras gráficas em sala de aula.

## 2

### Possibilidades de uso da calculadora gráfica<sup>2</sup>

O uso da calculadora gráfica, dadas as suas potencialidades, altera de modo significativo os métodos de ensino e, conseqüentemente, a forma como os estudantes aprendem matemática. Segundo Dick (1992), em muitas situações, o uso recorrente de lápis e papel em detrimento ao uso da calculadora gráfica traz várias desvantagens:

- tempo gasto de forma desnecessária com cálculos longos e que poderia ser aproveitado para a realização de atividades mais importantes, tais como a exploração e a compreensão de novos conceitos;
- monotonia na repetição de passos, provocando desmotivação nos alunos que já dominam o assunto e o desinteresse daqueles que percebem que nunca dominarão os processos de resolução, mesmo que os professores os incentivem; e
- formação da opinião de que a Matemática não passa de um conjunto de regras mágicas e fórmulas a serem aplicadas em situações pré-estabelecidas.

Com isso, é fundamental que os professores conheçam as potencialidades e também as limitações desse recurso. Seguem abaixo alguns exemplos de possibilidades de uso da calculadora gráfica. Na maioria dos casos, os principais benefícios são o *alívio da carga de operacionalização e conferência/comparação/confronto de resultados obtidos por outros procedimentos de cálculo* (BORBA & SELVA, 2009).

1. *Operações com números complexos*: suponha que o cálculo a ser

realizado seja  $\frac{17 + 3i}{1 - 2i}$ . Utilizando a calculadora gráfica obtemos

---

<sup>2</sup> Em colaboração com Cassio Roberto Machado Benite

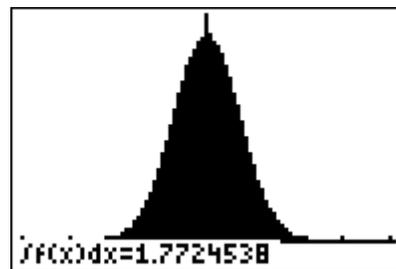
(17+3i)/(1-2i)  
2.2+7.4i

2. Análise combinatória: o valor de  $C_{19}^8$  pode ser facilmente obtido.

19 nCr 8  
75582

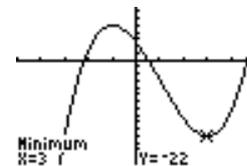
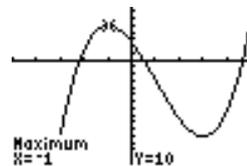
3. Integrais definidas: o valor de  $\int_{-4}^4 e^{-x^2} dx$ , que não pode ser facilmente obtido com “lápiz e papel”.

Plot1 Plot2 Plot3  
Y1 = e<sup>-x<sup>2</sup></sup>



4. Pontos de máximo e mínimo de uma função: quais os pontos de máximo e mínimo da função  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ?

Plot1 Plot2 Plot3  
Y1 = X<sup>3</sup> - 3X<sup>2</sup> - 9X + 5



Estes são apenas alguns exemplos, mas as possibilidades são inúmeras. Assim, além de mudanças na forma como se ensina matemática, o uso da calculadora gráfica modifica a forma como os alunos são avaliados. As questões devem ser elaboradas de forma inteligente e criativa, verificando se o aluno

conhece os conceitos estudados e se consegue escolher uma estratégia adequada para a resolução do problema, incluindo aí os recursos da calculadora.

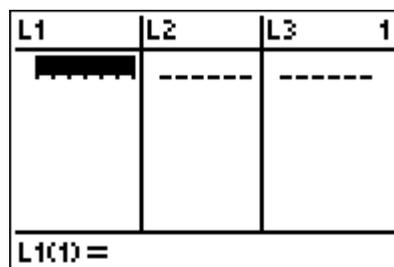
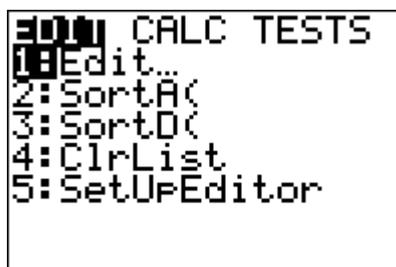
Os exames do IB, ao longo de vários anos, têm dado vários exemplos de questões interessantes. Como exemplo, consideremos a 2ª questão do exame do IB *Standard Level Studies*, de maio de 2011:

“2. A tabela abaixo mostra a distribuição de frequência do número de obturações dentárias em um grupo de 25 crianças.

Número de obturações	0	1	2	3	4	5
Frequência	4	3	8	$q$	4	1

- (a) Ache o valor de  $q$ . [2 pontos]
- (b) Use sua calculadora gráfica para encontrar
- (i) a média aritmética do número de obturações;
  - (ii) a mediana do número de obturações;
  - (iii) o desvio-padrão do número de obturações. [4 pontos]”

Para encontrar a resposta da parte (a), é óbvio que o resultado pode até ser encontrado mentalmente, nesse caso  $q = 5$ . Não seria necessário usar a calculadora para isso. Para encontrar as respostas da parte (b), é esperado que o aluno utilize os recursos da calculadora gráfica. Para essa questão, por exemplo, é preciso que se armazenem os dados da tabela na calculadora apertando, inicialmente, a tecla “STAT” e, em seguida, a tecla “1” para selecionar “Edit”.



Assim, inserindo os valores referentes aos números de obturações na lista  $L_1$  e os valores relativos às frequências na lista  $L_2$ , a calculadora mostrará a seguinte tela:

L1	L2	L3	Z
0	4	-----	
1	2		
2	1		
3	1		
4	1		
5	1		
-----	-----		
L2(?) =			

Agora, pressionando novamente “STAT” e selecionando o menu “CALC”, basta apertar a tecla “1” para escolher “1-Var Stats”.

```

EDIT  [MODE] TESTS
[1] 1-Var Stats
[2] 2-Var Stats
[3] Med-Med
[4] LinReg(ax+b)
[5] QuadReg
[6] CubicReg
[7] QuartReg
  
```

```

1-Var Stats L1,L
Z
  
```

Por fim, informando as listas  $L_1$  e  $L_2$ , nessa ordem, e pressionado a tecla “ENTER”, os resultados dos cálculos aparecem na tela. Pressionando as setas direcionais para baixo, é possível ver todos os resultados procurados.

```

1-Var Stats
x̄=2.2
Σx=55
Σx²=169
Sx=1.414213562
σx=1.385640646
↓n=25
  
```

```

1-Var Stats
↑n=25
minX=0
Q1=1
Med=2
Q3=3
maxX=5
  
```

A média aritmética é dada por  $\bar{x} = 2,2$ , o valor da mediana é dado por  $Med = 2$  e o desvio-padrão é dado por  $\sigma_x = 1,39$ , arredondado com 3 algarismos significativos.

É claro que esta questão poderia ser resolvida com lápis e papel e com um pouco de paciência. No entanto, sabe-se que no mundo real o fator tempo é importantíssimo. A questão acima é apenas um exemplo, mas se a tabela tivesse mais entradas e se os números fossem maiores, o cálculo com lápis e papel seria inviável. Além disso, o aluno tem 90 minutos para fazer o exame do qual esta questão fazia parte, cujo valor total é de 90 pontos. Assim, o aluno tem 1 minuto, em média, para cada ponto do exame, o que mostra que os alunos são avaliados na capacidade de utilizar a tecnologia de forma eficiente.

Vejamos agora outra questão onde o uso da calculadora é necessário. É a 7ª questão do exame do IB *Standard Level*, de maio de 2010:

“7. Evan gosta de jogar dois jogos azar, A e B.

No jogo A, a probabilidade de Evan vencer é 0,9. Ele joga o jogo A sete vezes.

(a) Ache a probabilidade de Evan vencer exatamente quatro jogos.

[2 pontos]

No jogo B, a probabilidade de Evan vencer é  $p$ . Ele joga o jogo B sete vezes.

(b) Escreva uma expressão, em termos de  $p$ , para a probabilidade de Evan vencer exatamente quatro jogos.

[2 pontos]

(c) Logo, ache os valores de  $p$  tais que a probabilidade de Evan vencer exatamente 4 jogos é 0,15.

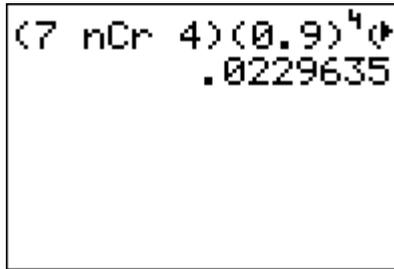
[3 pontos]”

Para a resolução da parte (a) desta questão, basta observar que a probabilidade procurada é dada por

$$p = \binom{7}{4} (0,9)^4 (0,1)^3,$$

por tratar-se de uma distribuição binomial. Neste caso, a calculadora serve apenas para encontrar o valor da probabilidade na forma decimal de forma rápida, com apenas uma linha de cálculo, sem a necessidade de cálculos intermediários. O valor da probabilidade, 0,0230 com três algarismos significativos, dá uma ideia

das chances de ocorrência do evento, que neste caso são bem pequenas. Sem a calculadora, este cálculo tomaria um tempo considerado do aluno.



$$\binom{7}{4}(0.9)^4 = .0229635$$

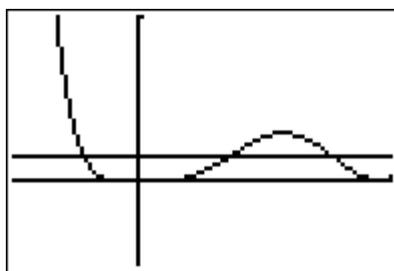
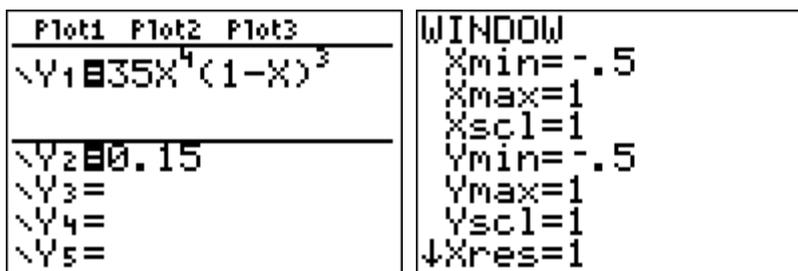
A parte (b) aproveita o raciocínio utilizado na parte (a), com o intuito de conduzir o aluno à correta resolução da parte (c). Por razões óbvias, não é preciso usar a calculadora para saber que a resposta da parte (b) é

$$\binom{7}{4}p^4(1-p)^3 = 35p^4(1-p)^3.$$

Portanto, na parte (c) os valores de  $p$  são dados pelas soluções positivas da equação

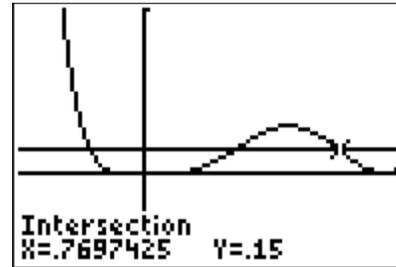
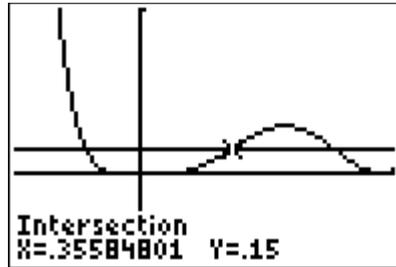
$$35p^4(1-p)^3 = 0,15,$$

que é de difícil resolução manual. Em situações como esta, o método de resolução gráfica é utilizado. Sabemos que, sendo  $p$  o valor de uma probabilidade, o seu valor deve estar entre 0 e 1. Assim, inserindo as duas expressões na calculadora e escolhendo uma janela adequada, as telas abaixo são obtidas.



As abscissas dos pontos de interseção são as soluções procuradas. Nesta questão, o aluno deve perceber que a resposta negativa deve ser desprezada, pois probabilidades não podem ser negativas. O próximo passo é encontrar estes valores de  $p$  através do comando “intersect”.

```
WALDO@12  
1:value  
2:zero  
3:minimum  
4:maximum  
5:intersect  
6:dy/dx  
7:∫f(x)dx
```



Logo, os valores de  $p$  são 0,356 e 0,770.

### 3

## O uso da calculadora gráfica no 2º ano do ensino médio<sup>3</sup>

No momento em que foi realizada a atividade, os alunos já tinham estudado operações com matrizes e cálculo de determinantes. Estavam aprendendo resolução de sistemas lineares pela regra de Cramer. De acordo com o professor da turma, Cassio, os alunos apresentam grandes dificuldades na realização de cálculos envolvendo várias operações, como o cálculo do determinante de uma matriz  $3 \times 3$ , por exemplo. Dessa forma, poucos alunos conseguem resolver corretamente um sistema linear de três equações e três incógnitas. Os alunos até entendem a sequência de cálculos que devem ser feitos, porém cometem erros que comprometem o resultado final. Estes erros ocorrem, em geral, por confundirem as regras de operações com números positivos e negativos.

Cada aluno recebeu uma cópia da atividade abaixo. Neste caso, os alunos foram estimulados a usar a matemática como ferramenta para entender a tecnologia. Os exercícios propostos tinham como objetivo levar os alunos a entender o funcionamento da calculadora. Por exemplo, a soma de duas matrizes é algo simples de ser feita sem calculadora, por isso é fácil verificar se o que foi feito na calculadora está correto.

Após a explicação básica, os alunos fizeram os exercícios propostos e anotaram as respostas.

---

<sup>3</sup> Em colaboração com Cassio Roberto Machado Benite

### Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes

#### Inserindo matrizes na calculadora

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, apertamos a tecla **MATRIX**.

```

NAME: MATH EDIT
1: [A]
2: [B]
3: [C]
4: [D]
5: [E]
6: [F]
7↓ [G]

```

Em seguida, movemos com as setas direcionais até o menu EDIT e apertamos a tecla 1 ou simplesmente **ENTER** para selecionar a matriz  $A$ . A seguinte tela surgirá:

```

MATRIX[A] 1 ×1
[ 0      1

```

Devemos, inicialmente, inserir a ordem da matriz, isto é, o número de linhas e o número de colunas. Com isso, podemos inserir os elementos da matriz.

```

MATRIX[A] 2 ×2
[ 7      2      1
[ 3      6      1

2, 2=1

```

Agora, fazemos o mesmo para as demais matrizes.

Fazendo operações com matrizes

Vamos fazer as seguintes operações com as matrizes que foram armazenadas na calculadora:

a)  $A + B$

Para fazer esta operação, precisamos “chamar” as matrizes para a tela de cálculo.

Toda vez que for preciso ir para a tela de cálculo, pressionamos as teclas **2ND** e **MODE**.

Pressionando a tecla **MATRIX**, a seguinte tela aparecerá:

```

MATH EDIT
1: [A]  2x2
2: [B]  2x2
3: [C]  3x2
4: [D]  2x3
5: [E]  3x3
6: [F]
7↓ [G]
  
```

Basta pressionar a tecla 1 para “chamar” a matriz  $A$ . Em seguida, pressionamos a tecla **+** e

fazemos o mesmo procedimento para “chamar” a matriz  $B$ . Ao apertarmos a tecla **ENTER**,

o resultado aparecerá na tela

```

[A]+[B]
[[3 -1]
 [9 5 1]]
  
```

Tente agora fazer os seguintes cálculos:

- b)  $A - B$
- c)  $3A - 4B$
- d)  $AB$
- e)  $CB$
- f)  $DE$
- g)  $A^2$
- h)  $A^{-1}$ , a inversa de  $A$
- i)  $E^{-1}$
- j)  $E^{-1}C$
- k)  $\det A$
- l)  $\det E$

Soluções de Sistemas Lineares

Vamos utilizar a calculadora gráfica para resolver o seguinte sistema linear:

$$2x + y + z = 4$$

$$3x - 2y - z = 3$$

$$x + 5y + 2z = -1$$

1) *Pela Regra de Cramer*

Vamos, inicialmente, calcular o determinante da matriz  $D$ , a matriz dos coeficientes.

```

MATRIX[ $D$ ] 3  $\times$  3
[[ 2   1   1 ]
 [ 3  -2  -1 ]
 [ 1   5   2 ]
]
det( $D$ )
12

```

Como  $\det D \neq 0$ , o sistema tem solução única.

Modificando essa matriz, podemos calcular os determinantes  $D_x$ ,  $D_y$  e  $D_z$ .

Com isso, descobrimos os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

2) *Pelo método do escalonamento*

Inserimos agora a matriz do sistema linear.

```

MATRIX[ $D$ ] 3  $\times$  4
[[ 2   1   1  - ]
 [ 3  -2  -1  - ]
 [ 1   5   2  - ]
]

```

Utilizamos o comando **rref()** no menu MATH:

```

NAMES MATH EDIT
8:Matr>list(
9:List>matr(
0:cumSum(
A:rref(
B:rref(
C:rowSwap(
D:row+(
rref( $D$ )
[[ 1  0  0  1 ]
 [ 0  1  0 -2 ]
 [ 0  0  1  4 ]
]

```

Assim, a solução do sistema é  $x=1$ ,  $y=-2$  e  $z=4$ .

Resolva os seguintes sistemas lineares:

$$17x + 11y + 25z = 31$$

$$-8x + 26y + 14z = -12$$

$$13x - 19y - 7z = 63$$

$$0,2x + 0,29y - 0,33z = -0,77$$

$$1,4x - 2,1y - 0,11z = 8,99$$

$$-1,75x + 0,6y + 0,97z = -4,33$$

$$3a + 2b - 5c + 8d = -91$$

$$a - 7b + 9c - 6d = 254$$

$$5a - 16b + c - 25d = 180$$

$$-8a + 21b + 2c + 18d = -193$$

## 4

### O uso da calculadora gráfica no 3º ano do ensino médio<sup>4</sup>

De acordo com o professor da turma, Cassio, o assunto de geometria analítica “a equação da reta” estava em seu início. Apesar de ser um assunto também estudado no 1º ano do ensino médio, quando são estudadas as funções afins, é bastante comum que os alunos não lembrem as idéias básicas.

Neste caso, temos um exemplo do uso da tecnologia como ferramenta para aprender matemática. É claro que é preciso saber manipular a calculadora para inserir funções, obter tabelas e respectivos gráficos na tela, mas o principal objetivo da atividade é entender a influência dos coeficientes angular e linear. Cada aluno recebeu uma cópia da atividade e fez os exercícios propostos. Após a explicação, os membros do grupo de trabalho, Alan e Cassio, foram até as duplas, ajudando quando necessário.

---

<sup>4</sup> Em colaboração com Cassio Roberto Machado Benite

**Funções Afins**

O objetivo deste assunto é investigar funções da forma  $y = mx + c$ .

**Objetivos conceituais**

Ao final desse assunto, você deverá ser capaz de:

- ✓ descrever e esboçar o gráfico de uma função afim observando a sua equação;
- ✓ calcular o coeficiente angular e o coeficiente linear de uma função afim;
- ✓ entender a influência dos valores de  $m$  e  $c$  no gráfico de uma função afim.

**Objetivos do uso da calculadora**

Ao final desse assunto, você deverá ser capaz de:

- ✓ fazer o gráfico de uma função usando a tecla  $[Y=]$ ;
- ✓ modificar as configurações da calculadora apropriadamente;
- ✓ obter uma tabela de valores usando a tecla  $[TABLE]$ .

Atividade

- a) Utilizando a sua calculadora, obtenha valores de  $y$  para as tabelas, seguindo as instruções abaixo.

Pressione a tecla  $[Y=]$ , insira a função em “Y<sub>1</sub>”.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
    
```

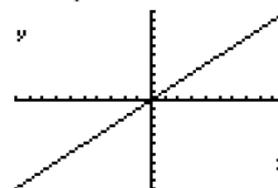
Em seguida, aperte as teclas  $[2nd]$  e  $[TABLE]$ .

X	Y <sub>1</sub>
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7

X=0

- b) Desenhe os gráficos no sistema de eixos, utilizando cores diferentes para cada um.

Aperte a tecla  $[GRAPH]$  para verificar se o gráfico que você obteve está correto.



- c) Calcule o coeficiente angular de cada função.  
 d) Anote o valor onde o gráfico corta o eixo dos  $y$ .

1)  $y = x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

2)  $y = 2x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

3)  $y = 3x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

4)  $y = 1/2x$

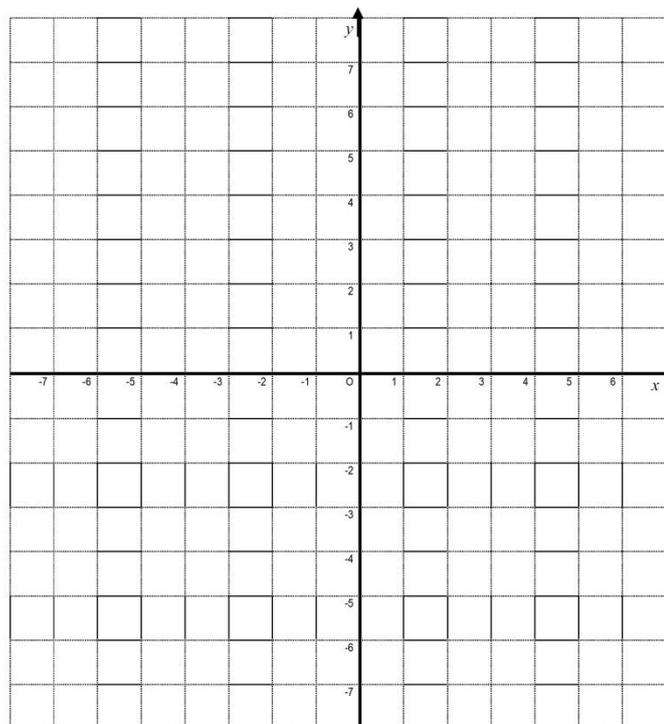
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  $\dots\dots\dots$

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  $\dots\dots\dots$

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  $\dots\dots\dots$

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  $\dots\dots\dots$



- a) O que aconteceu com os gráficos das funções? Que alterações podem ser observadas?
- b) Quanto maior o valor de  $m$ , maior a  $\dots\dots\dots$  da reta.

5)  $y = -x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

6)  $y = -2x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

7)  $y = -3x$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

8)  $y = -1/2x$

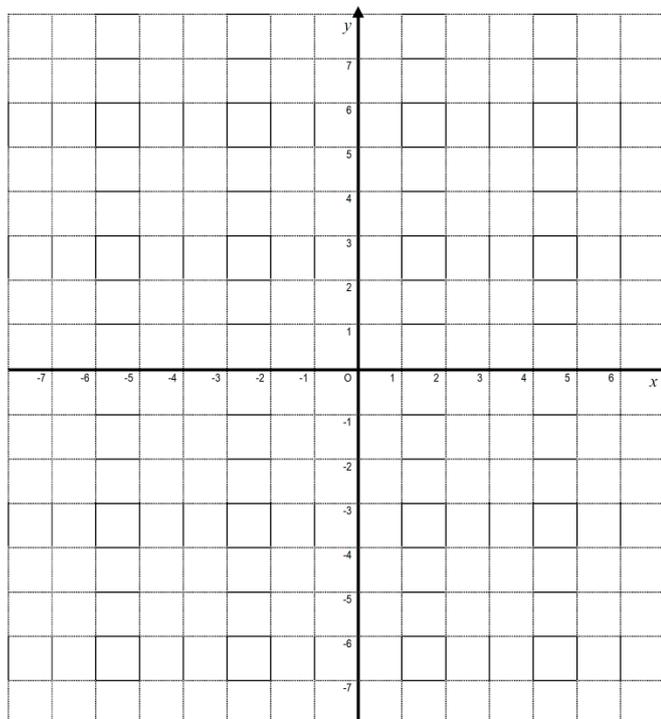
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....



a) O que aconteceu com os gráficos das funções? Que alterações podem ser observadas?

b) Qual a principal diferença entre as retas 1, 2, 3 e 4 e as retas 5, 6, 7 e 8?

9)  $y = x + 2$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

10)  $y = x + 4$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

11)  $y = x - 3$

x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

12)  $y = -5 + x$

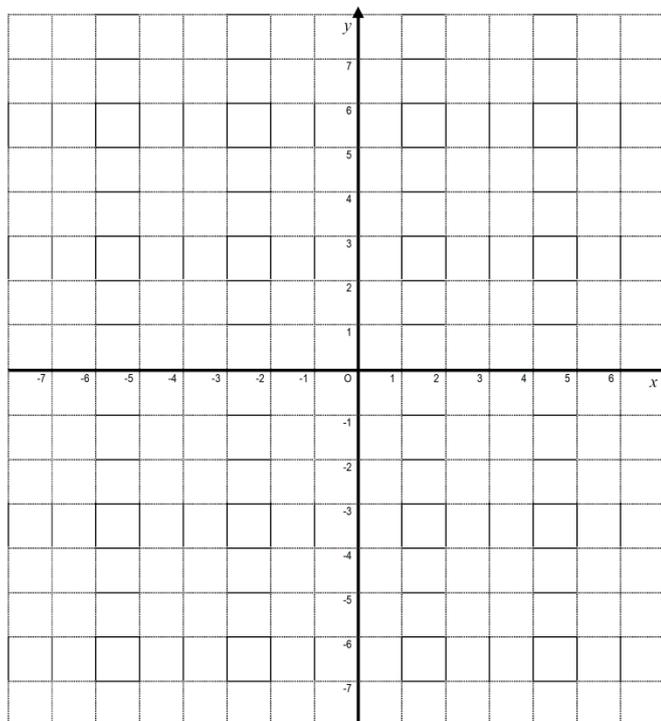
x	y
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y em  
 .....

Coefficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Corta o eixo dos y  
 em.....



a) O que aconteceu com os gráficos das funções? Que alterações podem ser observadas?

b) De que forma o coeficiente linear está relacionado com o gráfico da função?

Tente, agora, desenhar os gráficos das funções abaixo sem usar as tabelas. Use a calculadora para verificar se suas respostas estão certas.

13)  $y = 2x + 3$

14)  $y = -2x + 3$

15)  $y = 3x - 4$

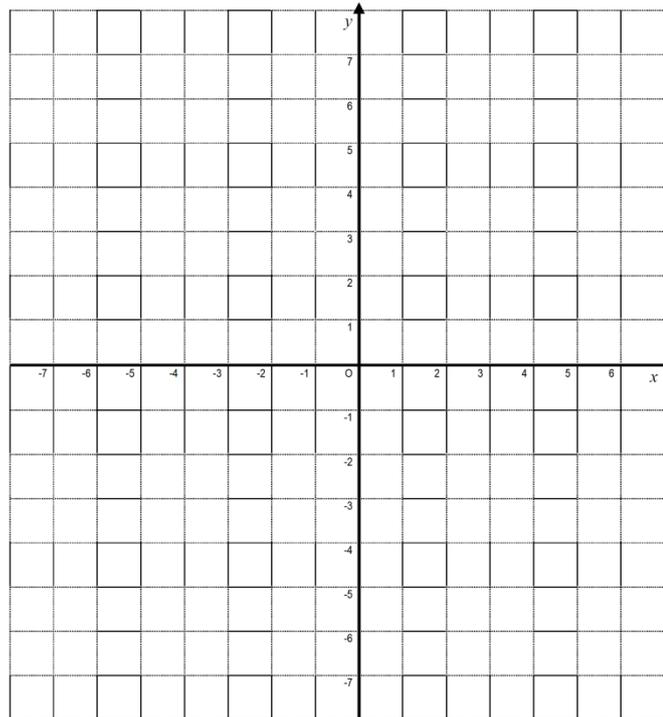
16)  $y = 4 - x$

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Coeficiente linear:  
 $c = \dots\dots\dots$

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Coeficiente linear:  
 $c = \dots\dots\dots$

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Coeficiente linear:  
 $c = \dots\dots\dots$

Coeficiente angular:  
 $m = \dots\dots\dots$   
 Coeficiente linear:  
 $c = \dots\dots\dots$



## 5

### Uma aula na Escola Britânica com calculadoras gráficas<sup>5</sup>

Para que o professor Cassio pudesse observar de que forma a calculadora gráfica é utilizada no cotidiano da Escola Britânica, o mesmo foi convidado a assistir uma das aulas de uma turma do 2º ano do ensino médio do professor Alan. Na ocasião, a turma estava estudando cálculo diferencial e a aula foi sobre derivadas de funções circulares.

Cabe aqui esclarecer que o IB oferece três cursos distintos de matemática: *Higher Level*, *Standard Level* e *Standard Level Studies*. O curso *Higher Level* visa preparar os alunos para os cursos superiores na área de exatas, por isso assuntos como cálculo diferencial e integral são estudados de forma aprofundada. Já os outros dois cursos têm por objetivo preparar os alunos para os cursos superiores das demais áreas, e, embora estudem assuntos como cálculo diferencial e integral, o fazem de forma superficial.

Em geral, as turmas de *Higher Level* são pequenas, com no máximo dez alunos, enquanto as demais não passam de dezesseis. Todos os alunos possuem sua própria calculadora e devem trazê-la para as aulas de matemática. O professor Cassio assistiu uma aula de uma turma de *Higher Level*, na qual nove dos dez alunos estavam presentes.

O objetivo inicial da aula foi mostrar que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ . De acordo com o programa do curso, os alunos precisam conhecer esse resultado e saber utilizá-lo em situações diversas, como por exemplo, mostrar que a derivada da função seno é a função cosseno. No entanto, não precisam mostrar esse resultado formalmente. Assim, a aula se iniciou com uma atividade proposta pelo livro texto utilizado pelos alunos, que pode ser vista abaixo em português, com a finalidade de chegar ao resultado acima mencionado intuitivamente, com o auxílio de diferentes opções presentes na calculadora gráfica.

---

<sup>5</sup> Em colaboração com Cassio Roberto Machado Benite

Também aqui foi utilizado o software *SmartView*, da Texas Instruments, para auxiliar na discussão da atividade proposta.

### Investigação

Examinando o valor de  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  próximo de zero

Esta investigação busca verificar o comportamento de  $\frac{\sin \theta}{\theta}$ , onde  $\theta$  é um valor próximo de zero, graficamente, numericamente e geometricamente. ( $\theta$  em radianos)

- 1) Mostre que  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$  é uma função par. Qual o significado geométrico?
- 2) Como  $\theta$  é par, basta examinarmos  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  para  $\theta$  positivo.
  - a) Qual é o valor de  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  quando  $\theta = 0$ ?
  - b) Usando uma calculadora gráfica, faça o gráfico de  $y = \frac{\sin \theta}{\theta}$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .
  - c) Explique por que o gráfico indica que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ .
- 3) Copie e complete a tabela, usando sua calculadora.

$\theta$	$\sin \theta$	$\frac{\sin \theta}{\theta}$
1		
0,5		
0,1		
0,01		
0,001		

## 6

### A análise das experiências

Sou professor da rede pública de ensino desde 2003 e da Escola Britânica desde fevereiro de 2006. Em 2007, fui designado para ser professor de uma turma de 2º ano do ensino médio da Escola Britânica, e, assim, precisei aprender a usar a calculadora gráfica para poder ensinar. Assim, minha análise das atividades desenvolvidas no Colégio Estadual Miguel Couto é influenciada pelos seis anos de experiência em salas de aula em que o uso de calculadoras gráficas é parte do cotidiano.

Inicialmente, enquanto arrumávamos o equipamento para as aulas no Colégio Estadual Miguel Couto, observei os alunos chegando. Todos eram muito educados e mostravam um bom relacionamento com o professor Cassio. Pude observar também que a grande maioria chegava com um aparelho celular nas mãos, muitas vezes enviando e recebendo mensagens de texto, acessando a internet, etc. Não pude deixar de notar também que muitos conversavam sobre o *Facebook*. Ou seja, pude perceber que são alunos que estão “conectados”, que têm contato com tecnologia em seu dia-a-dia.

Com relação à atividade desenvolvida na turma de 2º ano de ensino médio, fiquei positivamente surpreso com a reação e o desempenho dos alunos. Talvez por ser uma novidade, todos estavam muito atentos e seguindo as instruções dadas por nós. Os erros e dúvidas foram as mesmas que os alunos na Escola Britânica têm ao iniciar o uso da calculadora. Por exemplo, a calculadora possui duas teclas para o sinal de “menos”, a tecla “(-)” para números negativos e a tecla “-” para subtrações. Nós explicamos essa distinção, mas, mesmo assim, é comum que os alunos não estejam atentos e cometam erros. Durante as atividades propostas, nós andamos entre os alunos, ajudando quando necessário. Algumas duplas conseguiram fazer todos os exercícios, sem praticamente pedir ajuda alguma. Outros, após uma pequena ajuda, foram capazes de chegar às respostas corretas. Quando iniciamos o último bloco de exercícios, que era sobre resolução de sistemas lineares pelo método do escalonamento, o sinal tocou, indicando o

término da aula. A aula seguinte da turma era Educação Física, mas todos os alunos, sem exceção, pediram que a aula continuasse para que pudessem terminar a atividade. Fiquei bastante impressionado com essa atitude, o que mostra o alto nível de interesse pelo assunto que o uso da calculadora despertou. Assim, com a devida autorização da professora de Educação Física, demos continuidade por mais vinte minutos, até que todos chegassem ao fim da atividade. Para ser honesto, eu não esperava que os alunos fossem capazes de manipular a calculadora com tamanha facilidade já na primeira vez.

Nesta turma, chamou-me a atenção a aluna K., não só pela sua idade (na faixa dos 50 anos), mas pelo interesse que ela demonstrou e pela pertinência de suas perguntas. Outro aluno, B., esteve sempre à frente dos demais colegas na execução das atividades e fez poucas perguntas, indicando que conseguiu seguir as instruções contidas no roteiro da atividade. Ao final da aula, perguntei ao Cassio sobre o desempenho normal desses alunos nas aulas, pois tive a impressão de serem bons alunos, que aprendem matemática com facilidade. Ele me disse que B. é um aluno que aprende com facilidade e que sempre alcança ótimos resultados em provas e testes, apesar de não ser esforçado e que K. é uma aluna regular, que tem dificuldades em razão da idade avançada e do longo tempo afastada da escola, mas que nesta aula demonstrou interesse acima do normal.

Embora tenha obtido apenas uma resposta errada, considero importante comentar este erro que B. cometeu (Figura 3). Em vez de inserir na calculadora a matriz

$$D = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

provavelmente por falta de atenção inseriu a matriz

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtive como resposta para a operação  $DE$ , exercício letra “F”, a matriz

$$DE = \begin{bmatrix} 10 & -26 & 4 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix},$$

mas, com uma simples conferência, poderia ter verificado que sua resposta estava errada, e que a resposta correta seria

$$DE = \begin{bmatrix} 4 & -32 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Handwritten mathematical work showing various determinants and a system of equations:

- b)  $\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$
- c)  $\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -15 & -13 \end{vmatrix}$
- d)  $\begin{vmatrix} -16 & -13 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}$
- e)  $\begin{vmatrix} 22 & 16 \\ -32 & -23 \\ 42 & 28 \end{vmatrix}$
- f)  $\begin{vmatrix} 10 & -26 & 4 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix}$
- g)  $\begin{vmatrix} 55 & 16 \\ 24 & \cancel{4} \end{vmatrix}$
- h)  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \cancel{4} \end{vmatrix}$
- i)  $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \cancel{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$
- j)  $\begin{vmatrix} -\frac{1\cancel{4}}{3} & \frac{59}{6} \\ -\frac{1\cancel{4}}{6} & \frac{19}{6} \\ \frac{9}{2} & -5 \end{vmatrix}$
- k) Determinante  $\frac{1}{6}$
- l) Determinante  $12\cancel{2}$
- ② a)  $\begin{array}{ccc|c} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & x=1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & y=-2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & z=4 \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$

**Figura 3**

Aqui, B. demonstrou que aprendeu a usar a calculadora para multiplicar duas matrizes, mas não conferiu se sua resposta estava certa. Este é um erro comum, a ausência de um simples sinal de menos modificou a resposta. Os números eram suficientemente pequenos para possibilitar uma rápida conferência. Se ele tivesse apenas calculado mentalmente o primeiro elemento da matriz, teria

percebido que algo estava errado. É claro que com matrizes com mais elementos e com números maiores, essa conferência não seria apropriada. Por isso, é importante ter atenção ao inserir dados na calculadora, para que erros dessa natureza não ocorram.

A turma do 3º ano do ensino médio também realizou as atividades com interesse e entusiasmo. Tão logo explicamos o funcionamento básico da calculadora, os alunos iniciaram os exercícios. Também aqui os alunos encontraram as dificuldades comuns de quem usa a calculadora pela primeira vez, mas após algumas tentativas as duplas estavam trabalhando sem dificuldades. Assim que percebemos que todos os alunos terminaram de desenhar os gráficos do primeiro bloco de exercícios (retas que passam pela origem com diferentes coeficientes angulares), fizemos uma discussão com as perguntas propostas. Apesar da timidez (talvez por eu estar conduzindo a discussão e eles não me conhecerem), os alunos deram as respostas esperadas para as perguntas, de forma oral, mas encontravam dificuldades para redigir as respostas. Os blocos de exercícios seguintes foram feitos com maior facilidade e tranquilidade. Ao final de cada bloco, conduzimos as discussões e verificamos que os alunos chegaram às conclusões corretas. Pude perceber nessa atividade que o uso da calculadora conferiu aos alunos bastante *autonomia*. Em alguns momentos, no entanto, ao caminharmos pela sala de aula, percebemos que estavam cometendo algum tipo de erro ou estavam encontrando dificuldades em manipular a calculadora e então foi necessário ajudá-los a entender como deviam proceder. Em aulas desse tipo é importante que o professor esteja andando entre os alunos para verificar se os alunos estão trabalhando corretamente ou se estão precisando de ajuda.

Um dos alunos que teve participação ativa na aula, C., mostrou com suas perguntas e respostas orais que entendeu plenamente a influência dos coeficientes angular e linear. Tive a impressão de que era o melhor aluno da turma. No entanto, o professor Cassio me disse que C. é um aluno pouco interessado nas aulas e que suas notas não são boas. Entendo com isso que a calculadora gráfica atraiu a atenção de um aluno que, em geral, não tem boa participação nas aulas.

No entanto, olhando para o seu trabalho escrito (Figura 4), pode-se verificar que ele cometeu um erro que vale a pena ser comentado, mostrado abaixo.

<p>9) <math>y = x + 2</math></p> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>0</td></tr> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td></tr> </tbody> </table> <p>Coefficiente angular: <math>m = \dots 1 \dots</math> Corta o eixo dos y em <math>\dots 2 \dots</math></p>	x	y	-3	-1	-2	0	-1	1	0	2	1	3	2	4	3	5	4	6	<p>10) <math>y = x + 4</math></p> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td></tr> </tbody> </table> <p>Coefficiente angular: <math>m = \dots 1 \dots</math> Corta o eixo dos y em <math>\dots 4 \dots</math></p>	x	y	-3	1	-2	2	-1	3	0	4	1	5	2	6	3	7	4	8	<p>11) <math>y = x - 3</math></p> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>-6</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-4</td></tr> <tr><td>0</td><td>-3</td></tr> <tr><td>1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p>Coefficiente angular: <math>m = \dots 1 \dots</math> Corta o eixo dos y em <math>\dots -3 \dots</math></p>	x	y	-3	-6	-2	-5	-1	-4	0	-3	1	-2	2	-1	3	0	4	1	<p>12) <math>y = -5 + x</math></p> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>-8</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-7</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-6</td></tr> <tr><td>0</td><td>-5</td></tr> <tr><td>1</td><td>-4</td></tr> <tr><td>2</td><td>-3</td></tr> <tr><td>3</td><td>-2</td></tr> <tr><td>4</td><td>-1</td></tr> </tbody> </table> <p>Coefficiente angular: <math>m = \dots 1 \dots</math> Corta o eixo dos y em <math>\dots -5 \dots</math></p>	x	y	-3	-8	-2	-7	-1	-6	0	-5	1	-4	2	-3	3	-2	4	-1
x	y																																																																										
-3	-1																																																																										
-2	0																																																																										
-1	1																																																																										
0	2																																																																										
1	3																																																																										
2	4																																																																										
3	5																																																																										
4	6																																																																										
x	y																																																																										
-3	1																																																																										
-2	2																																																																										
-1	3																																																																										
0	4																																																																										
1	5																																																																										
2	6																																																																										
3	7																																																																										
4	8																																																																										
x	y																																																																										
-3	-6																																																																										
-2	-5																																																																										
-1	-4																																																																										
0	-3																																																																										
1	-2																																																																										
2	-1																																																																										
3	0																																																																										
4	1																																																																										
x	y																																																																										
-3	-8																																																																										
-2	-7																																																																										
-1	-6																																																																										
0	-5																																																																										
1	-4																																																																										
2	-3																																																																										
3	-2																																																																										
4	-1																																																																										

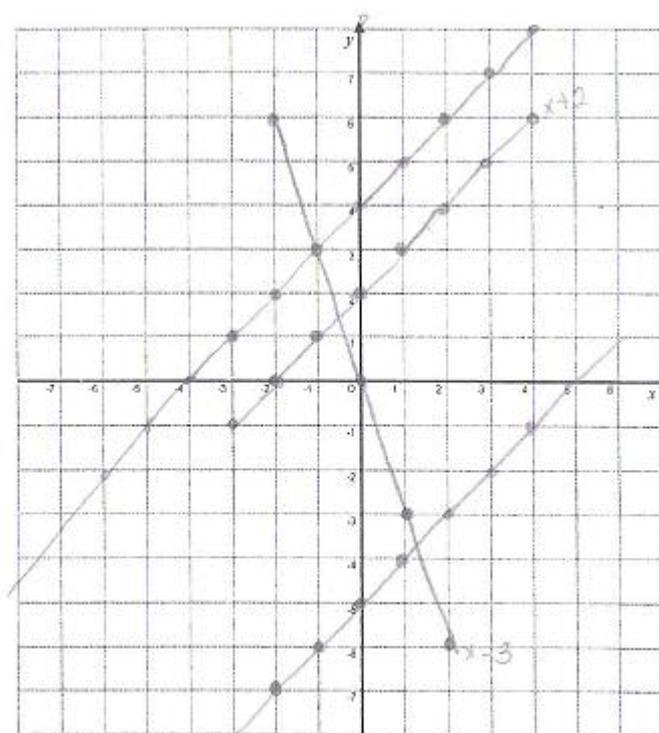


Figura 4

C. não foi capaz de perceber que algo estava errado com um dos gráficos, mesmo tendo dito, oralmente, que linhas paralelas têm o mesmo coeficiente angular. O que ocorreu com este aluno é um dos erros mais comuns ao se utilizar a calculadora gráfica. Ao inserir a função  $y = x - 3$ , C. usou a tecla “(-)”, enquanto a tecla adequada seria “-”. Da forma como ele inseriu a expressão, o gráfico que a calculadora mostrou foi o da função  $y = -3x$ , como se pode observar pela tabela que ele completou. Ele *confiou* na calculadora, talvez

acreditando que a máquina não pudesse “errar”. É importante salientar que muitos alunos, tanto na rede pública como na rede particular de ensino, chegam ao final do ensino médio sem ter desenvolvido um espírito crítico que os torne capazes de questionar resultados que encontram para os problemas que estão resolvendo, quer seja por meios eletrônicos, quer seja por métodos tradicionais como lápis e papel. É importante que o professor faça uso de situações como esta para mostrar aos alunos a necessidade de refletir sobre resultados obtidos em matemática, mesmo que uma calculadora ou um computador esteja sendo utilizado.

Outra aluna, T., foi a primeira a terminar as atividades e desenhou todos os gráficos com perfeição. Percebi que ela era uma das melhores alunas da turma, o que foi confirmado pelo professor dela. Contudo, analisando mais detidamente o último bloco de exercícios (Figura 5), vê-se que, embora ela tenha sido capaz de desenhar os gráficos das funções sem o auxílio da calculadora, ainda parece não entender plenamente o significado dos termos “coeficiente angular” e “coeficiente linear”. T. respondeu que as retas  $y = 2x + 3$ ,  $y = -2x + 3$  e  $y = 3x - 4$  possuem coeficiente angular igual a “2” e, além disso, ela respondeu que a reta  $y = 4 - x$  possui coeficiente linear igual a  $-1$ . Não é possível afirmar com precisão o que a levou a esses erros. Uma possibilidade seria o fato de que nos blocos de exercícios anteriores foram observadas regularidades com respeito aos coeficientes angular e linear, e talvez ela esperasse que o mesmo devesse acontecer neste último bloco. Outra possibilidade pode mesmo ter sido “falta de atenção” por já estar cansada. De qualquer forma, este é um indicativo de que os conceitos “coeficiente angular” e “coeficiente linear” ainda parecem estar confusos, por isso deveriam ser trabalhados com mais detalhes nas aulas posteriores, com diferentes abordagens. Por exemplo, dados gráficos de linhas retas, identificar para cada uma delas os coeficientes angular e linear.

Tente, agora, desenhar os gráficos das funções abaixo sem usar as tabelas. Use a calculadora para verificar se suas respostas estão certas.

13)  $y = 2x + 3$

14)  $y = -2x + 3$

15)  $y = 3x - 4$

16)  $y = 4 - x$

Coefficiente angular:

$m = 2$

Coefficiente linear:

$c = 3$

Coefficiente angular:

$m = -2$

Coefficiente linear:

$c = 3$

Coefficiente angular:

$m = 3$

Coefficiente linear:

$c = -4$

Coefficiente angular:

$m = -1$

Coefficiente linear:

$c = 4$

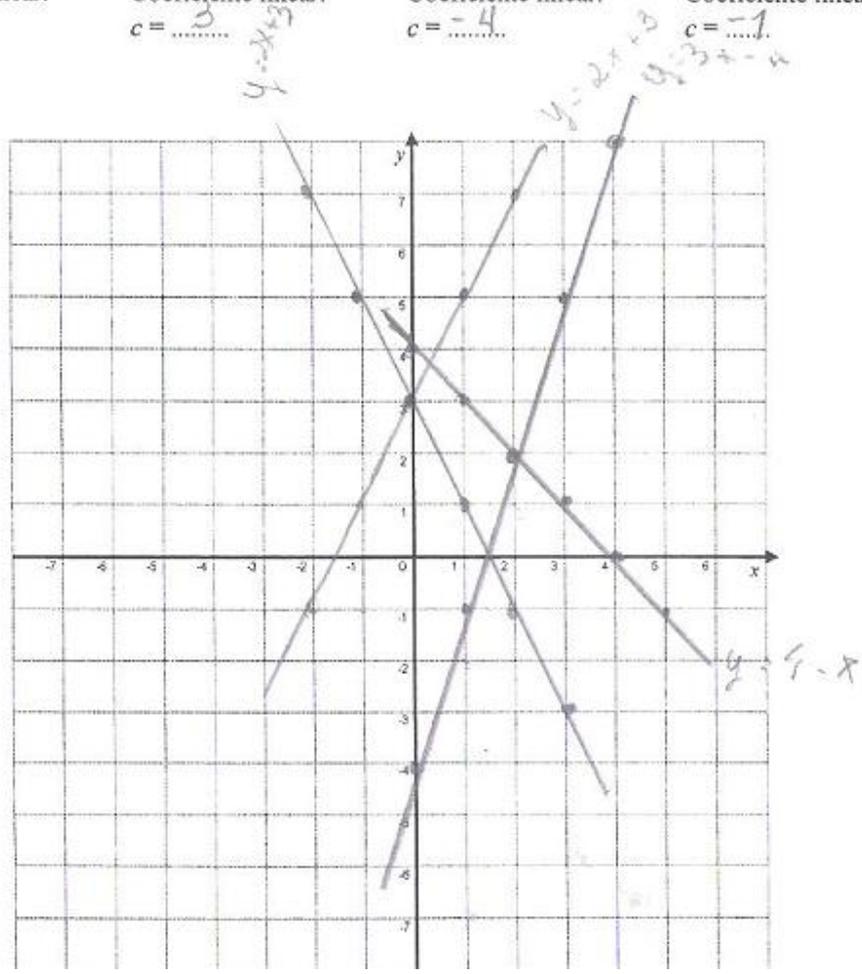


Figura 5

Aproveito agora para fazer uma comparação com o mesmo tipo de assunto estudado na Escola Britânica, onde os termos utilizados para os coeficientes angular e linear são *gradient* e *y-intercept*, respectivamente. Mesmo sendo nomes mais intuitivos (no meu ponto de vista), é comum que os alunos confundam estes dois termos. Dado o gráfico de uma linha reta, a pergunta “*What is the y-intercept of this line?*” é relativamente simples, a maioria dos alunos é capaz de respondê-la. No entanto, se a mesma pergunta for feita sendo dada apenas a equação da reta,

muitos alunos ficarão na dúvida entre os “dois números”, e não acertarão com a mesma facilidade.

Ao final das atividades em cada turma do Colégio Estadual Miguel Couto, os alunos fizeram diversos comentários positivos. Vários perguntaram pelo preço da calculadora e onde poderiam comprá-la, mas ficaram assustados com o preço. Um aluno perguntou: “Tem essa calculadora na *internet*?”. Outro, ao final, veio até mim e disse: “Assim é mais fácil aprender.”

Levando em consideração as atividades desenvolvidas no Colégio Estadual Miguel Couto e minha experiência profissional, tenho a plena convicção de que o uso da calculadora gráfica em escolas públicas pode ser um importante recurso pedagógico nas aulas de matemática e de outras disciplinas. Além de não ser difícil de ser manipulada, o seu uso pode ajudar a compreensão de conceitos matemáticos, tornando as aulas mais atraentes para aqueles alunos que, em geral, mostram mais dificuldades com a disciplina. Com ela, os alunos têm contato com a tecnologia aplicada à educação, tornando-se cidadãos mais bem preparados para o mercado de trabalho atual.

No entanto, entendo que este recurso não é a “salvação” para o péssimo desempenho dos alunos em matemática no nosso país, é apenas mais um instrumento que pode ser útil. Como qualquer outro recurso pedagógico, possui imperfeições e seu uso pode dar origem a erros que antes não eram vistos em sala de aula.

## 7 Conclusão

De um modo geral, foi possível verificar que os alunos do Colégio Estadual Miguel Couto, localizada em uma região urbana, foram capazes de usar a calculadora gráfica com relativa facilidade. Os erros observados podem ser considerados comuns de quem usa a calculadora gráfica pela primeira vez.

É claro que o entusiasmo demonstrado pelos estudantes se deveu em grande parte pelo fato de tratar-se de uma *novidade*, algo diferente do que eles estão acostumados a fazer no cotidiano escolar. Em escolas internacionais, esta euforia é generalizada quando começam a usar a calculadora, em geral a partir do 9º ano de escolaridade. A partir daí, alguns começam a ter “preguiça” de usar a calculadora, de trazê-la para escola, de tirá-la da mochila, acham a calculadora “complicada”, etc.

A familiaridade com telefones celulares e computadores é outra razão para o bom desempenho dos alunos nas aulas em que as experiências foram realizadas. O acesso a estes equipamentos por grande parte da população, em razão dos baixos preços, contribui para que os alunos tenham maior facilidade em manipular novos equipamentos.

A preparação dos professores e o uso de recursos adequados também são aspectos importantes que explicam a boa atuação dos estudantes nas aulas. Em geral, os alunos têm maior confiança ao usar a calculadora gráfica quando percebem que o professor a conhece bem. Usar o projetor multimídia juntamente com o emulador torna o processo ensino-aprendizagem mais eficiente, evitando que o professor tenha que ir de mesa em mesa dando orientações individuais. Muitas vezes, os alunos “cansam” de esperar pelo professor e perdem a concentração, começam a conversar, etc.

Vale a pena ressaltar também que a preparação de atividades específicas para as aulas contribuiu para que os alunos tenham participado das aulas com interesse. É bem verdade que no dia-a-dia professores têm uma rotina muito agitada, indo de uma escola para outra, não tendo tempo para criar atividades e

exercícios para cada aula. Nesse sentido, seria importante que houvesse material de apoio de boa qualidade, tais como livros didáticos, *sites* da internet, dentre outros. É comum que professores desistam de tentar algo diferente em suas aulas - uso de calculadoras, por exemplo - por não dispor de recursos adequados e acabam fazendo aquilo que já estão acostumados a fazer. Aulas de matemática com calculadoras gráficas precisam ser pensadas e planejadas de forma diferente quando comparadas às aulas tradicionais com lápis e papel. A este respeito, Doerr & Zangor (2000) criticam a simples inclusão de calculadoras gráficas nas aulas, sem uma mudança na forma com os assuntos são estudados.

*Muitos, se não a maioria dos estudos [...] buscam responder a questão se calculadoras gráficas são ou não efetivas em atingir certos objetivos instrucionais, que são freqüentemente deixados inalterados das abordagens tradicionais de lápis-e-papel. [...] Muitos destes estudos comparam o uso de calculadoras gráficas com o uso de lápis e papel no mesmo conjunto de atividades, dando apenas um enfoque limitado sobre como e por que os estudantes usam calculadoras gráficas no contexto instrucional.*

No final dos anos 80, quando os computadores ainda não eram acessíveis a toda população por serem caros, as calculadoras gráficas nas escolas norte-americanas surgiram como uma ótima alternativa, pois além de serem relativamente mais baratas, não exigiam que escolas tivessem mobiliário específico e eram portáteis, dando a possibilidade dos estudantes usarem em casa. No entanto, hoje em dia, os computadores não só estão mais baratos como também são portáteis – *tablets, smartphones, notebooks, netbooks, ultrabooks*, etc. Com o surgimento de aplicativos matemáticos desenvolvidos especificamente estes aparelhos, surge a pergunta: por que não usá-los nas aulas de matemática em vez da calculadora gráfica, cujo preço é alto? Em setembro de 2011, o jornal Norte-americano *Washington Post* publicou um artigo intitulado *Graphing calculators face new competition*<sup>6</sup>, no qual pais questionam as escolas sobre a utilização de calculadoras gráficas, consideradas obsoletas e caras, sugerindo o uso de aplicativos – gratuitos ou muito baratos – presentes em *smartphones*. Primeiramente, estes aparelhos possuem outros aplicativos e programas que certamente são uma fonte de distração para os alunos, prejudicando a atenção e a

---

<sup>6</sup> Calculadoras gráficas enfrentam nova concorrência.

concentração nas aulas. Em segundo lugar, a possibilidade de acesso à internet e de dispositivos de comunicação tornariam praticamente impossível evitar que os alunos “colassem” em provas em que o uso de tecnologia seria permitido ou até necessário.

Torna-se necessária uma maior discussão sobre este assunto no Brasil, com o intuito de avaliar de que forma o uso de tecnologia deve ser feito nas escolas. Em um país em que grande parte das escolas públicas apresenta problemas graves, talvez seja inadequado pensar em implantar o uso de calculadoras gráficas. No entanto, considerando o péssimo nível de conhecimento de matemática dos nossos alunos, demonstrado em exames internacionais como o PISA<sup>7</sup>, algo precisa ser feito.

A implantação de calculadoras gráficas poderia ser feita com investimentos relativamente baixos. Inicialmente, os professores precisariam aprender não só a manipular a calculadora gráfica, mas também como utilizar este instrumento como um recurso pedagógico. Para isso, cursos de atualização para professores teriam que ser oferecidos.

Em um primeiro momento, como o preço de uma calculadora não está ao alcance de alunos de escolas públicas, cada escola poderia ter um conjunto de calculadoras para serem utilizadas por diferentes professores em diferentes turmas, embora isto não seja o ideal, pois o aluno não poderia utilizá-la em casa.

Para servir de apoio ao professor, livros didáticos ou apostilas precisariam ser elaborados com atividades explorando as possibilidades da calculadora, com atividades que desenvolvam habilidades específicas. Nesse contexto, os problemas poderiam ser mais “reais”, sem a “forçada” contextualização.

---

<sup>7</sup> Programa Internacional de Avaliação de Alunos

## 8 Bibliografia

BORBA, M. C. (1999). *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: Art Bureau.

BORBA, R. E., & SELVA, A. C. (2009). O que as pesquisas têm evidenciado sobre o uso da calculadora na sala de aula dos anos iniciais de escolarização? *Revista Educação Matemática em Revista - RS, v.1, número 10*, pp. 49-63.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. volume 2*, p. 135.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília.

DICK, T. (1992). *Super calculators: implications for calculus curriculum, instructions and assessment*. In J. T. Fey & C. R. Hirsch (Eds), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 145–157). Reston, VA: NCTM.

DOERR, H. M., & ZANGOR, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41 (2), pp. 143-163.

HAESE, M., HAESE, S., HAESE, R., MARTIN, D., & HUMPHRIES, M. (2012). *Mathematics HL CORE*. Haese Mathematics.

IDRIS, N. (2006). Exploring the of TI-84 Plus on Achievement and Anxiety in Mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 2 (3), pp. 66-78.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

PONTE, J. P., SERRAZINA, L., GUIMARÃES, H. M., BRENDA, A., GUIMARÃES, F., SOUSA, H., et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

SAMUELS, R. (11 de Setembro de 2011). *Graphing calculators face new competition*. Acesso em 15 de Janeiro de 2013, disponível em The Washington

Post: [http://articles.washingtonpost.com/2011-09-11/local/35275012\\_1\\_calculators-math-teacher-math-students](http://articles.washingtonpost.com/2011-09-11/local/35275012_1_calculators-math-teacher-math-students)

TALL, D. (2001). Cognitive Development in Advanced Mathematics Using Technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12 (3) , pp. 196 - 218.