Universidade Federal de Goiás
Departamento de Matemática da Regional Catalão
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

UFG

PROFMAT

AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA DINÂMICA DO SOFTWARE RÉGUA E COMPASSO

Emerson José da Silva

Catalão

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Dissertação

Autor (a):	Emerson José da Silva					
E-mail:	ohnime@uol.com.br; ohnime.js@hotmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Professor da Rede Privada de Educação					
Agência de fomento:	------				Sigla:	---
País:	-----	UF:	-	CNPJ:	-----	
Título:	As Construções Geométricas via Geometria Dinâmica do Software Régua e Compasso					
Palavras-chave:	Geometria Dinâmica, Construções, Régua e Compasso, Expressões Algébricas, Números Construtíveis					
Título em outra língua:	The Geometric Constructions into Dynamic Geometry Software Ruler and Compass					
Palavras-chave em outra língua:	Dynamic Geometry, Construction, Ruler and Compass, Algebraic Expressions, constructible numbers					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	21/08/2014					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT					
Orientador (a):	Drº. Márcio Roberto Rocha Ribeiro					
E-mail:	rocha.ufg@gmail.com					
Co-orientador (a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Emerson José da Silva

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27 / 08 /2014.

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

2014

Emerson José da Silva

AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA DINÂMICA DO SOFTWARE RÉGUA E COMPASSO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Regional de Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Catalão

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
(GPT/BSCAC/UFG)

Silva, Emerson José da.
S586c As construções geométricas via geometria dinâmica do software régua e compasso [manuscrito] / Emerson José da Silva. - 2014.
xv, 134 f. : il., figs.

Orientador: Profº. Drº. Márcio Roberto Rocha Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Departamento de Matemática, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.
Apêndices.

1. Geometria dinâmica. 2. Construções. 3. Régua e compasso. 4. Expressões algébricas. 5. Números construtíveis. I. Título.

CDU: 514.115

Emerson José da Silva

"AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA DINÂMICA DO SOFTWARE RÉGUA E COMPASSO"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 21 de Agosto de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC
Presidente da Banca

Donald Mark Santee

Prof. Dr. Donald Mark Santee
Departamento de Matemática da Regional Catalão – UFG/RC

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Goiás – IF/GO

Emerson José da Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás e especializou-se em Ensino da Matemática pela Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas de Goiatuba.

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu filho e aos amigos por me terem dado incentivo na carreira profissional e nos estudos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado força na conclusão deste trabalho. Obrigado também aos meus amigos de convívio e estudo, Carlos Soares, Cleyton, Marcelo Lyra, em especial ao Eduardo Hirota, Gilmar do Nascimento e Ricardo Soares, pelo apoio quase que diário. Agradecimentos especiais aos professores do programa: Fernando Kennedy, Juliana Bernades, Paulo Bergamaschi, Plínio Oliveira, Porfírio Junior, Romes Borges e Thiago Queiroz, pela importância na vida acadêmica e no desenvolvimento deste trabalho. Por fim, meus agradecimentos ao professor Márcio Roberto Rocha Ribeiro pela paciência na orientação, mostrando ser possível a conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho revisitamos o assunto Construções Geométricas via régua e compasso, utilizando o software de Geometria Dinâmica *‘Régua e Compasso’* como uma ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem de Geometria, construindo exemplos e sugestões de atividades com o software. Trouxemos à tona a possibilidade da construção, via régua e compasso, de soluções para vários problemas que podem ser apresentados por expressões algébricas. Abordamos ainda a possibilidade da construção de um número, utilizando-se apenas a régua e o compasso e discutimos os célebres e históricos problemas de construção geométrica: duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo. Acrescemos ainda apêndices onde apresentamos outros tipos de construções possíveis e também trazemos sugestões de atividades com o software *‘Régua e Compasso’*.

Palavras-chave

Geometria Dinâmica, Construções, Régua e Compasso, Expressões Algébricas, Números Construtíveis

Abstract

In this work we revisit the subject Geometric Constructions into ruler and compass, using the dynamic geometry software 'Ruler and Compass' as an auxiliary tool in the teaching and learning of geometry, building examples and suggestions for activities with the software. Brought to the fore the possibility of building into ruler and compass, solutions to several problems that can be presented as algebraic expressions. Yet addressed the possibility of constructing a number, using only ruler and compass and discuss the famous and historical problems of geometrical construction: doubling the cube, squaring the circle and the trisection of the angle. We add appendices which present other possible constructions and also bring suggestions for activities with ruler and compass software.

Keywords

Dynamic Geometry, Construction, Ruler and Compass, Algebraic Expressions, constructible numbers

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

As Construções Geométricas são datadas desde muito antes de nossa era Cristã, e tiveram uma grande importância para todo o desenvolvimento posterior da Matemática. Foram os gregos os primeiros a trabalhar com Construções Geométricas utilizando apenas a régua e o compasso. Exercícios que hoje temos como função calcular, para os gregos desta época a função era de construir.

Problemas de Construção Geométrica são parte integrante do estudo da Geometria. O processo de construção amplia ao estudante suas fronteiras de conhecimento e facilita a compreensão dos conceitos e das propriedades geométricas, não só da Geometria Euclidiana, mas também a Geometria Analítica fica facilitada aos estudantes com este conhecimento.

Nas Construções Geométricas de hoje já temos a opção de substituir a régua e o compasso propriamente dito, por softwares que reproduzem as mesmas funções, só que estes com uma precisão jamais vista. A chamada Geometria Dinâmica se destaca neste contexto por proporcionar aos estudantes a experimentação, a pesquisa das propriedades mais importantes e invariantes nas construções.

Ao longo do trabalho apresentamos o software *'Régua e Compasso'*, que simula com perfeição os traços da régua sem graduação e o compasso, e permite ainda a movimentação das figuras mantendo-se as propriedades fundamentais e proporcionando um método interativo para o ensino e aprendizagem de geometria. Construímos exemplos e sugestões de atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula.

As construções elementares foram executadas passo a passo com o intuito de fornecer uma boa ideia da utilização do software *'Régua e Compasso'* e da Geometria Dinâmica, sempre seguidas de uma justificativa matemática que fornece uma garantia de que o objeto construído satisfaz às propriedades requeridas, e para isto foram vistos os conceitos e as propriedades da Geometria nela empregada.

Muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos a partir da solução de expressões algébricas. Neste trabalho trazemos à tona a possibilidade de construir, via régua e compasso, soluções para vários problemas que podem ser apresentados por expressões algébricas, mostrando a ligação intrínseca entre a álgebra e a Geometria. Além disso, acreditamos ser de importância singular, levar aos estudantes este olhar geométrico para as expressões algébricas, pois este pode abrir novos mundos e caminhos para a busca por soluções de uma expressão algébrica, que se diferem em essência dos caminhos naturais do uso do raciocínio algébrico imediato. Não que um venha a substituir o outro, mas que juntos um complemente o outro e enriqueça as buscas por soluções.

Neste trabalho também abordamos a ideia da construção de um número utilizando-se apenas a régua e o compasso, ideias estas que surgiram, historicamente, da busca por soluções para alguns problemas célebres de construções geométricas, que chegaram a aguardar dois milênios de evolução da matemática para que se atingisse o ápice de compreensão e solução. Problemas como o da duplicação do cubo, que consiste em construir via régua e compasso um cubo cujo volume seja o dobro de outro cubo dado; o problema da quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado cuja área seja a mesma de um círculo dado; o problema da trissecção do ângulo, que consiste em dividir um ângulo em três partes iguais; são exemplos de problemas que por milênios nortearam a busca por soluções e proporcionaram e ainda proporcionam o desenvolvimento da matemática. Apresentamos aqui as soluções conhecidas buscando um entendimento a nível elementar.

Finalizamos esta introdução, reiterando nossa crença na importância do assunto “Construções Geométricas”, sempre atual, interessante e motivador, que a nosso ver, deve ser pautado em sala de aula, e ao qual a Geometria Dinâmica traz novo fôlego, formando-se uma grande parceria em prol do ensino e aprendizagem dos alunos.

Capítulo I

As Construções Geométricas Elementares e o Software Régua e Compasso

Neste capítulo apresentamos a Geometria Dinâmica do software *‘Régua e Compasso’*, as propriedades matemáticas que serão envolvidas nas justificativas das construções e as construções elementares por meio do software.

1.1 Introdução

O termo Geometria significa, do grego, medida de terra; $geo = terra$ e $metria = medir$. O estudo da geometria precede em alguns milhares de anos à nossa era Cristã. Dos grandes nomes que formaram estão Tales de Mileto, Euclides, com a coletânea ‘Os Elementos’, uma obra com treze volumes, propondo um sistema inédito no estudo da geometria, Arquimedes e Apolônio. Destes, Tales é o precursor, tendo sua geometria importada do Egito, onde ainda hoje são encontrados alguns trabalhos da geometria egípcia em papiros.

As construções geométricas datam também desta época e de maneira geral, consiste em processos de construções de entes geométricos, utilizando-se apenas uma régua sem graduação e um compasso. Estas construções são motivadas e dirigidas às resoluções de problemas. Tais estudos hoje podem ser feitos com auxílio de softwares, que simulam os traçados feitos pela régua e o compasso. Esses softwares estão aí para dar maior precisão aos traçados que são imprecisos usando a régua e o compasso.

Estas construções estimulam a criatividade do indivíduo, exigindo do aluno a imaginação, para poder ver a construção em sua mente antes mesmo de a construção ser começada, forçando o aluno a procurar caminhos, instigando o raciocínio e exercitando sua mente. A construção tem ainda a finalidade de concretizar o conteúdo abstrato da geometria estudada no ensino médio regular, apoiando as suas propriedades, seus axiomas ou consequências das figuras planas. Estas construções exigem do aluno um planejamento, um projeto ou abstração a ser feita, habilitando este aluno a diversos conteúdos da matemática e outras disciplinas.

Alguns problemas de construção geométrica têm finalidades práticas, como os que envolvem cartas marítimas, ou construção de pontos com distância mínima. Um exemplo de problema deste tipo é: Na cidade de Morrinhos – Go, um professor de Matemática ministra aulas nos colégios A, B e C, conforme a Figura 1. Ele quer alugar uma casa que deverá se encontrar num ponto P, tal que a distância desta casa aos três colégios venha a ser a mesma. O problema consiste em ajudar o professor a encontrar tal lugar. Uma solução para este problema, à luz das construções geométricas via régua e compasso, será apresento mais adiante.

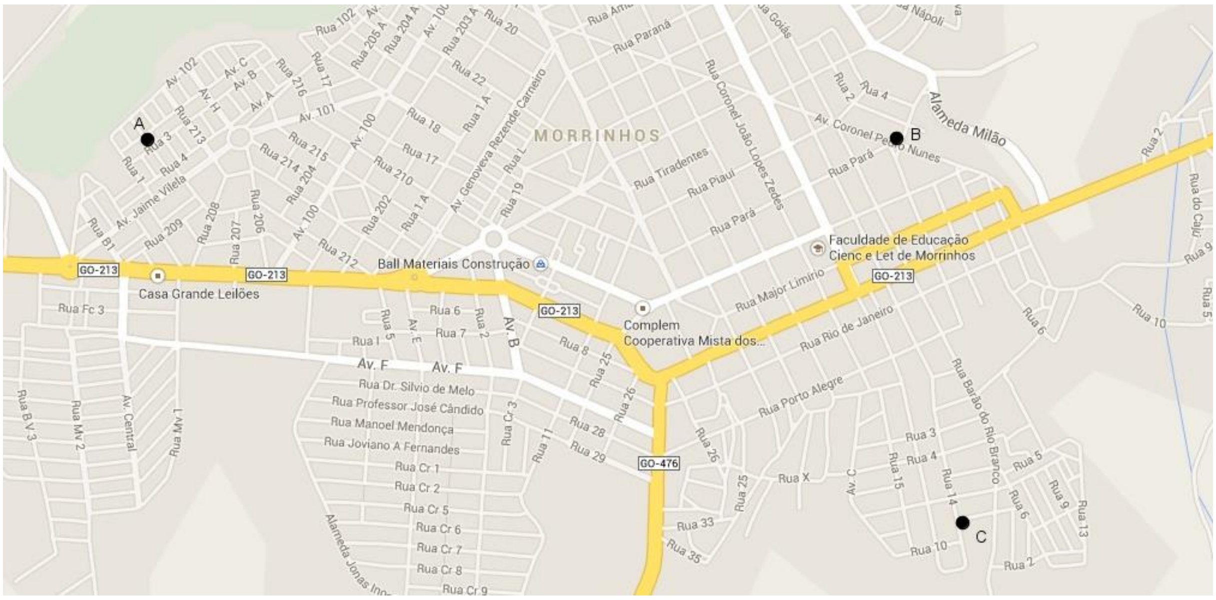


Figura 1: Cidade de Morrinhos

Neste trabalho utilizamos o software *'Régua e Compasso'* como ferramenta auxiliar nas construções geométricas. Nosso intuito é trazer a possibilidade da utilização deste software em sala de aula como uma ferramenta de auxílio ao estudo da geometria.

1.2 A Geometria Dinâmica e o Software Régua e Compasso

O termo *Geometria Dinâmica* é utilizado para nomear um método dinâmico para o ensino e aprendizagem de geometria e suas propriedades usando ambientes computacionais destinados a este fim. Essa nomenclatura foi criada pela empresa *Key Curriculum Press*, http://www.keycurriculum.com/, no intuito de diferenciar dos demais programas de geometria existentes. O termo *'dinâmico'* em matemática, nos leva a ideia de movimento e mudança. (Disponível em: <http://www.geometriadinamica.com.br/> Acesso em: 28 de Julho de 2014).

Softwares de Geometria Dinâmica são aqueles em que somos capazes de construir e manipular as figuras geométricas. A principal diferença destes softwares para os de geometria não dinâmica, é a possibilidade de *'mover'* as figuras construídas por meio do mouse, nos dando a possibilidade de visualizar as diversas formas da figura construída. O que facilita a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos.

O aplicativo *'Régua e Compasso'*, é um software de construções geométricas dinâmicas e interativas, desenvolvido pelo professor geógrafo alemão René Grothmann da Universidade Católica de Berlin, http://www.rene-grothmann.de/. O software pode ser utilizado como um ótimo laboratório de geometria, podendo ser facilmente construídos pontos, retas, ângulos e círculos, testando os conhecimentos de geometria com exemplos e contraexemplos. Este software está disponível para download pelo site http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/, sendo ele um software livre, pode ser adquirido por escolas e alunos sem custos. Abaixo, na Figura 2, está a representação do logo do software *'Régua e Compasso'* e na Figura 3, a aparência do software.

Figura 2: Logo do Software

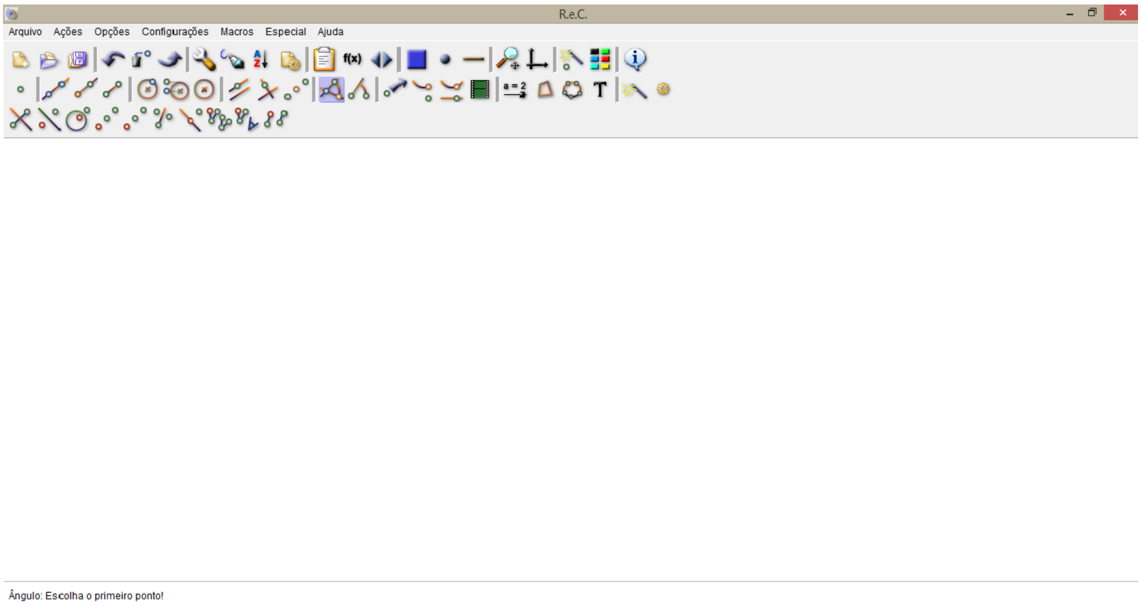
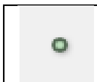
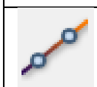


Figura 3: Aparência do Software

As construções feitas no *'Régua e Compasso'* são simples e dinâmicas. Segue abaixo os principais ícones para as construções. Em nossas construções, utilizamos basicamente os ícones: do ponto, para criar um ponto; da reta, que representa a régua não graduada; e o compasso. Em um segundo momento, após termos assimilado as construções elementares de ponto médio, retas paralelas, retas perpendiculares e de transporte de ângulo, utilizamos também os ícones de ponto médio, paralelas, perpendicular e ângulo, juntamente com o ícone de mover pontos e segmentos, com a finalidade de agilizar as construções.

	Ponto
	Reta
	Semirreta
	Segmento
	Círculo

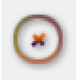
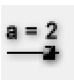
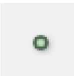
	Compasso
	Círculo com raio fixo
	Paralela
	Perpendicular
	Ponto Médio
	Ângulo
	Ângulo de amplitude fixa
	Mover Ponto
	Expressão Aritmética

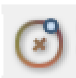
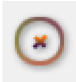
Figura 4: Tabela dos Ícones

Para as construções elementares, procedemos como segue:

- Construindo um ponto: para construirmos um ponto, devemos selecionar o ícone de ponto,  e clicarmos no local onde queremos colocar este ponto;

- Construindo uma reta: para construir uma reta precisamos de dois pontos distintos, assim deve-se selecionar o ícone que representa a reta,  e clicar em dois pontos distintos no plano.

- Construindo um segmento de reta: além da reta, temos também o segmento de reta, , que também é construído clicando em dois pontos distintos.

- Construindo um círculo: para a construção do círculo, precisamos conhecer seu centro e um ponto do círculo, assim, devemos clicar no ícone com a representação do círculo, , e clicando em um ponto onde se deseja o centro do círculo fazendo a abertura do tamanho que se quer o raio. Além desta forma de construir um círculo, temos também como construir um círculo de raio fixo. Quando se quer construir mais de um círculo de mesmo raio, o ícone de círculo de raio fixo é . Com este ícone selecionado, clicamos em um ponto no plano para definir o centro da circunferência e em um outro ponto qualquer. Após o segundo clique, provocará a abertura da seguinte tela, representada pela Figura 5:

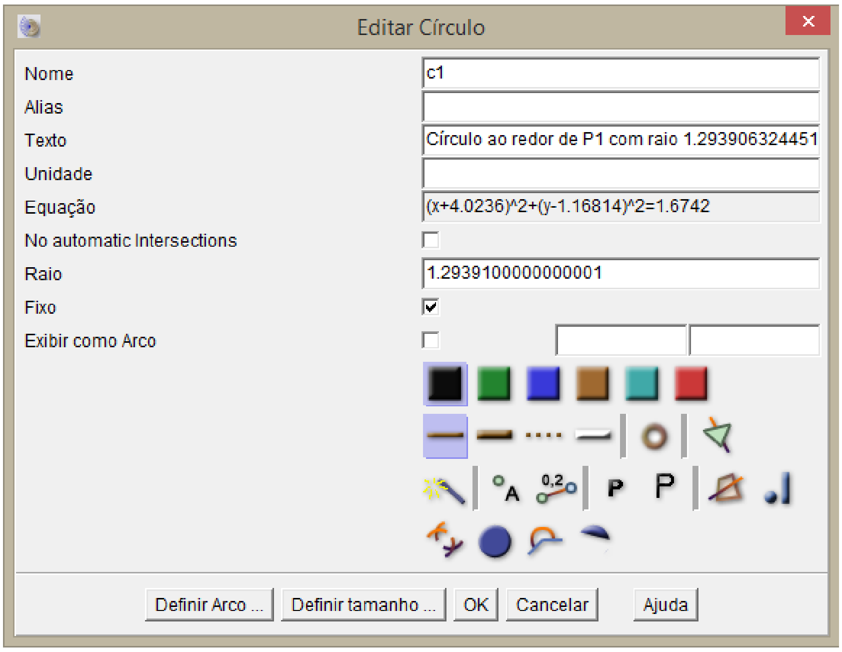
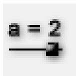


Figura 5: Editar Círculo

no campo 'Raio', podemos indicar o tamanho que desejarmos.

- Ícone de mover ponto: com o ícone de mover ponto, , selecionado, podemos dar dinamismo às construções feitas e ser verificado as propriedades geométrica atribuídas à construção.

- Ícone de expressão aritmética: com o ícone de expressão algébrica, , selecionado, podemos dar medidas específicas a segmentos e ângulos, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento ou ângulo desejado.

A seguir apresentamos algumas construções geométricas elementares, como a mediatriz, a reta perpendicular, a reta paralela, a bissetriz, o transporte de ângulo, o ângulo de $60°$ e a construção do arco capaz. Para garantir que as construções de fato representam os entes mencionados, apresentamos justificativas matemáticas, algumas delas baseadas nos casos de congruências de triângulos, que apresentamos a seguir.

1.3 Congruência de Triângulos

Neste trabalho as construções geométricas são acompanhadas de justificativas matemáticas e em algumas delas utilizamos casos de congruência de triângulos. Observamos que neste texto utilizamos as seguintes notações:

- Reta AB: $\overleftrightarrow{AB}$;
- Semirreta AB: $\overrightarrow{AB}$;
- Segmento AB: $\overline{AB}$;
- Triângulo ABC: ΔABC;
- Ângulo AOC: $A\hat{O}C$;
- Arco ABC: $\widehat{ABC}$.

Definições 1.3.1 Segmentos Congruentes: *Dois segmentos são congruentes se eles possuem a mesma medida.*
Notação: Para denotarmos que $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$ escrevemos $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

Ângulos Congruentes: *Dois ângulos são congruentes se eles possuem a mesma medida.*
Notação: Para denotarmos que $A\hat{O}B$ é congruente a $A\hat{O}C$ escrevemos $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}C$.

Triângulos Congruentes: *Um triângulo ABC (ΔABC) é congruente a outro triângulo DEF (ΔDEF) se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Assim, se a correspondência entre os vértices é: $A \to D, B \to E$ e $C \to F$, então o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF ($\Delta ABC \equiv \Delta DEF$) se, e somente se,* $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{DE} & \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \quad e & \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} & \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases}.$

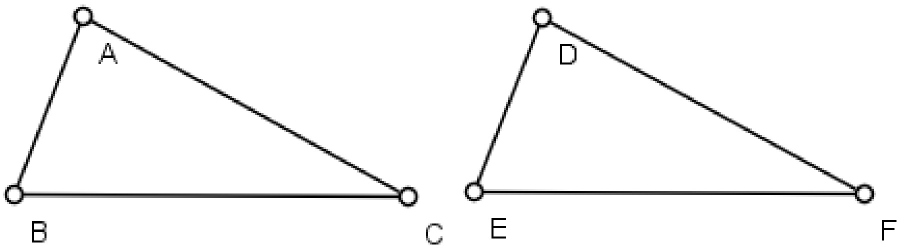


Figura 6: Triângulos

A congruência entre triângulos é uma relação que satisfaz as propriedades:

- Reflexiva: Todo triângulo é congruente a si próprio;
- Simétrica: Se $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, então $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$;
- Transitiva: Se $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ e $\Delta DEF \equiv \Delta GHI$, então $\Delta ABC \equiv \Delta GHI$.

Os casos de congruências são quatro:

1º caso: Lado-Ângulo-Lado (LAL), se é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos de forma que dois de seus lado correspondentes e o ângulo compreendido, sejam congruentes, então os triângulos são congruentes.

2º caso: Ângulo-Lado-Ângulo (ALA), se é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos de forma que dois de seus ângulos correspondentes e o lado compreendido, sejam congruentes, então os triângulos são congruentes.

3º caso: Lado-Lado-Lado (LLL), se é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos de forma que os três lados correspondentes sejam congruentes, então os triângulos são congruentes.

4º caso: Lado-Ângulo-Ângulo Oposto (LAA_O), se é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de dois triângulos de forma que um lado, um ângulo correspondentes e o ângulo oposto a este lado, sejam congruentes, então os triângulos são congruentes.

É muito interessante utilizar o software régua e compasso como instrumento de investigação de propriedades matemáticas das figuras geométricas. Então, uma boa sugestão é investigar os casos de congruências de triângulos utilizando o software. Propomos a seguir algumas atividades simples que levam os alunos à dedução da congruência a partir da investigação e análise de cada caso de congruência.

Atividade: No software régua e compasso, peça aos alunos que construa um triângulo arbitrário. Agora proponha aos alunos o seguinte desafio: escolher dois lados do triângulo construído e o ângulo compreendido entre eles, e em seguida, construir um novo triângulo que possua dois lados e o ângulo compreendido entre eles com as mesmas medidas dos escolhidos, de forma que o terceiro lado ou qualquer um dos outros ângulos sejam diferentes dos correspondentes no triângulo inicial. Aqui podemos trabalhar a ideia de hipótese (fixar dois lados e o ângulo compreendido) e tese (os triângulos são congruentes).

1.4 Losango

Outras justificativas matemáticas para as construções geométricas são dadas pelas propriedades do losango (Fig.7).

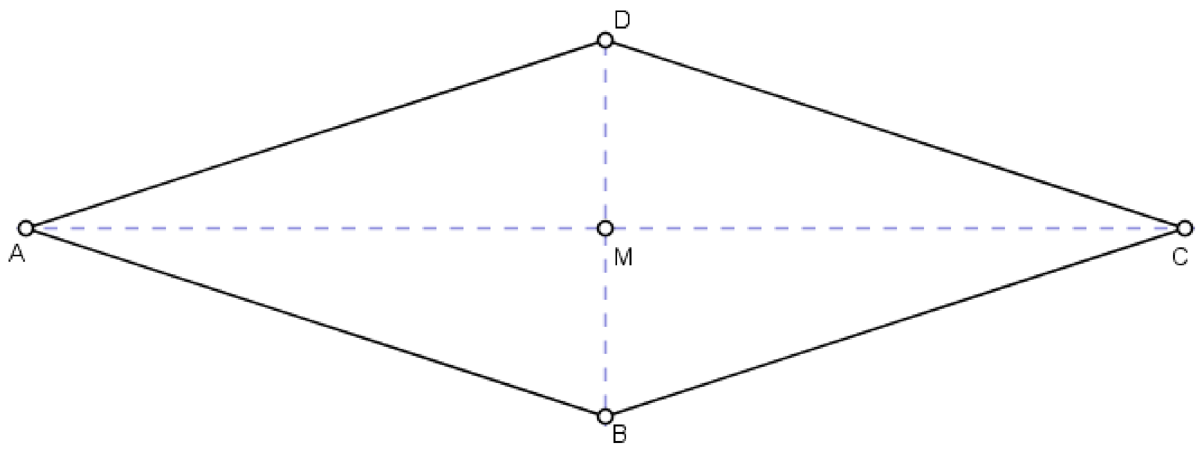


Figura 7: Losango

Definição 1.4.1: *Um quadrilátero plano e convexo é um losango se, e somente se, possui os quatros lados congruentes.*

$ABCD$ é losango $\Leftrightarrow$ $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.

Por consequência, no losango temos as seguintes propriedades:

- Ângulos opostos são congruentes, $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$ e $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$;

$\Delta ABD \equiv \Delta CBD \ (LLL) \Rightarrow B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$ (Fig. 8), e
$\Delta ABC \equiv \Delta ADC \ (LLL) \Rightarrow A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$.

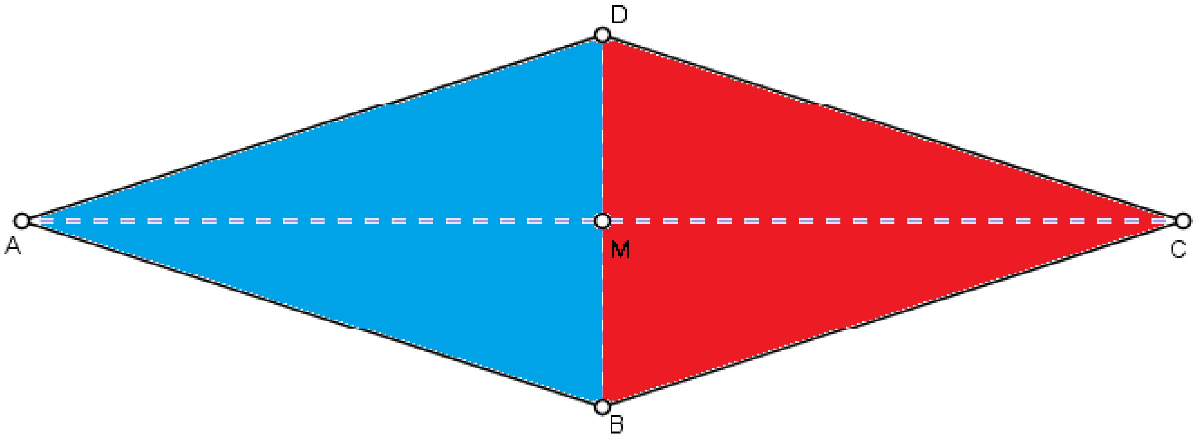


Figura 8: Losango: ângulos opostos são congruentes

- Ângulos adjacentes são suplementares, a soma de suas medidas é $180°$;

Como $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}$, $B\hat{A}D \equiv B\hat{C}D$ e sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero medo $360°$, temos que:

$$A\hat{B}C + A\hat{D}C + B\hat{A}D + B\hat{C}D = 360°$$
$$A\hat{B}C + A\hat{B}C + B\hat{A}D + B\hat{A}D = 360°$$
$$2.A\hat{B}C + 2.B\hat{A}D = 360°$$
$$2.\left(A\hat{B}C + B\hat{A}D\right) = 360°$$
$$A\hat{B}C + B\hat{A}D = 180°.$$

- Lados opostos são paralelos, $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ e $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$;

Os ΔABD e ΔCBD são isósceles, dois de seus lados de mesma medida, $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{CD}$, e congruentes, isso implica que $A\hat{B}D \equiv A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$, como temos que $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ (alternos internos), pelo Teorema de Tales, então $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$.

Por consequência do Teorema de Tales, temos também que $A\hat{B}D \equiv A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ e $B\hat{A}C \equiv D\hat{A}C \equiv B\hat{C}A \equiv D\hat{C}A$, então suas diagonais são perpendiculares, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Os ângulos $B\hat{A}M = \frac{B\hat{A}D}{2}$ e $A\hat{B}M = \frac{A\hat{B}C}{2}$, então no triângulo ΔABM temos:

$$B\hat{A}M + A\hat{B}M + B\widehat{M}A = 180°$$
$$\frac{B\hat{A}D}{2} + \frac{A\hat{B}C}{2} + B\widehat{M}A = 180°$$
$$\frac{B\hat{A}D + A\hat{B}C}{2} + B\widehat{M}A = 180°.$$

Como $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ são ângulos suplementares, temos que $B\hat{A}D + A\hat{B}C = 180°$, então:

$$\frac{180°}{2} + B\widehat{M}A = 180°$$
$$90° + B\widehat{M}A = 180°$$
$$B\widehat{M}A = 90°,$$

ou seja, $B\widehat{M}A$ é ângulo reto. Para os demais ângulos, $B\widehat{M}C, D\widehat{M}A$ e $D\widehat{M}C$ a demonstração é análoga.

No que segue, apresentamos algumas construções elementares que são utilizadas em todo nosso trabalho.

1.5 A Mediatriz

Definimos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ como segue:

Definição 1.5.1: *A mediatriz do segmento* $\overline{AB}$ *é o lugar geométrico dos pontos equidistante dos pontos* A *e* B*.*

O traçado da mediatriz determina, consequentemente, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Ideia da construção geométrica: Dado o segmento $\overline{AB}$, traçamos dois círculos de mesmo raio, de modo que haja dois pontos de interseção entre eles, com centros em A e em B. Sejam C e D os pontos de interseção desses círculos. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Clicamos no ícone de segmento de reta, , para construirmos o segmento $\overline{AB}$ dado (Fig.9).

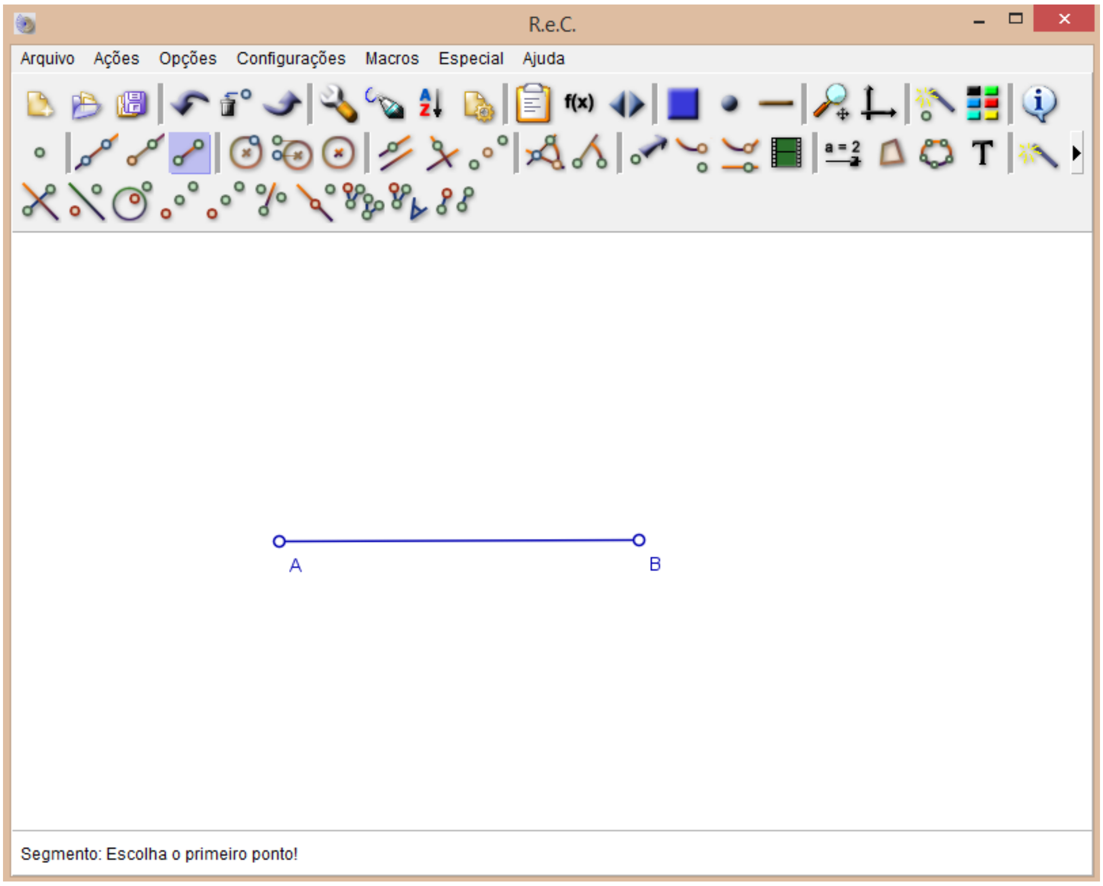


Figura 9: A Mediatriz: passo 1

- Clicando agora no ícone do círculo,  e centros em A e B e com o raio maior que a metade do segmento $\overline{AB}$, para que haja duas interseções entre os círculos, construímos dois círculos (Fig.10).

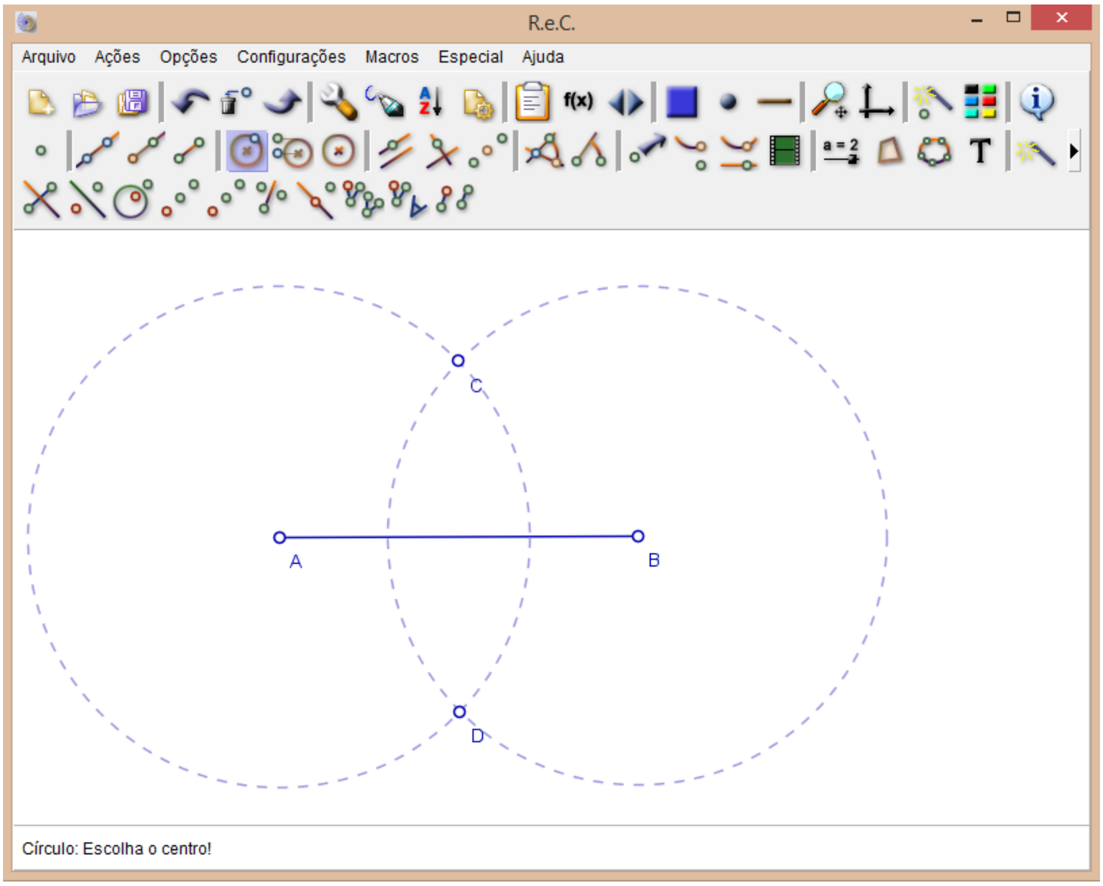


Figura 10: A Mediatriz: passo 2

- Os dois pontos de interseções dos círculos, os pontos C e D, como mostra a Figura 10 acima, determinam a reta $\overleftrightarrow{CD}$, basta clicar no ícone de reta, , e clicar nos dois pontos de interseções, os pontos C e D (Fig.11).

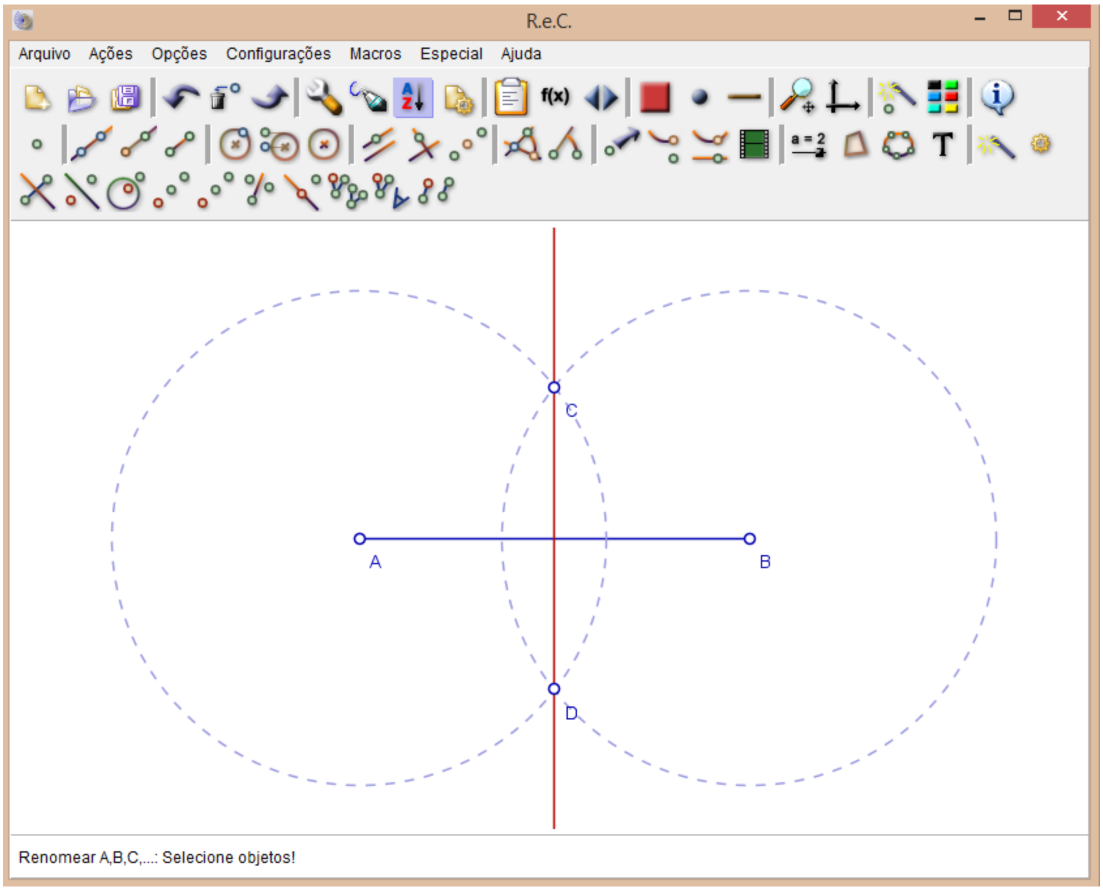


Figura 11: A Mediatriz: passo 3

A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Justificativa: Como os segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{BD}$ e $\overline{DA}$, por construção têm a mesma medida, pois eles são o raio dos círculos construídos, então o quadrilátero $ACBD$ é um losango, e as diagonais de um losango são perpendiculares e cortam-se ao meio. Assim, dado qualquer ponto X na reta $\overleftrightarrow{CD}$, $AX \equiv XB$, pois $\Delta AXM \equiv \Delta BXM$, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, pelo caso LAL, $\overline{AM} \equiv \overline{BM}, A\widehat{M}X \equiv B\widehat{M}X$ e $\overline{MX} \equiv \overline{MX}$ (lado comum).

Note que esta construção independe do "tamanho" ou da posição do segmento $\overline{AB}$. De fato, podemos na tela do software mover os pontos A e B da figura, basta clicar no ícone , e em seguida arrastar um dos pontos, para perceber que, a mediatriz permanece.

1.6 A Perpendicular

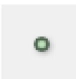
Definimos a perpendicular de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ como segue:

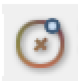
Definição 1.6.1: *Duas retas são perpendiculares (notação: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes, ou seja, ângulos de* $90°$.

Dado uma reta r e um ponto A fora da reta, desejamos construir uma reta perpendicular à reta r passando pelo ponto A.

<u>Ideia da construção geométrica:</u> Traçamos um círculo de centro A de tal forma que este intercepte a reta r em dois pontos distintos: B e C. Em seguida, traçamos círculos de mesmo raio com centros em B e em C, assim como foi feito na construção da mediatriz, e obtemos o ponto D, no plano oposto ao do ponto A em relação à reta r. A reta $\overleftrightarrow{AD}$ é perpendicular à reta r.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone de reta, , para construirmos a reta r e no ícone do ponto, , para construirmos o ponto A (Fig.12).

- Selecionando o ícone do círculo, , para construirmos um círculo de centro em A de modo que intercepta a reta r em dois pontos distintos, pontos B e C (Fig.13).

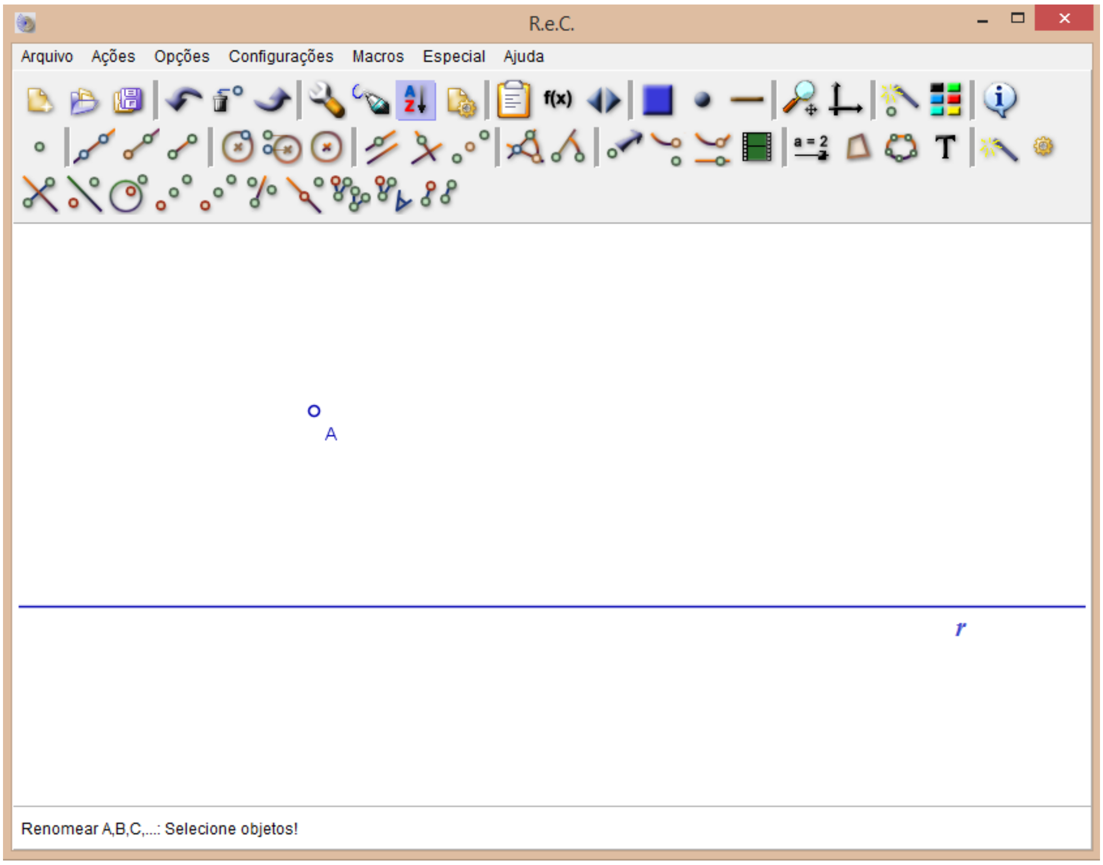


Figura 12: A Perpendicular: passo 1

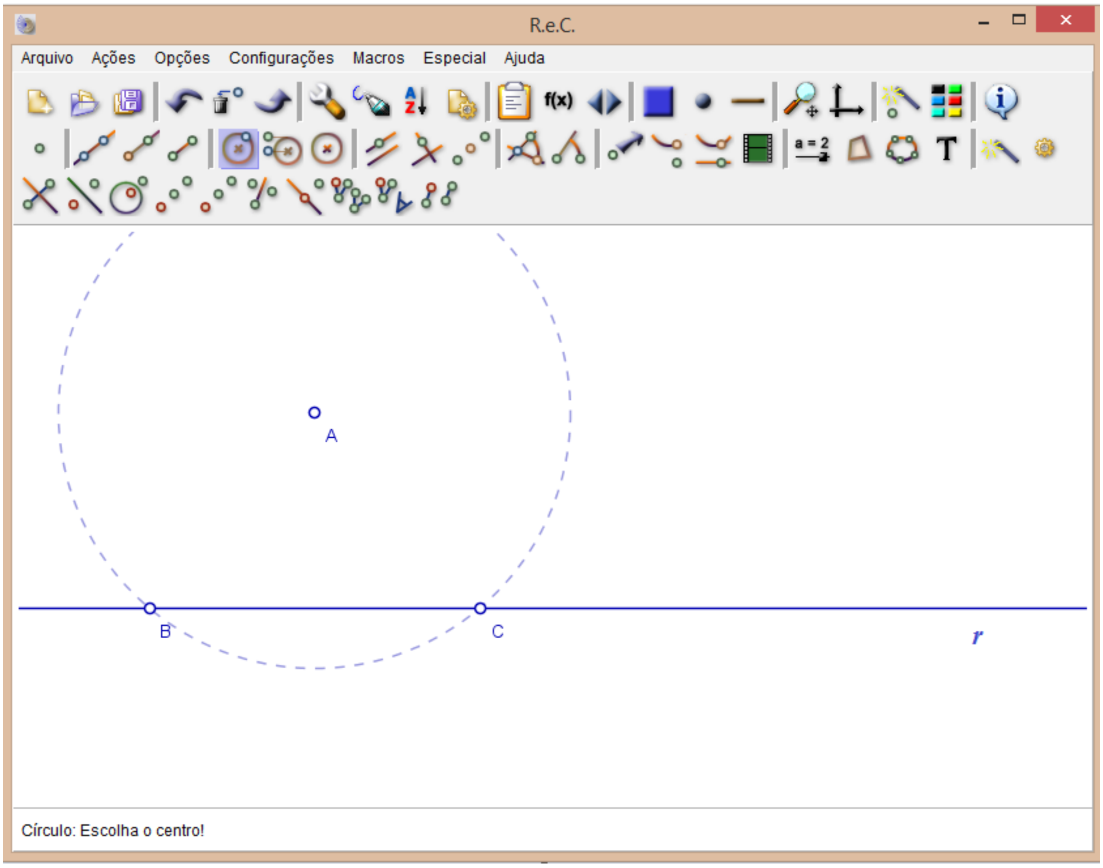


Figura 13: A Perpendicular: passo 2

- Na reta r e com os pontos B e C bem definidos, construimos a mediatriz do segmento $\overline{BC}$, assim como foi feito na construção da mediatriz, e marcamos o ponto D na interseção dos dois círculos de centros em B e em C, no semiplano oposto ao do ponto A (Fig. 14).

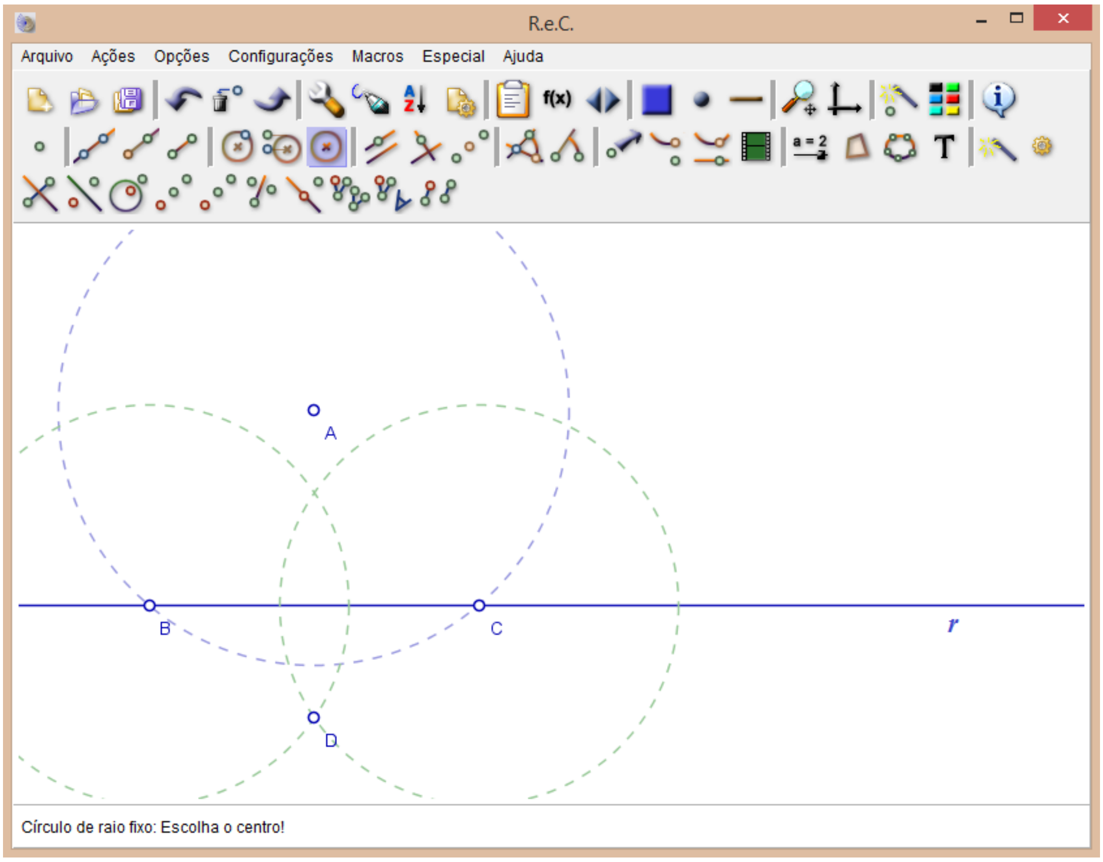


Figura 14: A Perpendicular: passo 3

- Os pontos A e D determinam a reta $\overleftrightarrow{AD}$, basta clicarmos no ícone de reta, , e clicarmos nos pontos A e D para determinar esta reta (Fig. 15).

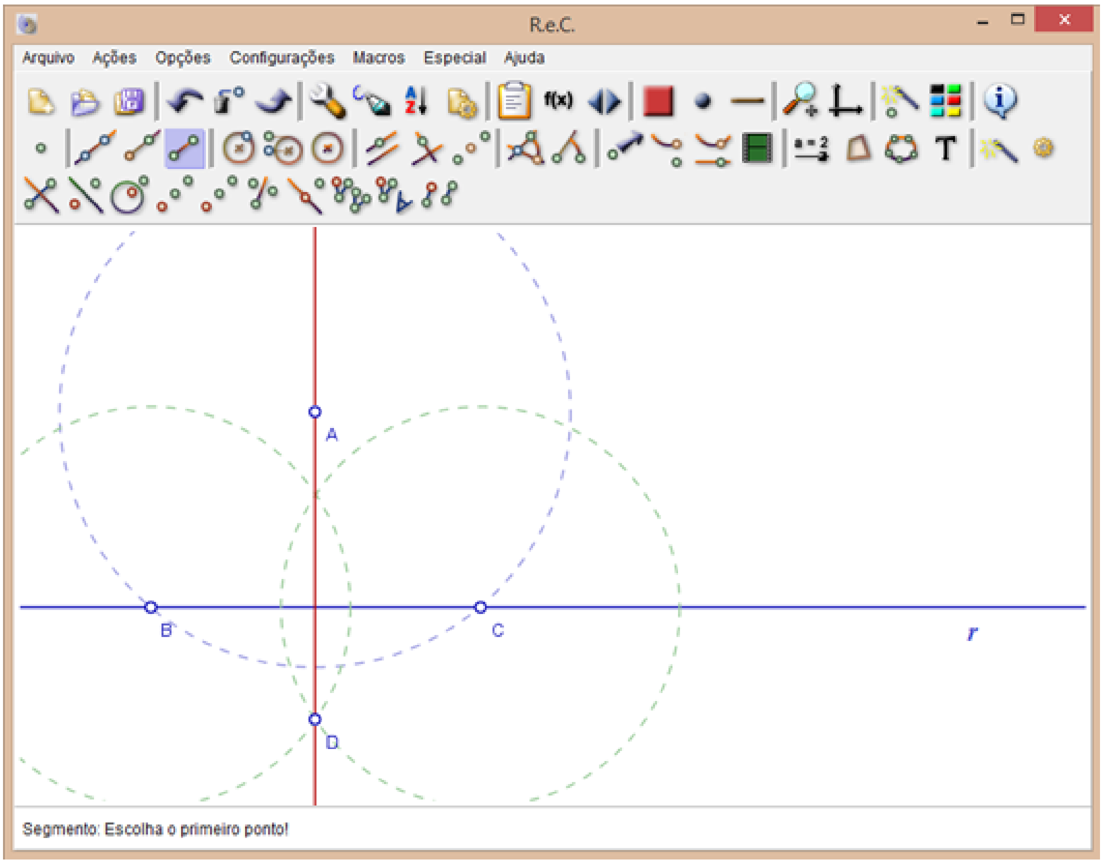


Figura 15: A Perpendicular: passo 4

O reta $\overleftrightarrow{AD}$ é a perpendicular à reta r passando pelo ponto A.

Justificativa: Como $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{DC}$, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ é mediatriz do segmento $\overline{BC}$, e portanto, perpendicular à reta r.

Clicando agora no ícone de mover ponto, , podemos mover o ponto A e a reta r da figura, sendo mantida a reta perpendicular construída.

1.7 A Paralela

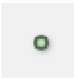
Definimos retas paralelas como segue:

Definição 1.7.1: *Duas retas são paralelas (notação: //) se, e somente se, são coincidentes ou são coplanares e não têm nenhum ponto em comum.*

Dado uma reta r e um ponto A fora da reta, desejamos construir uma reta paralela à reta r passando pelo ponto A.

Ideia da construção geométrica: Traçamos três círculos, sempre com o mesmo raio: o primeiro com o centro em A, determinando o ponto B sobre a reta r, o segundo com o centro em B, determinando o ponto C também sobre a reta r, o terceiro com o centro em C, determinando o ponto D sobre o primeiro círculo construído, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ será paralela à reta r.

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Clicamos no ícone de reta, , para construirmos a reta r e no ícone do ponto, , para construirmos o ponto A (Fig.16).

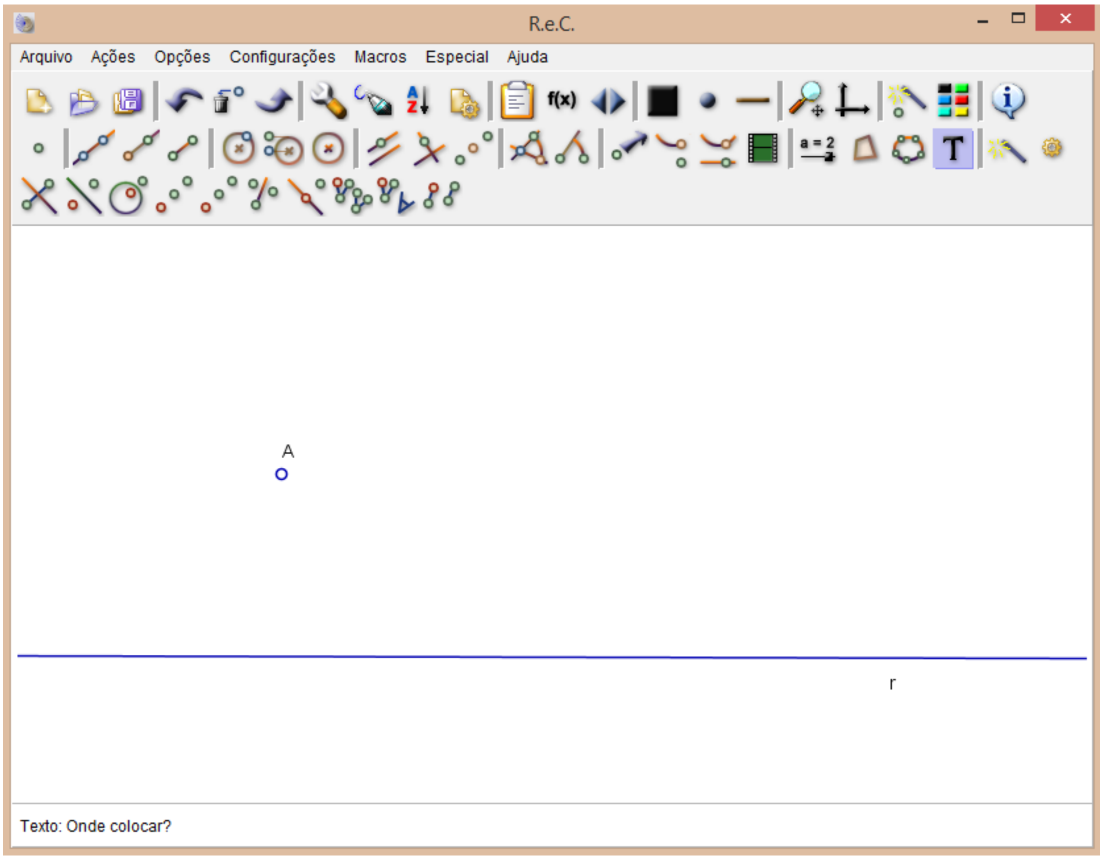
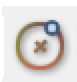


Figura 16: A Paralela: passo 1

- Com o ícone do círculo, , selecionado, clicamos no ponto A e definimos um círculo, de modo que este intercepte a reta r em um ponto B (Fig.17).

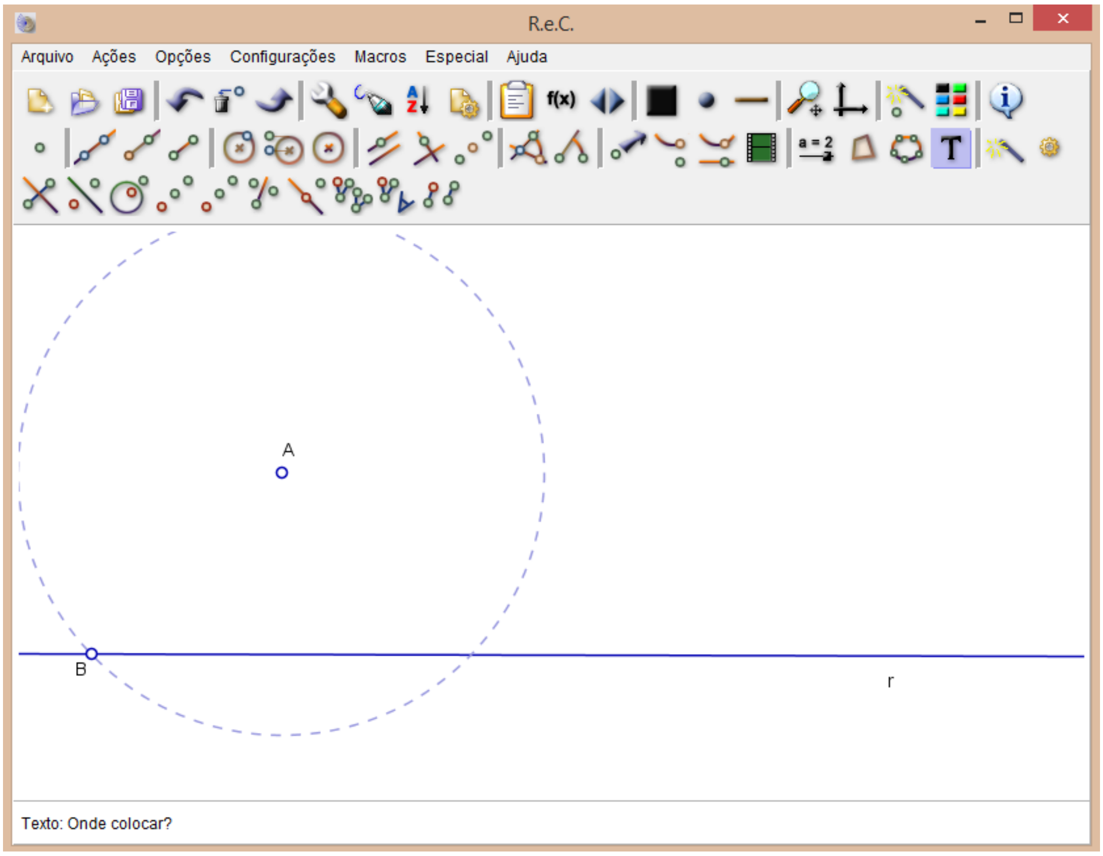


Figura 17: A Paralela: passo 2

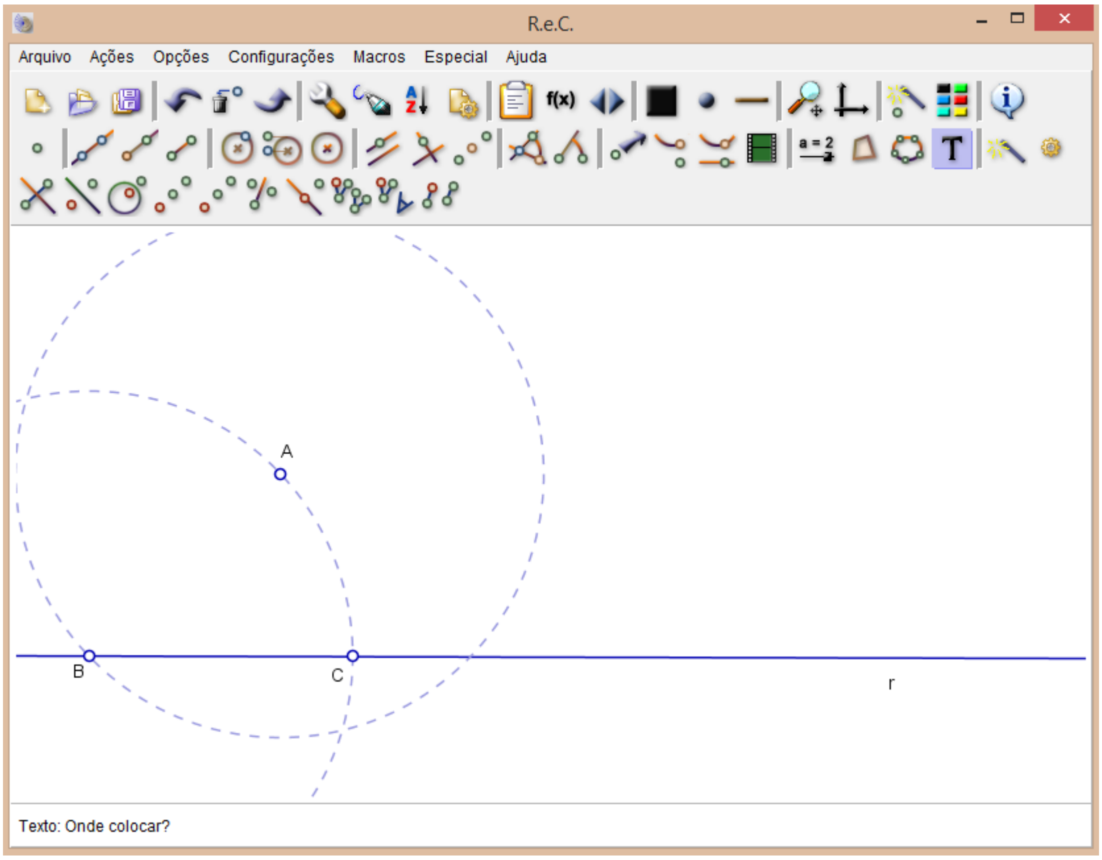
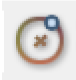


Figura 18: A Paralela: passo 3

- Ainda com o ícone do círculo, , selecionado e com o mesmo raio do círculo de centro em A, ou seja, raio $\overline{AB}$, construímos um novo círculo, agora com o centro em B e determinamos o ponto C também na reta r (Fig.18).

- Também com o mesmo raio, raio $\overline{BC}$, e com centro em C, constrói-se o círculo de modo que intercepte o primeiro círculo no ponto D fora da reta r (Fig.19).

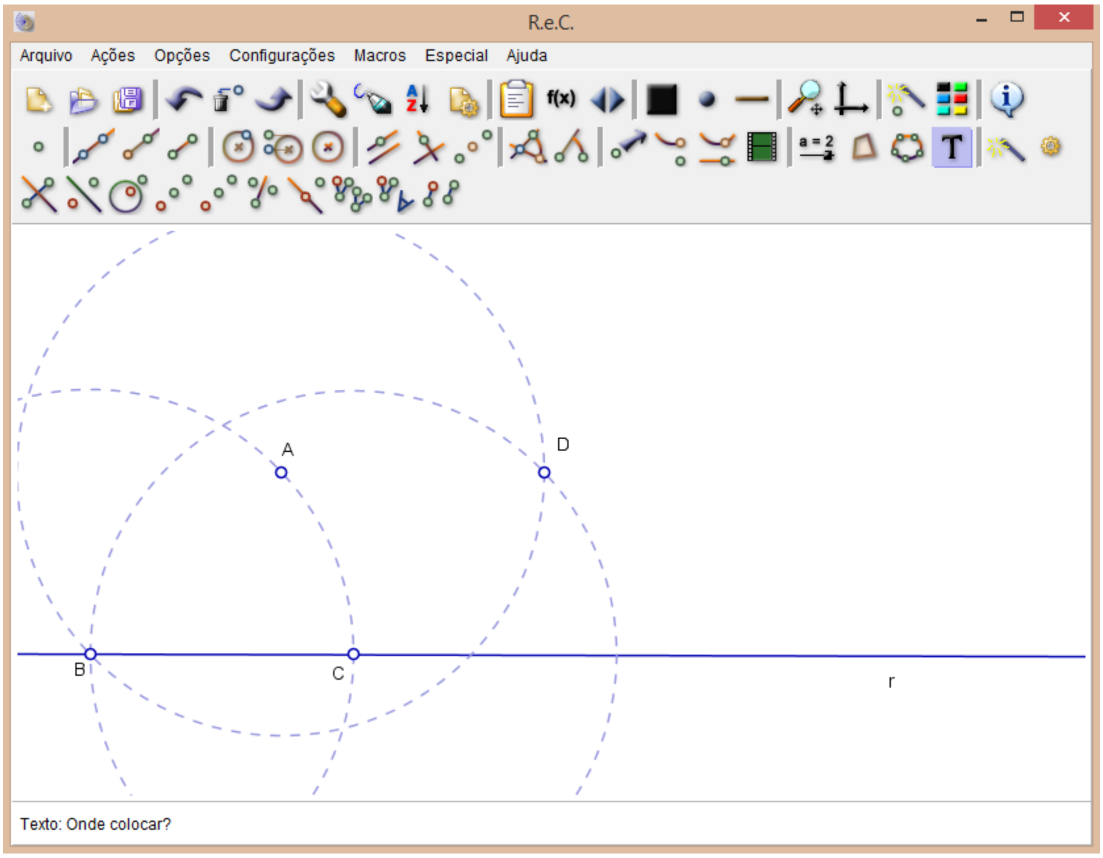


Figura 19: A Paralela: passo 4

- Selecionando o ícone de reta, , e clicando nos pontos A e D, determinamos a reta $\overleftrightarrow{AD}$ (Fig.20).

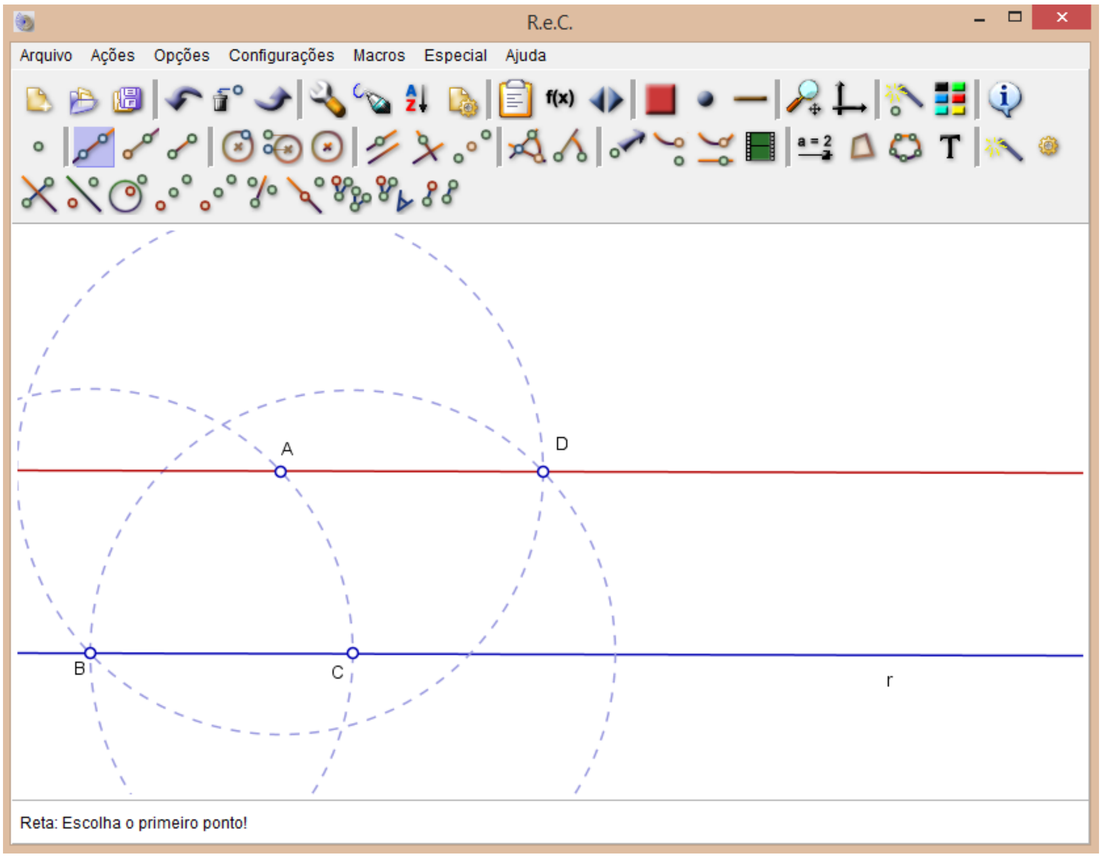


Figura 20: A Paralela: passo 5

A reta $\overleftrightarrow{AD}$ é a paralela à reta r passando pelo ponto A.

Justificativa: Da forma que foi feita a construção, $ABCD$ é um losango, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$, que são os raios das circunferências construídas, portanto, seus lados opostos são paralelos, $\overleftrightarrow{AD}$ é paralelo a r.

Clicando agora no ícone de mover ponto, , podemos mover o ponto A e a reta r da figura, sendo mantidas as propriedades da reta paralela construída.

1.8 A Bissetriz

Definimos a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ como segue:

Definição 1.8.1: *A bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes*.

Por consequência, a bissetriz divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes.

<u>Ideia da construção geométrica:</u> Dado um ângulo $X\hat{O}Y$, traçamos um círculo de centro em O, determinando os pontos A e B nos lados $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ do ângulo, respectivamente. Em seguida, traçamos dois círculos de mesmo raio com centros no ponto A e no ponto B, determinando o ponto C como um dos pontos de interseção dos círculos. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone do ângulo, , para construirmos o ângulo $X\hat{O}Y$ e no ícone de semirreta, , para definir as semirretas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ (Fig.21).

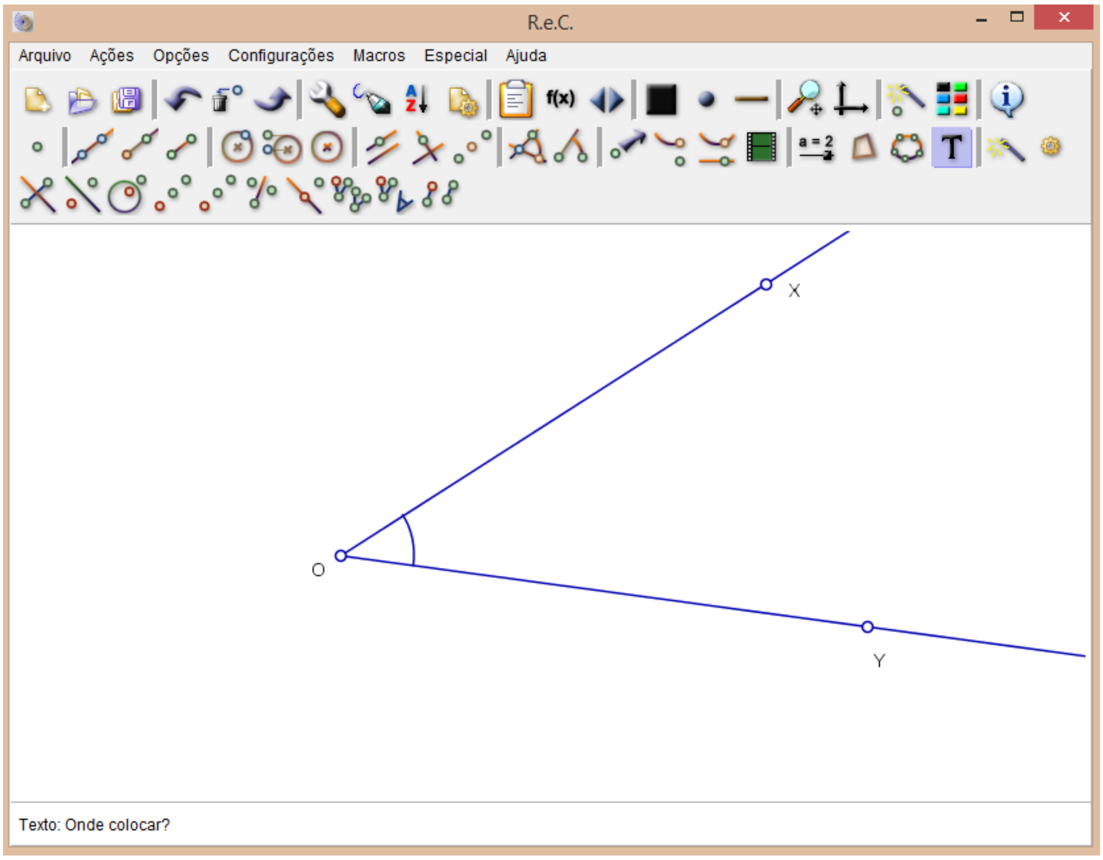


Figura 21: A Bissetriz: passo 1

- Clicamos agora no ícone do círculo, , determinando o círculo de centro em O, marcamos os dois pontos de interseção deste círculo com as semirretas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$, determinando assim os pontos A e B (Fig.22).

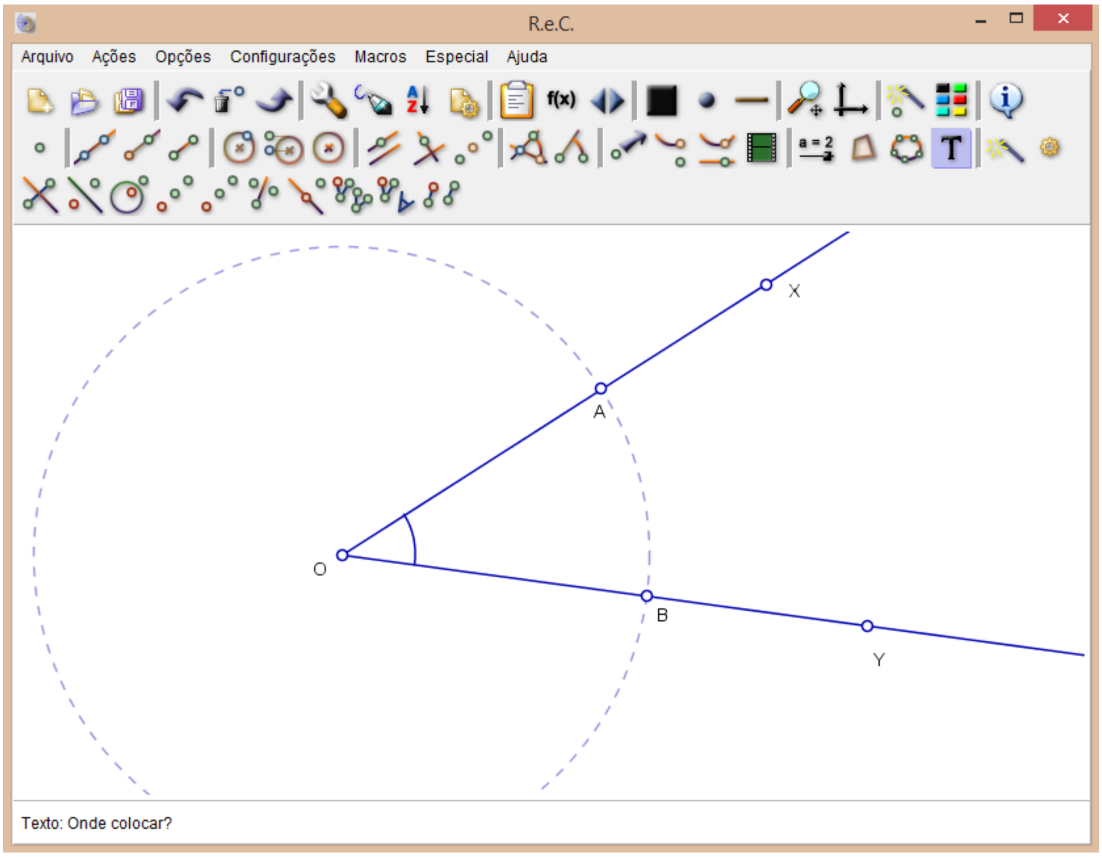
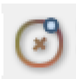


Figura 22: A Bissetriz: passo 2

- Com o ícone de círculo,  selecionado, construimos dois círculos de raio $\overline{AB}$, um com centro no ponto A e o outro no ponto B, determinando o ponto C em um dos pontos de interseção dos círculos construídos (Fig.23).

- Selecionando novamento no ícone da semirreta, , e clicando nos pontos O e C, determinamos a semirreta $\overrightarrow{OC}$ (Fig.24).

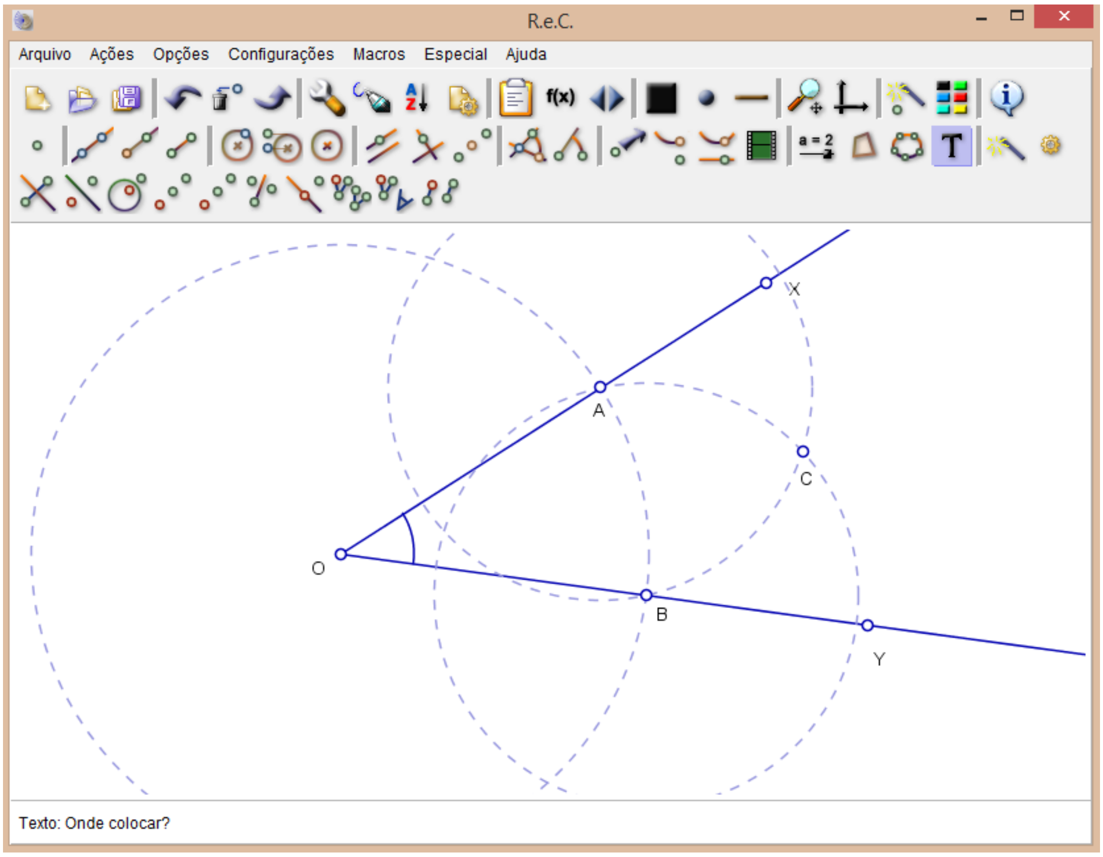


Figura 23: A Bissetriz: passo 3

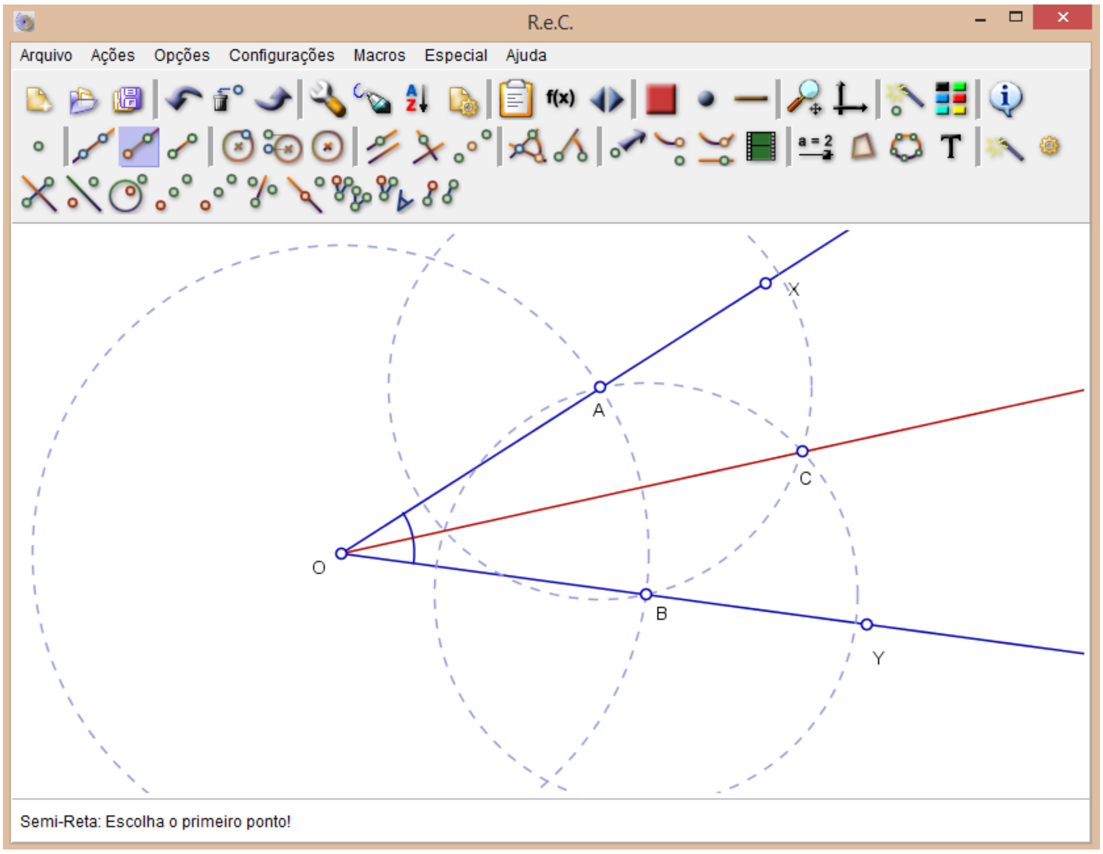


Figura 24: A Bissetriz: passo 4

A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$.

Justificativa: Pela construção feita, temos que $\Delta OAC \equiv \Delta OBC$, pelo caso LLL, temos $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, pois são o raio do círculo de centro em O, $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, são os raios dos círculos de centro em A e em B, e $\overline{OC}$ lado comum aos triângulos, temos portanto que $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$.

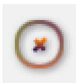
Clicando agora no ícone de mover ponto, , podemos modificar o ângulo construído, sendo mantida a bissetriz do ângulo.

1.9 Transporte de Ângulo

Vejamos como se transporta um ângulo de um lugar para outro. Suponhamos então que um ângulo θ de vértice em O é dado e que desejamos construir um ângulo $B\hat{A}C = \theta$, sendo dada a semirreta $\overrightarrow{AB}$.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone de ângulo, , para construirmos o ângulo θ qualquer e no ícone da semirreta, , para determinar os lados do ângulo (Fig.25).

- Clicamos no ícone do círculo de raio fixo, , para criar o círculo de centro em O, determinando assim, as interseções D e E nos lados do ângulo θ, observando a medida do raio do círculo criado, raio 3 por exemplo (Fig.26).

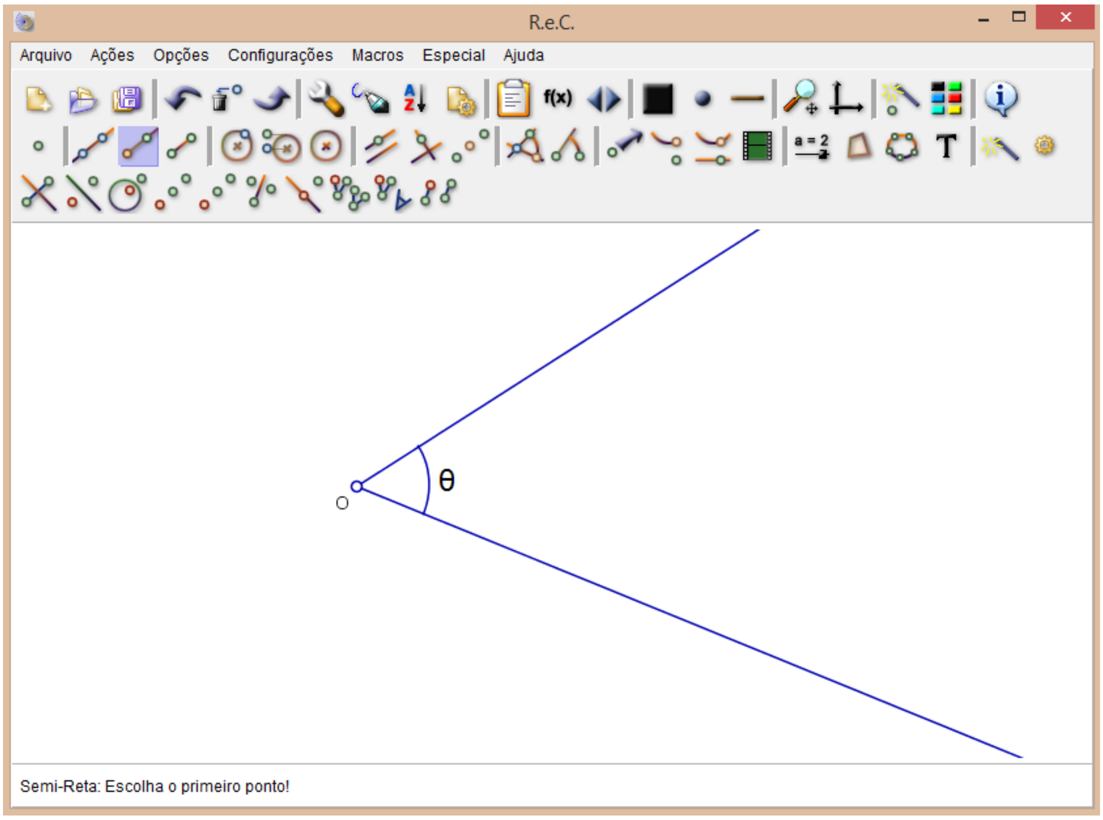


Figura 25: Transporte de Ângulo: passo 1

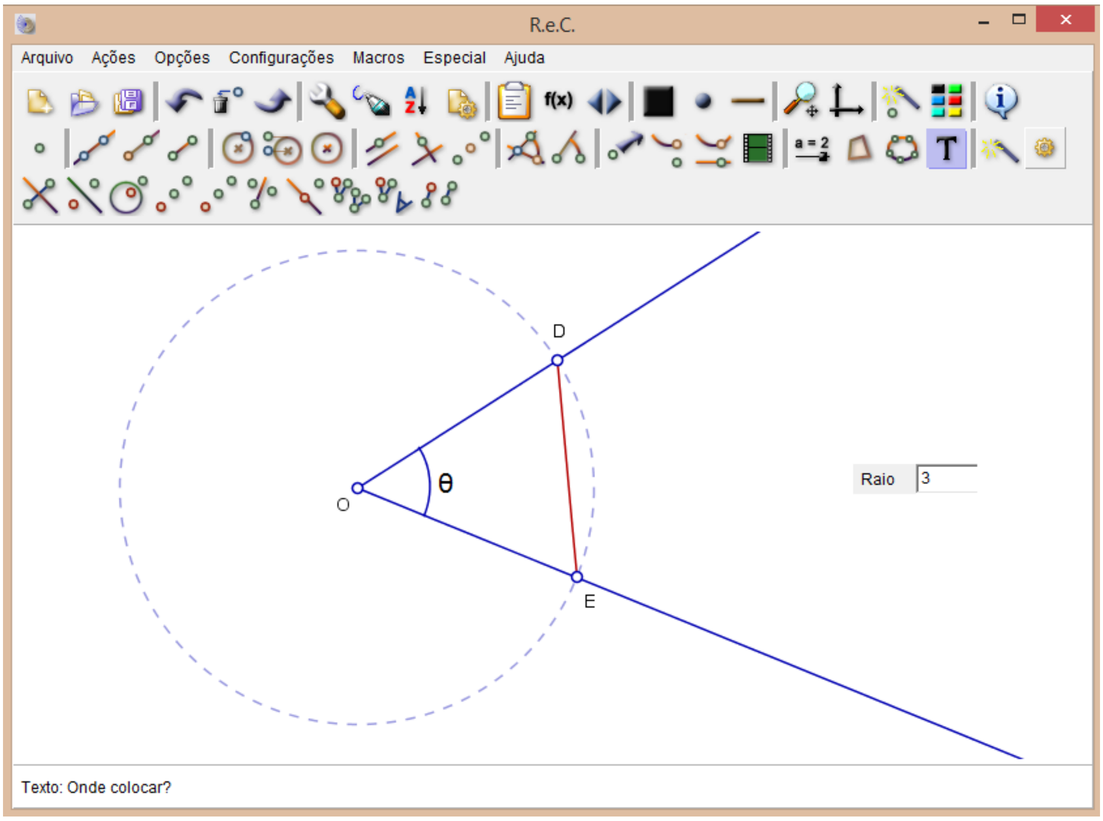


Figura 26: Transporte de Ângulo: passo 2

- Clicamos agora no ícone do segmento de reta, , para construir a segmento $\overline{AB}$, que será o segmento de reta suporte para onde transportamos o ângulo θ (Fig.27).

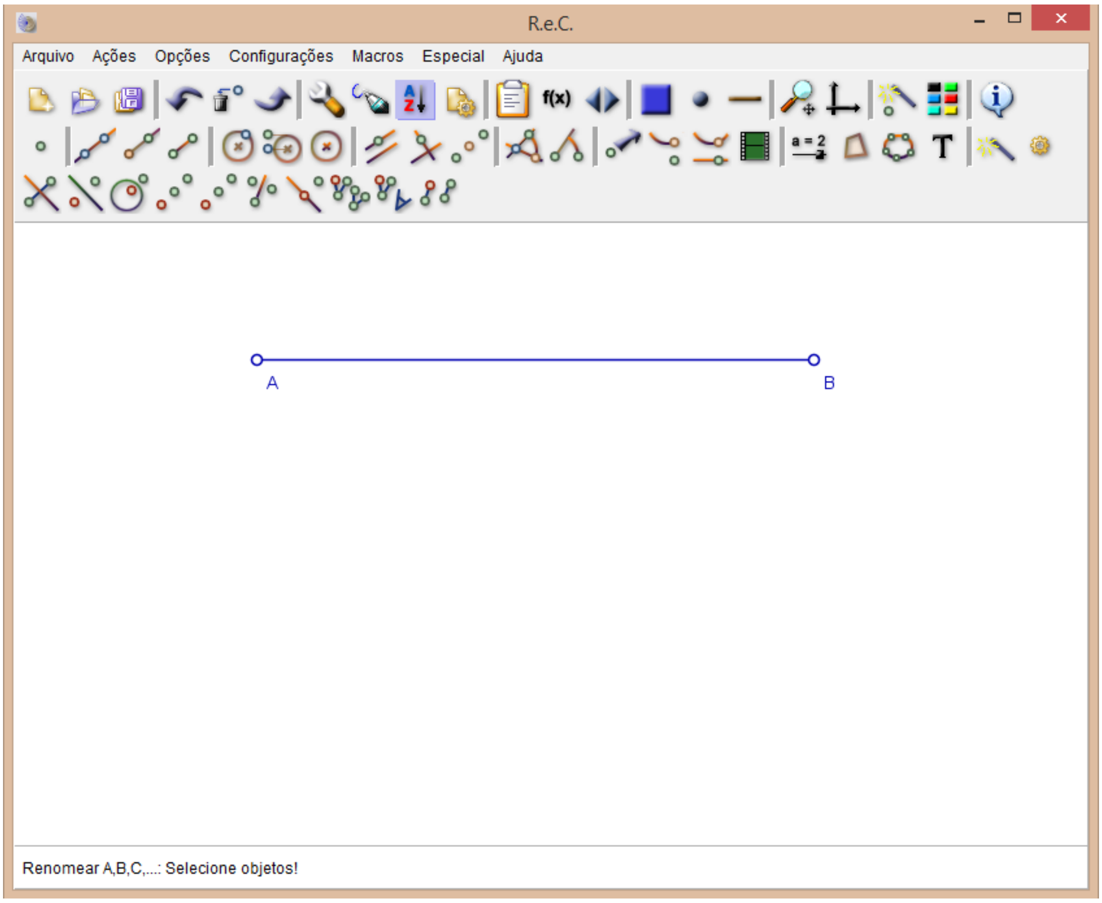
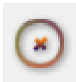


Figura 27: Transporte de Ângulo: passo 3

- Clicamos novamente no ícone do círculo de raio fixo, , e com centro em A, construímos o círculo com o mesmo raio do círculo construído anteriormente, no caso do exemplo, raio 3. Com isso determinamos o ponto F no segmento $\overline{AB}$. Agora construímos um círculo com centro no ponto F e com raio de mesma medida do segmento $\overline{DE}$ da Figura 26, e determinamos o ponto C em uma das interseções dos círculos de centro em A e em F (Fig.28).

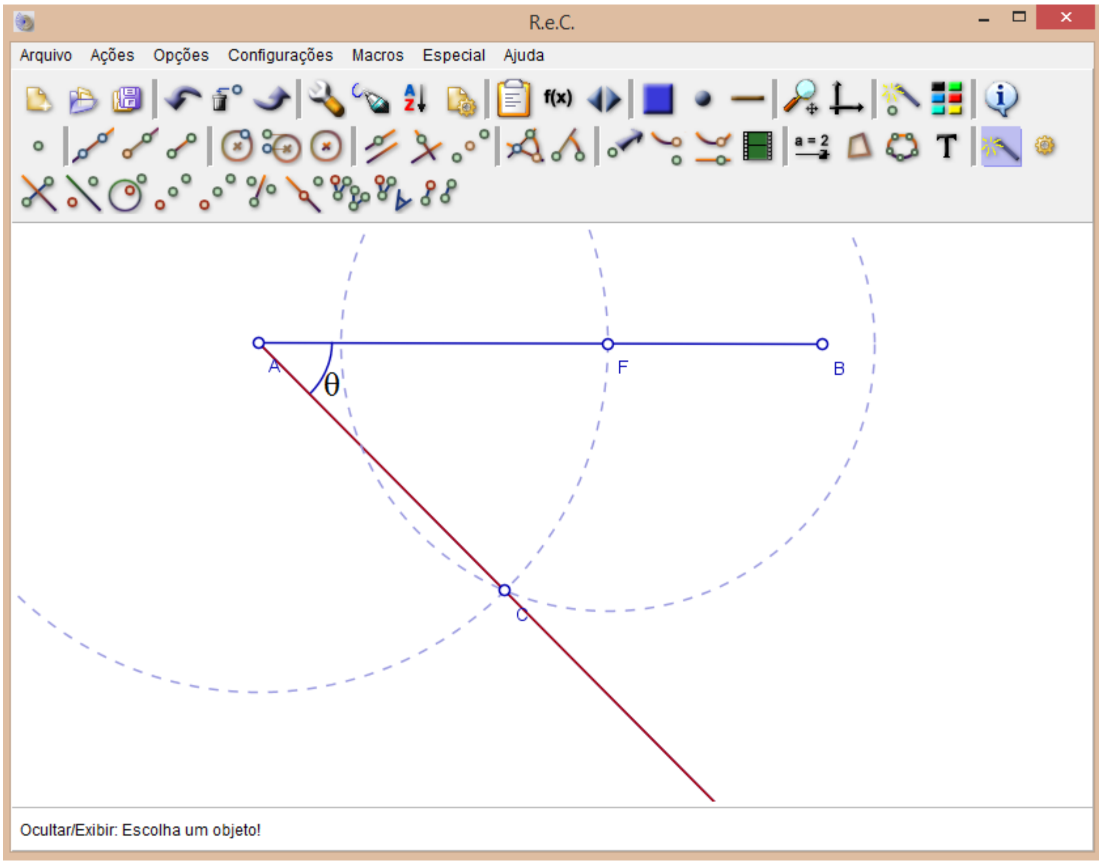


Figura 28: Transporte de Ângulo: passo 4

O ângulo $F\hat{A}C$ é o mesmo ângulo θ que desejamos transportar.

Justificativa: Por construção, os triângulos ΔDOE e ΔFAC são congruentes (caso LLL), $\overline{DO} \equiv \overline{FA}, \overline{EO} \equiv \overline{CA}$ e $\overline{DE} \equiv \overline{FC}$, como $F\hat{A}C = B\hat{A}C$, temos então que $D\hat{O}E = B\hat{A}C = \theta$.

1.10 O Arco Capaz

Considere dois pontos distintos, A e B sobre um círculo. Estes pontos determinam dois arcos no círculo. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $A\widehat{M}B = \theta$ é constante (Fig.29). Este arco é chamado *Arco Capaz* do ângulo θ sobre o segmento $\overline{AB}$.

O que desejamos é construir o arco capaz de um segmento dado, para um dado ângulo.

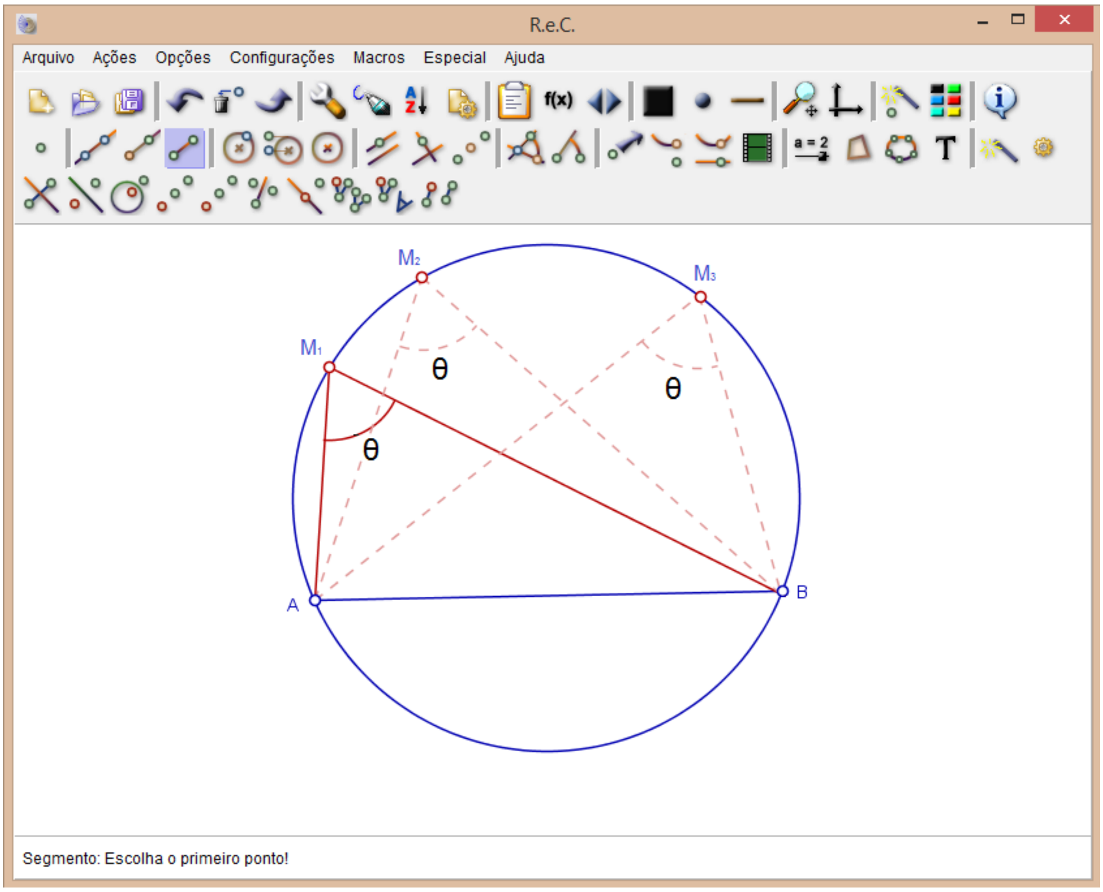
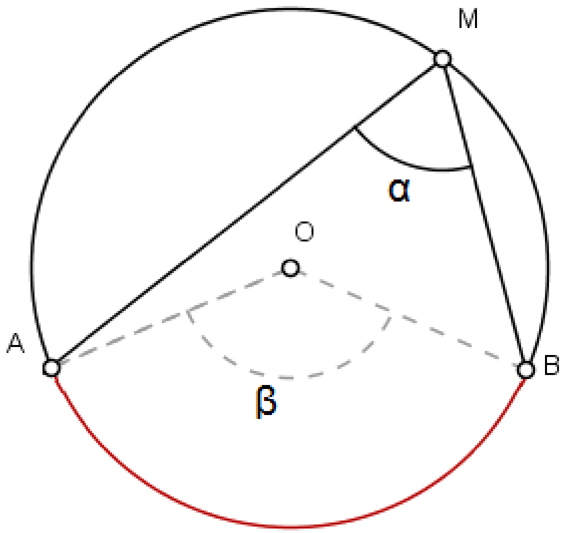


Figura 29: Arco Capaz

Para justificarmos a construção do arco capaz, utilizaremos a seguinte propriedade: *a medida do ângulo inscrito da circunferência é a metade da medida do ângulo central correspondente* (Fig.30).



$\beta = 2\alpha$

Figura 30: Ângulo Inscrito

Demonstração 1.10.1: Temos três casos a considerar:

1º caso: O centro O está em um dos lados do ângulo (Fig.31);

2º caso: O centro O é interno ao ângulo (Fig.32);

3º caso: O centro O é externo ao ângulo (Fig.33).

No 1º caso:

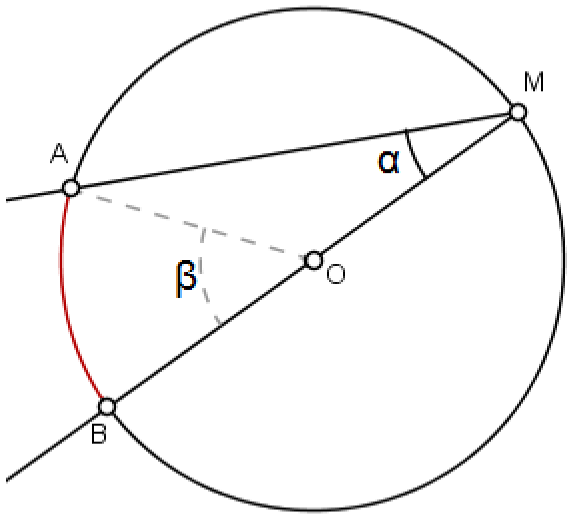


Figura 31: Medida do Ângulo Inscrito: 1º caso

Como $\overline{OA} \equiv \overline{OM}$, pois são raios de um mesmo círculo e o ΔOMA é isósceles, então os ângulos

$O\hat{A}M$ e $O\hat{M}A$ são iguais a α

Por outro lado, β é ângulo externo do ΔOMA, então

$\beta = O\hat{A}M + O\hat{M}A$

$\beta = \alpha + \alpha \Longrightarrow \beta = 2\alpha$.

No* $2^{\underline{o}}$ *caso:

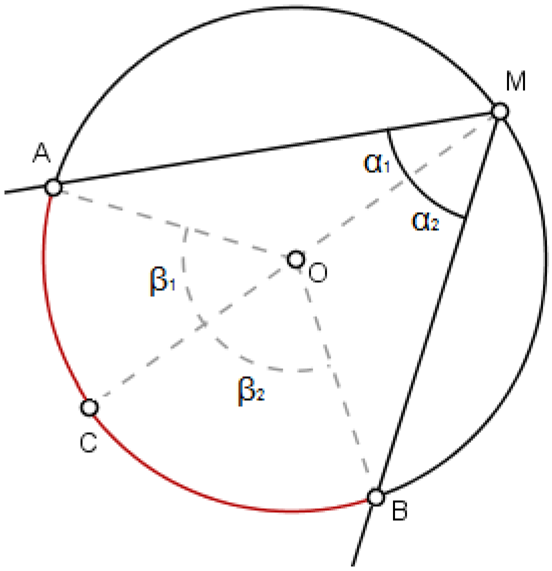


Figura 32: Medida do Ângulo Inscrito: 2º caso

Seja C o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{MO}$ com o círculo e, sendo $A\widehat{M}C = \alpha_1$, $A\widehat{O}C = \beta_1$, $B\widehat{M}C = \alpha_2$, $B\widehat{O}C = \beta_2$ e $(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha$, $(\beta_1 + \beta_2) = \beta$, temos que:

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1, (\hat{a}ngulo\ externo\ do\ \Delta OMA) \\ \beta_2 = 2\alpha_2, (\hat{a}ngulo\ externo\ do\ \Delta OMB) \end{cases}$$'

somando os termos das linhas temos,

$$\beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$
$$\beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\beta = 2\alpha.$$

No 3º caso:

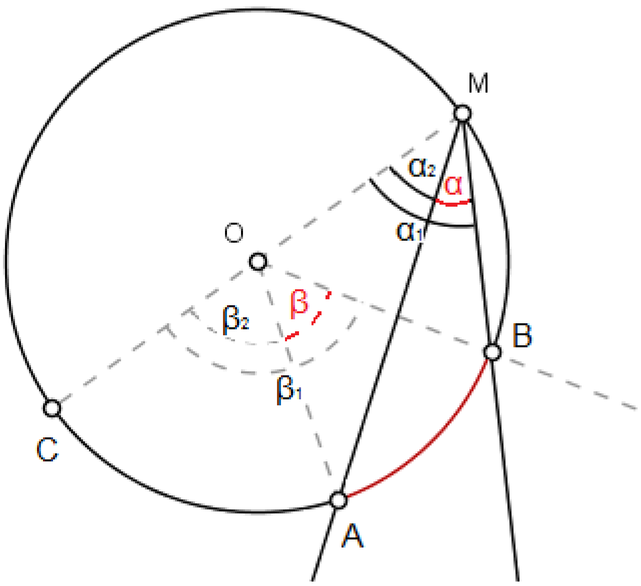


Figura 33: Medida do Ângulo Inscrito: 3º caso

Seja C o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{MO}$ com o círculo e, sendo $B\widehat{M}C = \alpha_1,\ B\widehat{O}C = \beta_1,\ A\widehat{M}C = \alpha_2,\ A\widehat{O}C = \beta_2$ e $(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha,\ (\beta_1 - \beta_2) = \beta,$ temos que:

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1, (\hat{a}ngulo\ externo\ do\ \Delta BOM) \\ \beta_2 = 2\alpha_2, (\hat{a}ngulo\ externo\ do\ \Delta AOM)' \end{cases}$$

subtraindo os termos das linhas temos,

$$\beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2$$
$$\beta_1 - \beta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$\beta = 2\alpha.$$

Para a construção do arco capaz, utilizamos apenas as construções já vistas, que são o transporte de ângulo, para transportar o ângulo θ para o segmento $\overline{AB}$, a mediatriz de $\overline{AB}$ e a perpendicular.

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Assim, para a construção do arco capaz precisamos de um ângulo θ (Fig.34) e de um segmento $\overline{AB}$ (Fig.35) dado.

- Para o segmento $\overline{AB}$ transportamos o ângulo θ com vértice no ponto A, $B\hat{A}C = \theta$ (transporte de ângulo). Ou construímos o ângulo θ por meio do ícone de construção de ângulo, , pois assim podemos mover o ângulo sem perder a propriedade do ângulo capaz (Fig.36).

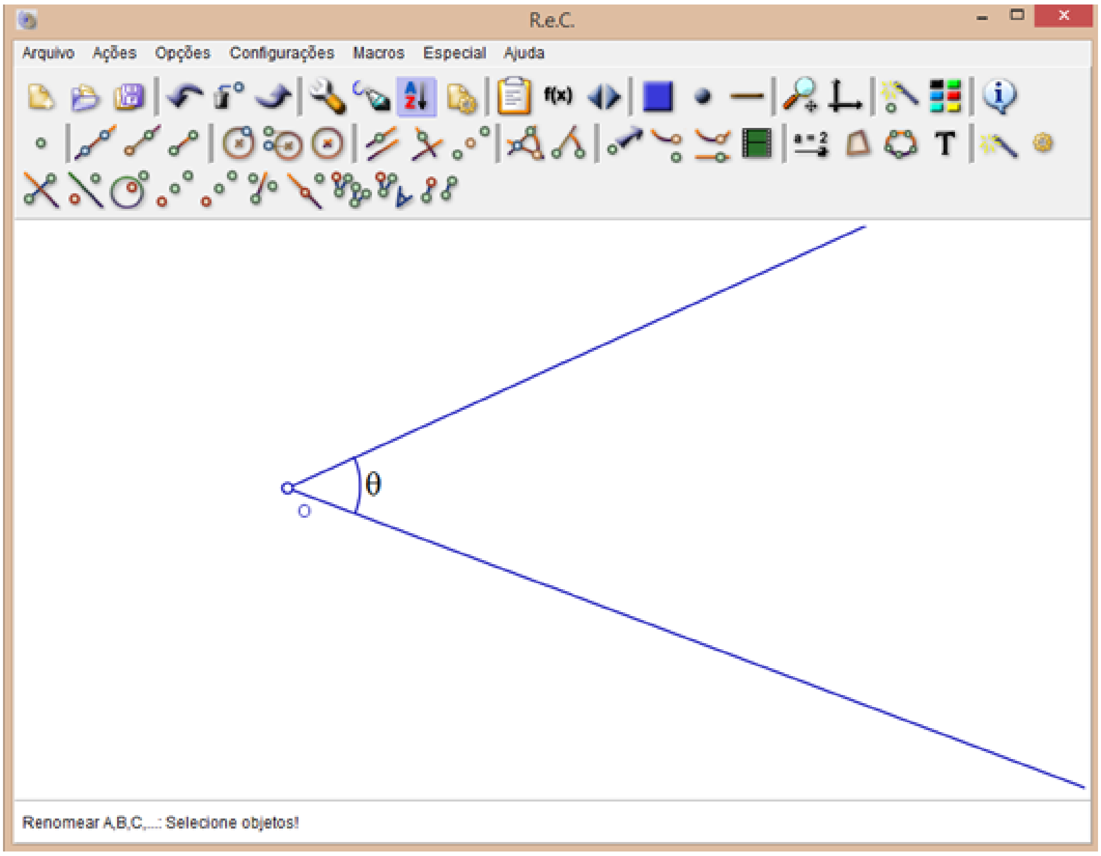


Figura 34: Arco Capaz: passo 1

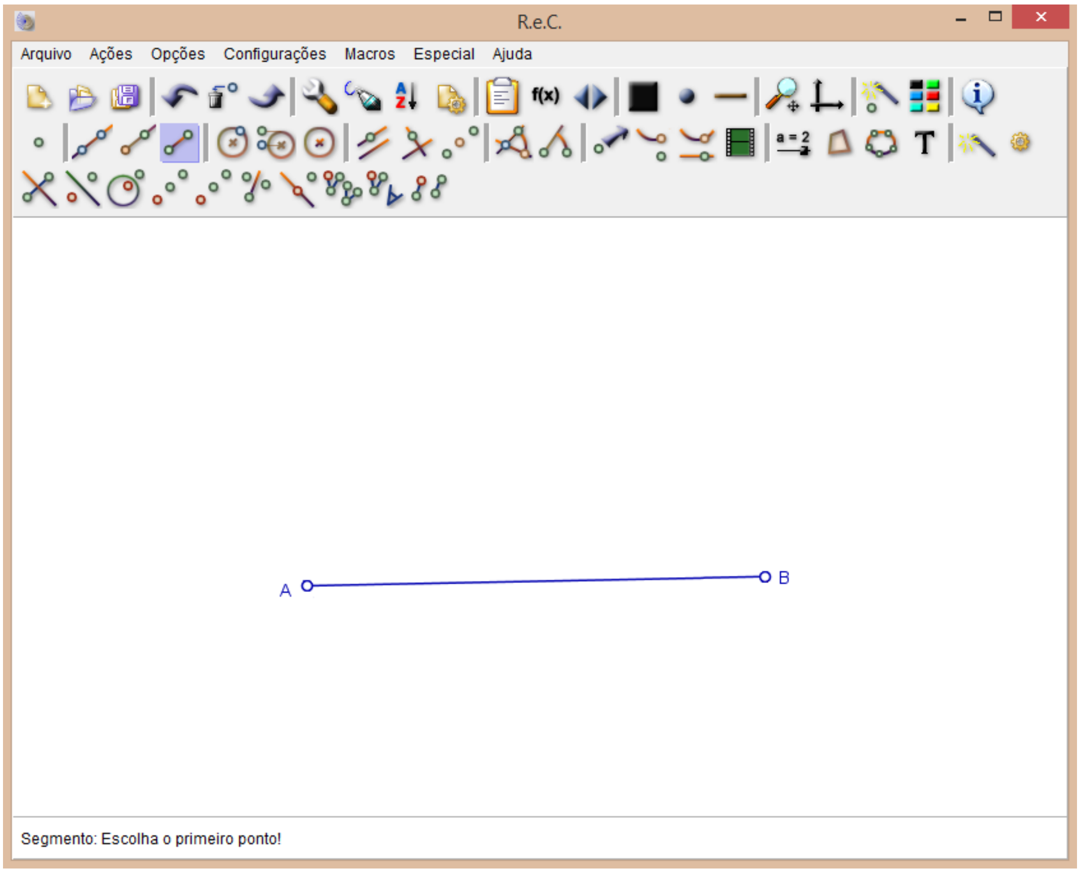


Figura 35: Arco Capaz: passo 2

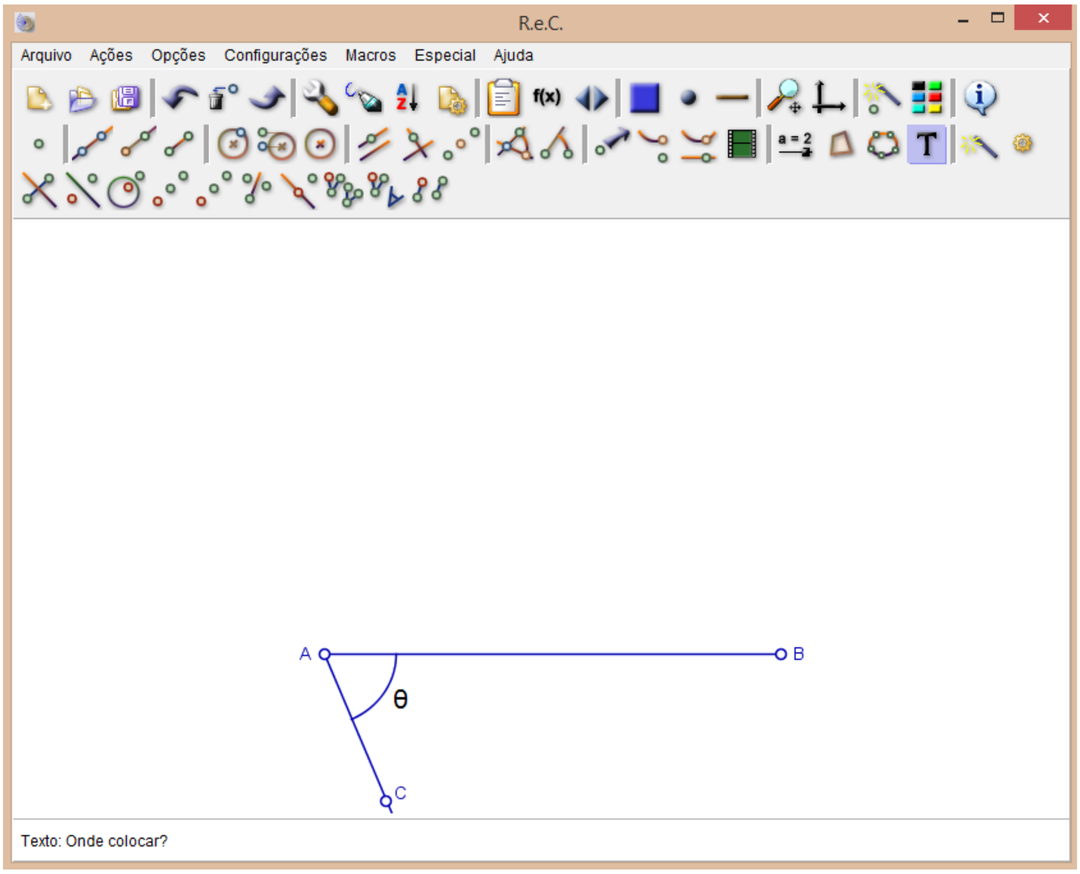


Figura 36: Arco Capaz: passo 3

- Clicamos no ícone de reta perpendicular, , e construímos a reta r perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AC}$ passando pelo ponto A (Fig.37).

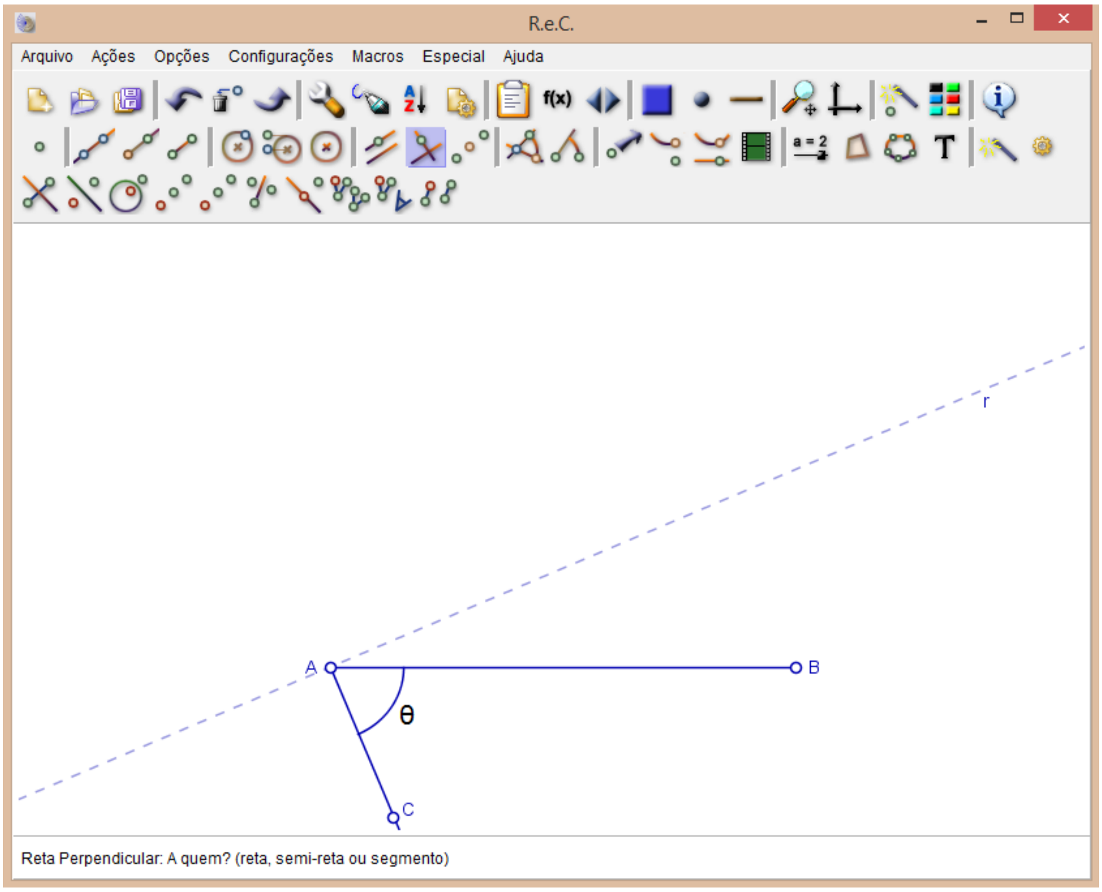


Figura 37: Arco Capaz: passo 4

- Clicamos agora no ícone do ponto médio, , para determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Clicando em A e em B, o ponto N, médio, é determinado (Fig.38).

- Clicamos novamente no ícone da perpendicular, , para construir a reta s perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo ponto N (mediatriz). Há uma interseção entre as retas r e s, que indicamos por O (Fig.39).

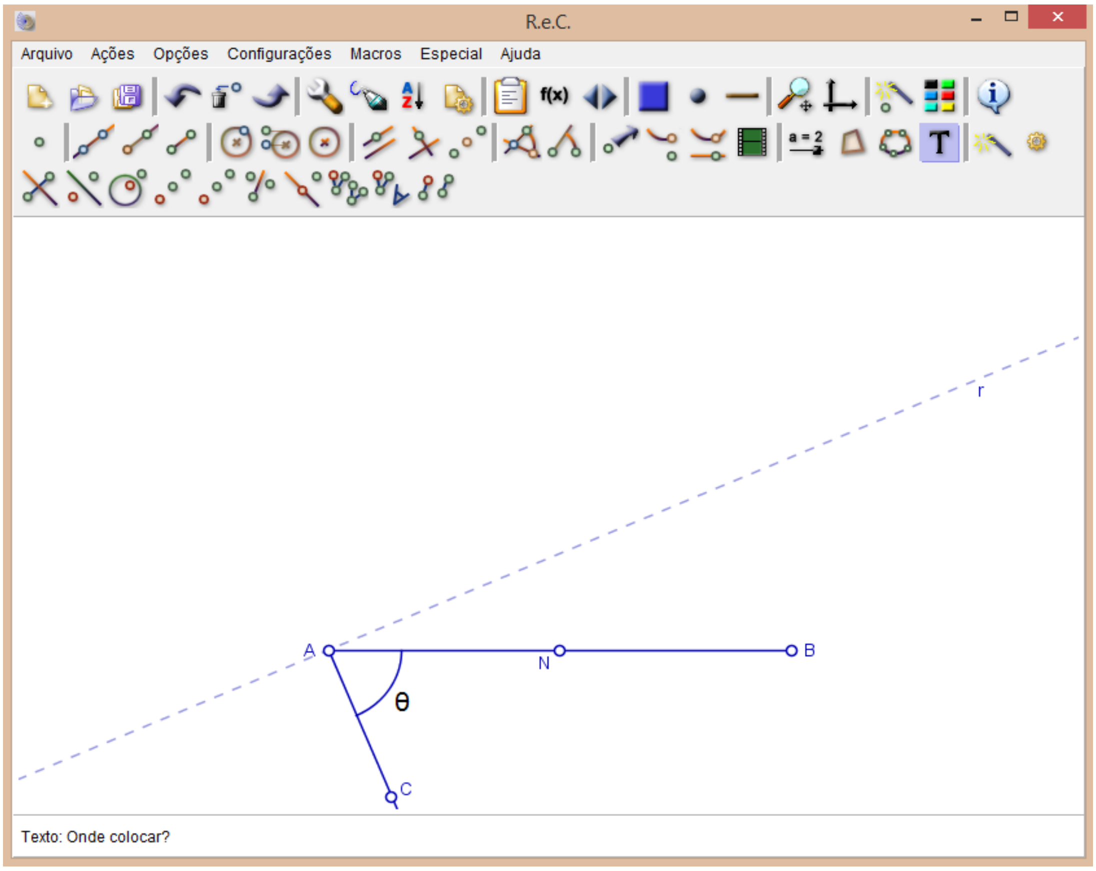


Figura 38: Arco Capaz: passo 5

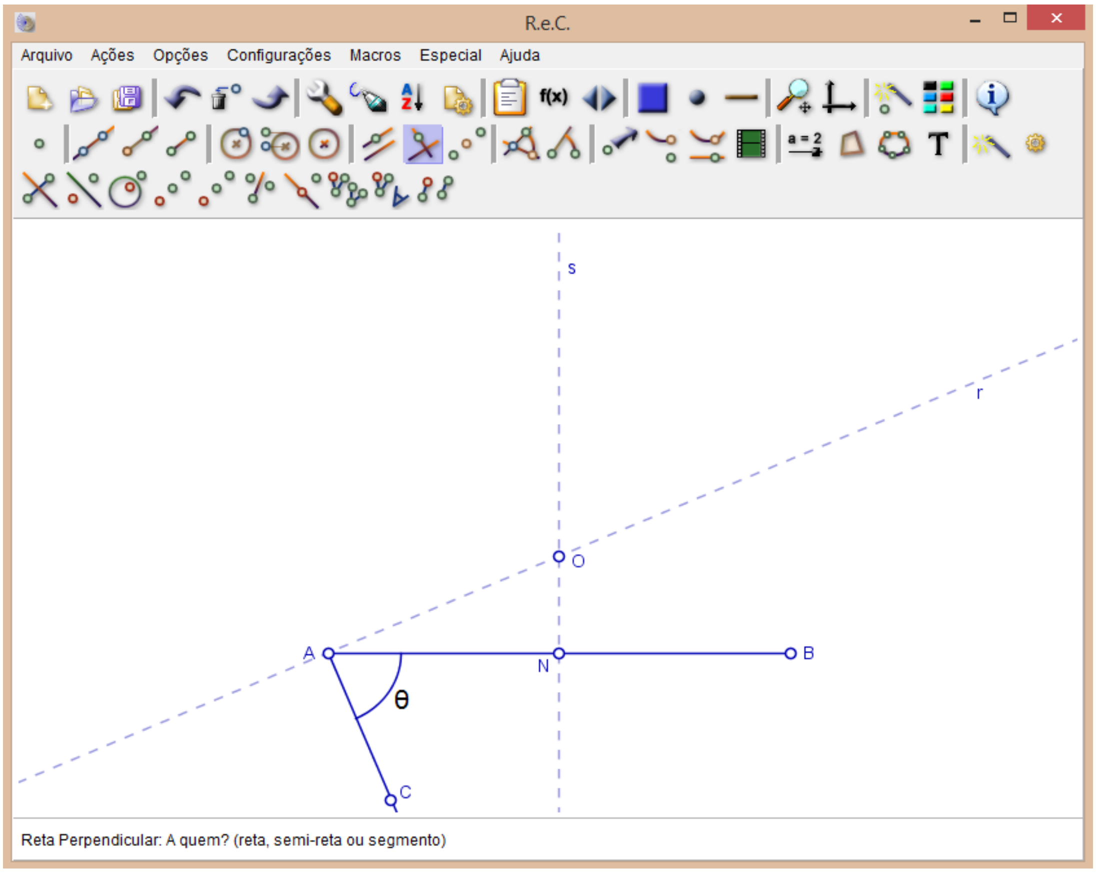


Figura 39: Arco Capaz: passo 6

- Selecionando o ícone do círculo, , e clicando no ponto O e em seguida no ponto A, determinamos o círculo de centro O e raio $\overline{OA}$ (Fig.40).

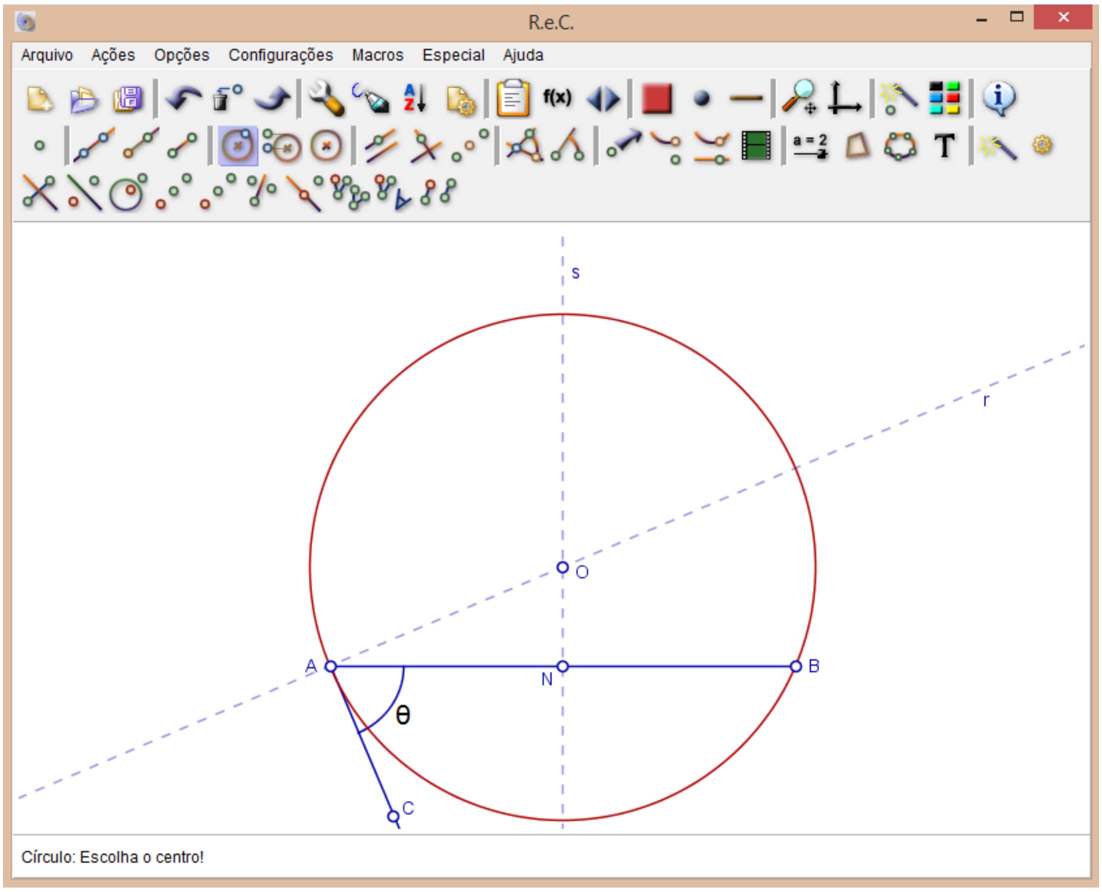


Figura 40: Arco Capaz: passo 7

Na Figura 41 observamos o arco $\widehat{AMB}$ capaz de ângulo θ.

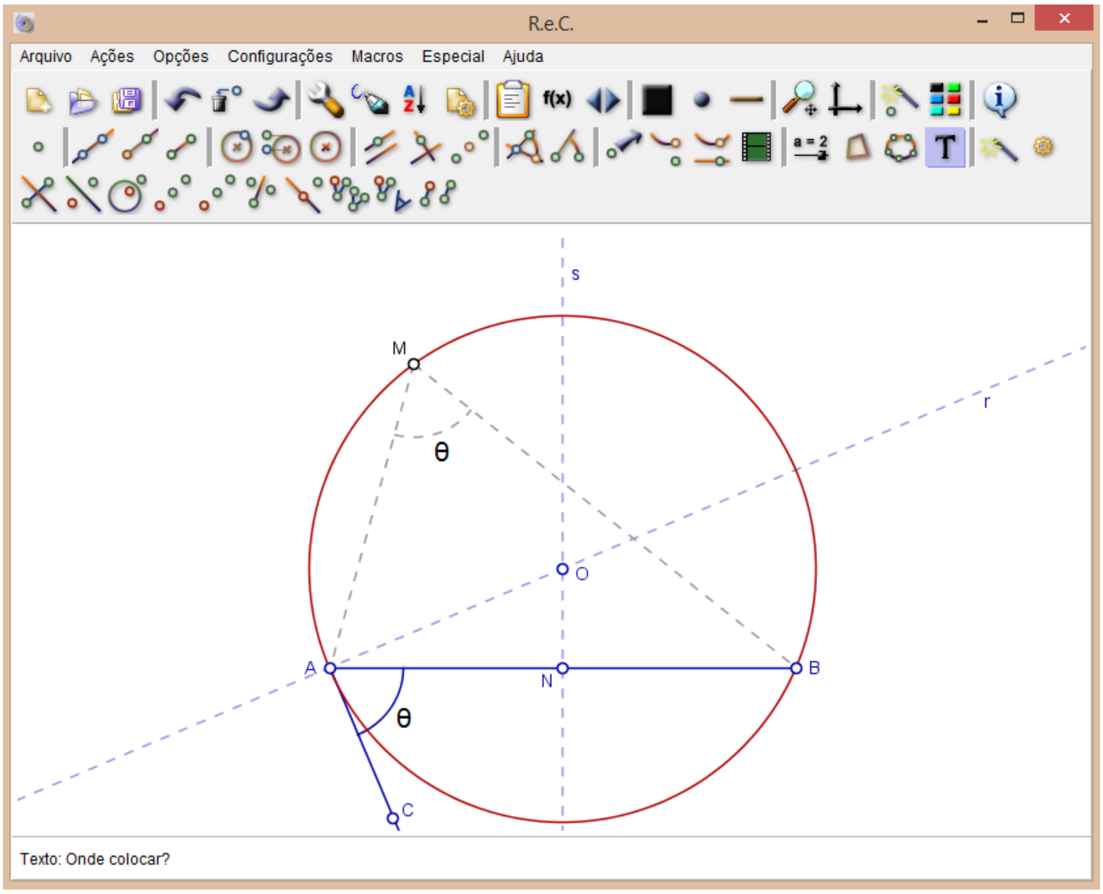


Figura 41: O Arco Capaz

Justificativa: Observe que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares por construção, temos então que:

$$O\hat{A}C = 90°$$

$$O\hat{A}N + N\hat{A}C = 90°.$$

Como $N\hat{A}C = \theta$, obtemos

$$O\hat{A}N + \theta = 90°$$

$$O\hat{A}N = 90 - \theta.$$

No triângulo ΔAON, também por construção $O\hat{N}A$ é reto, então

$$O\hat{A}N + A\hat{N}O + N\hat{O}A = 180°$$

$$(90° - \theta) + 90° + N\hat{O}A = 180°$$

$$N\hat{O}A = \theta.$$

Como o segmento $\overline{ON}$ é altura do triângulo isósceles ΔAOB, então $N\hat{O}A = N\hat{O}B$, isso implica que:

$$A\hat{O}B = N\hat{O}A + N\hat{O}B$$

$$A\hat{O}B = \theta + \theta$$

$$A\hat{O}B = 2\theta.$$

Portanto, como a medida do ângulo inscrito ao círculo é a metade da medida do ângulo central correspondente, temos para qualquer ponto M do arco $\widehat{AMB}$ construído, $A\hat{M}B = \theta$.

Podemos também utilizar a função de mover ponto, , para fazer uma verificação das propriedades do arco capaz.

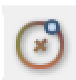
1.11 Ângulo de $60°$

O ângulo de $60°$ é de fácil construção e seu procedimento segue da seguinte forma.

<u>Ideia da construção geométrica:</u> Dado um segmento $\overline{AB}$, construímos dois círculos de centros em A e em B, ambos os raios medindo $\overline{AB}$. Em uma das interseções dos círculos marcamos o ponto C, temos então o ângulo $C\hat{A}B = 60°$.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone de segmento de reta, , para construirmos o segmento $\overline{AB}$ dado (Fig.42).

- Selecionando o ícone de círculo, , construímos dois círculos, um com centro em A e um ponto da circunferência em B, e outro com centro em B e um ponto da circunferência em A, marcamos então o ponto C em uma das interseções desses dois círculos (Fig.43).

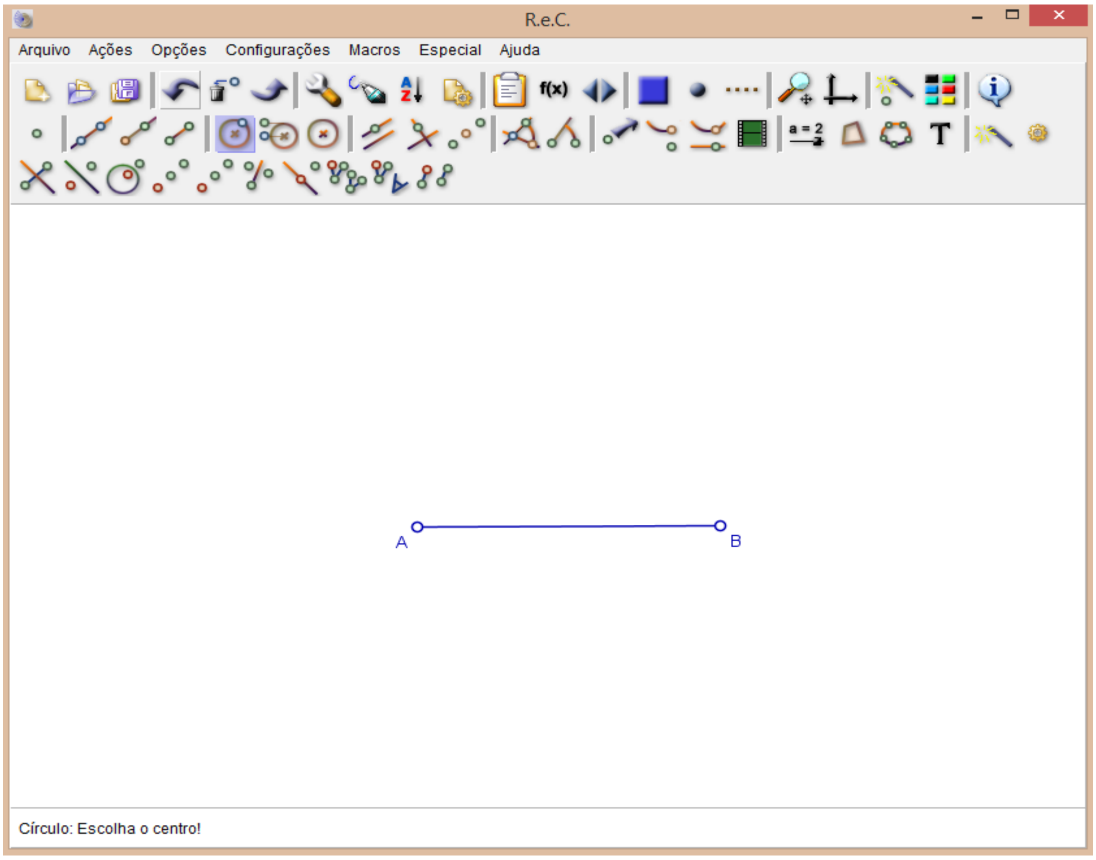


Figura 42: Ângulo de 60°: passo 1

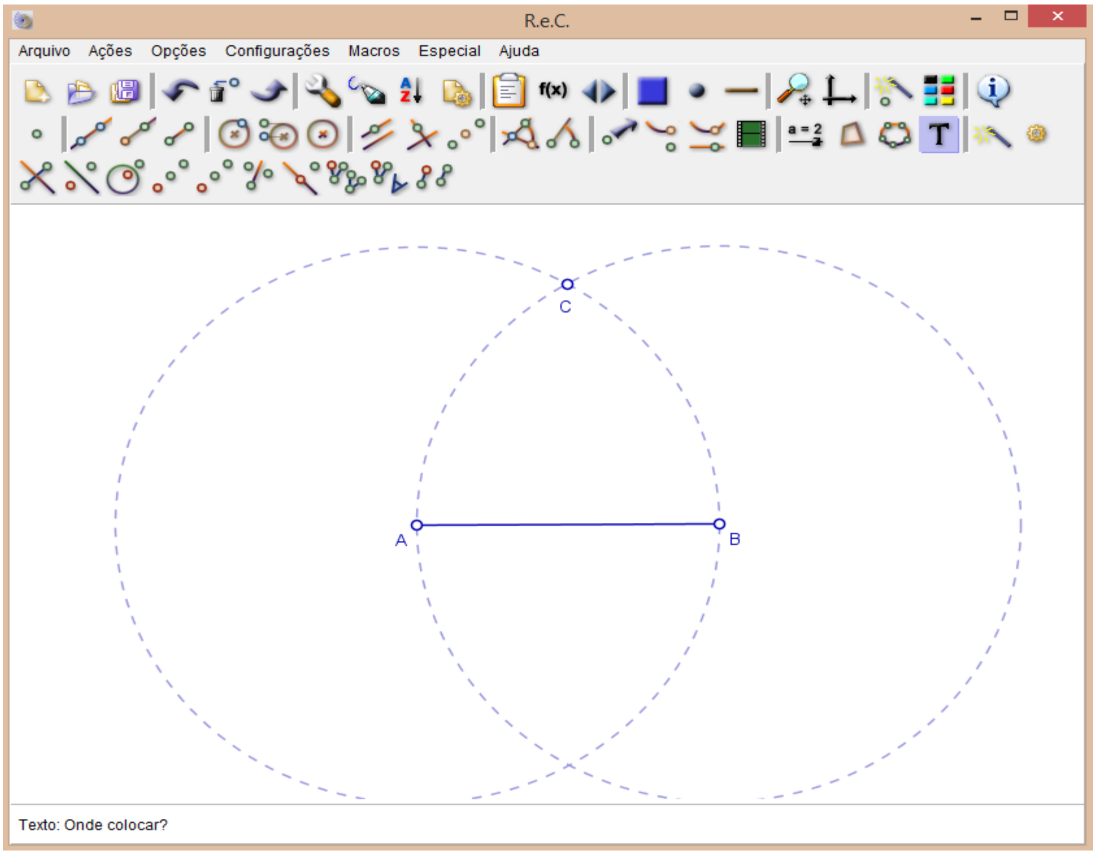


Figura 43: Ângulo de 60°: passo 2

- Clicando agora no ícone de segmento de reta,  e clicamos nos pontos A e C, determinando assim o segmento $\overline{AC}$ (Fig.44).

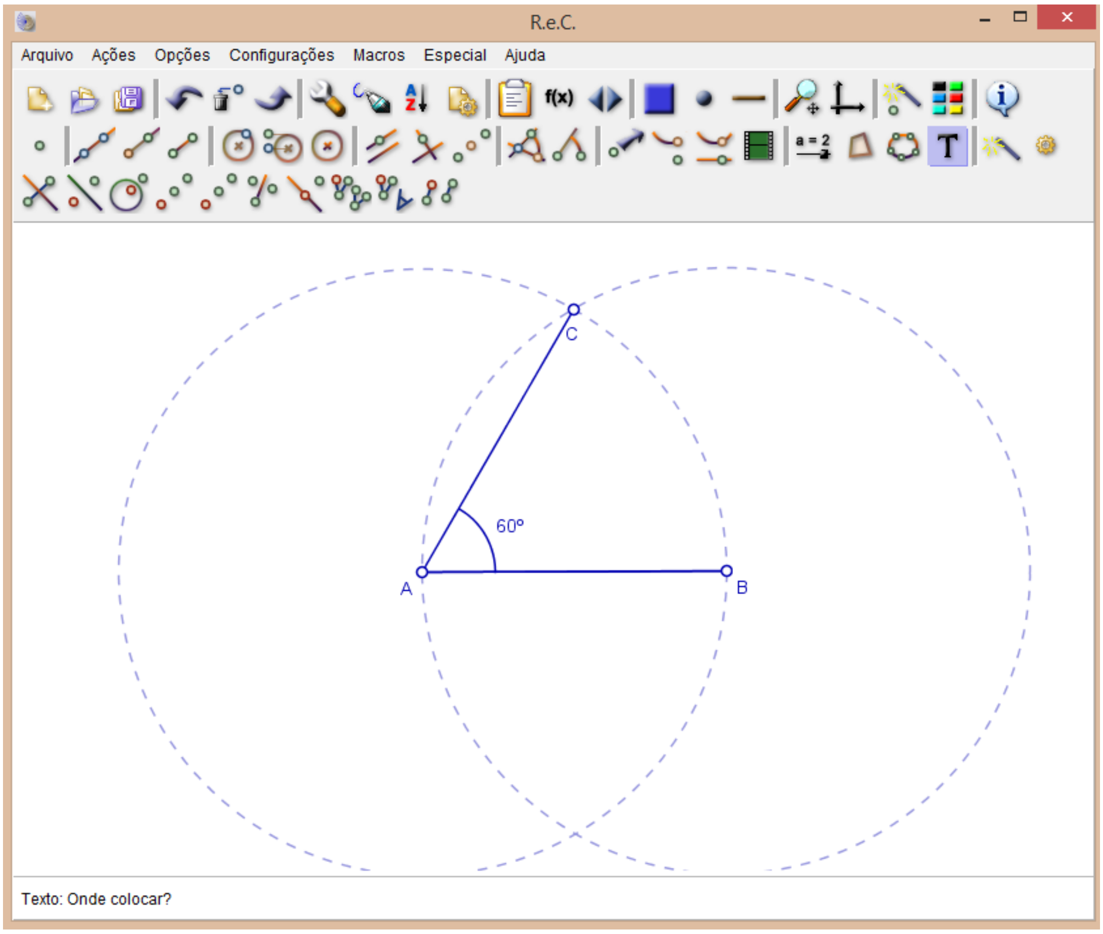
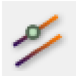
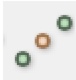


Figura 44: Ângulo de $60°$*: passo 3*

Assim, o ângulo construído $B\hat{A}C = 60°$.

Justificativa: O ΔABC por construção é equilátero, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, pois são os raios dos círculos construídos, então todos os seus ângulos medem $60°$, isso implica que $B\hat{A}C = 60°$.

Até então, já vimos a construção de retas perpendiculares, retas cujo ângulo formado entre elas é de $90°$, construção da bissetriz, que divide um ângulo em dois ângulos congruentes, o transporte de ângulos e a construção do ângulo de $60°$. Com estes quatro métodos de construção, podemos também construir os ângulos de $15°$, $30°$, $45°$, $75°$, $105°$, $120°$, $135°$ e seus múltiplos.

Com os procedimentos de construção de perpendiculares, paralelas e do ponto médio bem consolidados podemos, para agilizar as construções, utilizar os ícones da perpendicular , da paralela  e do ponto médio , assim como já foi utilizado na construção do arco capaz.

1.12 Exemplos

A seguir apresentamos alguns exemplos que podem ser solucionados com as construções geométricas. Exercícios que requer do aluno não apenas o conhecimento de geometria, mas também os procedimentos da construção geométrica, como por exemplo, a situação proposta no início deste capítulo.

Exemplo 1.12.1: Na cidade de Morrinhos – Go, um professor de Matemática ministra aulas nos colégios A, B e C, conforme a Figura 45. Ele quer alugar uma casa que deve se encontrar num ponto P, tal que a distância desta casa aos três colégios venha a ser a mesma. O problema consiste em ajudar o professor a encontrar tal lugar. Uma solução para este problema, à luz das construções geométricas via régua e compasso, é apresentado mais adiante.

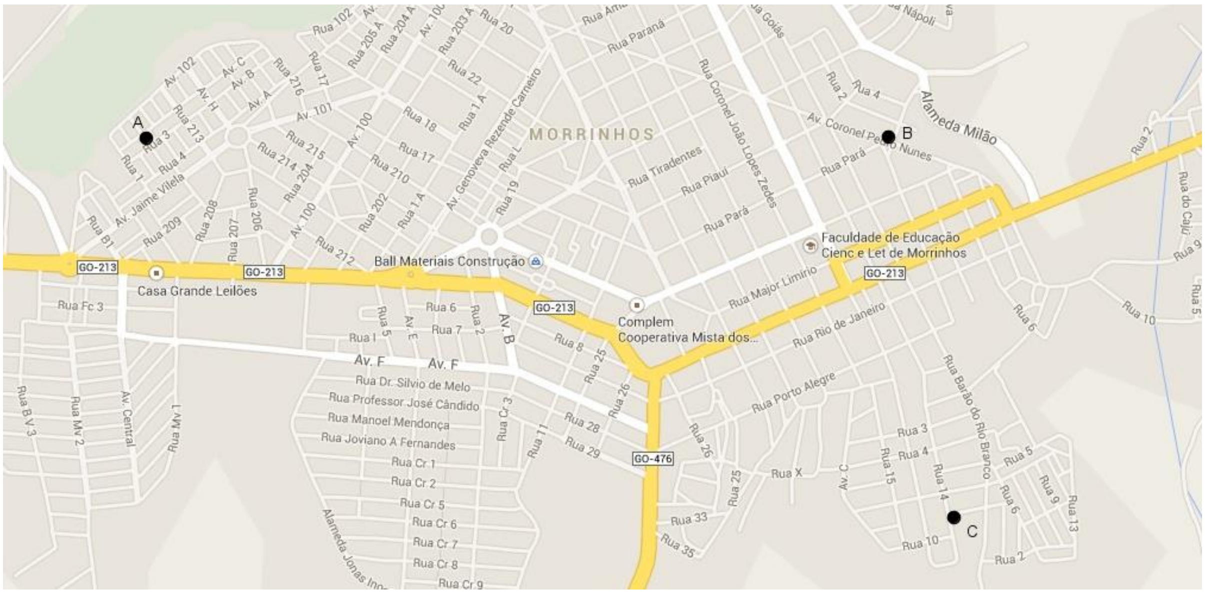


Figura 45: Cidade de Morrinhos

Para a solução deste problema devemos ter em mente as seguintes questões e perguntas: Q: Qual a solução desejada para este exercício? R: Encontrar um ponto em que a distância deste ponto aos pontos A, B e C, que representam as três escolas, seja a mesma.

Se fossem apenas dois colégios, A e B, esta casa deveria estar posicionada no ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Como são três colégios não colineares, devemos encontrar uma casa, um ponto, que esteja a igual distância dos três colégios. Este ponto então é o centro do círculo que possui os pontos A, B e C em sua circunferência. Então devemos inscrever o triângulo ΔABC no círculo de raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, onde O é o centro deste círculo, onde deve estar posicionada a casa desejada.

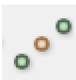
Outras questões agora vêm em mente: Q: Qual o conhecimento de geometria pode me fornecer o centro deste círculo? R: As mediatrizes.

Mediatriz: *As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.*

O encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é o *Circuncentro* do triângulo. *Circuncentro* é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

Dado um triângulo ΔABC, devemos em primeiro instante, determinar os pontos médio de seus lados.

- Clicamos no ícone de ponto médio, , e clicamos nos vértices A e B para determinar o ponto médio M, clicamos nos pontos A e C para determinar o ponto médio N e clicamos nos pontos B e C para determinar o ponto médio Q (Fig.46).

- Clicamos no ícone de reta perpendicular, , e construímos as perpendiculares aos lado $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$, que passam pelos pontos M, N e Q, respectivamente e marcamos o ponto de interseção O (Fig.47).

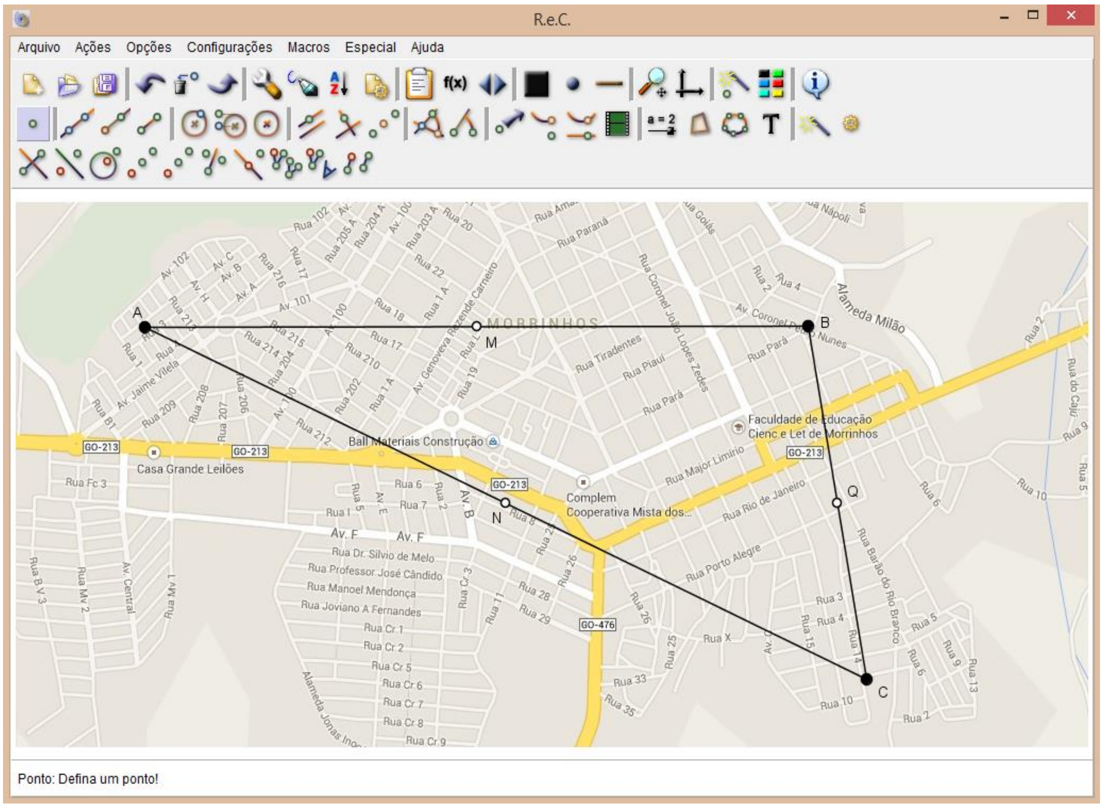


Figura 46: Resolução da Mediatriz: passo 1

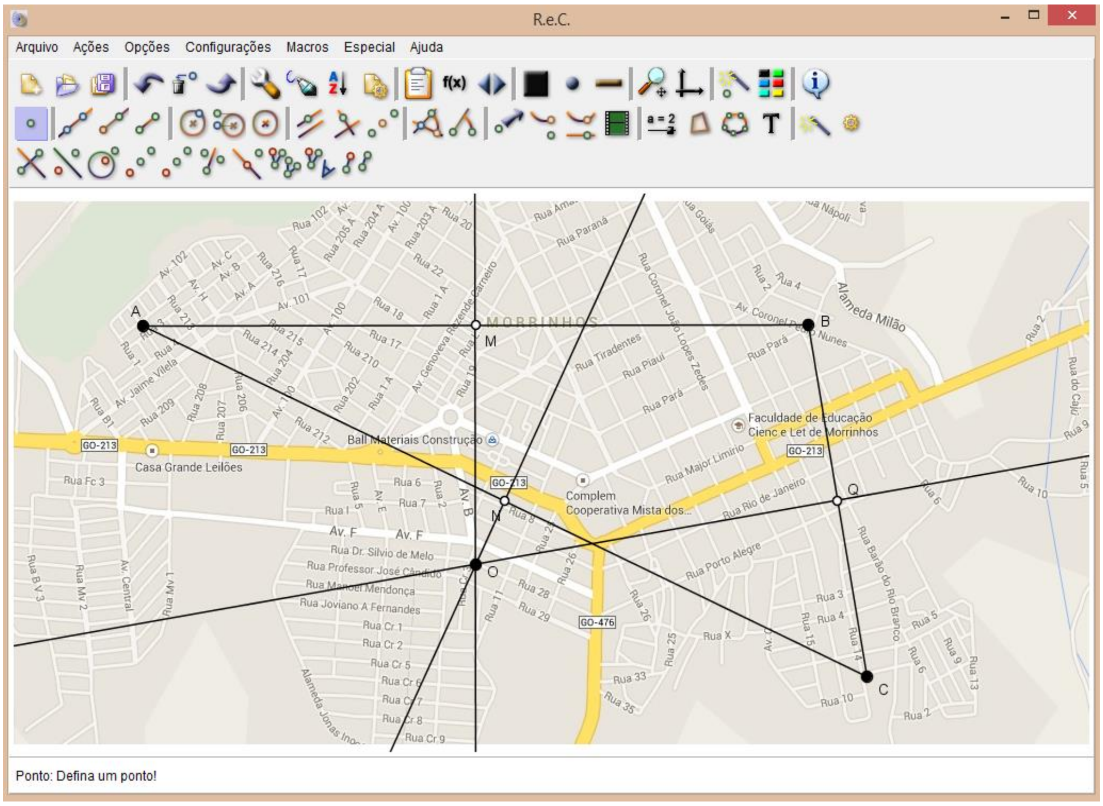


Figura 47: Resolução da Mediatriz: passo 2

O ponto de interseção O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC (Fig.48).

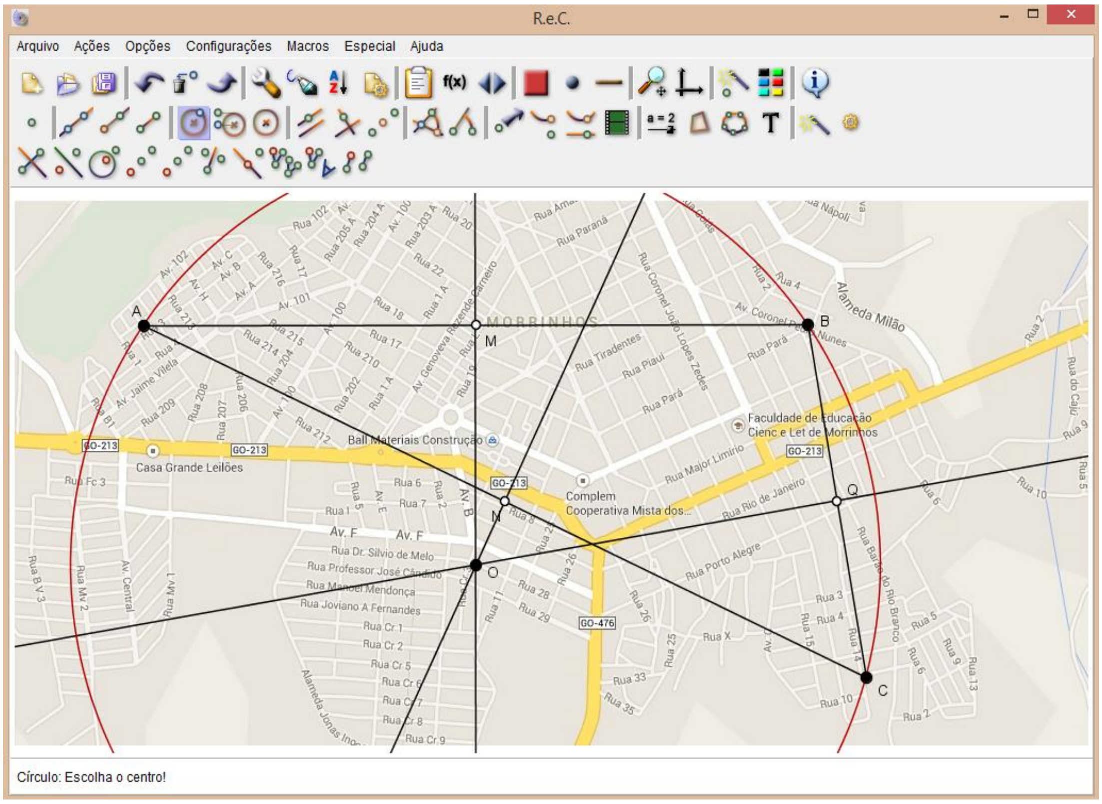


Figura 48: Resolução da Mediatriz: passo 3

Este ponto O é o ponto onde se deve alugar a casa, pois O é o centro do círculo de raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Observe que para determinar o centro da circunferência circunscrita a um triângulo qualquer, basta com conhecermos apenas duas mediatrizes.

Segue alguns outros exemplos que motivam as construções geométricas.

Exemplo 1.12.2: Um carro de bombeiros está no ponto A e parte para apagar um incêndio no ponto B; como está vazio, deve abastecer-se de água no rio. Desenhe o caminho mais curto que o veículo deve percorrer (Fig.49).

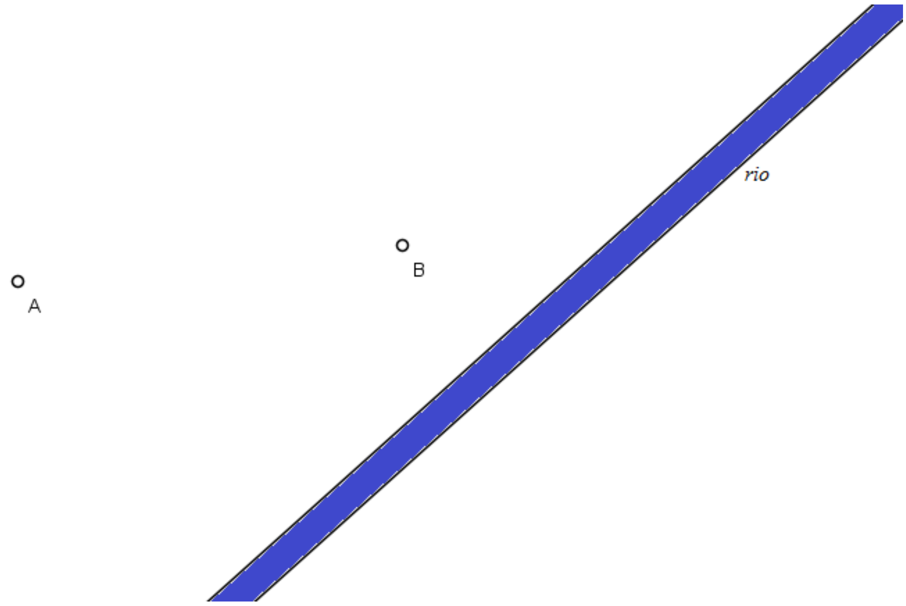
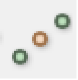


Figura 49: Exemplo do Carro de Bombeiro

A menor distância entre dois pontos é uma reta. Como no caso o carro de bombeiros deve ir primeiro até o rio para abastecer-se de água e depois ir até o ponto B, onde se localiza o incêndio, não temos como construir uma reta para termos a menor distância desta forma.

Devemos então imaginar o ponto B refletido do outro lado do rio, um ponto B' de distância do rio igual a distância do ponto B ao rio. Pois assim poderíamos imaginar o segmento $\overline{AB'}$.

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Clicamos no ícone do ponto médio,  , e determinamos o ponto médio M às margens do rio (Fig.50).

- Com o ponto médio M determinado, clicamos no ícone de reta paralela, , para construímos a reta s paralela às margens do rio que passa pelo ponto M (Fig.51).

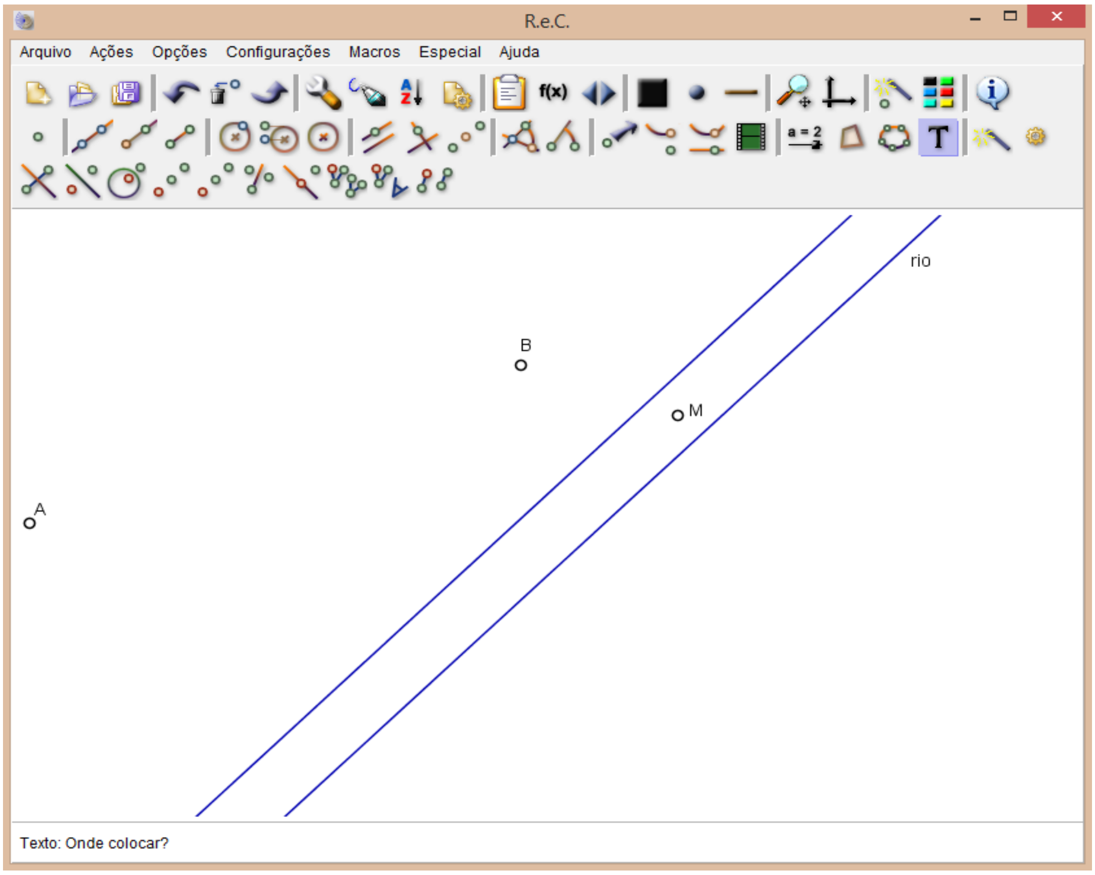


Figura 50: Resolução do Exemplo do Carro de Bombeiro: passo 1

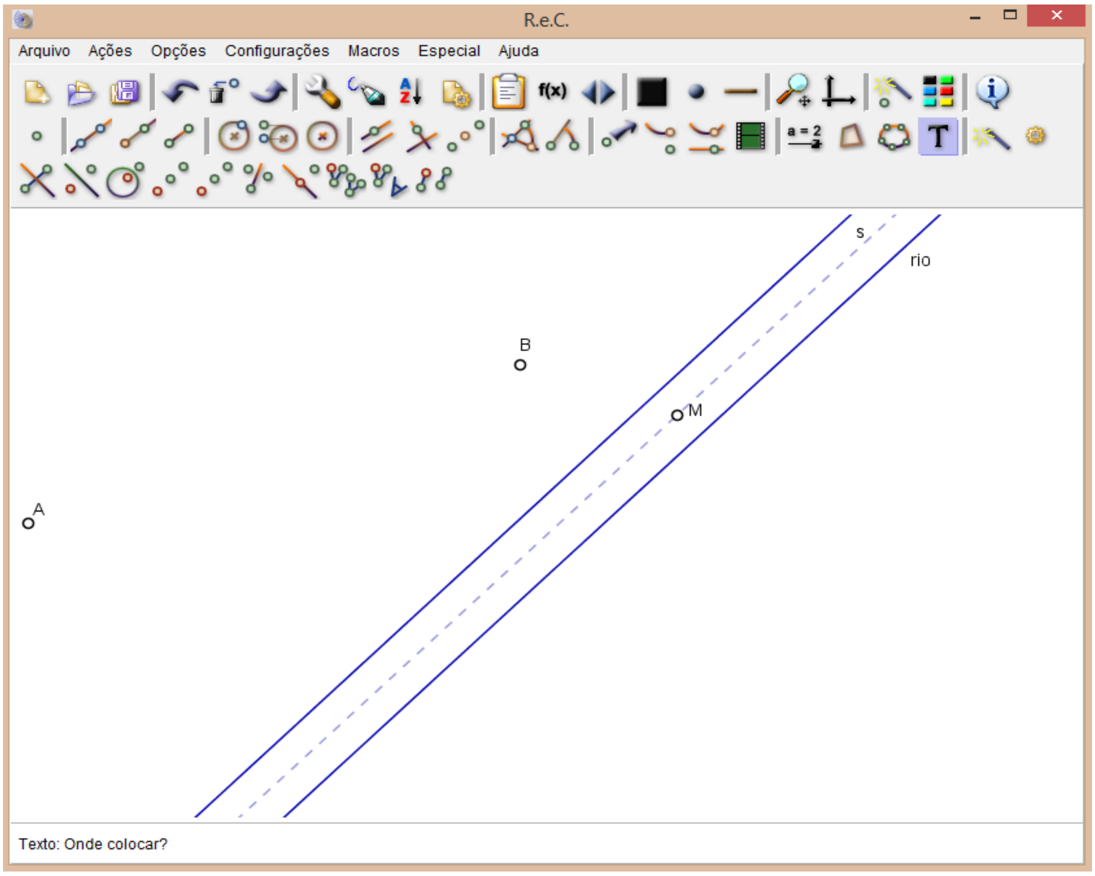


Figura 51: Resolução do Exemplo do Carro de Bombeiro: passo 2

- Clicamos no ícone de reta perpendicular, , para construirmos a reta t perpendicular à reta s, de modo que passe pelo ponto B. Na interseção das retas s e t, marcamos o ponto O (Fig.52).

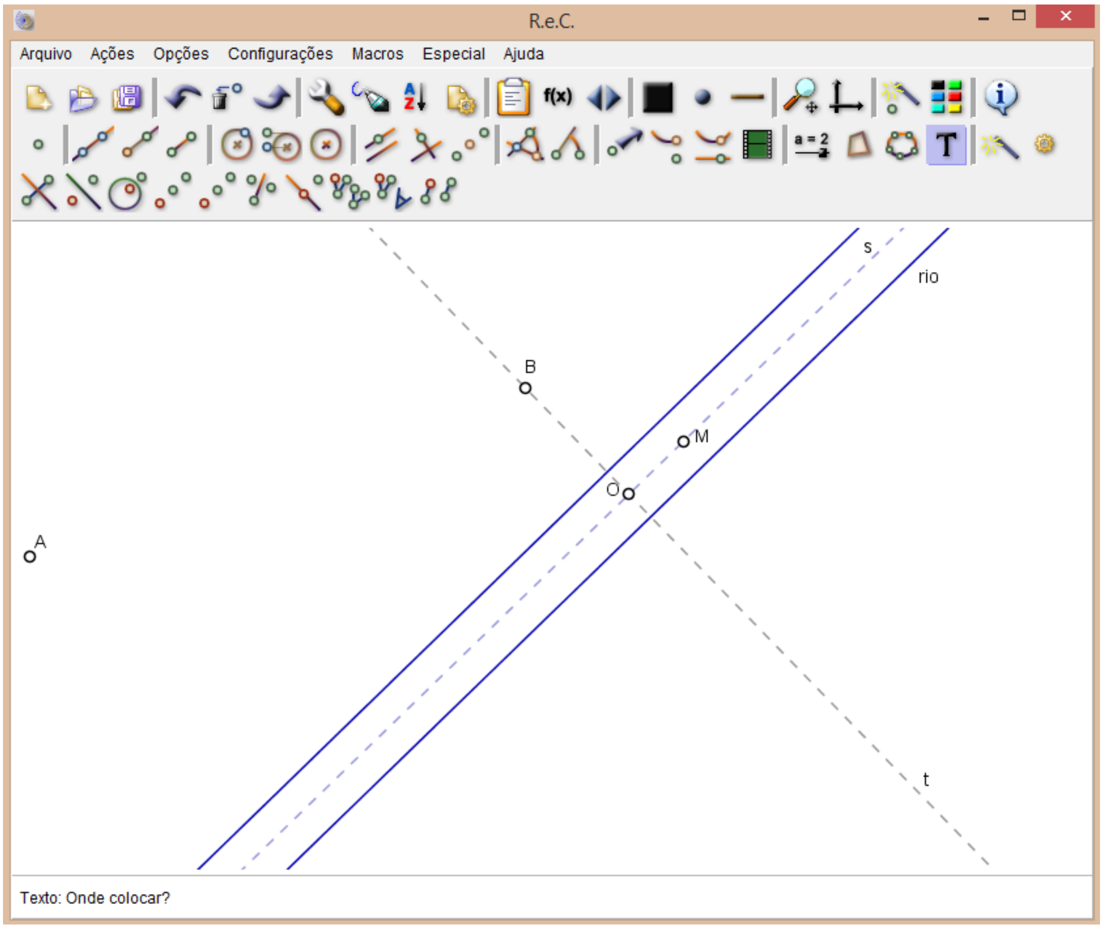
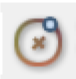


Figura 52: Resolução do Exemplo do Carro de Bombeiro: passo 3

- Selecionamos o ícone do círculo, , e construímos o círculo de centro em O e raio $\overline{OB}$, e determinamos o ponto B' na interseção do círculo com a reta t (Fig.53).

- Construímos agora o segmento de reta, , $\overline{AB'}$. O ponto C da interseção do segmento de reta $\overline{AB'}$ com a primeira margem do rio é o ponto desejado (Fig.54).

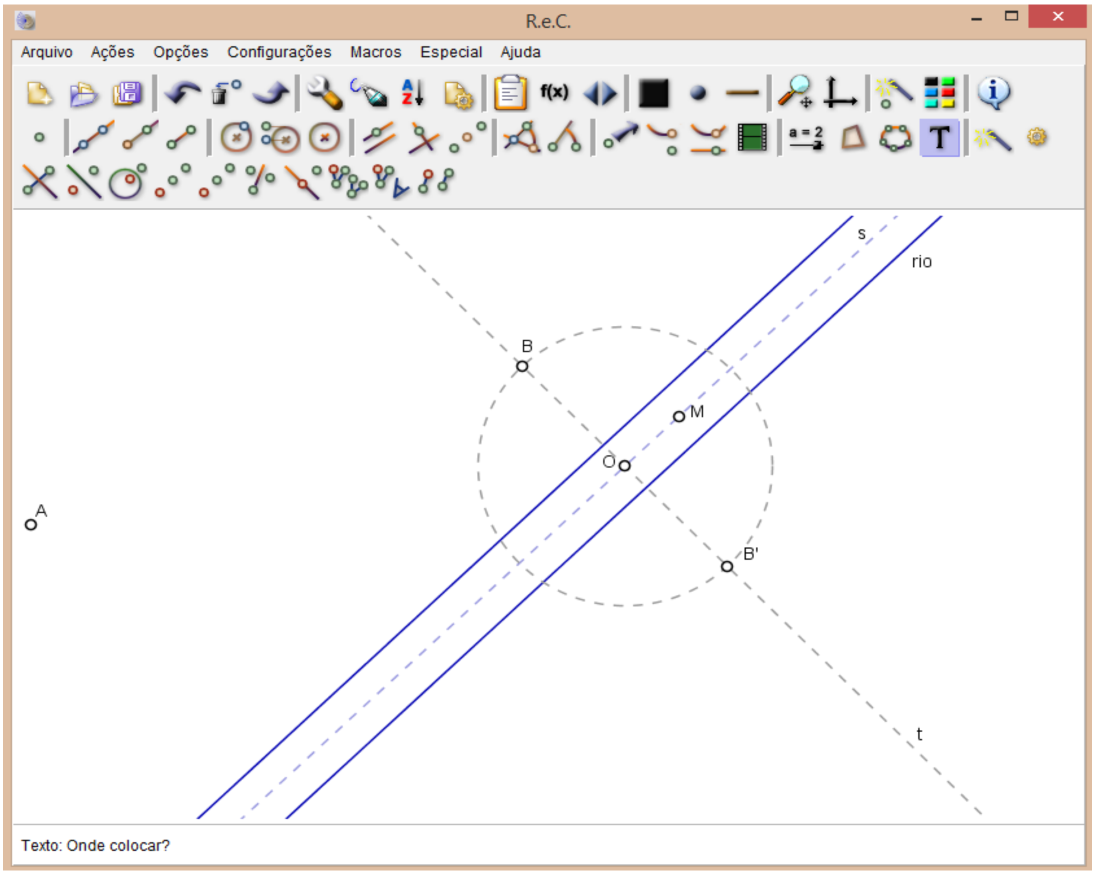


Figura 53: Resolução do Exemplo do Carro de Bombeiro: passo 4

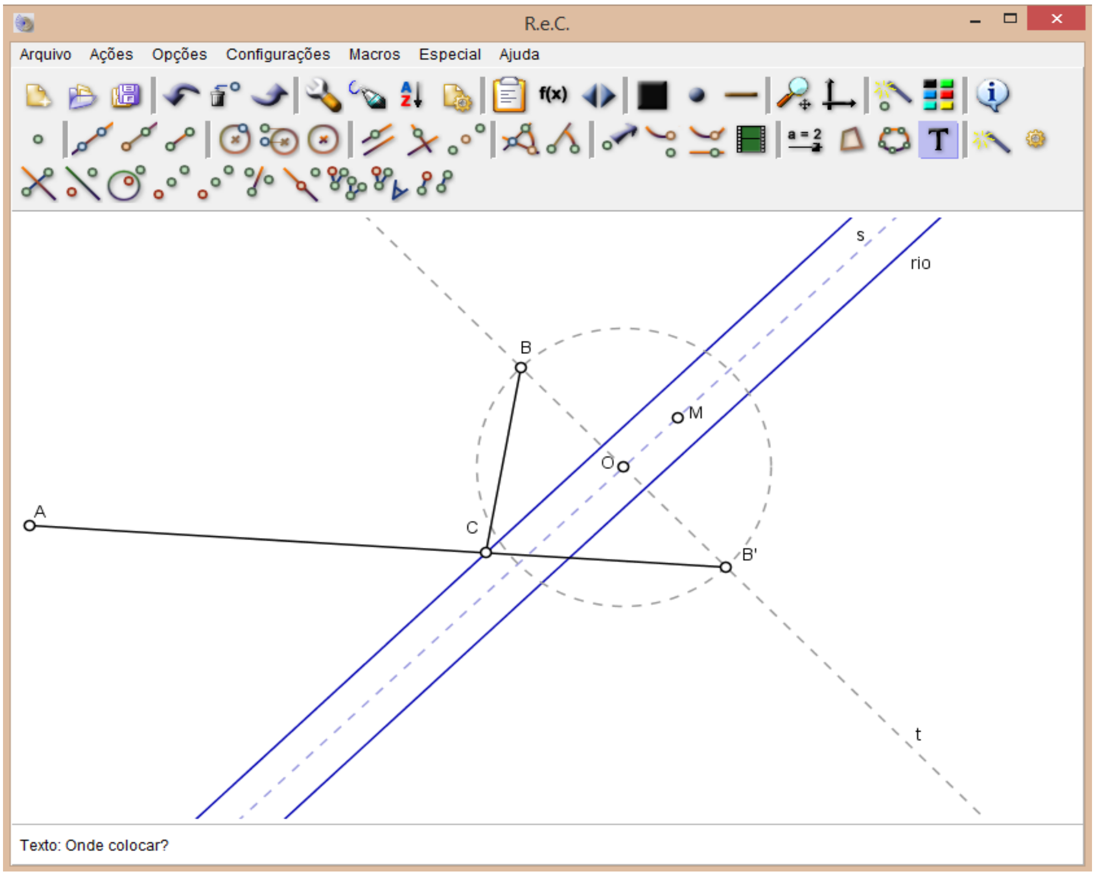


Figura 54: Resolução do Exemplo do Carro de Bombeiro: passo 5

Exemplo 1.12.3: Duas cidades A e B estão separadas por um rio de margens retas paralelas, sobre o qual se quer construir uma ponte perpendicular às margens e uma estrada formada por trechos retos ligando essas cidades e a ponte. Construa esse percurso de forma que seja o mais curto possível (Fig.55).

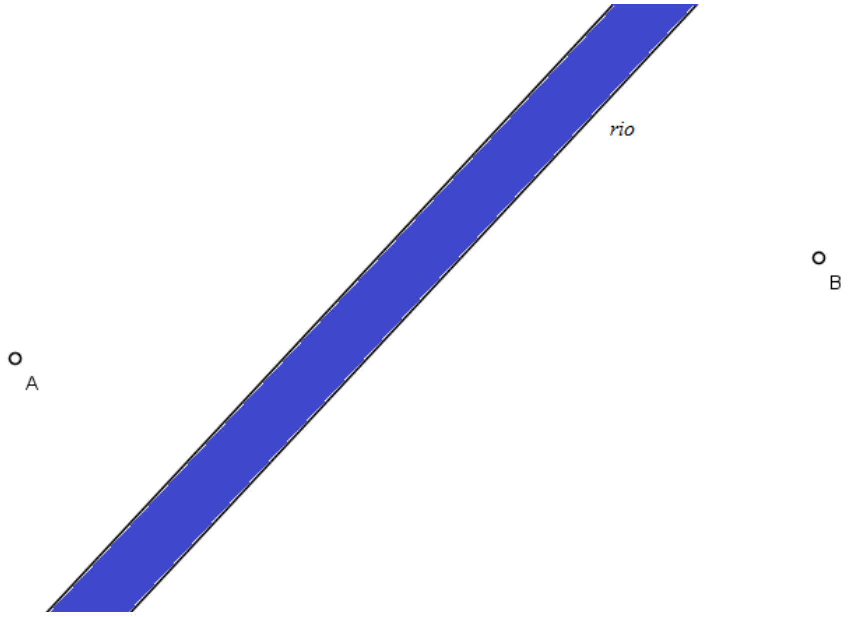


Figura 55: Exemplo da Construção da Ponte

Novamente, a menor distância seria o segmento $\overline{AB}$, como temos o rio impedindo esta construção, a resolução deste problema segue da seguinte forma:

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Selecionamos o segmento de reta, , para construir o segmento $\overline{AB}$. Marcamos o ponto C da primeira interseção com as margens do rio (Fig.56).

- Clicamos no ícone de reta perpendicular, , e construímos a reta perpendicular às margens do rio passando pelo ponto C, interceptando na outra margem no ponto D. O segmento de reta $\overline{CD}$ é a representação da ponte a ser construída (Fig.57).

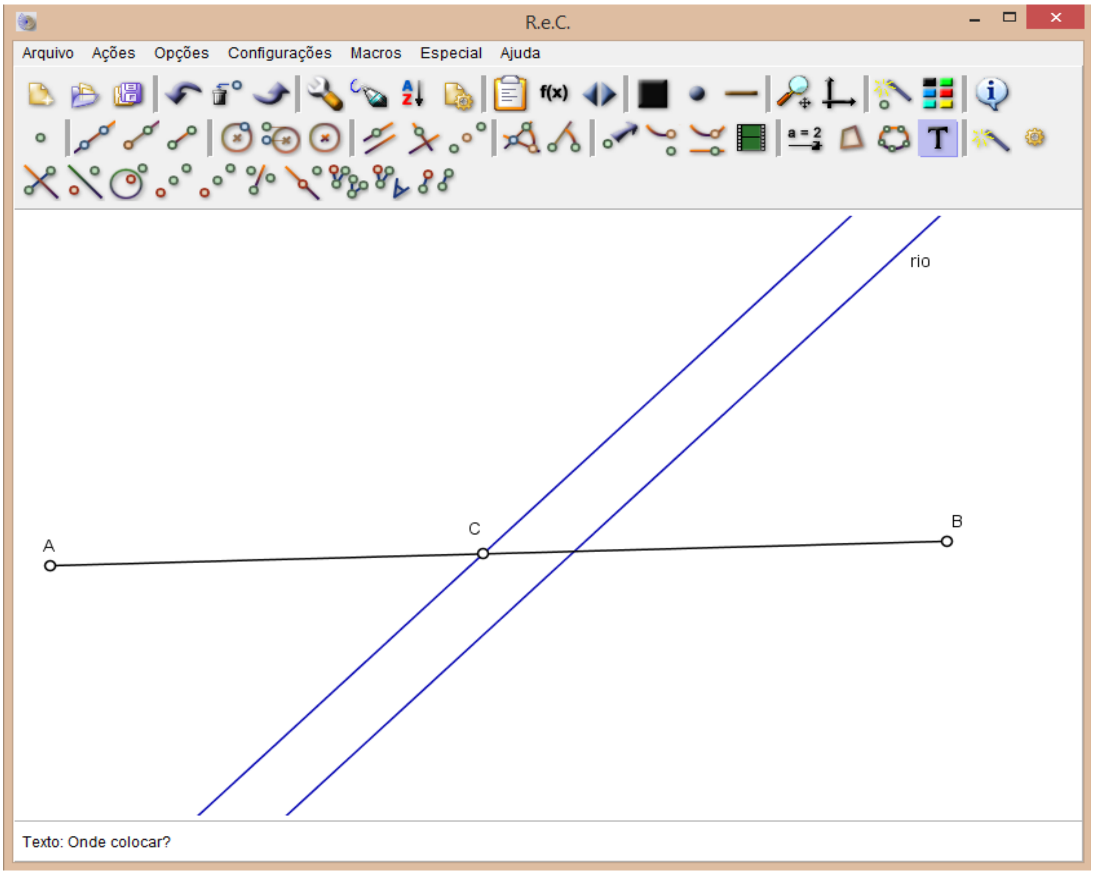


Figura 56: Resolução do Exemplo da Construção da Ponte: passo 1

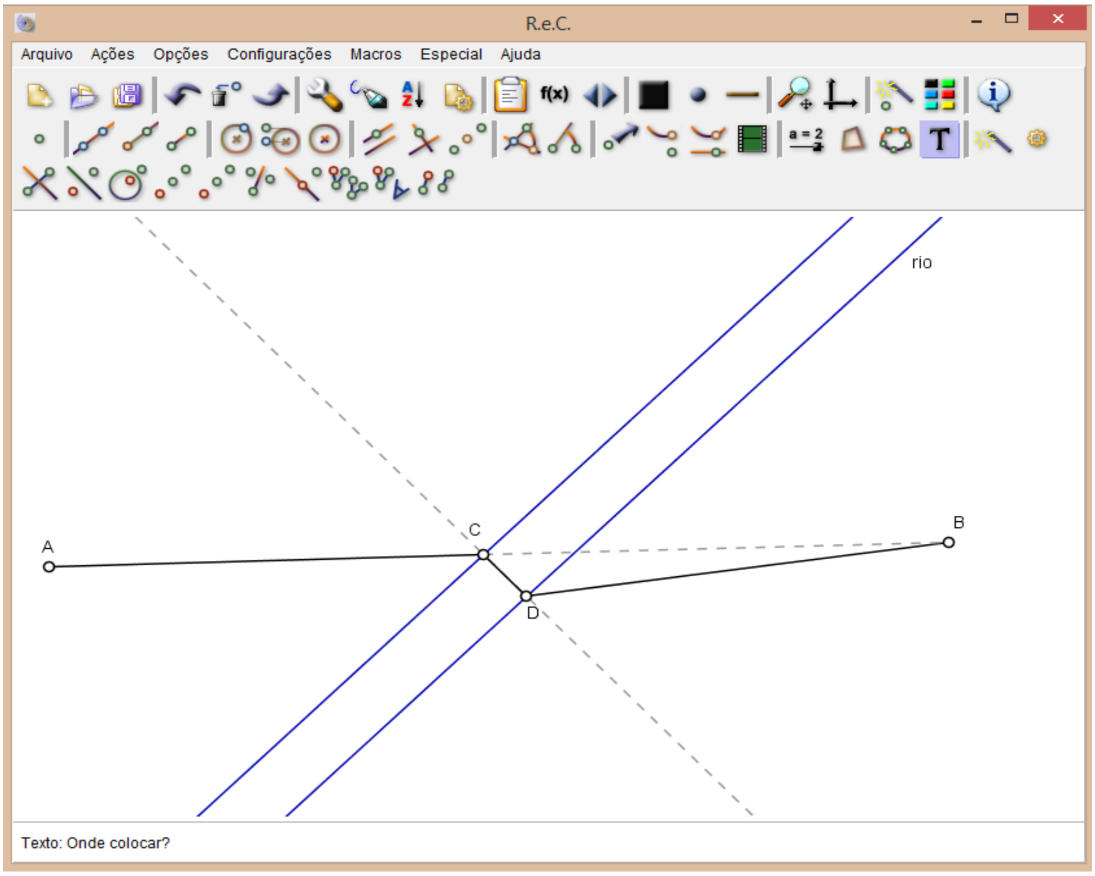


Figura 57: Resolução do Exemplo da Construção da Ponte: passo 2

Exemplo 1.12.4: Construa um quadrado conhecendo sua diagonal.

Dado o segmento $\overline{AC}$, que tomamos como a diagonal do quadrado, façamos sua construção da seguinte forma:

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone do ponto médio,  , e determinamos o ponto médio M do segmento $\overline{AC}$ (Fig.58).

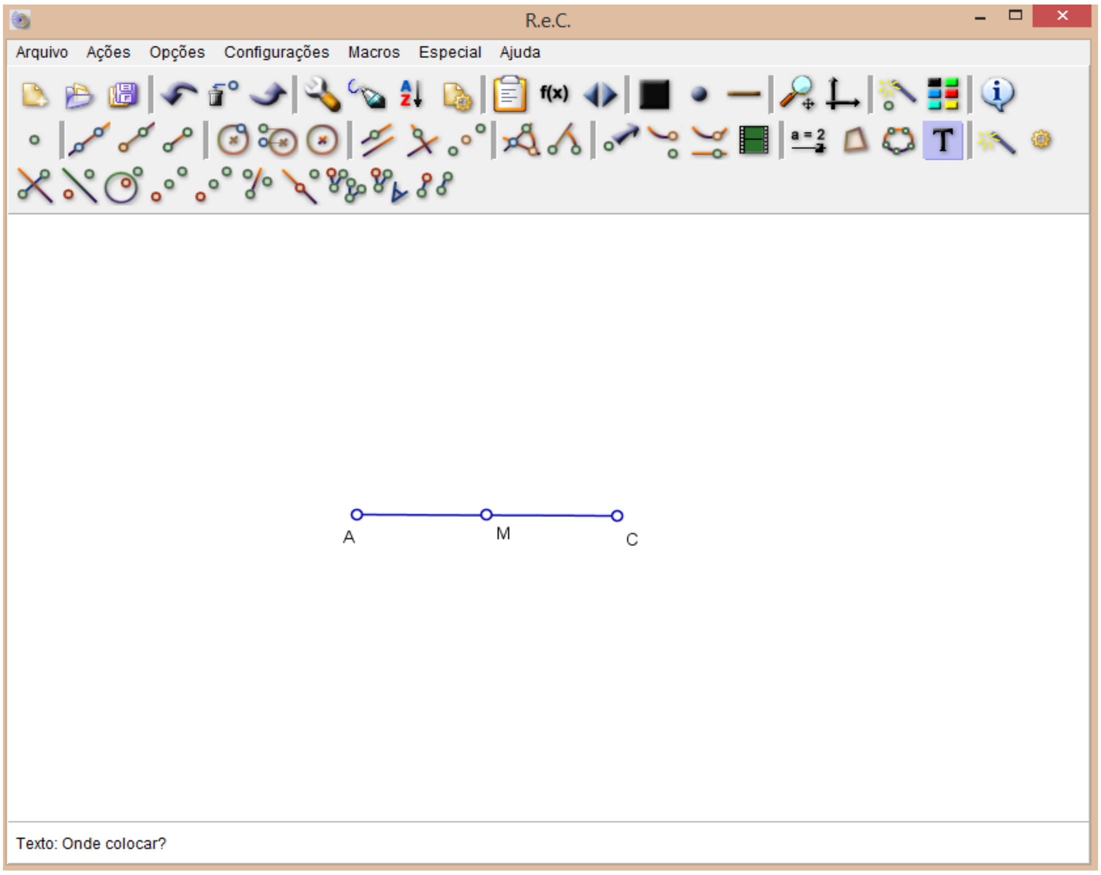
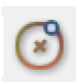


Figura 58: Resolução do Exemplo da Construção do Quadrado: passo 1

- Clicamos no ícone de reta perpendicular, , para construirmos a reta t perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ (Fig.59).

- Selecionando o ícone de círculo, , construímos um círculo com centro no ponto M e raio $\overline{MC}$, marcando os pontos B e D que são os pontos de interseção deste círculo com a reta t (Fig.60).

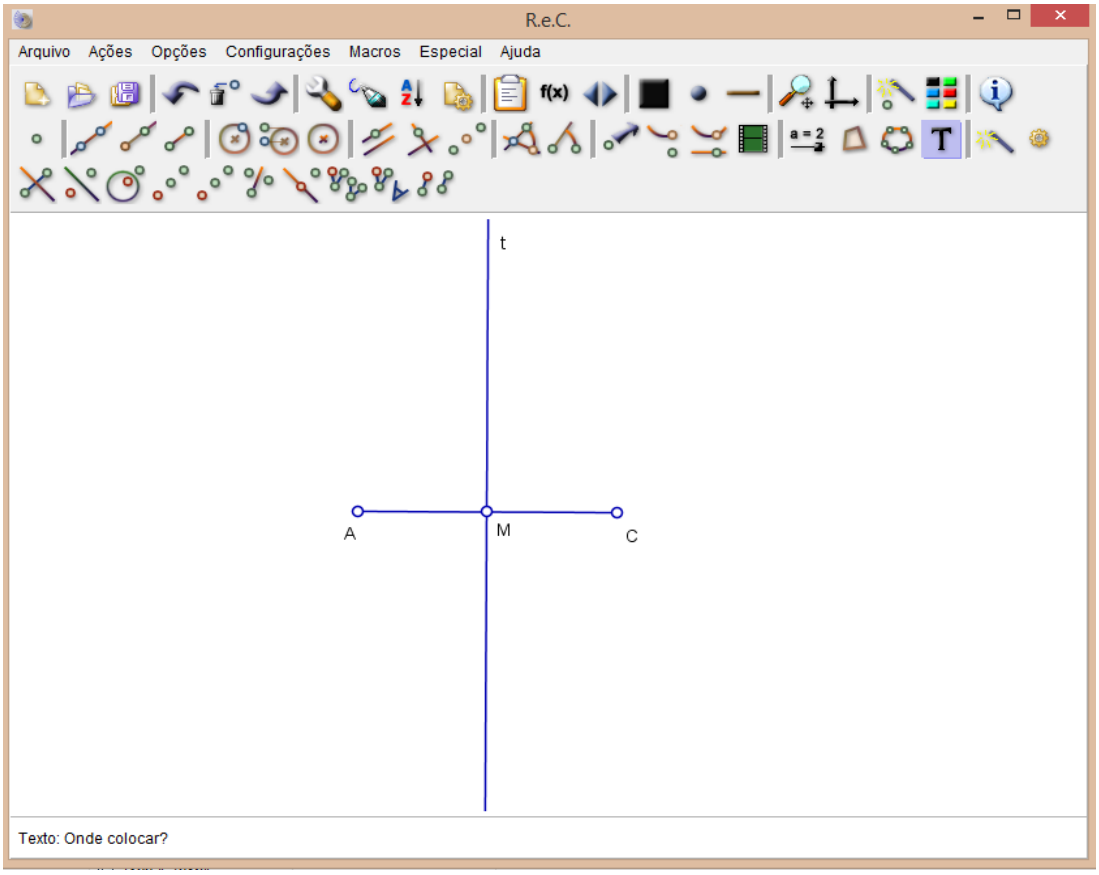


Figura 59: Resolução do Exemplo da Construção do Quadrado: passo 2

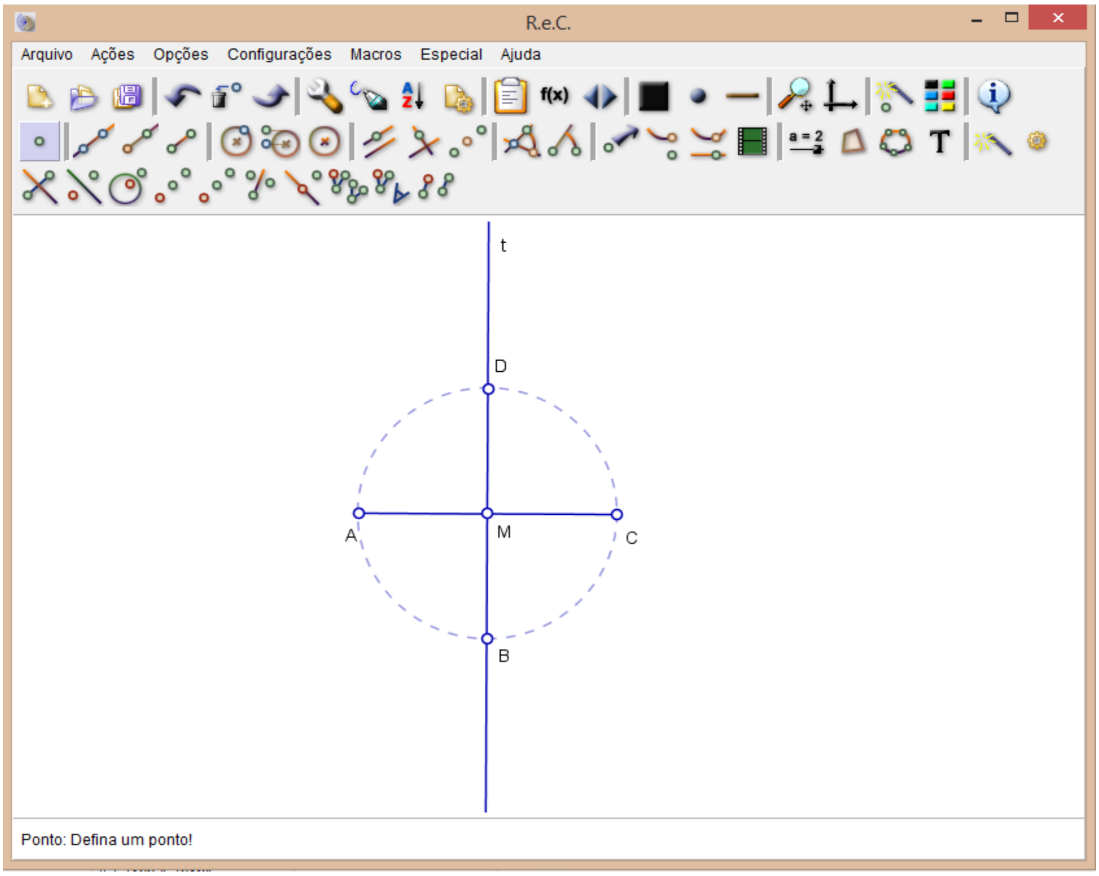


Figura 60: Resolução do Exemplo da Construção do Quadrado: passo 3

- Clicando agora no ícone de segmento de reta, , clicamos nos pontos A e B, determinando o segmento $\overline{AB}$, nos pontos B e C, para determinar o segmento $\overline{BC}$, nos pontos C e D, determinando o segmento $\overline{DC}$ e nos pontos D e A, determinando assim o segmento $\overline{DA}$ (Fig.61).

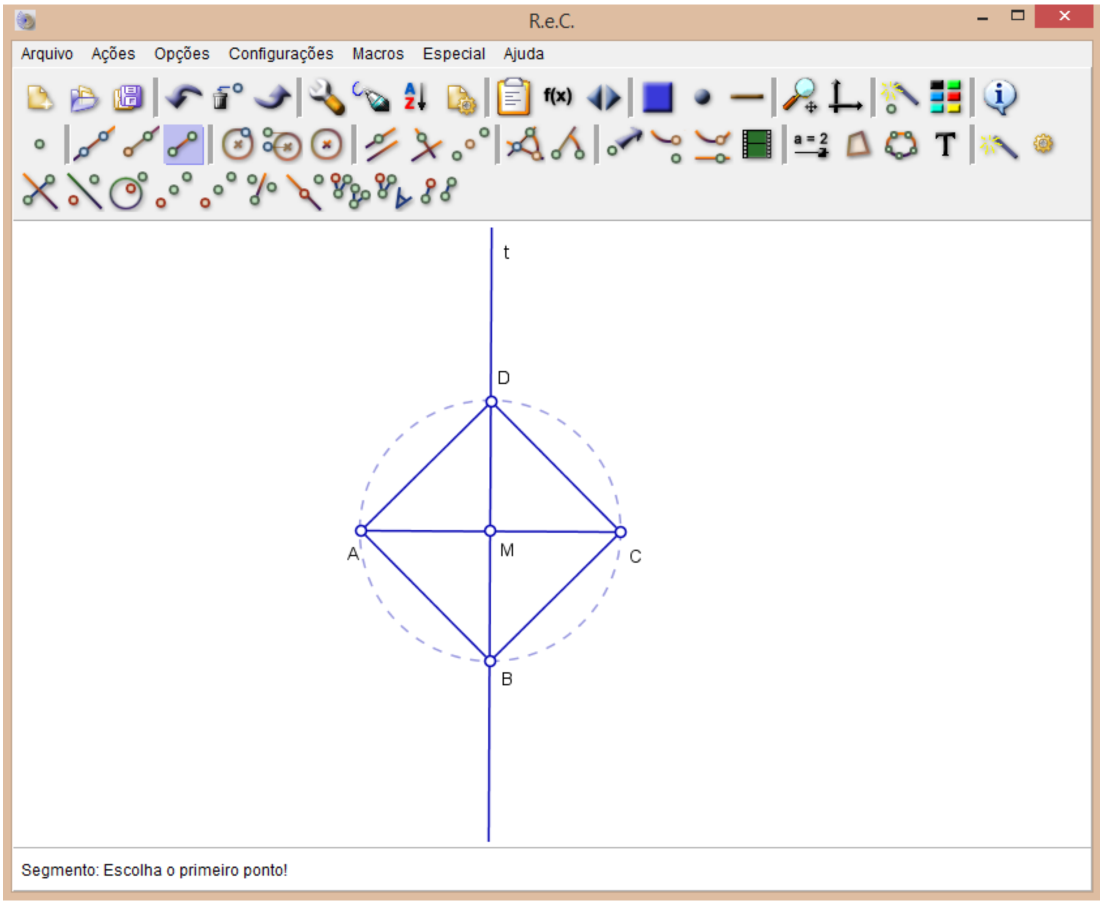


Figura 61: Resolução do Exemplo da Construção do Quadrado: passo 4

Observe que $ABCD$ é o quadrado desejado.

Neste exemplo também podemos usar o ícone de mover ponto e verificar que as propriedades do quadrado é mantida movendo-se o ponto A ou C.

Exemplo 1.12.5: Construa um hexágono regular, dado um lado em uma posição fixa.

Dado o segmento $\overline{AB}$, que será um dos lados do hexágono desejado, temos que sua construção é da seguinte forma:

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Selecionando o ícone de círculo, , construímos dois círculos, um com centro no ponto A e raio $\overline{AB}$ e o outro com centro no ponto B e raio $\overline{BA}$. Em uma das interseções dos dois círculos construídos determinamos o ponto O (Fig.62).

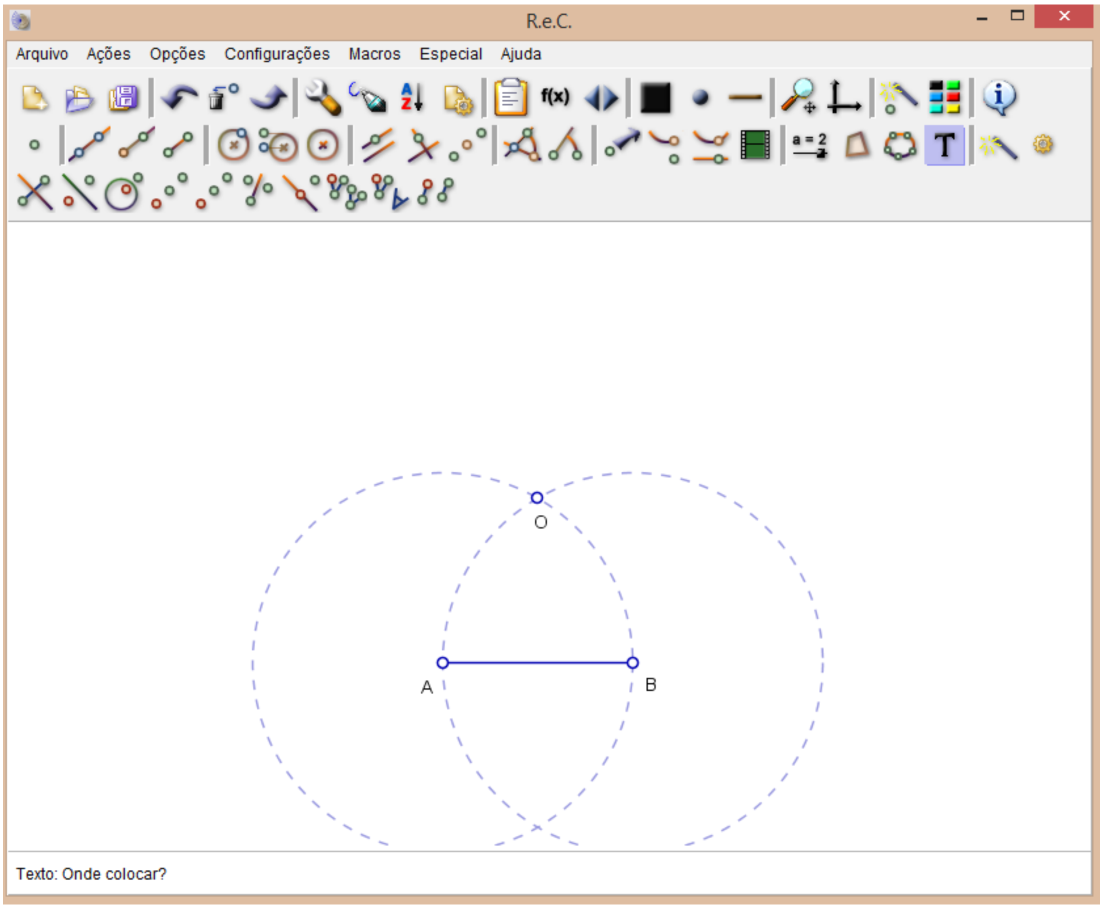
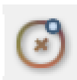
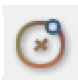


Figura 62: Resolução do Exemplo da Construção do Hexágono: passo 1

- Selecionando novamente o ícone de círculo, , construímos um novo círculo, com centro no ponto O e raio $\overline{OA}$. Este novo círculo determina duas novas interseções com os dois primeiros círculos construídos, que são os pontos C e F (Fig.63).

- Clicamos no ícone de círculo, , construímos dois círculos, o primeiro com centro no ponto C e raio $\overline{BC}$, e o segundo com centro no ponto F e raio $\overline{AF}$. Estes dois novos círculos tem duas novas interseções com o círculo de centro no ponto O, uma interseção cada, que marcamos como pontos D e E (Fig.64).

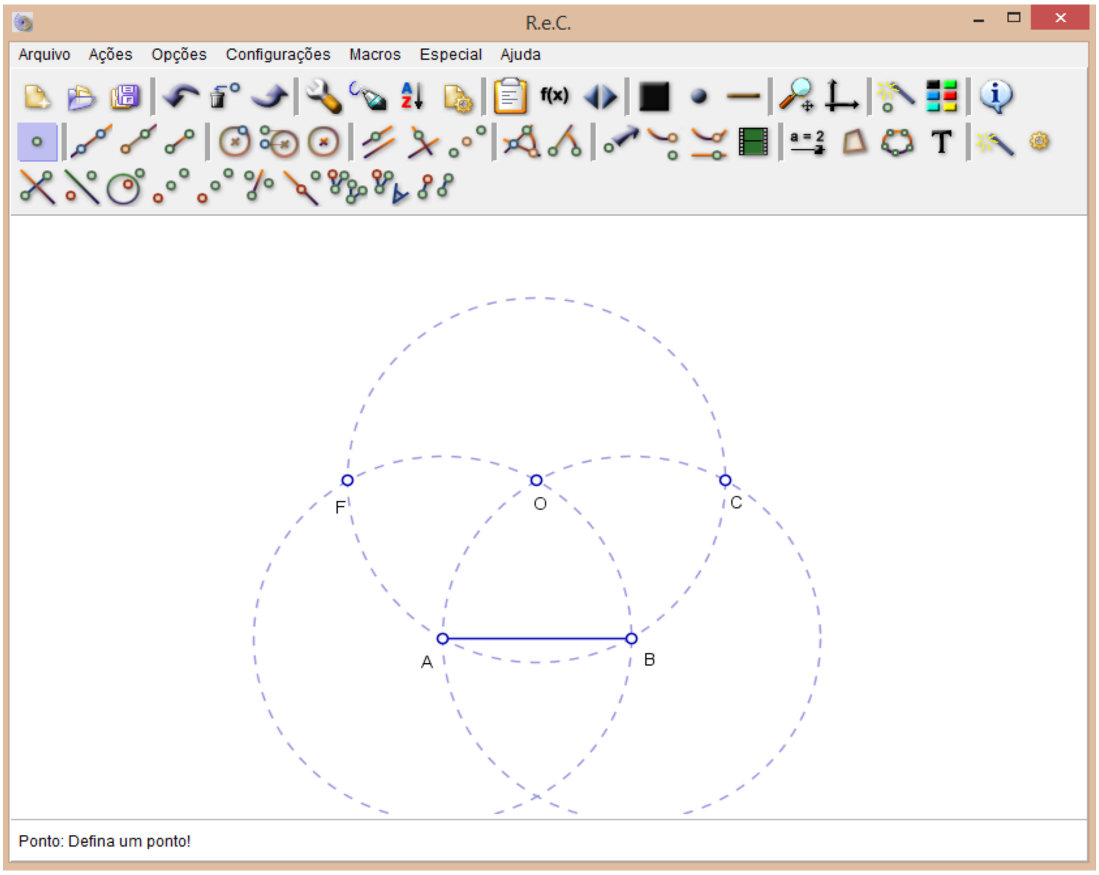


Figura 63: Resolução do Exemplo da Construção do Hexágono: passo 2

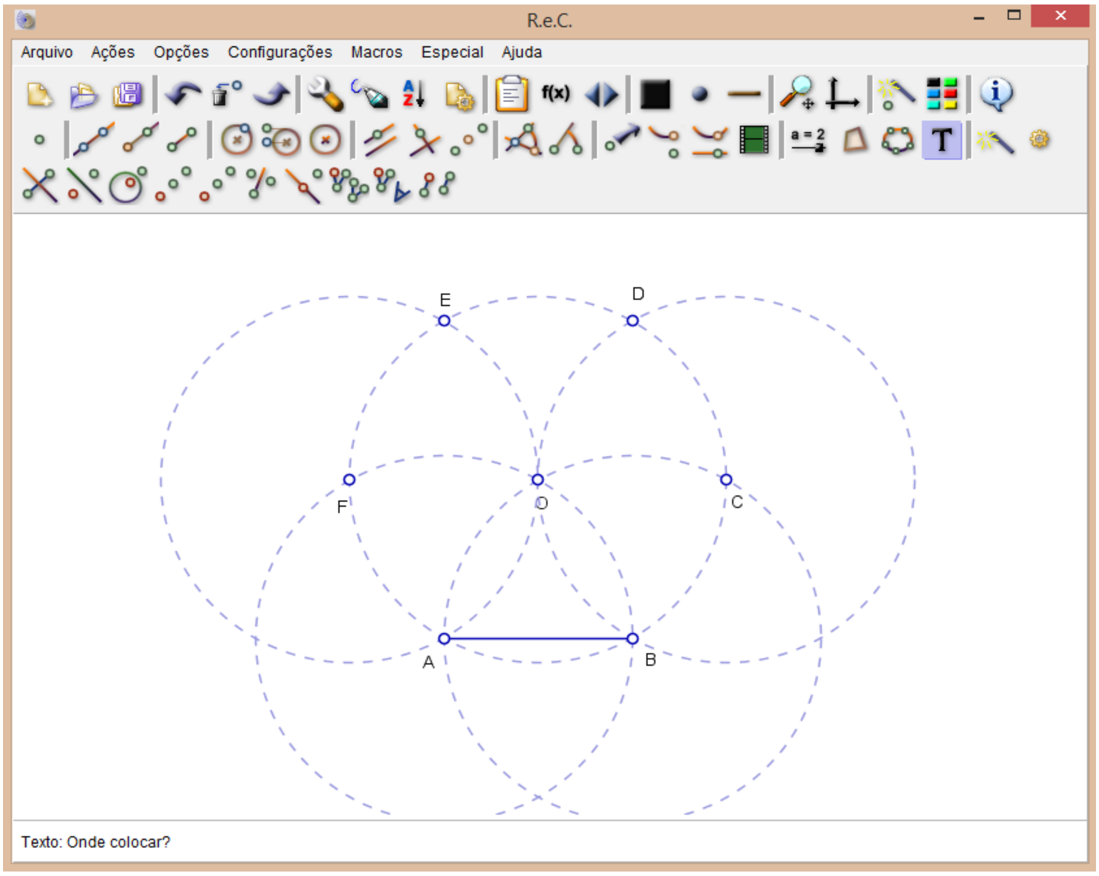


Figura 64: Resolução do Exemplo da Construção do Hexágono: passo 3

- Clicando agora no ícone de segmento de reta, , clicamos nos pontos B e C, determinando o segmento $\overline{BC}$, nos pontos C e D, para determinar o segmento $\overline{CD}$, nos pontos D e E, determinando o segmento $\overline{DE}$, nos pontos E e F, determinando o segmento $\overline{EF}$ e nos pontos F e A, determinando assim o segmento $\overline{FA}$ (Fig.65).

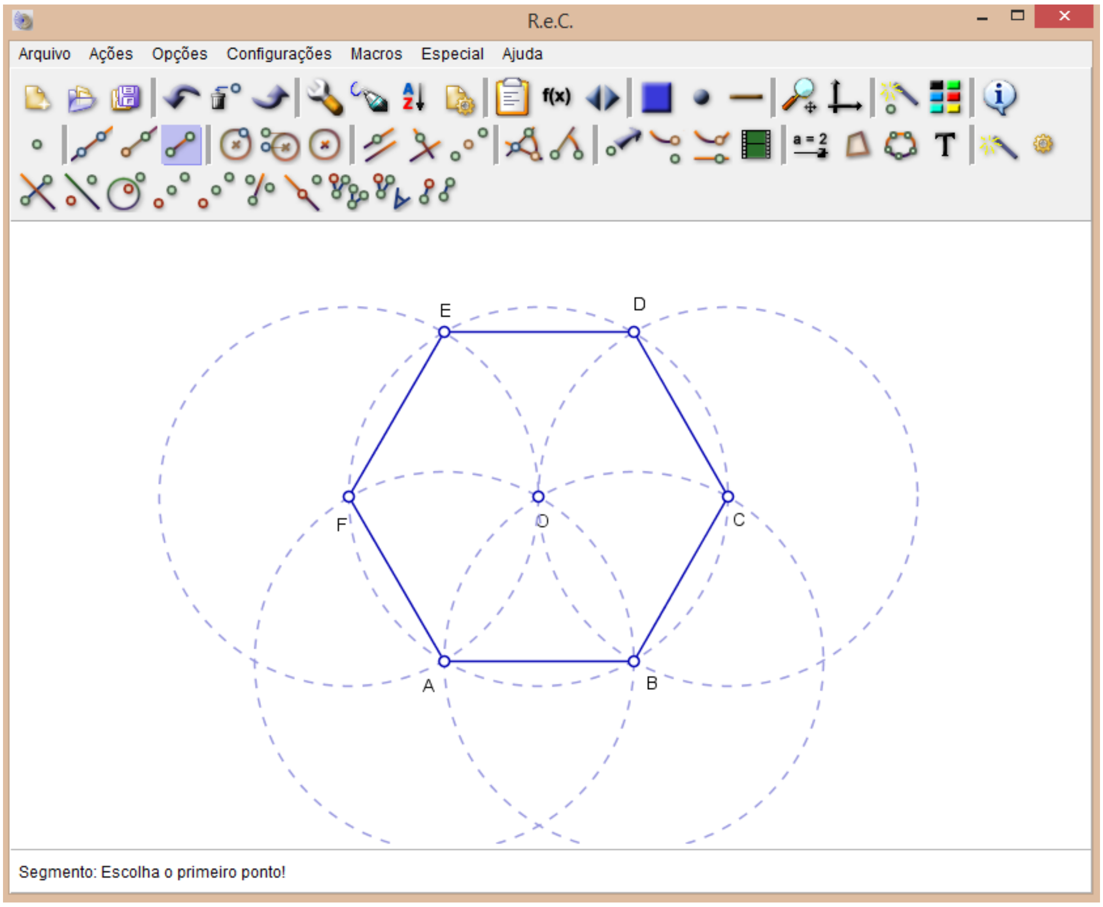


Figura 65: Resolução do Exemplo da Construção do Hexágono: passo 4

Observe que $ABCDEF$ é o hexágono desejado.

Exemplo 1.12.6: Dado o segmento $\overline{AB} = 5\ cm$, construa seu arco capaz para o ângulo de $60°$.

Dado o segmento $\overline{AB} = 5\ cm$, que é a corda do arco desejado, temos que sua construção é da seguinte forma:

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Construímos o ângulo $B\hat{A}C = 60°$, da mesma forma que foi feito na seção 1.11, como mostra a Figura 66.

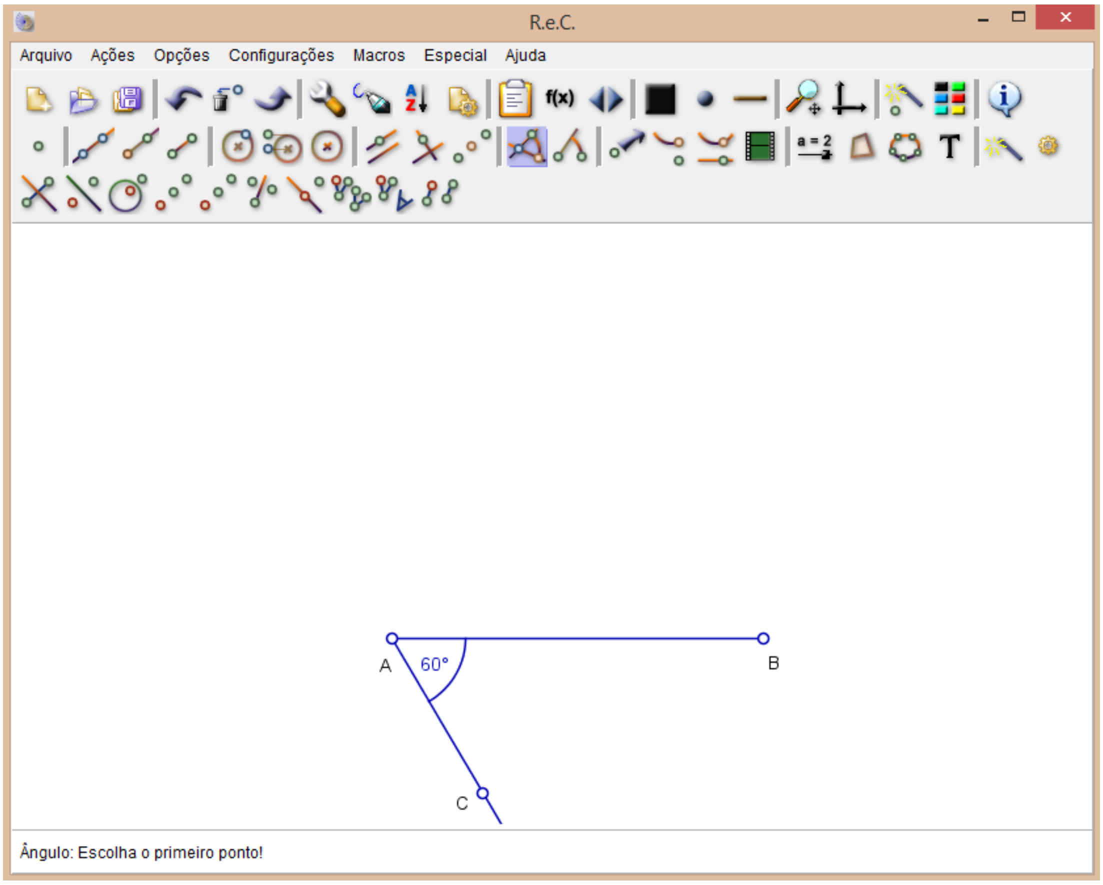
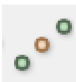


Figura 66: Resolução do Exemplo de Arco Capaz: passo 1

- Selecionando o ícone de ponto médio, , determinamos o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. Clicando agora no ícone da perpendicular, , construímos as retas r, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e a reta s perpendiculares à semirreta $\overrightarrow{AC}$, passando pelos pontos M e A, respectivamente. Na interseção das retas r e s marcamos o ponto O (Fig.67).

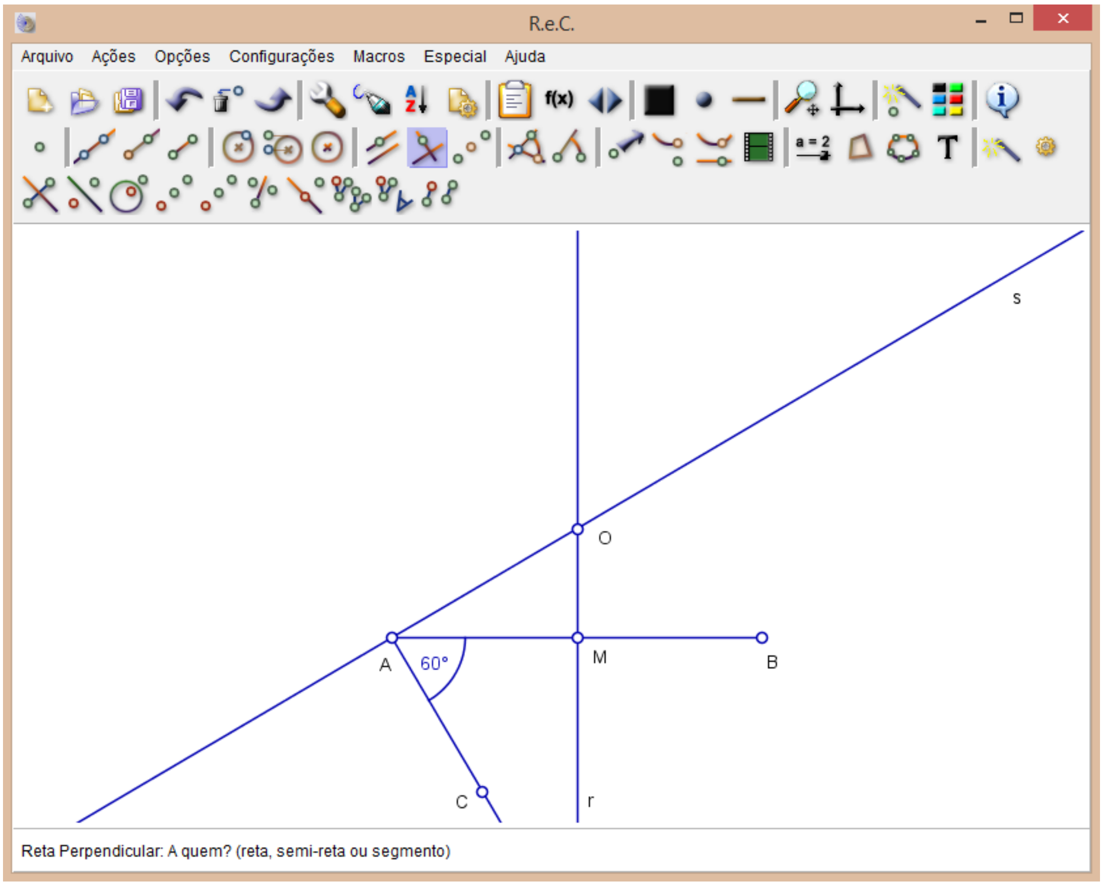
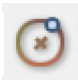


Figura 67: Resolução do Exemplo de Arco Capaz: passo 2

- Selecionando o ícone do círculo, , construímos o círculo de centro no ponto O e raio $\overline{AO}$ e marcamos o ponto P assim como mostra a Figura 68.

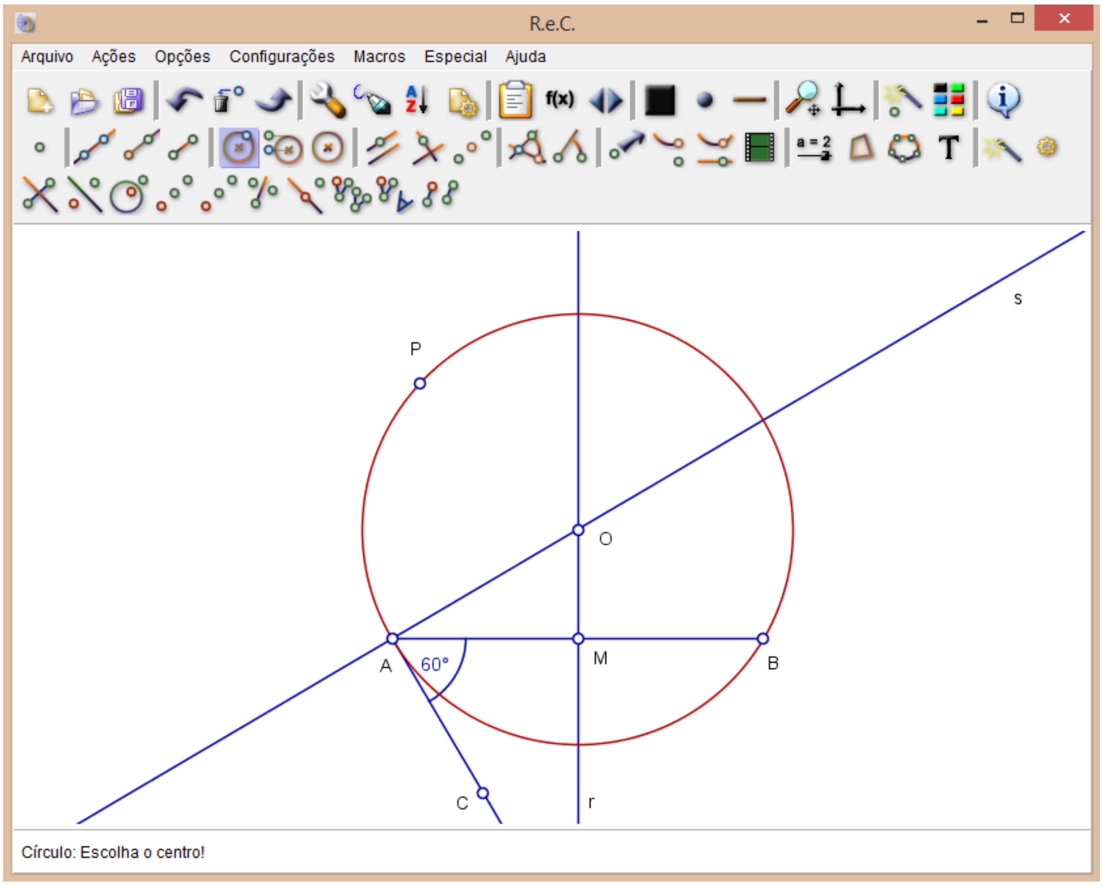


Figura 68: Resolução do Exemplo de Arco Capaz: passo 3

O arco $\widehat{APB}$ é o arco capaz do ângulo de $60°$ sobre o segmento $\overline{AB}$ procurado.

Capítulo II

Resolvendo Expressões Algébricas via Régua e Compasso

Neste capítulo estudamos como resolver problemas que envolvem expressões algébricas utilizando-se apenas a régua e o compasso.

2.1 Introdução

Muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos a partir da solução de expressões algébricas. Neste capítulo vemos que é possível construir, via régua e compasso, soluções para vários problemas que podem ser apresentados por expressões algébricas.

Dado uma expressão algébrica, como por exemplo, $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, onde x é a incógnita e são conhecidos os valores de a, b e c. Estamos interessados em construir, via régua e compasso, a incógnita x. Para isso, olhamos os valores a, b, c e x como sendo segmentos e, estamos interessados em construir um segmento x, a partir dos segmentos a, b e c dados. Um pouco mais adiante neste capítulo apresentamos como construir este x.

Olhar um dado valor a, como segmento, significa a rigor que podemos considerar uma reta e um ponto arbitrário O nesta, como origem, e a partir daí associar ao número real a, um ponto A da reta, e reciprocamente. De forma que, considerar o número a significa considerar o segmento $\overline{OA}$ e escrevemos $\overline{OA} = a$. Veremos no Capítulo III que nem todo número real pode ser construído via régua e compasso, mas estamos assumindo aqui, que dar o número real a significa dar o segmento que a ele corresponde.

A seguir fazemos as construções de algumas expressões algébricas que são ferramentas para construção de outras expressões.

2.2 Construção da Expressão Algébrica: $x = \frac{b.c}{a}$

Considerando segmentos a, b e c dados, desejamos construir o segmento de incógnita $x = \frac{b.c}{a}$. Note que, algebricamente, esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Utilizando o Teorema de Tales podemos construir o segmento x da seguinte forma: sobre um ângulo qualquer de vértice O tomemos sobre um lado os segmentos $\overline{OA} = a$ e $\overline{AC} = c$, e sobre o outro lado do ângulo o segmento $\overline{OB} = b$, como na Figura 69.

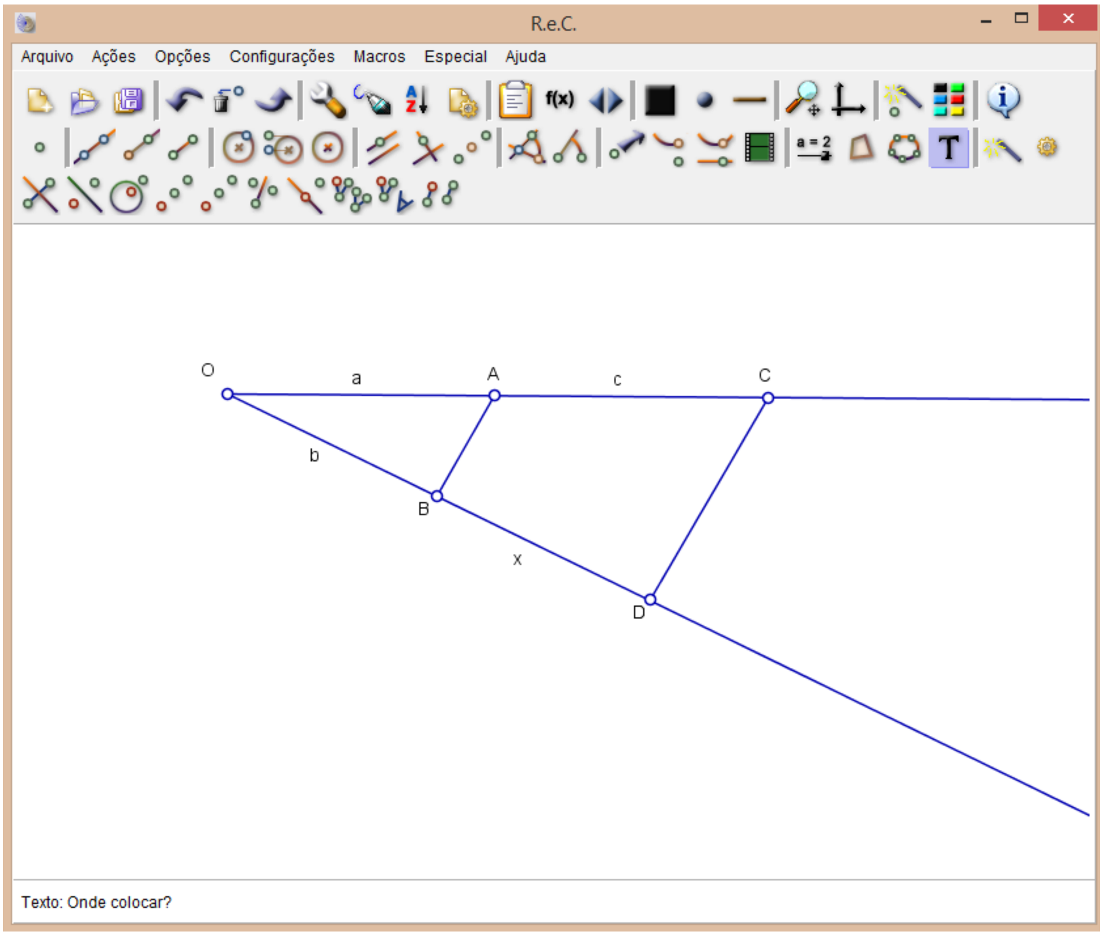


Figura 69: A 4ª Proporcional

Traçando por C uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$, obtemos D na semirreta $\overrightarrow{OB}$. Segue do Teorema de Tales, que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

e, portanto $\overline{BD} = x$ é a solução da expressão dada. Esse segmento x é denominado **a 4ª proporcional** entre os segmentos a, b e c. Como utilizamos esta construção mais adiante, destacamos a definição seguinte.

Definição 2.2.1: *Diz-se que o segmento x é a 4ª proporcional entre os segmentos a, b e c quando:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

2.3 Construção dos Segmentos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

2.3.1: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ onde a e b são segmentos dados, então basta construir um triângulo retângulo onde x é a hipotenusa, e cujos catetos são a e b.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone de segmento de reta, , e construímos o segmento $\overline{AC}$ de medida b (Fig.70).

- Clicamos o ícone de reta perpendicular, , e construímos a reta r perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ passando pelo ponto C. Marcamos na reta r o ponto B, de modo que $\overline{BC} = a$ (Fig.71).

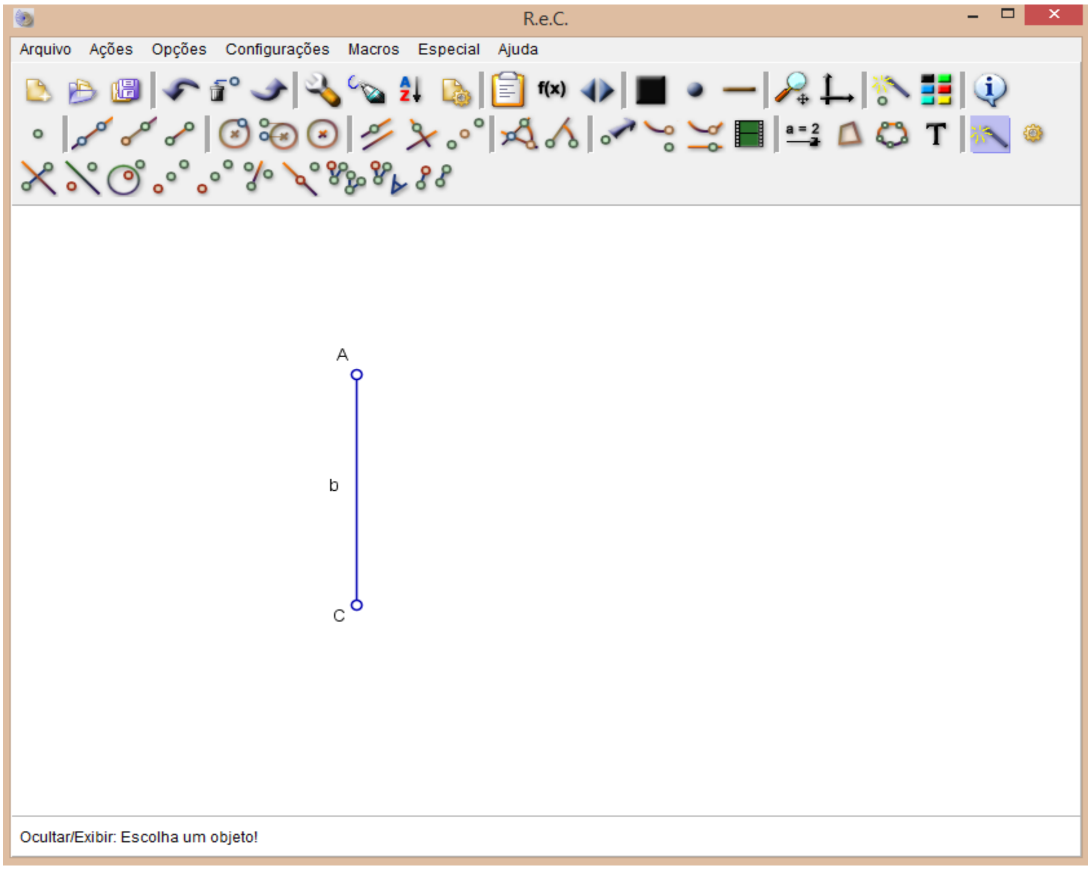


Figura 70: O Segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$: passo 1

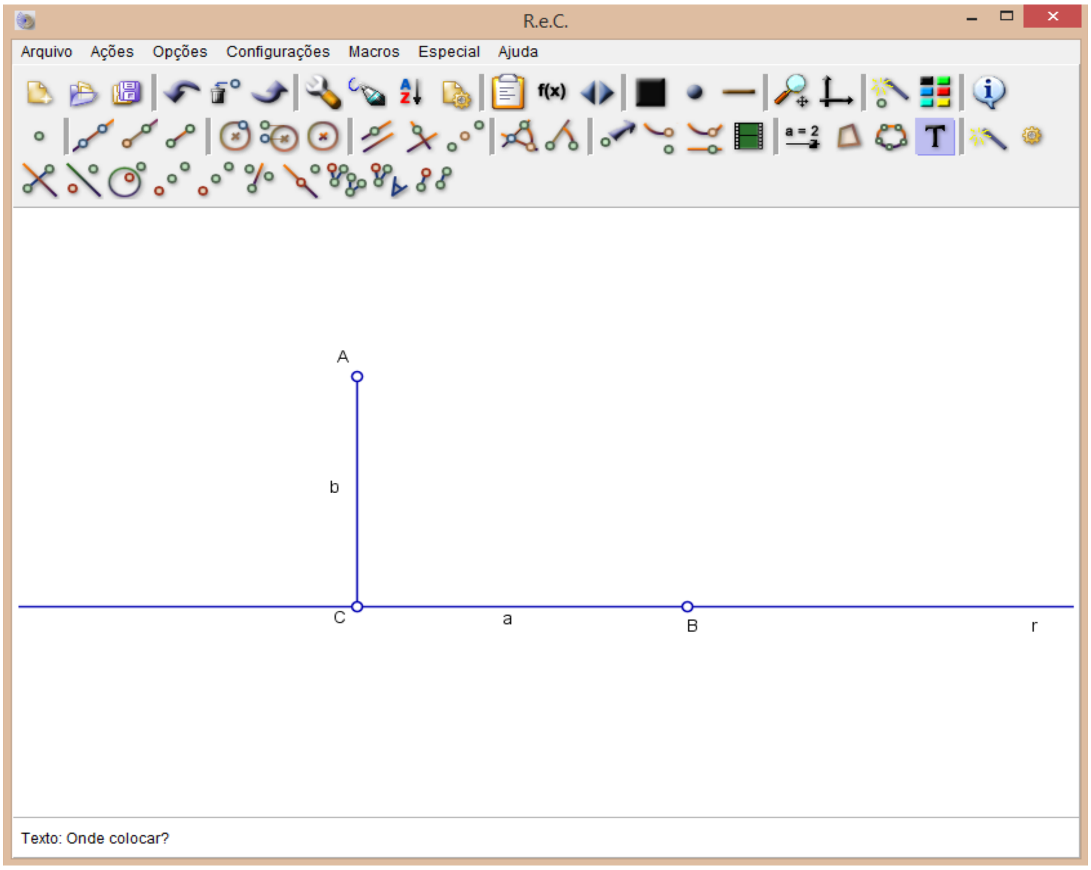


Figura 71: O Segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$: passo 2

O segmento $\overline{AB} = x$ é o segmento de medida $\sqrt{a^2 + b^2}$ (Fig.72).

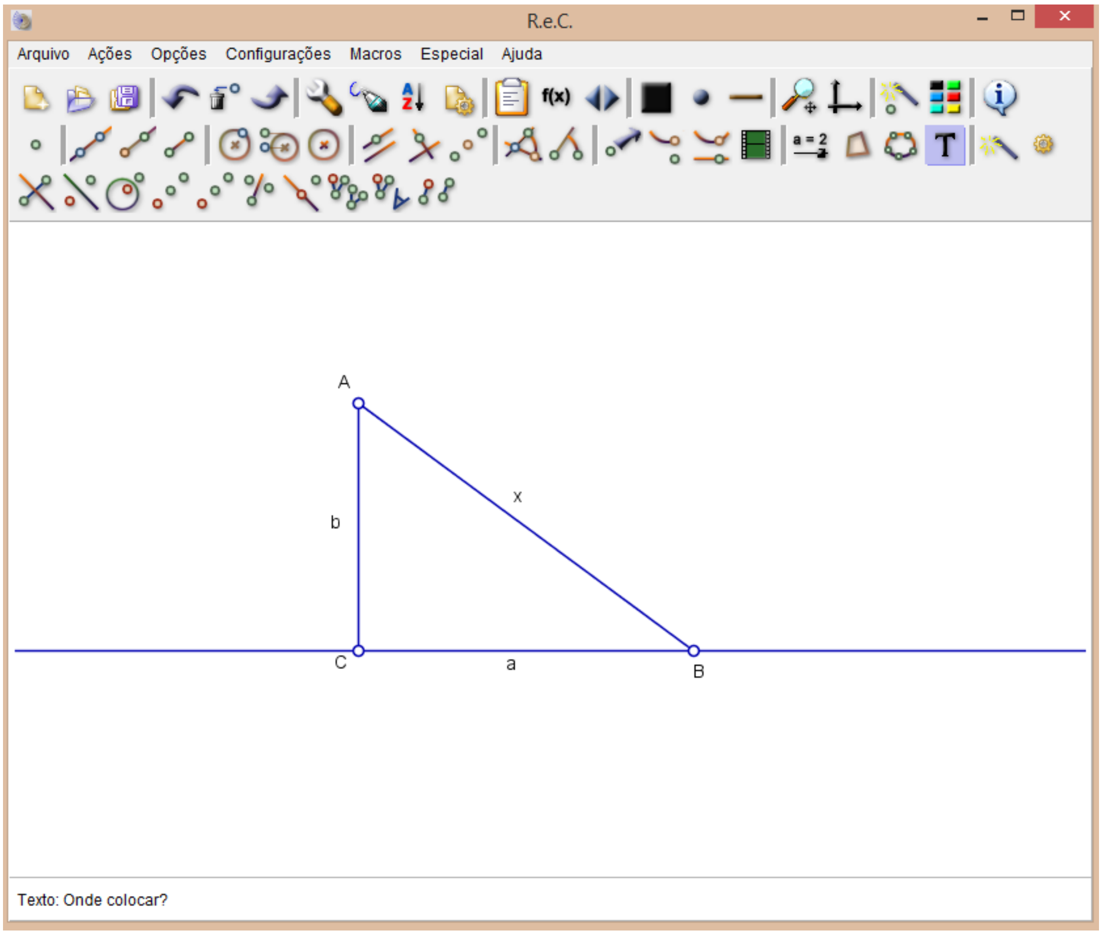


Figura 72: O Segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

2.2.2: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

Para a construção do segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, basta construir um triângulo retângulo onde x será agora um dos catetos, a a hipotenusa e b o outro cateto.

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos no ícone de segmento de reta, , e construímos o segmento $\overline{AC}$ de medida b (Fig.73).

- Selecionamos o ícone de reta perpendicular, , e construímos a reta r perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ passando pelo ponto A (Fig.74).

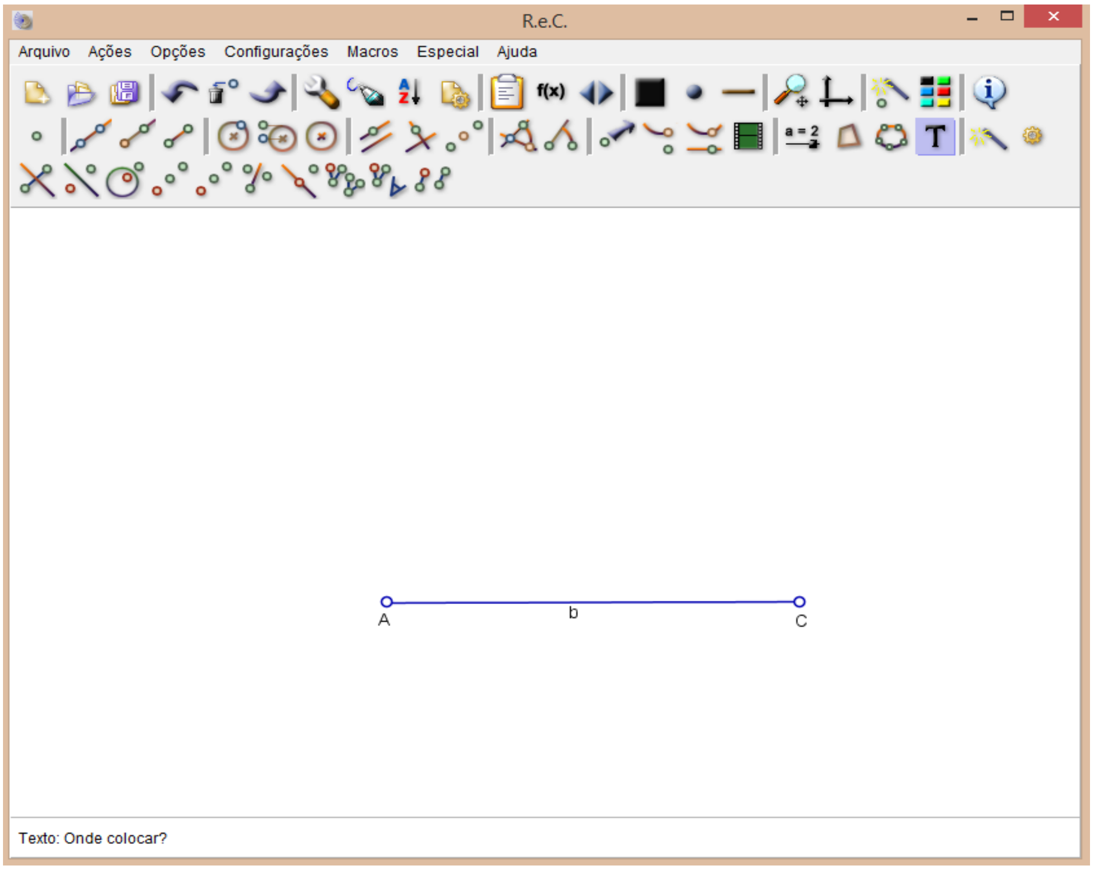


Figura 73: O Segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$*: passo 1*

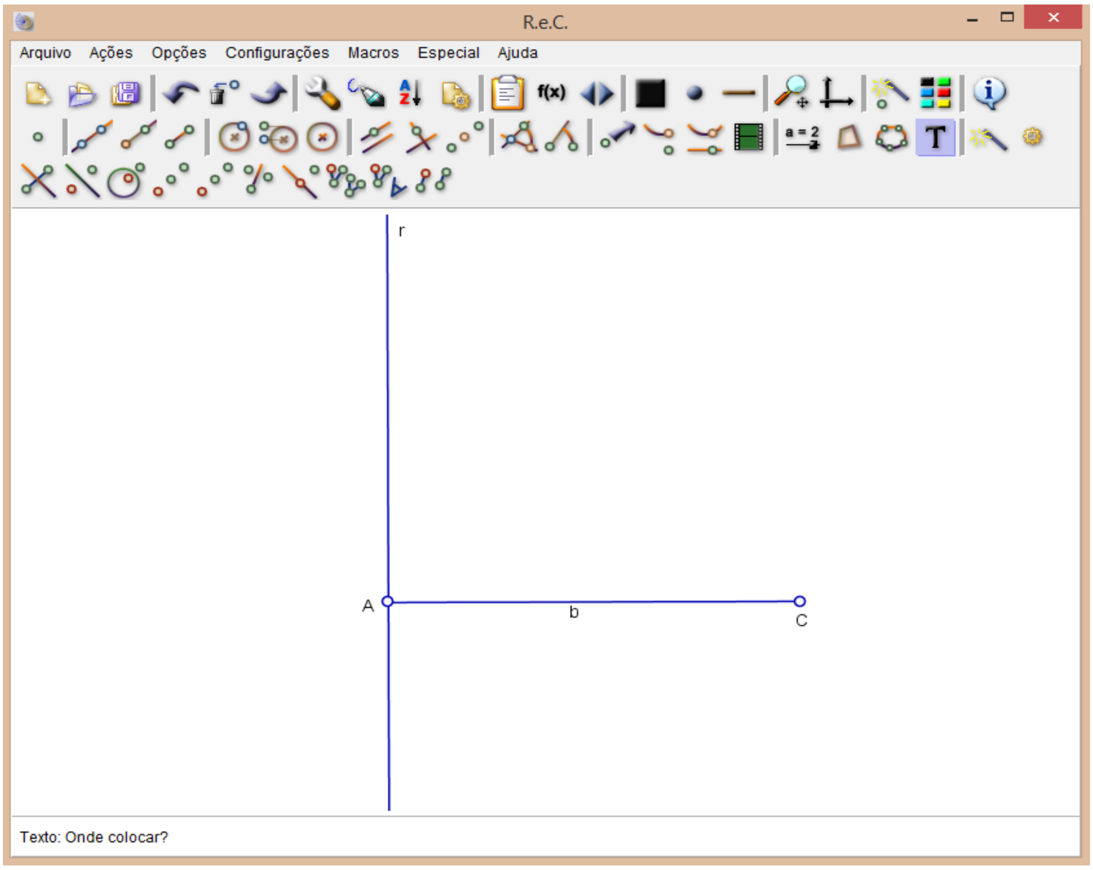


Figura 74: O Segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$*: passo 2*

- Clicamos no ícone de segmento de reta, , e construímos o segmento $\overline{BC}$ de medida a, de modo que o ponto B esteja na reta r (Fig.75).

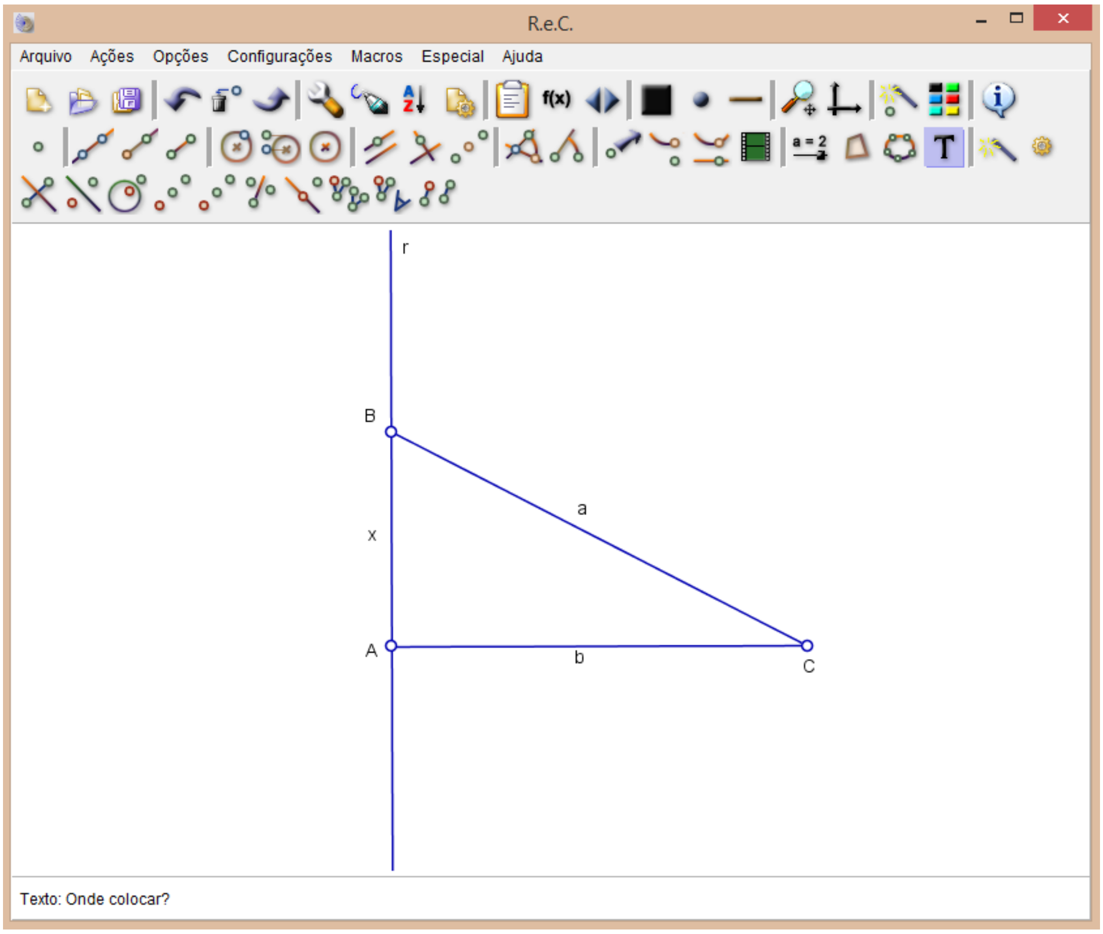


Figura 75: O Segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$: passo 3

O segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ é o segmento $\overline{AB}$ construído, como mostra a figura acima.

A expressão do tipo $\sqrt{{a_1}^2 \pm {a_2}^2 \pm {a_3}^2 \pm \cdots {a_n}^2}$ podem ser construída sem muitas dificuldades, bastando aplicar sucessivamente os procedimentos descritos acima. Como por exemplo, o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Fazendo $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, temos $x = \sqrt{m^2 + c^2}$, o que recai na expressão descrita acima.

2.4 Construção de $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, \ldots, a\sqrt{n}$

A seguir vajamos ver como construir alguns segmentos de medidas irracionais.

2.4.1: $x = \sqrt{2}$

Para a construção de $\sqrt{2}$ procedemos da seguinte forma:

Ideia da construção geométrica: Construa o segmento $\overline{AB}$ de comprimento fixo, de tal forma que $\overline{AB} = a = 1$. Pelo vértice A, construa um círculo de raio $\overline{AB}$ e a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. Na interseção dessa perpendicular e do círculo construído marque o ponto C. Pela construção, o segmento $a = \overline{AC} = 1$. Pelos pontos B e C construímos o segmento $\overline{BC}$, esse segmento $\overline{BC}$ tem medida igual a $\sqrt{2}$.

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Clicamos o ícone de semento de reta, , e construímos o segmento $\overline{AB}$ de medida a (Fig.76).

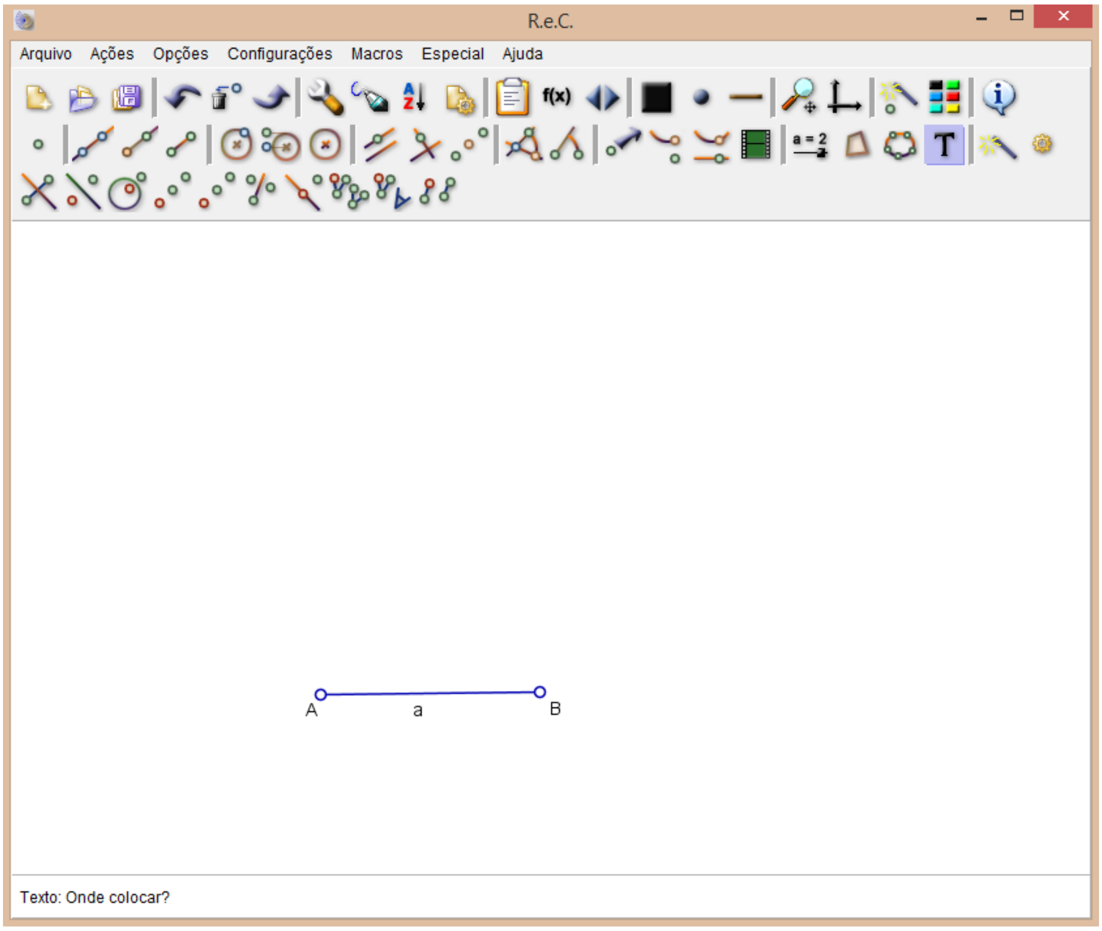
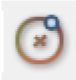


Figura 76: $\sqrt{2}$: passo 1

- Com o ícone de círculo, , selecionado , construímos o círculo de centro em A e extremidade em B (Fig.77).

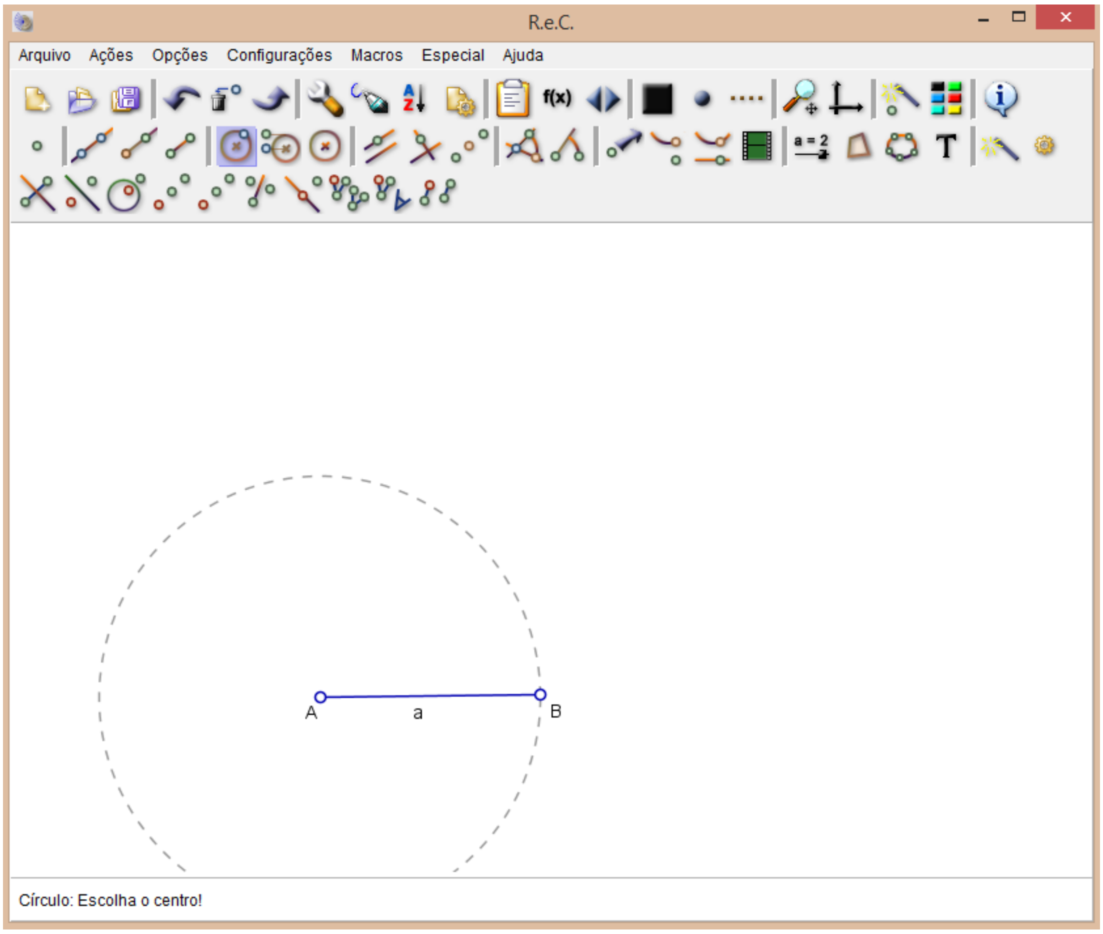
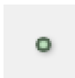


Figura 77: $\sqrt{2}$: passo 2

- Selecionando o ícone da perpendicular, , construímos a perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo ponto A, no ponto de interseção desta perpendicular com o círculo já construído, marcamos, com o ícone de ponto, , selecionado, o ponto C (Fig.78).

- Selecionamos agora, novamente o ícone de segmento de reta, , e construímos o segmento $\overline{BC}$, por consequência, pelo Teorema de Pitágoras, o segmento $\overline{BC} = \sqrt{2}$ (Fig.79).

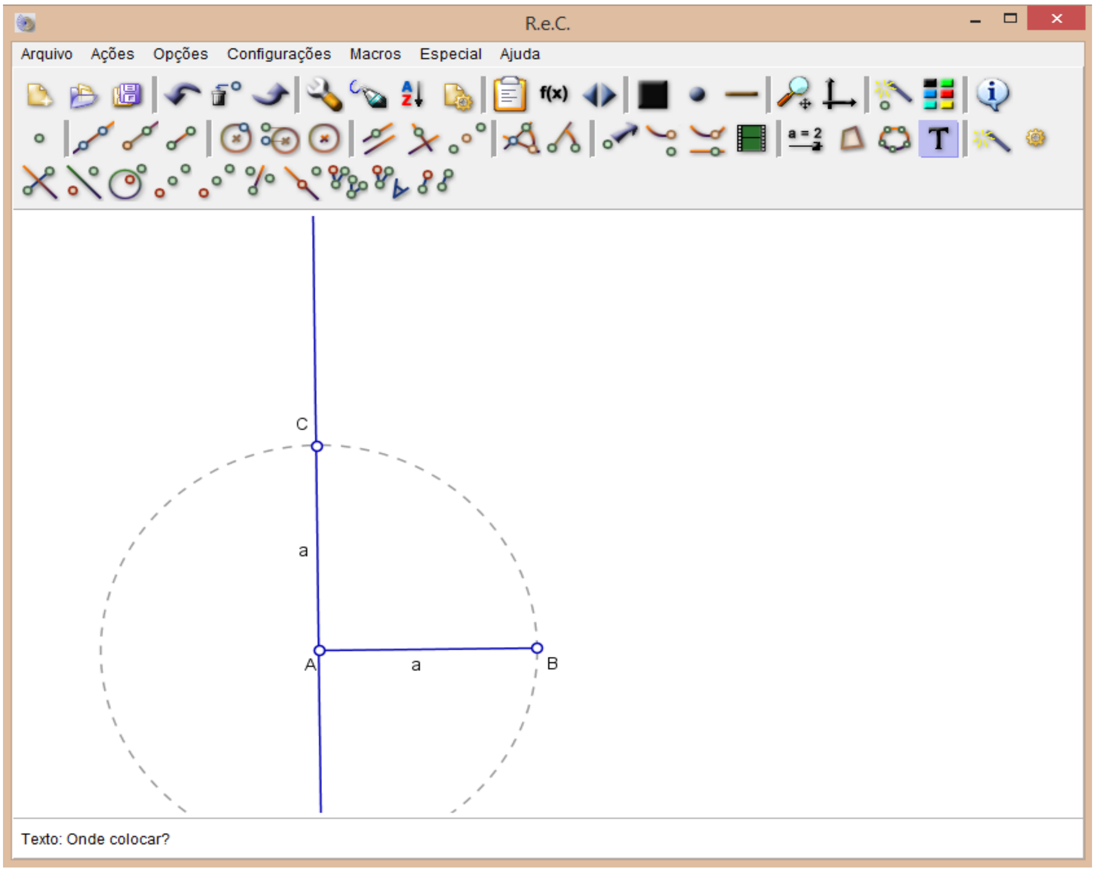


Figura 78: $\sqrt{2}$ *:passo 3*

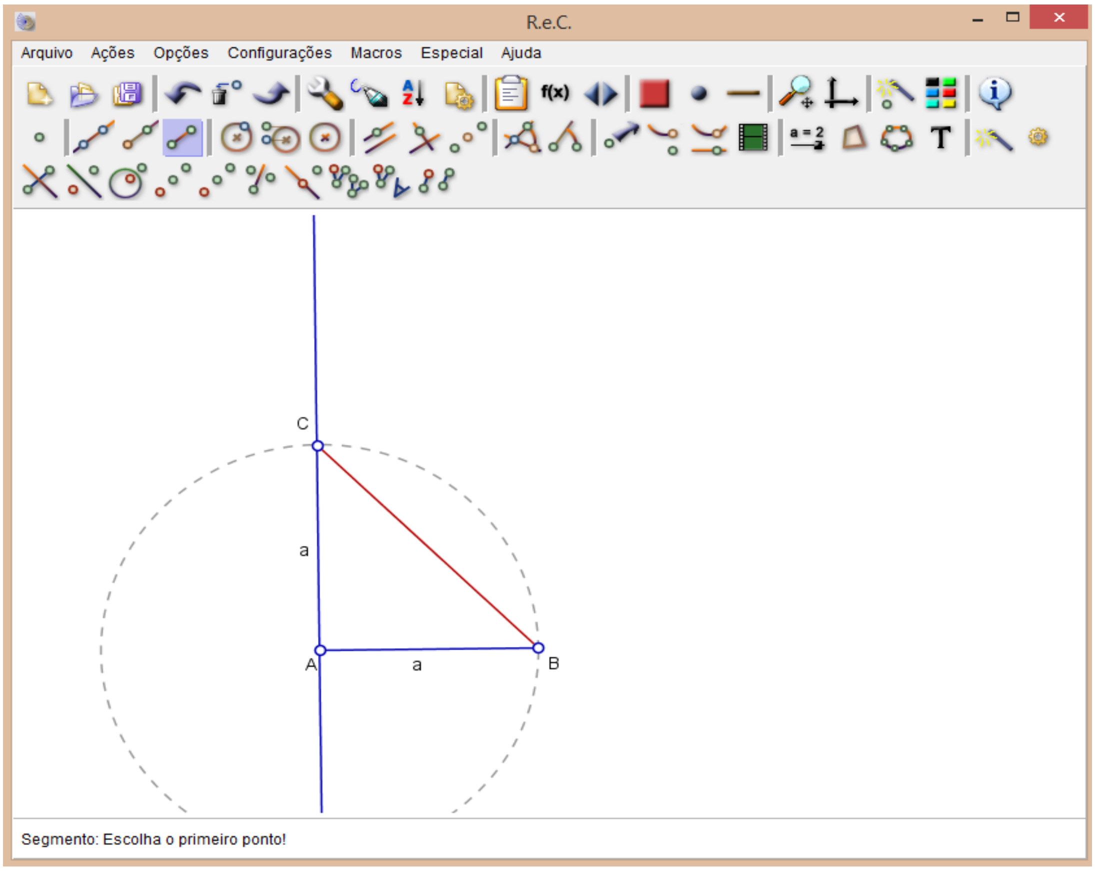


Figura 79: $\sqrt{2}$*: passo 4*

Justificativa: O triângulo ΔABC é retângulo por construção, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são os catetos de medida $a = 1$, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{BC}^2 = 2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2}.$$

2.4.2: $x = \sqrt{3}$

Para a construção de $\sqrt{3}$ procedemos da seguinte forma:

__**Ideia da construção geométrica:**__ Precisamos para a construção de $\sqrt{3}$, termos feito a construção de $\sqrt{2}$, assim como foi procedido na construção anterior. Partindo então de onde mostra a Figura 80. Deste ponto em diante, a construção de $\sqrt{3}$ tem os mesmo procedimentos da construção de $\sqrt{2}$.

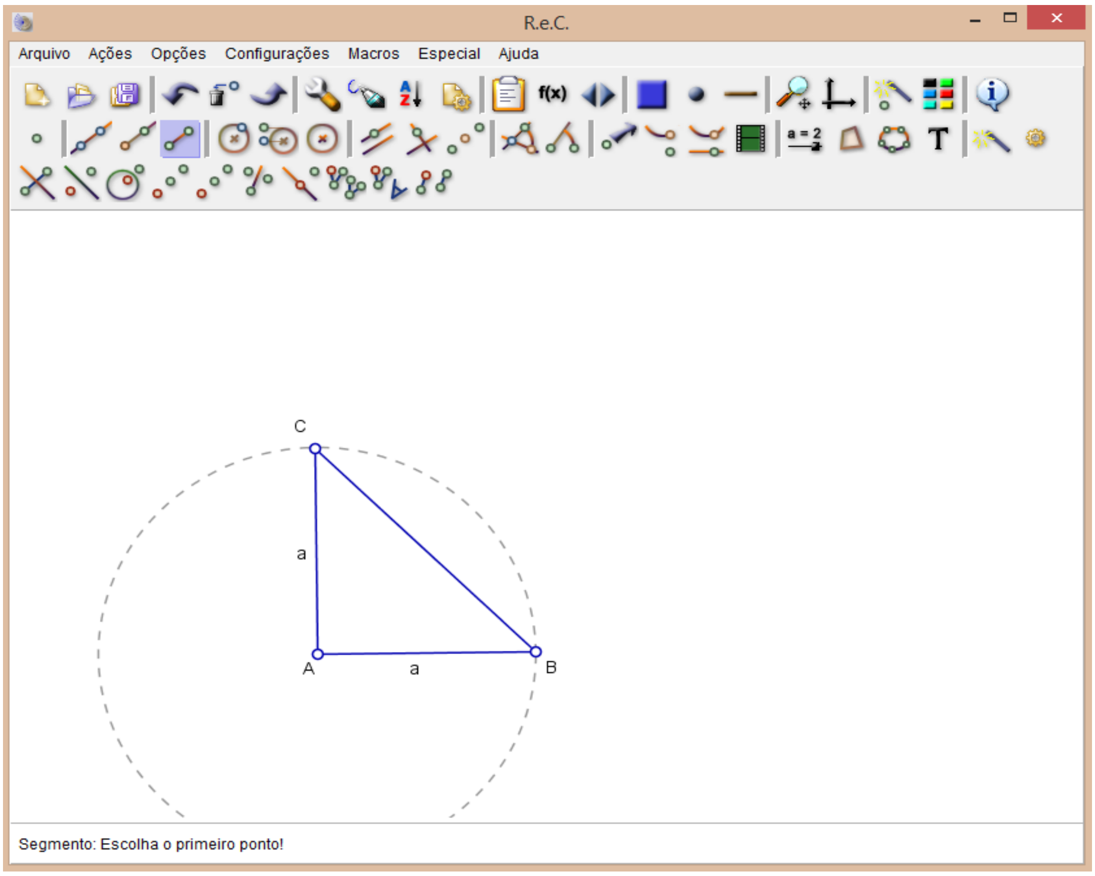
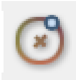


Figura 80: $\sqrt{2}$

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Clicamos no ícone de círculo, , e construímos o círculo de centro em C e de raio $\overline{AC}$ (Fig.81).

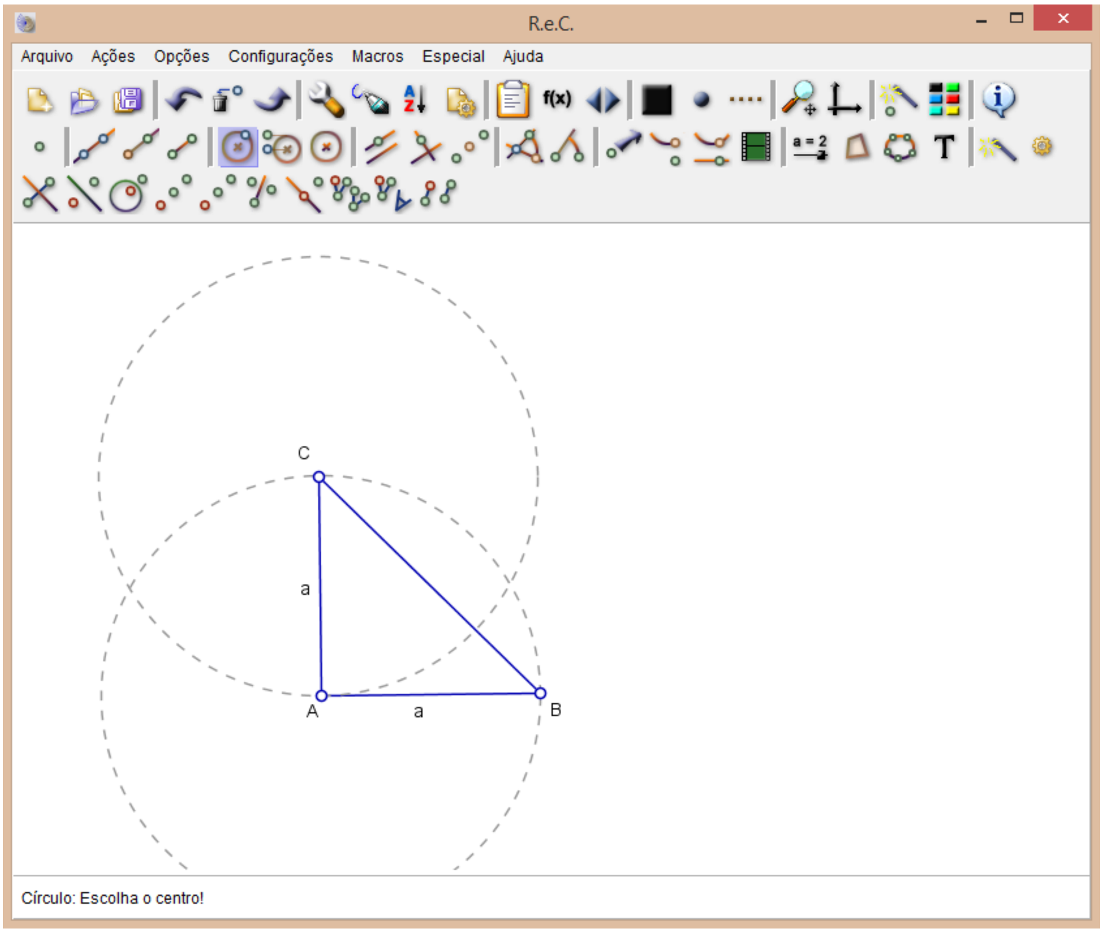


Figura 81: $\sqrt{3}$: passo 1

- Clicamos no ícone de reta perpendicular, , e construímos a perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ passando pelo ponto C. Marcando assim o ponto D na interseção desta perpendicular ao círculo construído (Fig.82).

- Selecionamos agora, novamente o ícone de segmento de reta, , e construímos o segmento $\overline{BD}$, por consequência, pelo Teorema de Pitágoras, o segmento $\overline{BD} = \sqrt{3}$ (Fig.83)

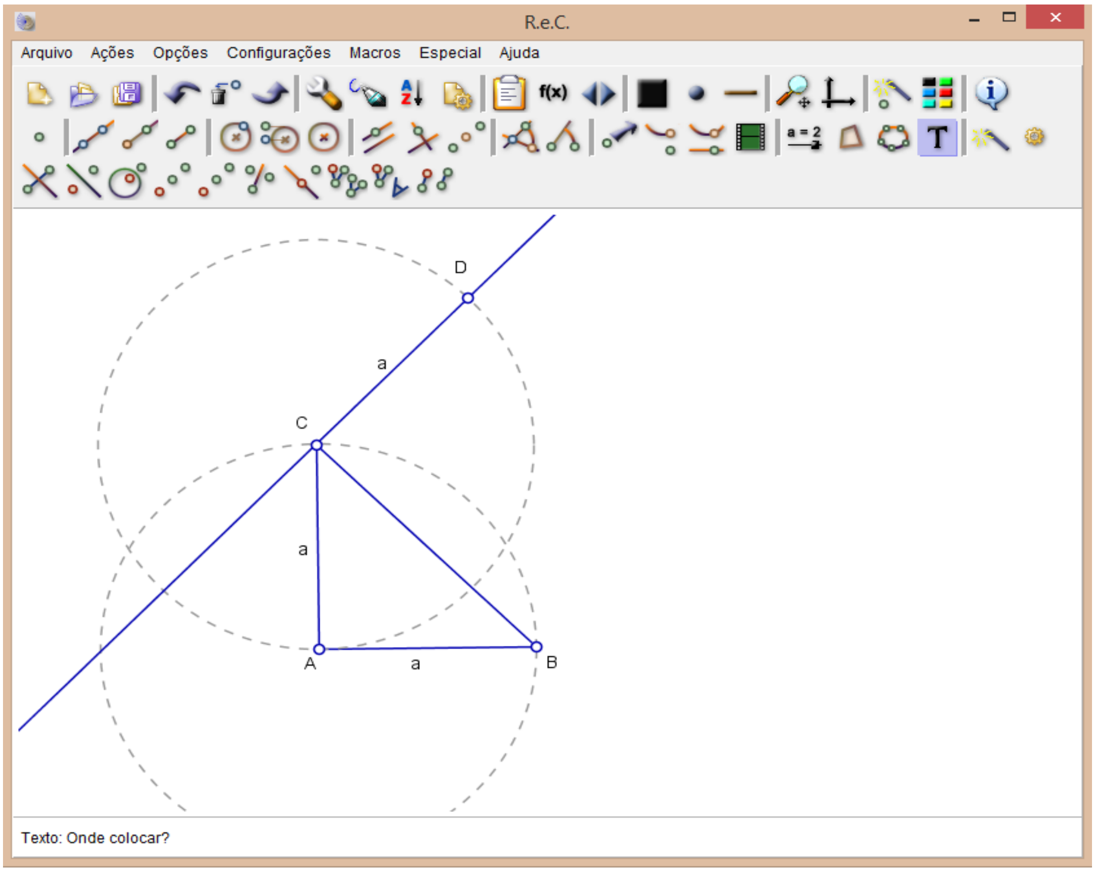


Figura 82: $\sqrt{3}$: passo 2

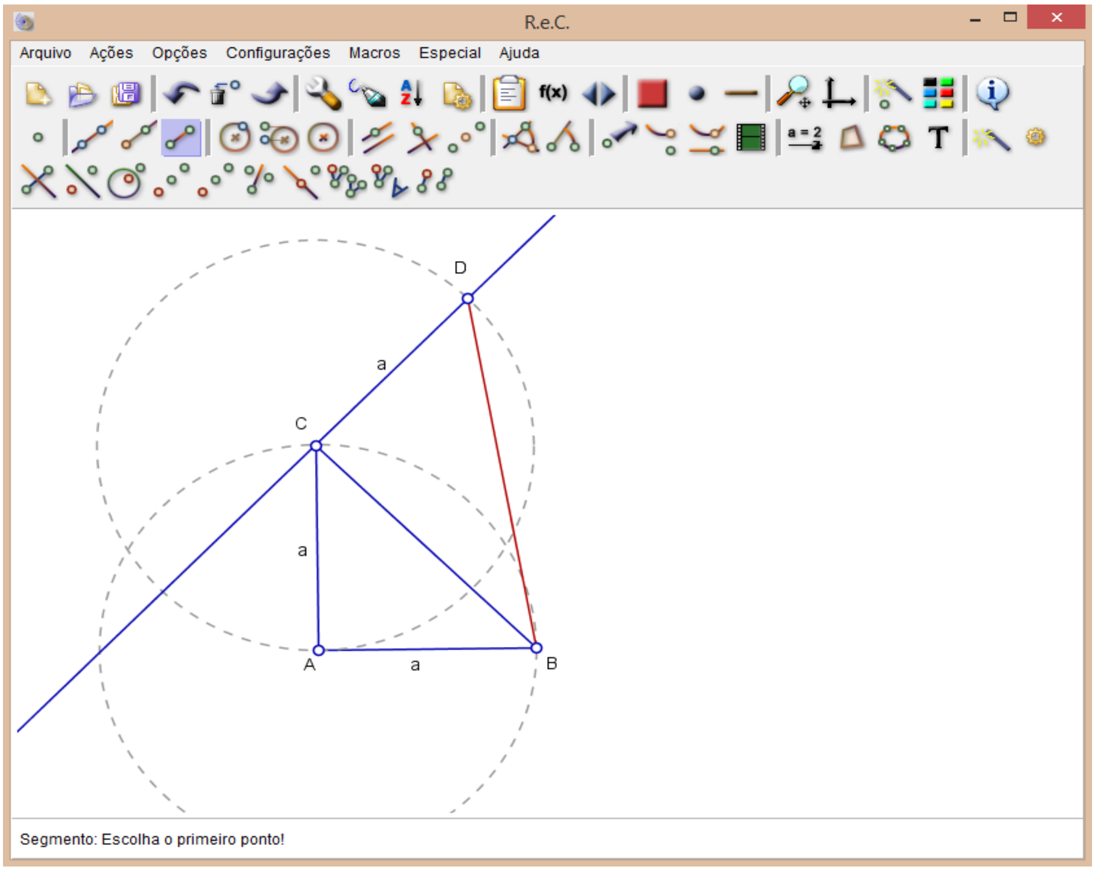


Figura 83: $\sqrt{3}$: passo 3

Justificativa: O triângulo ΔCBD é retângulo por construção, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são os catetos de medidas $\sqrt{2}$ e 1, respectivamente, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$$
$$\overline{BD}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$$
$$\overline{BD}^2 = 3$$
$$\overline{BD} = \sqrt{3}.$$

As construções do $\sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{n}$, com n natural, seguem de forma análoga e progressiva (Fig.84).

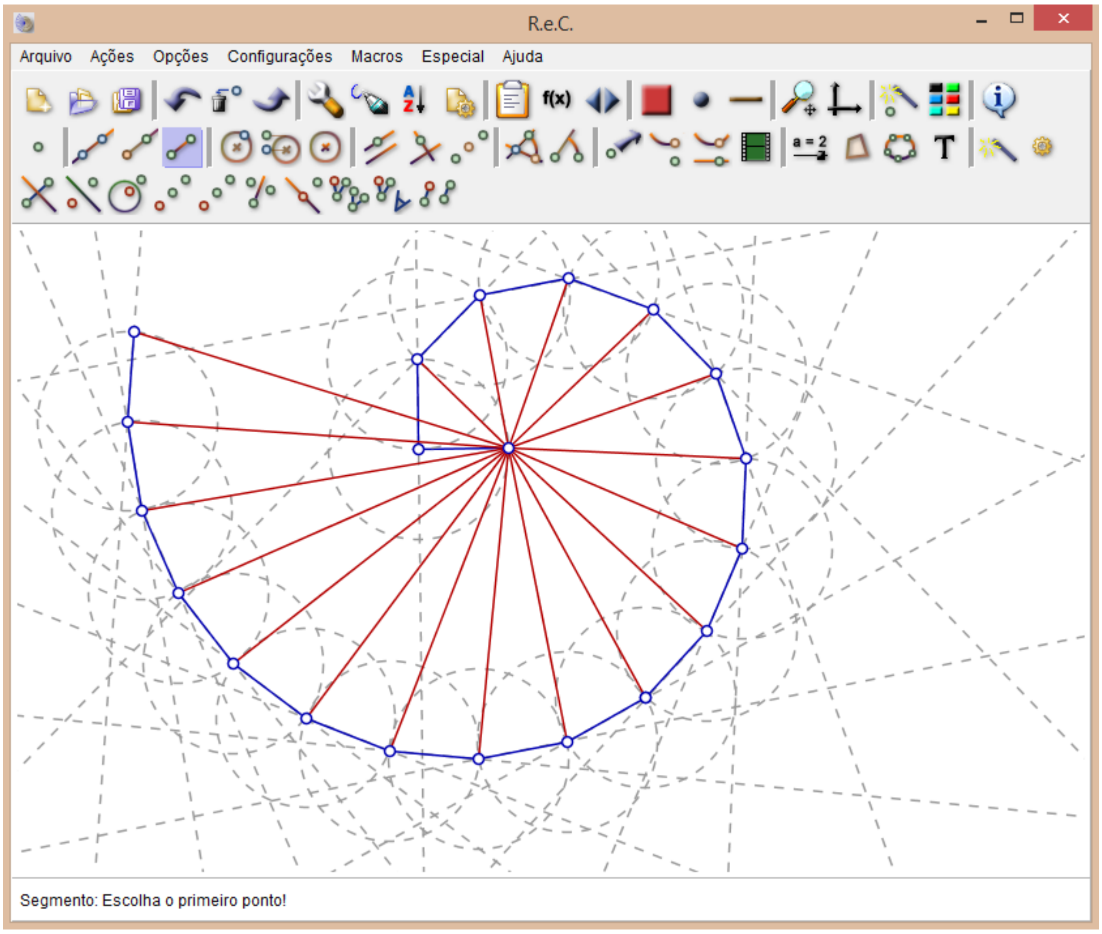


Figura 84: $\sqrt{n}$

2.5 Exemplos

A seguir temos alguns exemplos que são solucionados com as expressões algébricas e construções geométricas.

Exemplo 2.5.1: Um problema interessante é construir um quadrado conhecendo-se a soma da diagonal com o lado. Note que neste caso nos é fornecido apenas um segmento, digamos s, que representa a soma da diagonal com um lado do quadrado procurado, e portanto, desconhecemos o lado a do quadrado procurado.

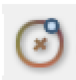
A diagonal do quadrado de lado a é dada por $a\sqrt{2}$, assim, algebricamente, podemos escrever $s = a\sqrt{2} + a$, e isolando a obtemos

$$a = \frac{s}{\sqrt{2}+1}$$
$$a = s\sqrt{2} - s.$$

Agora podemos construir o segmento $a = s\sqrt{2} - s$, uma vez que conhecemos o segmento s e, consequentemente o quadrado procurado, vejamos:

<u>A construção geométrica no Régua e Compasso:</u>

- Clicamos o ícone de semento de reta, , e construímos o segmento $\overline{AB}$ de medida s (Fig.85).

- Clicamos no ícone de círculo, , e construímos o círculo de centro em A e raio $\overline{AB}$. Selecionando agora o ícone da perpendicular, , construímos a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo ponto A e marcamos o ponto C na interseção da reta perpendicular com o círculo construído (Fig.86), determinando assim o segmento $\overline{AC} = s$.

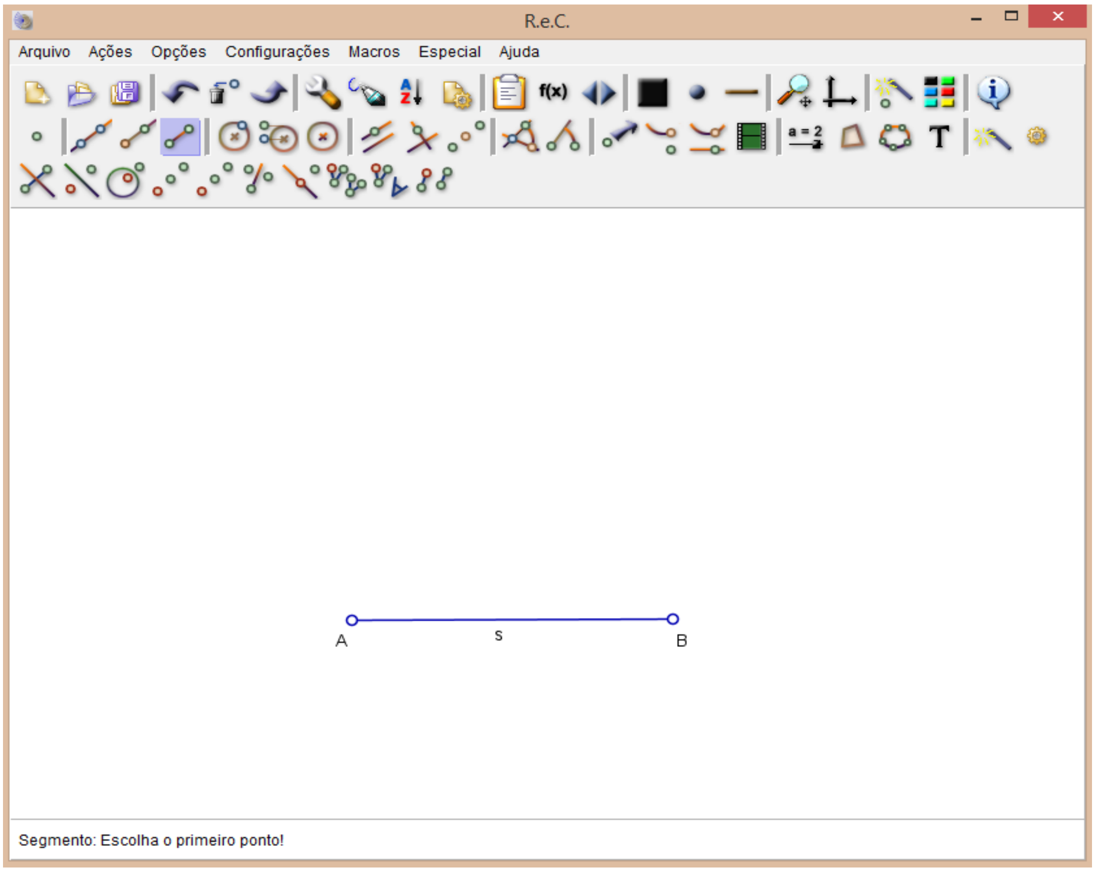


Figura 85: Quadrado de lado a: passo 1

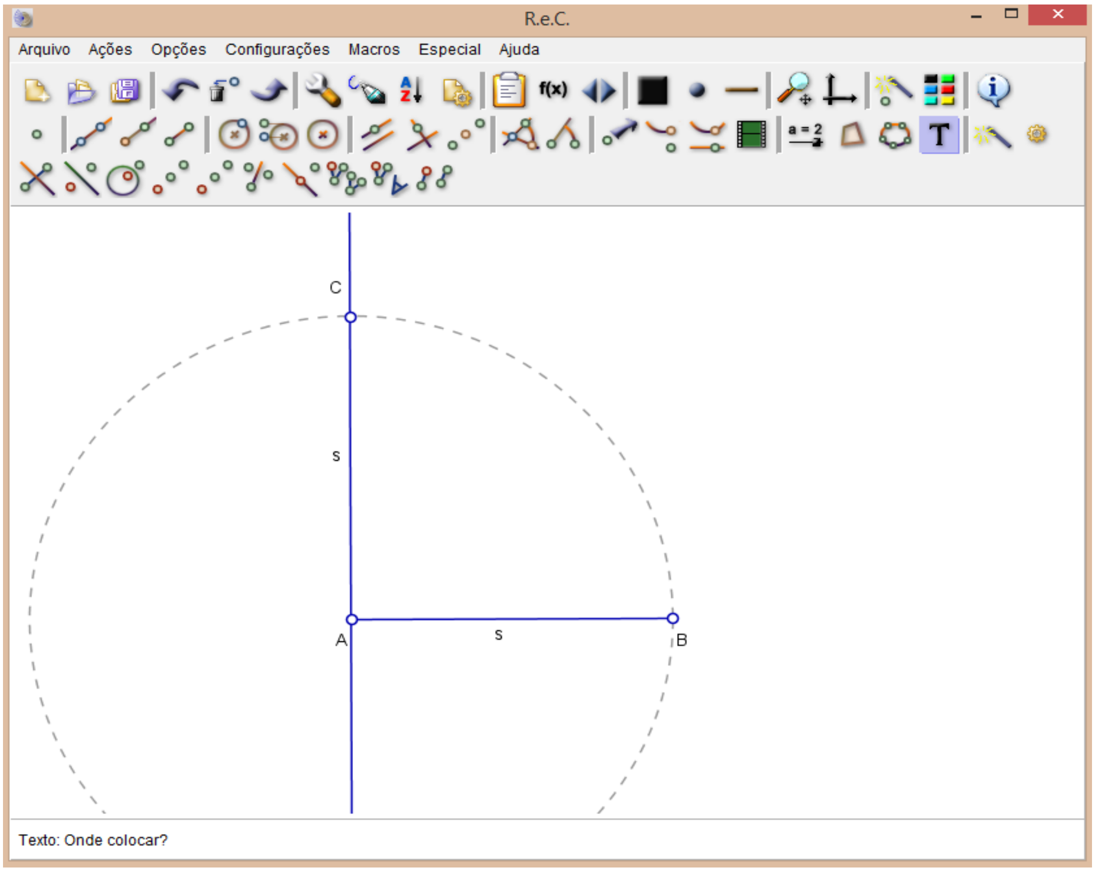
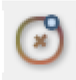


Figura 86: Quadrado de lado a: passo 2

- Clicando no ícone de segmento de reta, , determinamos o segmento $\overline{BC}$.

Selecionando agora o ícone do círculo, , construímos o círculo de centro em C e raio $\overline{AC}$ e marcando o ponto D de interseção entre o círculo de centro em C e o segmento $\overline{BC}$ (Fig.87).

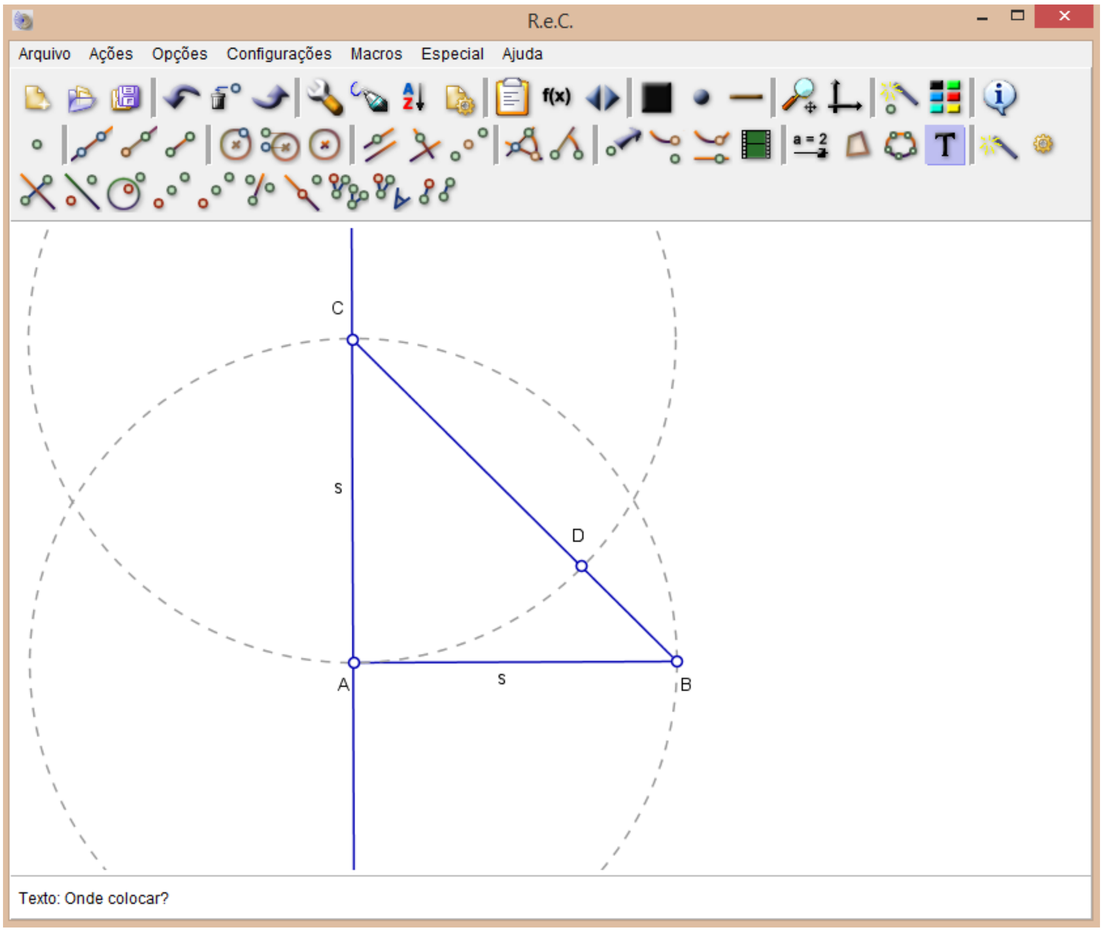


Figura 87: Quadrado de lado a: passo 3

- Clicando no ícone da perpendicular, , construímos duas retas perpendiculares ao segmento $\overline{BC}$, uma passando pelo ponto B, reta r, e a outra passando pelo ponto D, reta t (Fig.88).

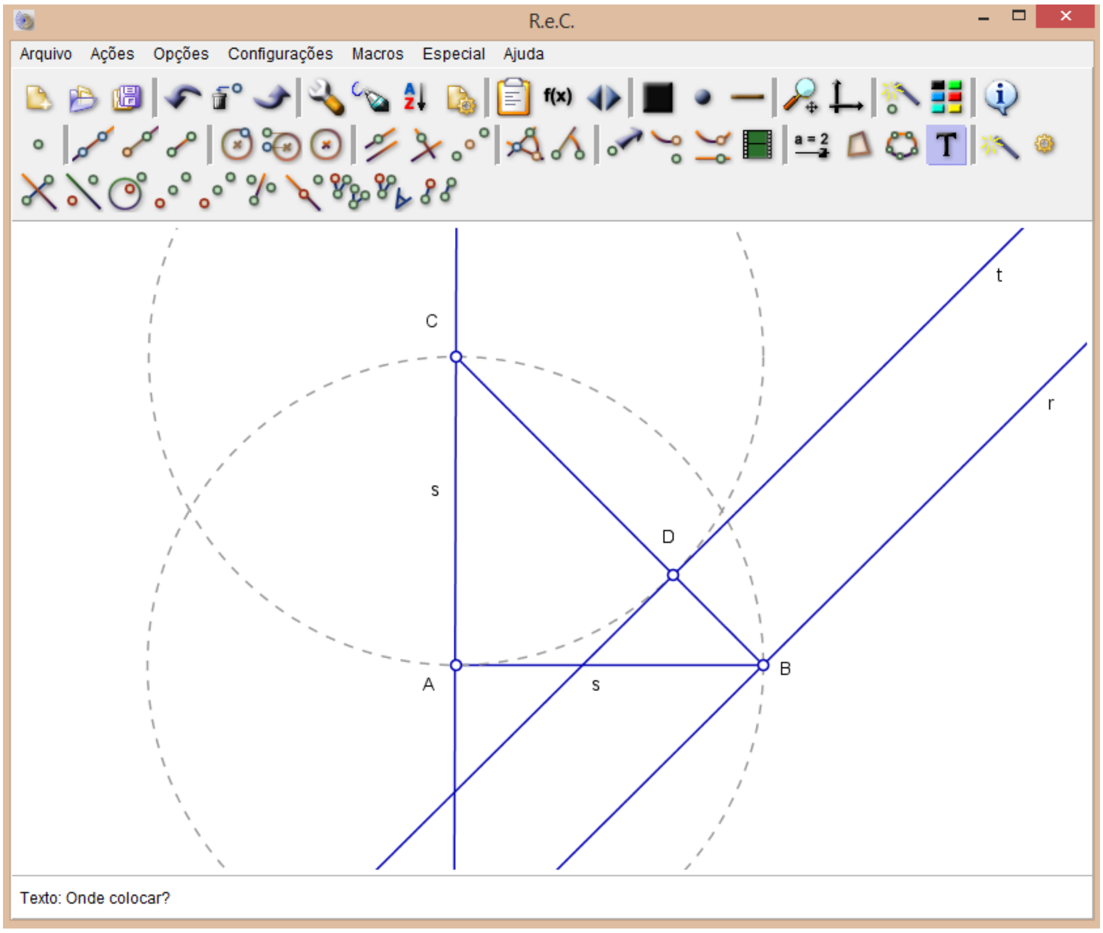
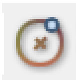


Figura 88: Quadrado de lado a: passo 4

- Selecionando o ícone do círculo, , construímos também dois círculos, um com centro no ponto B e outro com centro no ponto D, ambos de raio $\overline{BD}$. Marcamos também os pontos E, interseção do círculo de centro no ponto B com a reta r, e o ponto F, interseção do círculo de centro no ponto D com a reta t, (Fig.89).

- Clicando no ícone de segmento de reta, , construímos o segmento $\overline{EF}$, conforme mostra a Figura 90.

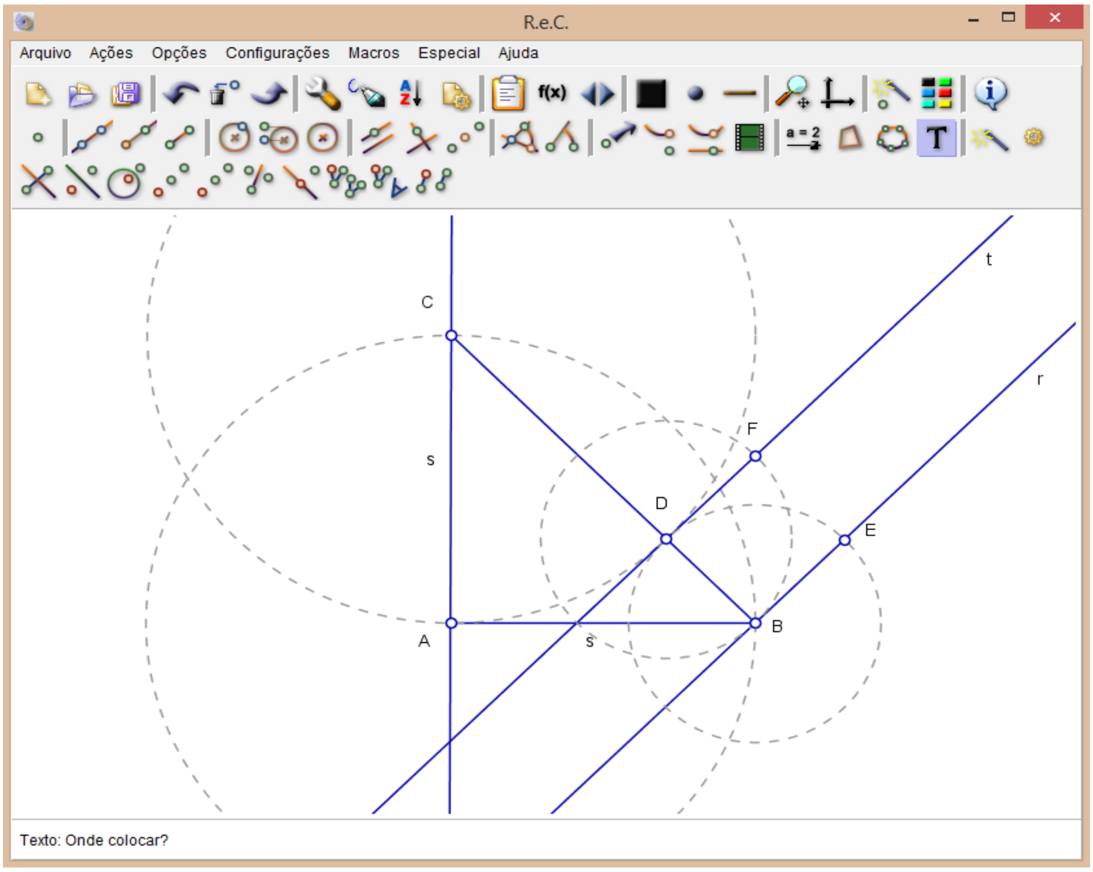


Figura 89: Quadrado de lado a: passo 5

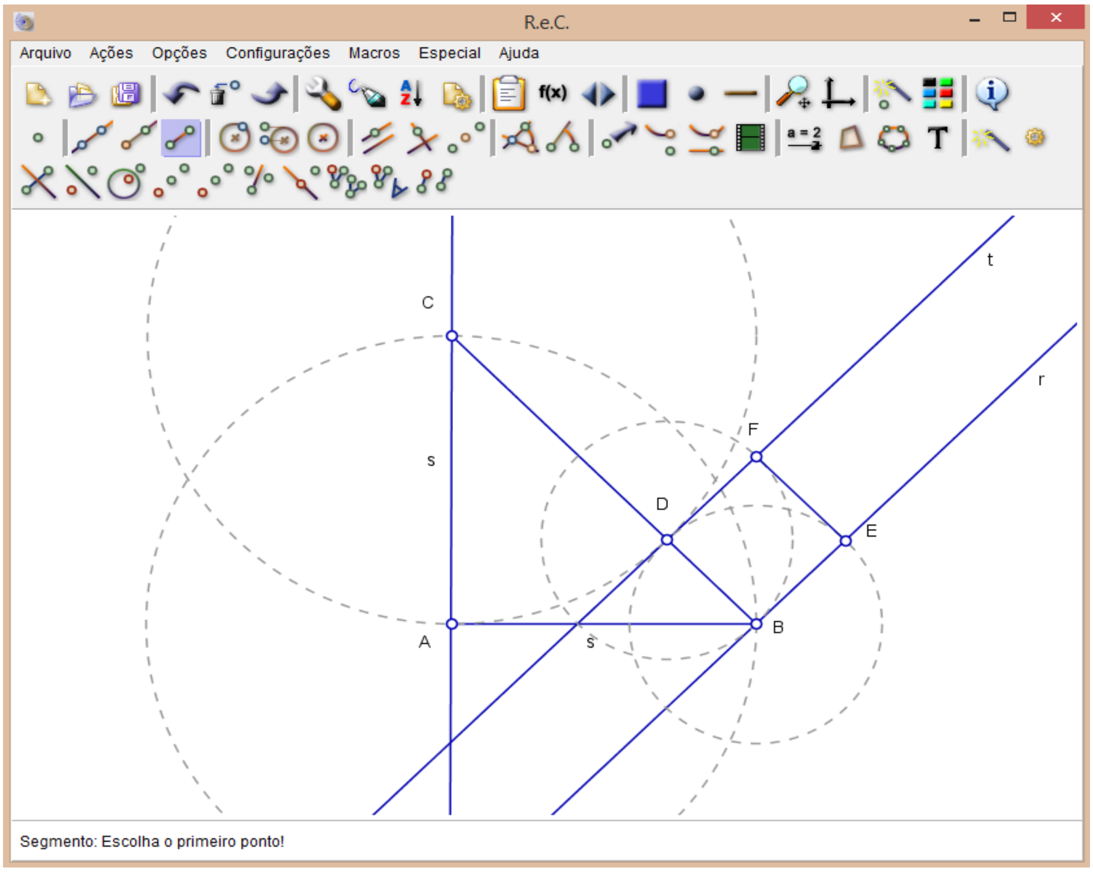


Figura 90: Quadrado de lado a: passo 6

O quadrado $DBEF$ é o quadrado de lado a desejado.

Justificativa: O triângulo ΔABC é retângulo de catetos s e hipotenusa $s\sqrt{2}$ (Teorema de Pitágoras), temos

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}.$$

onde $\overline{BC} = s\sqrt{2}$, hipotenusa do triângulo ΔABC, $\overline{DC} = s$, pois é raio do círculo de centro em C e $\overline{BD} = \overline{BE} = \overline{DF} = \overline{EF} = a$, lado do quadrado.

$$s\sqrt{2} = a + s$$
$$a = s\sqrt{2} - s.$$

Exemplo 2.5.2: Segmento Áureo.

Dado um segmento $\overline{AB}$, é possível determinar um ponto C em seu interior, de forma que este ponto divida o segmento $\overline{AB}$ em duas partes com a seguinte propriedade: *a razão entre a menor parte e a maior parte é igual a razão entre a maior parte e o segmento total*, (Fig.91), ou seja;

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Figura 91: Segmento Áureo Interno

O segmento $\overline{AC}$ com essa propriedade é chamado de *segmento áureo interno* de $\overline{AB}$. Tomando $\overline{AB} = a$ na expressão acima, obtemos

$$\overline{AC} = a.\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Podemos ainda imaginar um segmento $\overline{AB}$ e um ponto C' externo a $\overline{AB}$ com a mesma propriedade enunciada anteriormente (fig.92), ou seja,

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}.$$

Figura 92: Segmento Áurea Externo

O segmento $\overline{AC'}$ com essa propriedade é chamado de *segmento áureo externo* de $\overline{AB}$. Tomando $\overline{AB} = a$ na expressão acima, obtemos

$$\overline{AC'} = a.\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Os segmentos áureos interno e externo podem ser construídos via régua e compasso como segue.

A construção geométrica no Régua e Compasso:

- Clicamos no ícone de segmento de reta, , e construímos o segmento $\overline{AB} = a$ (Fig.93).

- Selecionamos o ícone do ponto médio, , e determinamos o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. Em seguida, clicamos no ícone da perpendicular, , e construímos a reta r, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando pelo ponto B (Fig.94).

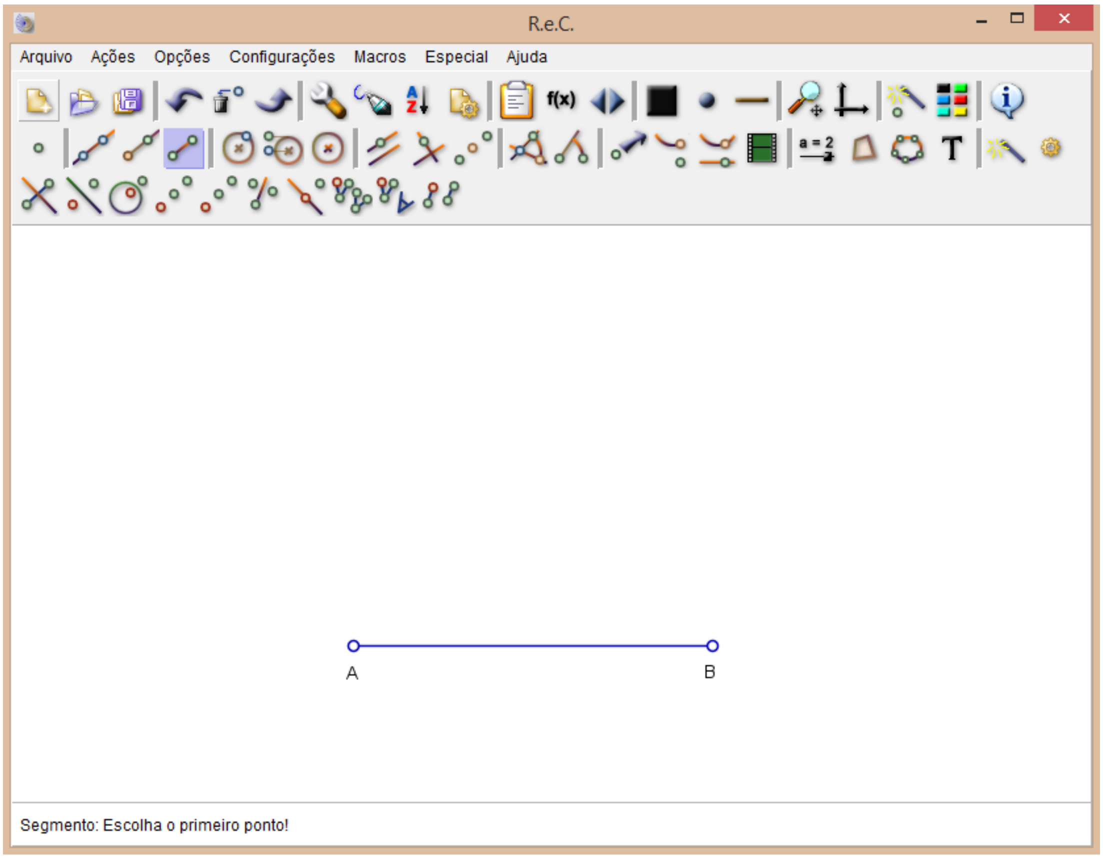


Figura 93: Construção do Segmento Áureo: passo 1

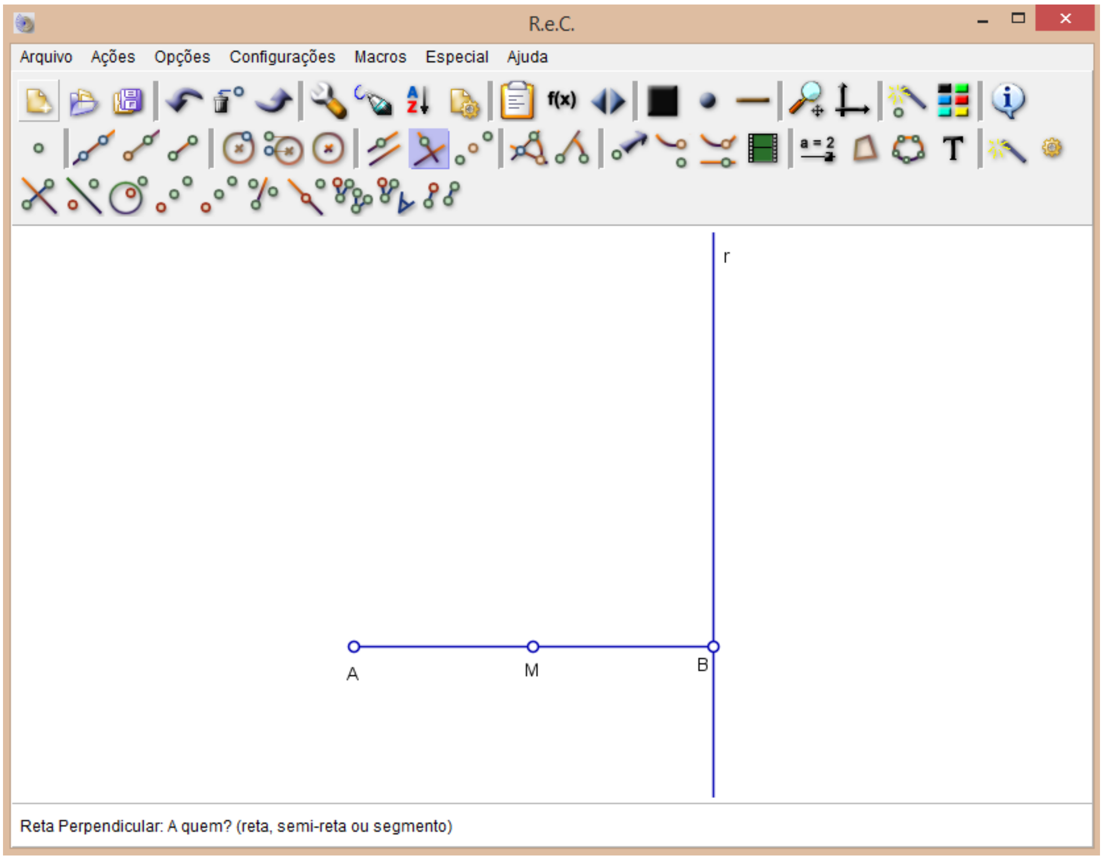
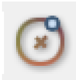


Figura 94: Construção do Segmento Áureo: passo 2

- Clicamos no ícone do círculo, , e determinamos o círculo de centro no ponto B e raio $\overline{BM}$, marcando também o ponto D em uma das intercessões deste círculo com a reta r. Selecionamos agora o ícone de semirreta, , e construímos a semirreta $\overrightarrow{AD}$ (Fig.95).

- Clicamos novamente no ícone do círculo, , e determinamos o círculo de centro no ponto D e raio $\overline{BD}$, determinado os pontos C e C' nas intercessões deste círculo com a semirreta $\overrightarrow{AD}$ (Fig.96).

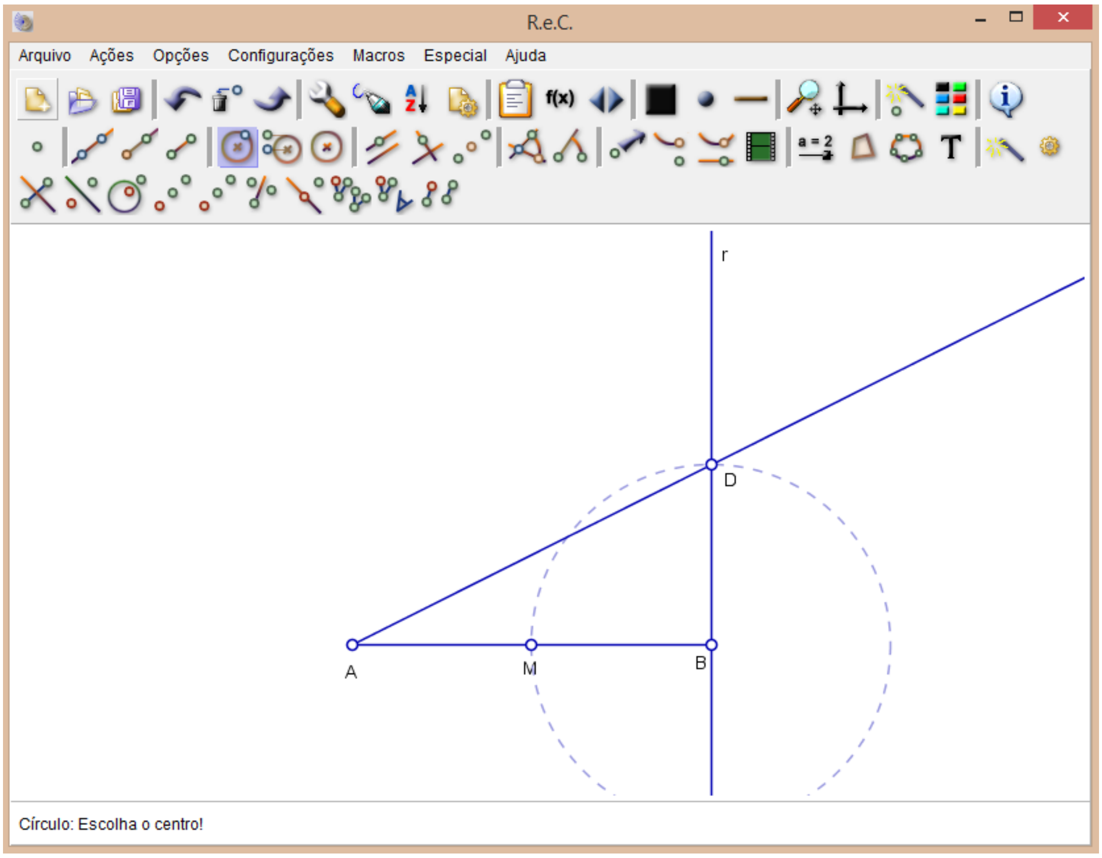


Figura 95: Construção do Segmento Áureo: passo 3

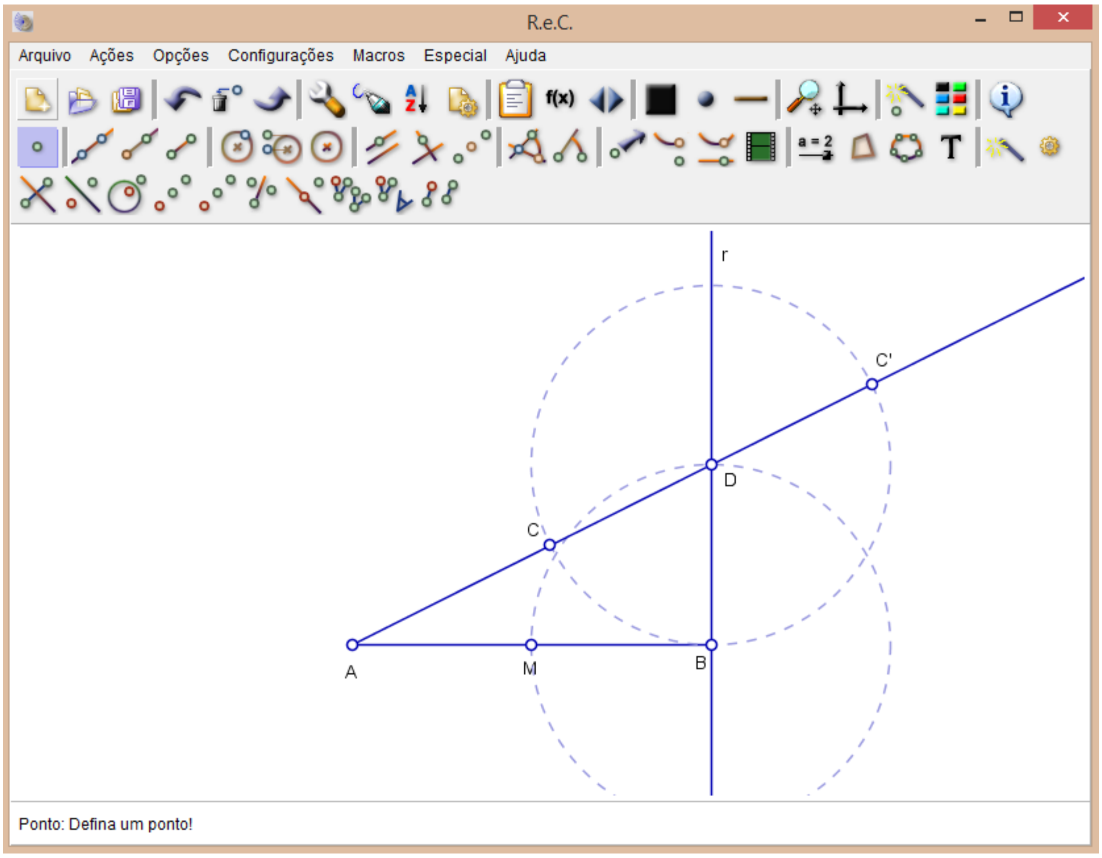


Figura 96: Construção do Segmento Áureo: passo 4

Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AC'}$ são os segmentos áureos do segmento $\overline{AB}$.

Justificativa: O triângulo ΔABD é retângulo de catetos $\overline{AB} = a, \overline{BD} = \dfrac{a}{2}$ e hipotenusa $\overline{AD} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (Teorema de Pitágoras), temos

$$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD}.$$

Como $\overline{CD} = \dfrac{a}{2}$, temos

$$\overline{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$$

$$\overline{AC} = a.\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Logo, $\overline{AC}$ é *segmento áureo interno* de $\overline{AB}$.

Já o segmento $\overline{AC'}$ é

$$\overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{DC'}.$$

Como $\overline{DC'} = \frac{a}{2}$, temos

$$\overline{AC'} = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}$$

$$\overline{AC'} = a.\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Logo, $\overline{AC'}$ é *segmento áureo externo* de $\overline{AB}$.

Capítulo III

Cinco Problemas de Construção via Régua e Compasso

Neste capítulo vemos quais são as condições necessárias para que um número seja construtível via régua e compasso.

3.1 Introdução

Os Pitagóricos e os Pré-Platônicos detinham um vasto conhecimento de matemática e é também desta época, século IV a.C, que vários e belíssimos problemas de geometria foram resolvidos usando apenas régua não graduada, e o compasso. Mas não menos que cinco problemas investigados pelos gregos daquela época ficaram sem solução, os quais tiveram de aguardar dois milênios de evolução matemática para que fossem completamente compreendidos, foram eles:

1. Construção de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de outro cubo dado. Este problema ficou conhecido como duplicação do cubo.
2. Construção de um segmento de reta cujo comprimento fosse igual ao perímetro de uma dada circunferência. Este problema ficou conhecido como retificação da circunferência.
3. Construção de um quadrado cuja área fosse igual à de um dado círculo. Este problema ficou conhecido como quadratura do círculo.
4. Divisão de um ângulo qualquer em três partes iguais. Este problema ficou conhecido como trissecção do ângulo.
5. Construção de polígonos regulares. Este problema consiste em dividir uma circunferência em n partes iguais.

Onde destes, a duplicação do cubo, quadratura do círculo e a trissecção do ângulo ficaram conhecidos como Os Três Problemas Clássicos.

Pela Teoria das Equações Algébricas ficou provado que a duplicação do cubo, retificação da circunferência e a quadratura do círculo são sempre impossíveis usando apenas régua e compasso. A trissecção do ângulo só é possível em casos particulares, como por exemplo $45°, 90°, 180°, 270°, ...$, não existindo uma maneira geral para trisseccionar qualquer ângulo. Para a divisão da circunferência em n partes iguais, Gauss deu a seguinte resposta em 1786: ela só é possível quando n é um número da forma $n = 2^s p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \dots$ onde s é um número inteiro não negativo, $p_1, p_2, p_3, \dots$ são primos da forma $\left(2^{2^k} + 1\right)$ e $r_1, r_2, r_3, \dots$ são, cada um deles, zero ou um. Ainda assim, existindo uma incógnita nesta questão: até hoje não se sabe se para $k > 4$ existem ou não primos do tipo $\left(2^{2^k} + 1\right)$.

Quanto aos Três Problemas Clássicos, vamos analisá-los adiante de forma separada, buscando justificativas a nível mais elementar, antes porém, vejamos alguns conceitos e ideias sobre números construtíveis.

3.2 Números Construtíveis

Desejamos tentar construir, via régua e compasso, um dado número. Mas as construções utilizando a régua e o compasso têm como "matérias-primas" apenas pontos, retas, segmentos, etc. Assim, faz-se necessário esclarecer o que queremos dizer com "construir números" ou "números construtíveis".

A ideia é associar o número que se deseja construir a um segmento, e então trabalhar na construção do segmento associado. Para tanto, vamos tomar uma reta e escolher, arbitrariamente, um ponto P nesta reta e fixá-lo, associando o número zero a ele. Em seguida tomamos outro ponto Q nesta mesma reta, Q diferente de P, e associamos a ele o número 1. Desta forma, podemos pensar no segmento $\overline{PQ}$ como uma unidade básica de medida, e a partir dela associar a cada ponto da reta um único número real e reciprocamente. De forma que, dado um segmento $\overline{PR}$, podemos associar ao ponto R um único número real a, e reciprocamente, dado o número real a podemos associar a ele um único ponto R, e considerar o segmento $\overline{PR}$. Neste contexto, dizemos que o segmento $\overline{PR}$ está associado ao número a, ou que o número a está associado ao segmento $\overline{PR}$. Utilizamos $\overline{PR} = a$ para denotar a associação entre o ponto R e o número a. Agora estamos aptos a apresentar a seguinte definição:

Definição 3.2.1: Dizemos que o número a é *construtível*, se o segmento $\overline{PR}$ a ele associado for construtível via régua e compasso a partir do segmento unitário $\overline{PQ}$.

Se a e b são números reais construtíveis, então $a+b, a-b, a.b, \frac{a}{b}$ (se $b \neq 0$), $\frac{1}{b}$ se $(b \neq 0)$ e $\sqrt{a}$ se $(a \geq 0)$ também são construtíveis.

Esta propriedade nos garante que todo número racional é construtível e também o irracionais obtidos a partir do cálculo com raiz quadrada de números construtíveis, como por exemplo $\sqrt{p}$ se $p > 0$. Veja as construções nos exemplos que seguem:

Construção dos Números $a + b$ e $a - b$

Dados os números a e b, de forma que sejam construtíveis, considere a reta $\overleftrightarrow{PR}$ de tal forma que $\overline{PR} = a$, e construímos sobre a reta $\overleftrightarrow{PR}$ o segmento $\overline{PB}$, tal que $\overline{RB} = b$ e que R esteja entre P e B. Construímos um círculo com centro no ponto R e de raio $\overline{RB} = b$. O círculo construído terá duas interseções com a reta $\overleftrightarrow{PR}$, o ponto B e o ponto C. Então temos que, $\overline{PB} = a + b$ e $\overline{PC} = a - b$, o que mostra que $a + b$ e $a - b$ são números construtíveis (Fig.97).

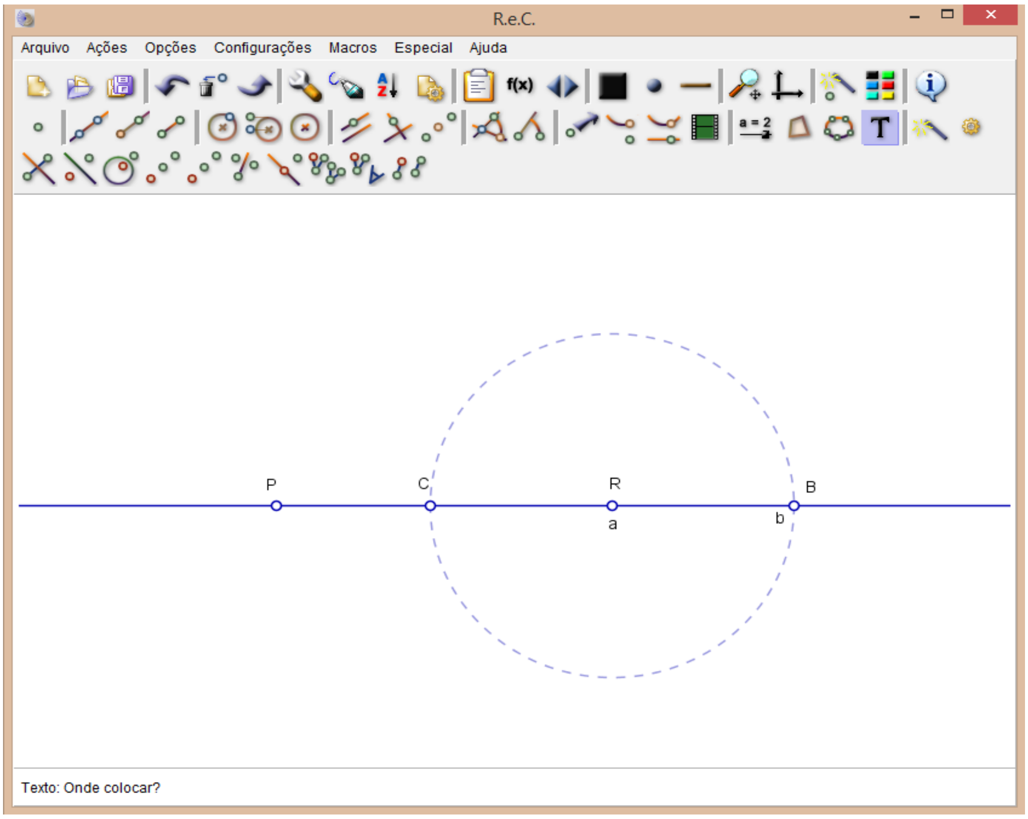


Figura 97: Os Números $a + b$ e $a - b$

Construção do Número $\boldsymbol{a.b}$

Dados os números a e b, de forma que sejam construtíveis. Para a construção de $a.b$, podemos considerar que a e b têm o mesmo sinal, pois se tiverem sinais contrários, basta considerar na reta, o simétrico do segmento construído.

Considere duas retas distintas, $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$, onde os segmentos $\overline{PR} = a$ e segmento $\overline{PQ}$ seja unitário, ou seja, $\overline{PQ} = 1$. Considere ainda o ponto B sobre a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, onde $\overline{PB} = b$. Consideramos a reta que passa pelos pontos R e Q, a reta $\overleftrightarrow{RQ}$. Paralela à reta $\overleftrightarrow{RQ}$, construímos uma reta que passe pelo ponto B. Esta reta intercepta $\overleftrightarrow{PR}$ em um ponto C, onde $\overline{PC} = a.b$, como mostra a Figura 98.

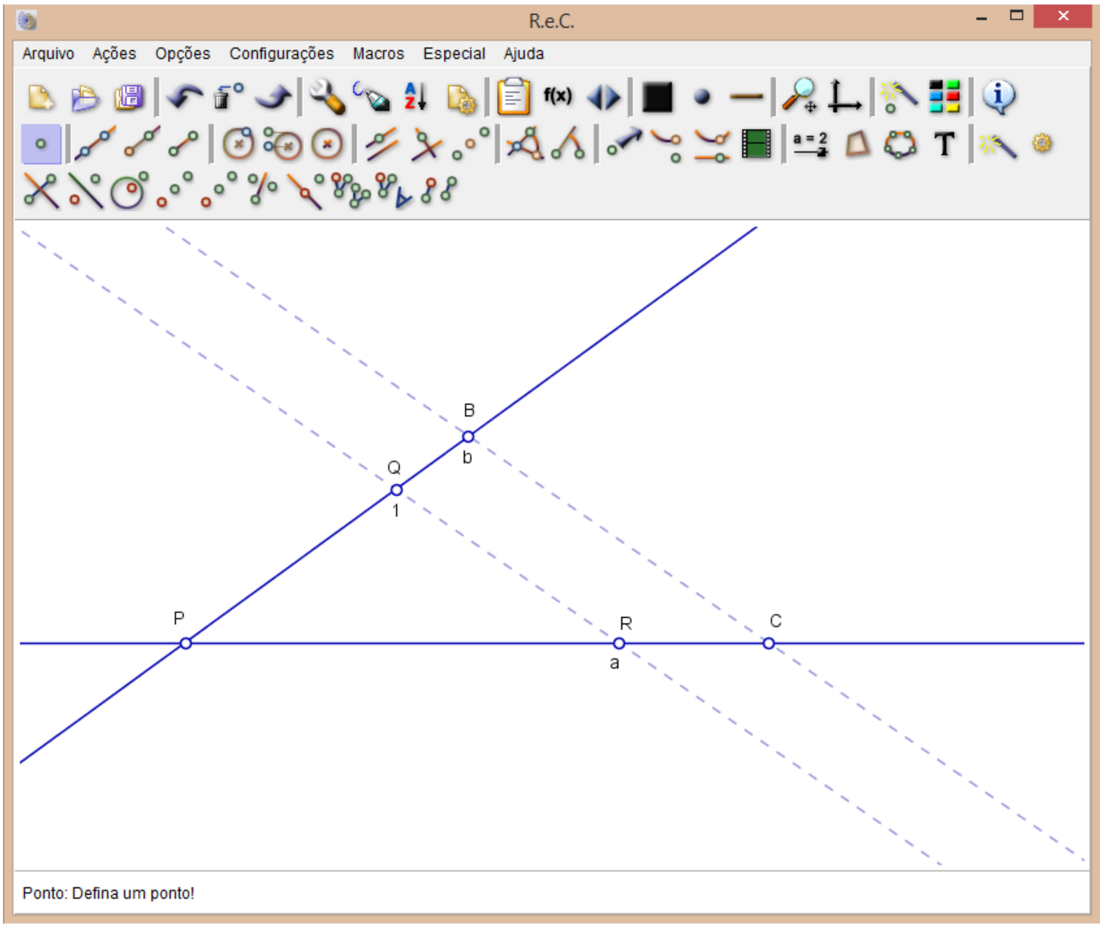


Figura 98: O Número $a.b$

Justificativa: Pela semelhança de triângulo, $\Delta PQR \approx \Delta PBC$, temos que

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.$$

ou seja,

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{\overline{PC}}$$
$$\overline{PC} = a.b.$$

O que mostra que $a.b$ é um número construtível.

Construção do Número $\frac{a}{b}$

Dados os números a e b, de forma que sejam construtíveis. Considere duas retas, $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$, onde $\overline{PR} = a$ e o segmento $\overline{PQ}$ seja unitário, ou seja, $\overline{PQ} = 1$, e um ponto B sobre a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, tal que $\overline{PB} = b$. Construímos a reta que passa pelos pontos B e R, a reta $\overleftrightarrow{BR}$, e a reta que passa pelo ponto Q, de forma que seja paralela à reta $\overleftrightarrow{BR}$ e que intercepte a reta $\overleftrightarrow{PR}$ em um ponto C, onde $\overline{PC} = \frac{a}{b}$, conforme mostra a Figura 99.

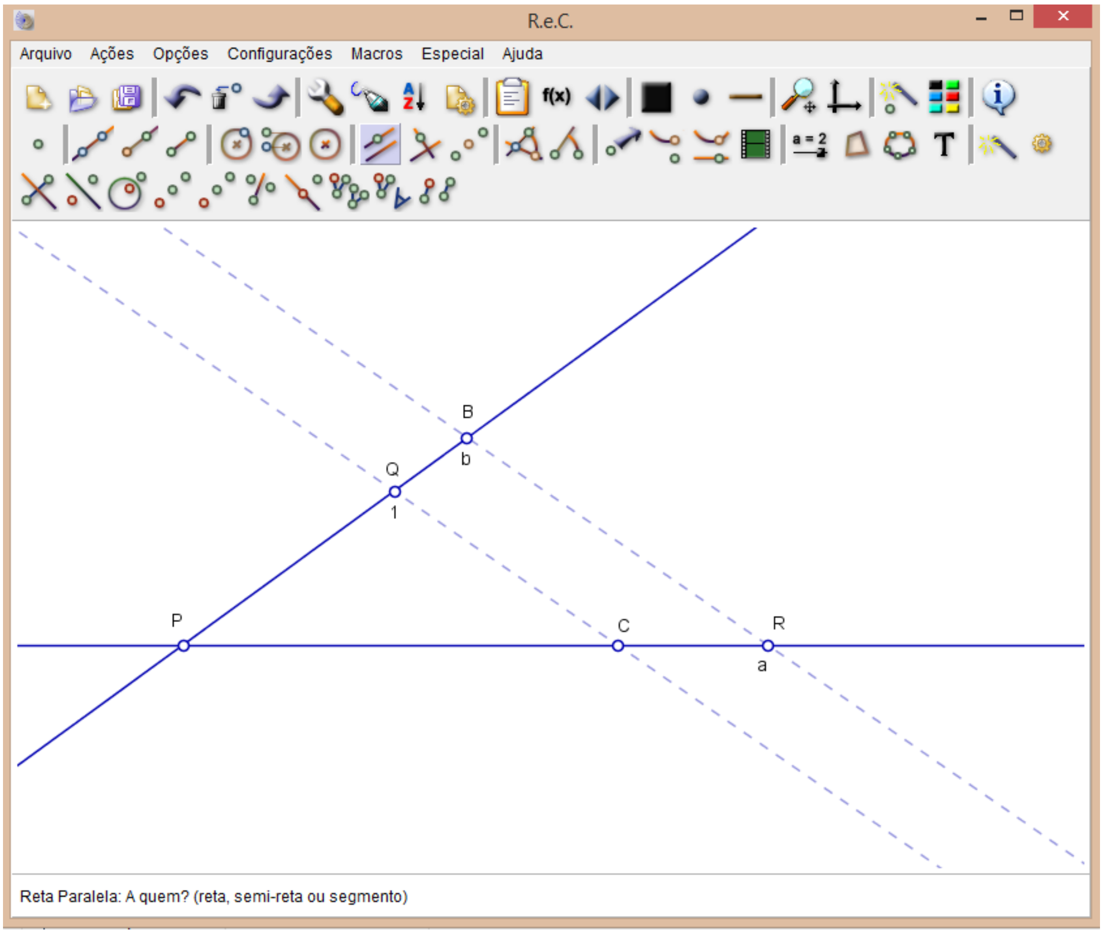


Figura 99: O Número a / b

Justificativa: Pela semelhança de triângulo, $\Delta PQC \approx \Delta PBR$, temos que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PC}},$$

ou seja,

$$\frac{b}{1} = \frac{a}{\overline{PC}}$$

$$\overline{PC} = \frac{a}{b}.$$

O que mostra que $\frac{a}{b}$ é um número construtível.

Construção do Número $\sqrt{p}$

A construção que apresentamos aqui generaliza a ideia da construção de $\sqrt{n}$**,** para um inteiro positivo n que apresentamos anteriormente. Façamos a construção de $\sqrt{p}$, supondo p primo, apenas para destacar que este número pode ser um irracional, mas a construção não utiliza o fato de p ser um primo, podendo ser repetida integralmente para qualquer número real positivo e construtível a .

Para a construção consideramos a reta $\overleftrightarrow{PB}$ de tal forma que $\overline{PB} = p$, sendo p um número primo, o ponto P a origem da reta e o ponto Q sobre a reta $\overleftrightarrow{PB}$ de tal forma que o segmento $\overline{PQ}$ seja unitário, $\overline{PQ} = 1$. Determinamos o ponto médio M do segmento $\overline{PB}$. Construímos um círculo com centro em M e raio $\overline{MB}$ e a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{PB}$ passando por Q. Na interseção desta reta com o círculo marcamos o ponto A. Construímos agora um novo círculo, com centro no ponto P e raio $\overline{PA}$, determinando o ponto C como a interseção deste círculo com a reta $\overleftrightarrow{PB}$. Segue que $\overline{PC} = \sqrt{p}$ (Fig.100).

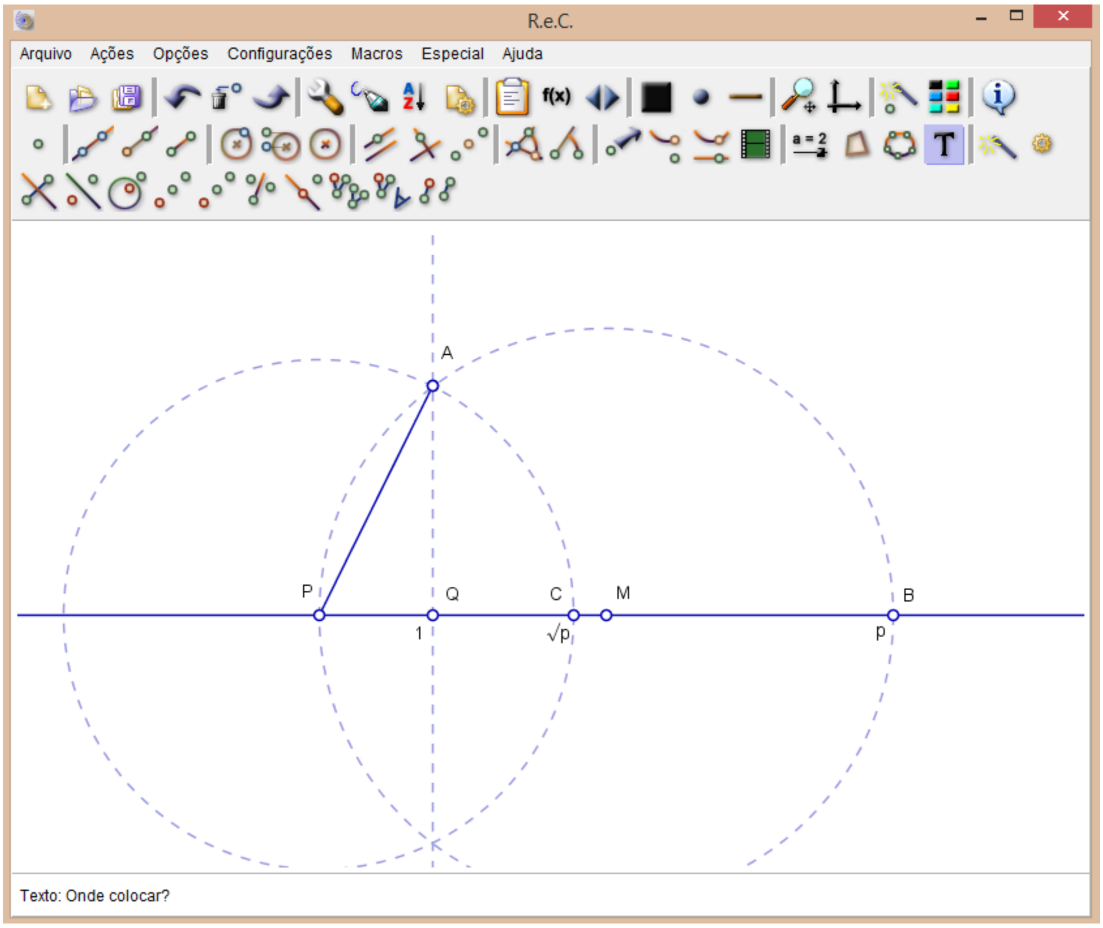


Figura 100: O Número $\sqrt{p}$

Justificativa: Considere o triângulo retângulo ΔPAB, com ângulo reto em A, onde $\overline{AQ}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{PB}$. Uma relação métrica do triângulo retângulo nos garante que

$$\overline{PA}^2 = \overline{PQ}.\overline{PB},$$

ou seja,

$$\overline{PA}^2 = 1.p$$

$$\overline{PA} = \sqrt{p}.$$

Sabendo que $\overline{PA} = \overline{PC}$, pois são raios do mesmo círculo, então

$$\overline{PC} = \sqrt{p}.$$

Por exemplo, fazendo $p = 17$ construtível, temos que $\sqrt{p} = \sqrt{17}$ é construtível. Com isso podemos concluir que os números tipo $3 + \sqrt{3}, \sqrt{5 - \sqrt{2}}$, também são construtíveis.

3.3 Pontos e Retas Construtíveis no Plano Cartesiano

No ambiente do plano cartesiano também podemos falar de objetos construtíveis via régua e compasso.

Definição 3.3.1: *Um ponto $P(a, b)$ no plano cartesiano é um **ponto construtível** se suas coordenadas são construtíveis, ou seja, se a e b são construtíveis.*

Definição 3.3.2: *Um segmento de reta que passa pelos pontos $P(\alpha, \beta)$ e $Q(\gamma, \delta)$, é um **segmento de reta construtível** se α, β, γ e δ são construtíveis.*

A equação geral da reta que passa pelos pontos $P(\alpha, \beta)$ e $Q(\gamma, \delta)$ é da seguinte forma

$$ax + by + c = 0.$$

Onde $a = (\delta - \beta), b = (\alpha - \gamma)$ e $c = \beta\gamma - \alpha\delta$.

De fato, numa equação de reta, o coeficiente angular de uma reta que passa pelos pontos $P(\alpha, \beta)$ e $Q(\gamma, \delta)$ é dado por:

$$m = \frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha}.$$

Substituindo na equação fundamental, temos

$$y - y_p = m(x - x_p)$$
$$y - \beta = \frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha}(x - \alpha)$$

$$(\gamma - \alpha)(y - \beta) = (\delta - \beta)(x - \alpha)$$
$$(\delta - \beta)x + (\alpha - \gamma)y + (\beta\gamma - \alpha\delta) = 0.$$

Tomando $a = (\delta - \beta), b = (\alpha - \gamma)$ e $c = \beta\gamma - \alpha\delta$, temos

$$ax + by + c = 0.$$

Como a, b e c foram obtidos a partir das operações fundamentais com os números α, β, γ e δ, então a, b e c são construtíveis sempre que α, β, γ e δ o forem.

3.4 Interseção de Duas Retas no Plano Cartesiano

Para determinar a interseção de duas retas do tipo $ax + by + c = 0$, procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a' e a segunda por a, podemos eliminar o termo x somando as duas equações:

$$\begin{cases} aa'x + ba'y + ca' = 0 \\ a'ax + b'ay + c'a = 0 \end{cases}$$

$$(a'b - ab')y + (a'c - ac') = 0$$

$$y = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}.$$

De forma análoga, multiplicando a primeira equação por b' e a segunda po b, podemos eliminar o termo y e determinar x. Assim,

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}.$$

Como x e y foram obtidos a partir das operações fundamentais com os números a, b e c, então x e y são construtíveis sempre que a, b e c o forem.

3.5 O Círculo no Plano Cartesiano

Definição 3.5.1: *Um círculo de centro $C(\alpha, \beta)$ que contenha o ponto $P(\gamma, \delta)$, é construtível se as coordenadas de C e P forem construtíveis.*

A equação geral da circunferência com centro no ponto $C(\alpha, \beta)$ e que contenha o ponto $P(\gamma, \delta)$ pode ser colocado na forma:

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0.$$

De fato, a equação reduzida da circunferência é da forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

onde $r^2 = (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2, x_c = \alpha$ e $y_c = \beta$. Assim,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (\gamma - \alpha)^2 + (\delta - \beta)^2$$

$$x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + y^2 - 2y\beta + \beta^2 = \gamma^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2 + \delta^2 - 2\beta\delta + \beta^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + (2\alpha\gamma + 2\beta\delta - y^2 - \delta^2) = 0$$

Tomando $a = -2\alpha, b = -2\beta$ e $c = 2\alpha\gamma + 2\beta\delta - y^2 - \delta^2$, temos

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0.$$

Como a, b e c foram obtidos a partir das operações fundamentais com os números α, β, γ e δ, então a, b e c são construtíveis sempre que α, β, γ e δ o forem.

3.6 Interseção de um Círculo com uma Reta

Para construir via régua e compasso, um ponto de interseção de uma reta com um círculo, basta construir a solução de um sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

O sistema pode ter uma, duas ou nenhuma solução. Caso haja solução, elas são da forma $p + q\sqrt{r}$, onde p, q e r são construtíveis e $r \geq 0$.

De fato, considerando $b' \neq 0$ na segunda equação, temos que

$$y = \frac{-c' - a'x}{b'}.$$

Desta forma, a primeira equação torna

$$x^2 + \left(\frac{-c' - a'x}{b'}\right)^2 + ax + b\left(\frac{-c' - a'x}{b'}\right) + c = 0$$

$$\left(a'^2 + b'^2\right)x^2 + \left(ab'^2 + 2a'c' - a'bb'\right)x + \left(c'^2 - bb'c' + cb'^2\right) = 0.$$

Tomando $A = a'^2 + b'^2,\ B = ab'^2 + 2a'c' - a'bb'$ e $C = c'^2 - bb'c' + cb'^2$, temos

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Cuja solução é

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Tomando agora $p = \frac{-B}{2A}$, $q = \frac{1}{2A}$ e $r = B^2 - 4AC$, temos

$$x = p \pm q\sqrt{r}.$$

De forma análoga e considerando $a' \neq 0$, a coordenada de y é

$$y = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}.$$

Com $D = a'^2 + b'^2,\ E = a'^2 b + 2b'c' - aa'b'$ e $F = c'^2 - aa'c' + a'^2 c$ e por sua vez $p' = \frac{-E}{2D}$, $q' = \frac{1}{2D}$ e $r' = E^2 - 4DF$, temos

$$y = p' \pm q'\sqrt{r'}.$$

Note que x e y foram obtidos a partir das operações fundamentais com os números a, a', b, b', c e c'. Assim, se a reta e o círculo dados forem construtíveis, isto é, se a, a', b, b', c e c' forem construtíveis, então x e y também são necessariamente construtíveis.

3.7 Interseção Entre Dois Círculos

Para construirmos um novo ponto, obtido da interseção de dois círculos cujas equações possuem coeficientes construtíveis, recaímos em um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0.$$

O qual equivale ao novo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0. \end{cases}$$

O que nos leva a um sistema do tipo da interseção da reta com o círculo. Podemos concluir então que a solução é análoga ao que já foi visto na seção anterior.

A partir deste estudo de interseções, podemos obter um critério que visa garantir quando um dado número é construtível.

3.8 Critério Para Número Construtível

A partir das análises anteriores sobre interseções, observamos que se partirmos de pontos do plano com coordenadas racionais e fizermos construções com régua e compasso, envolvendo apenas uma interseção de reta com reta, reta com círculo, ou círculo com círculo, as coordenadas dos novos pontos obtidos, ou continuam sendo racionais, ou, no máximo, passam a ser da forma $a + b\sqrt{c}$, onde a, b e c são racionais e $c \geq 0$.

Se numa segunda etapa, repetirmos o procedimento anterior, fazendo novas construções com régua e compasso, agora utilizando-se também de pontos da forma $a + b\sqrt{c}$, recaímos em números da forma $x + y\sqrt{z}$, onde x, y e z são da forma $a + b\sqrt{c}$. Isto decorre das interseções analisadas anteriormente e também da proposição seguinte.

Se fixarmos um número real $c \geq 0$ e, considerarmos $A = \{a + b\sqrt{c}; a, b \in \mathbb{Q}\}$, o conjunto de todos os números da forma $a + b\sqrt{c}$, então A será um corpo. Mostramos este fato a seguir.

Proposição 3.8.1: *O conjunto* $A = \{a + b\sqrt{c}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ com as operações de adição e multiplicação *é um corpo.*

Demonstração: Primeiro observamos que A é um conjunto fechado para adição e multiplicação. De fato, sejam $x = a_1 + b_1\sqrt{c}$ e $y = a_2 + b_2\sqrt{c}$ elementos de A. Então a soma $x + y$ está em A e o produto $x.y$ também pertence a A.

Soma:

$$x + y = \left(a_1 + b_1\sqrt{c}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{c}\right)$$
$$x + y = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c}.$$

Tomando $r_1 = a_1 + a_2$ e $s_1 = b_1 + b_2$, temos

$$x + y = r_1 + s_1\sqrt{c}.$$

Produto:

$$x.y = \left(a_1 + b_1\sqrt{c}\right).\left(a_2 + b_2\sqrt{c}\right)$$
$$x.y = a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{c} + a_2b_1\sqrt{c} + b_1b_2c$$
$$x.y = (a_1a_2 + b_1b_2c) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{c}.$$

Tomando $r_2 = a_1a_2 + b_1b_2c$ e $s_2 = a_1b_2 + a_2b_1$, temos

$$x.y = r_2 + s_2\sqrt{c}.$$

As propriedades comutativa, associativa e distributiva em A, tanto para a adição quanto para multiplicação, são imediatas, pois são herdadas dos números racionais. Mostramos a seguir, que existe o elemento neutro da adição e multiplicação, o simétrico da adição e o inverso da multiplicação.

Considere o número $x = a + b\sqrt{c}$ com a, b e c racionais. Assim, temos:

Elemento Neutro da Adição: Existe $0 = 0 + 0\sqrt{c} \in A$, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in A$. De fato,

$$x + 0 = \left(a + b\sqrt{c}\right) + \left(0 + 0\sqrt{c}\right)$$
$$x + 0 = (a + 0) + (b + 0)\sqrt{c}$$
$$x + 0 = a + b\sqrt{c}$$
$$x + 0 = x.$$

Simétrico Aditivo: Para todo $x \in A$, existe o $-x \in A$ tal que $x + (-x) = 0$, basta tomar $-x = -a - b\sqrt{c}$, pois

$$x + (-x) = \left(a + b\sqrt{c}\right) + \left(-a - b\sqrt{c}\right)$$
$$x + (-x) = (a - a) + (b - b)\sqrt{c}$$
$$x + (-x) = 0 + 0\sqrt{c}$$
$$x + (-x) = 0.$$

Elemento Neutro da Multiplicação: Existe $1 = 1 + 0\sqrt{c} \in A$, tal que $x.1 = x$, para todo $x \in A$.

$$x.1 = \left(a + b\sqrt{c}\right).\left(1 + 0\sqrt{c}\right)$$
$$x.1 = \left(a + b\sqrt{c}\right).1$$
$$x.1 = a + b\sqrt{c}$$
$$x.1 = x.$$

Inverso Multiplicativo:

Para todo $x \in A$; $x \neq 0$, existe $x^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - b^2c}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 - b^2c}\right)\sqrt{c} \in A$ tal que $x.x^{-1} = 1$. De fato.

$$x.x^{-1} = \left(a + b\sqrt{c}\right).\left[\left(\frac{a}{a^2 - b^2c}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 - b^2c}\right)\sqrt{c}\right]$$
$$x.x^{-1} = \left(a + b\sqrt{c}\right).\left(\frac{a - b\sqrt{c}}{a^2 - b^2c}\right)$$
$$x.x^{-1} = \frac{a^2 - b^2c}{a^2 - b^2c}$$
$$x.x^{-1} = 1.$$

Agora estamos aptos a estabelecer um critério de construtibilidade para um número dado. Note que, como vimos anteriormente, um número a é construtível se, e somente se, o ponto a ele associado na reta puder ser construído a partir de um segmento unitário, via uma quantidade finita de interseções de reta e/ou círculos. Mas o segmento unitário está associado a unidade 1 que é um racional; e pelo que foi visto anteriormente, se partirmos de um ponto que está associado um número com coordenadas racionais e fizermos um número finito de interseções de retas e/ou círculos, obtemos um número que pode ser escrito em termos de números racionais utilizando-se apenas da adição, multiplicação, inversos, simétricos e raízes quadradas. Segue assim o seguinte critério de construtibilidade.

Proposição 3.8.2. *Um número a é construtível se, e somente se, puder ser escrito numa expressão algébrica em termos de números racionais e envolvendo apenas adições, multiplicações, simétricos, inversos e raízes de ordem par.*

Por exemplo, o número $a = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ é construtível pois ele já está escrito numa expressão algébrica em termos do racional 2 e envolvendo raízes de ordem par.

A questão agora consiste em buscar formas de reconhecer se um número dado arbitrariamente pode ou não ser escrito da forma dada na proposição anterior.

Vejamos primeiro que o número $\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{7}$ é da forma indicada na proposição, e portanto, é construtível. Agora, façamos a seguinte construção:

$$\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{7} = x$$
$$\Rightarrow \sqrt{5+\sqrt{3}} = x - \sqrt{7}.$$

elevando ao quadrado, temos

$$5 + \sqrt{3} = x^2 - 2x\sqrt{7} + 7$$
$$\Rightarrow \sqrt{3} + 2x\sqrt{7} = x^2 + 2.$$

elevando novamente ao quadrado ambos os membros da igualdade, temos

$$3 + 4x\sqrt{21} + 28x^2 = x^4 + 4x^2 + 4$$
$$\Rightarrow 4x\sqrt{21} = x^4 - 24x^2 + 1.$$

elevando mais uma vez ao quadrado

$$336x^2 = x^8 - 48x^6 + 578x^4 - 48x^2 + 1$$

Logo,

$$\Rightarrow x^8 - 48x^6 + 578x^4 - 384x^2 + 1 = 0.$$

Ou seja, o número x é raiz do polinômio $p(x) = x^8 - 48x^6 + 578x^4 - 384x^2 + 1$ com coeficientes inteiros. Note ainda que as potências dos termos não nulos do polinômio são todas pares: x^8; $-48x^6$; $578x^4$; $-384x^2$; $1x^0$.

À luz do exemplo anterior, é bastante aceitável que se um dado número pode ser escrito apenas como soma, produto, quociente e raízes quadradas de números racionais, então ele é raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros. De fato, bastaria chamá-lo de x, como no exemplo acima, e aplicar as operações de: elevar ao quadrado, somar simétricos, etc., para se chegar ao polinômio. Assim, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.8.3. *Todo número construtível é raiz de uma equação polinomial, cujos coeficientes são números inteiros.*

Definição 3.8.4: *Sendo $P(x)$ um polinômio no conjunto dos números complexos, chama-se* ***equação algébrica*** *à igualdade $P(x) = 0$.*

As incógnitas de uma equação algébrica são submetidas apenas às operações algébricas, que são a soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação. E suas raízes são as mesmas do polinômio $P(x)$.

Definição 3.8.5. *Um* ***número algébrico*** *é um número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Um número não algébrico é dito* ***transcendente****.*

Note que os números $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são algébricos pois são solução das equações $x^2 - 2 = 0, x^3 - 4 = 0$ e $x^2 - x - 1 = 0$, respectivamente.

Da definição anterior, segue que um número transcendente é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros. Os números π e e (número de Euler, base dos logaritmos naturais) são exemplos famosos de números transcendentes. Em geral, verificar que um número é transcendente não é um problema simples. Para a demonstração da transcendência destes dois números veja Figueiredo $[3]$.

Da proposição 3.8.3 temos o seguinte:

Proposição 3.8.6: *Todo número construtível é algébrico.*

Segue imediatamente da proposição anterior que:

Proposição 3.8.7: *Um número transcendente não é construtível.*

Cabe ressaltar que existem números algébricos que não são construtíveis e que, portanto, a recíproca da proposição 3.8.6 não é verdadeira. De fato, a ideia que desenvolvemos anteriormente baseada em elevação de quadrados, etc., mostra que um número construtível é sempre uma raiz de um polinômio com coeficientes inteiros e cujo grau é uma potência de 2. Um fato geral, que não vamos demonstrar aqui é que *"Todo número algébrico é raiz de um único (a menos de um fator constante) polinômio irredutível com coeficientes inteiros",* o grau deste polinômio é dito **grau do número algébrico**. Assim, O número $\sqrt[3]{4}$ é um exemplo de um número algébrico de grau 3, pois é raiz do polinômio irredutível $x^3 - 4 = 0$.

O critério geral de construtibilidade une estas ideias e é enunciado a seguir:

Teorema 3.8.8: *Um número é construtível se, e somente se, for algébrico de grau igual a uma potência de 2.*

Este resultado não é demonstrado aqui, em virtude da demonstração envolver fatos relacionados à teoria de extensões de corpos e teoria de Galois, os interessados podem encontrá-la em $[4]$.

Note que, em virtude do teorema anterior, podemos afirmar que o número algébrico $\sqrt[3]{4}$ não é construtível, pois é algébrico de grau 3.

3.9 Duplicação do Cubo

A duplicação do cubo, também conhecido como o Problema de Delos ou o Problema Deliano, pode ser considerado da seguinte forma: dado um cubo de aresta a, determinar com régua e compasso, um outro cubo de aresta b, cujo volume seja o dobro do primeiro.

Considere um cubo de aresta a, então seu volume é igual a a^3, desejamos construir um cubo de aresta b, de tal forma que seu volume seja $b^3 = 2a^3$, temos então:

$$b^3 = 2a^3$$

$$b = \sqrt[3]{2a^3}$$

$$b = a\sqrt[3]{2}.$$

O problema consiste então na construção de $\sqrt[3]{2}$. Lendariamente este problema é atribuído aos nativos de Delos, na Grécia, por volta de 429 a.C., que foram consultar o oráculo de Apolo em busca de uma solução para uma praga que estavam sofrendo. O oráculo lhes apresentou a tarefa de construírem um novo altar à Apolo com o dobro do volume do altar já existente para que a praga cessasse. Como vimos acima, os nativos precisariam construir o novo altar com uma aresta de $\sqrt[3]{2}$ vezes a medida da aresta anterior. Eles simplesmente dobraram a aresta anterior, aumentando assim seu volume em oito vezes. A praga continuou a castigar Delos. Contudo, foram os gregos que, com muita perspicácia, notaram que havia uma dificuldade em duplicar o cubo utilizando-se apenas a régua e o compasso, que eram as ferramentas que possuíam à época. De fato, hoje sabemos que é impossível construir $\sqrt[3]{2}$ apenas com a régua e o compasso. Infelizmente para os nativos de Delos, eles não tinham as ferramentas que dispomos hoje para os cálculos algébricos, estas ferramentas só foram desenvolvidas por volta do século $XVIII$ d.C..

À luz do Teorema 3.8.8, a impossibilidade da construção de $\sqrt[3]{2}$ decorre do fato de que ele é algébrico de grau 3, por ser raiz do polinômio irredutível $x^3 - 2$, e portanto não satisfaz ao teorema.

Foi Carl Friedrich Gauss quem afirmou que dobrar o volume de um cubo usando apenas a régua e o compasso era impossível, e foi Pierre Wantzel em 1837 quem provou.

3.10 Quadratura do Círculo

Este problema consiste em construir um quadrado cuja a área seja igual a área de um círculo dado, utilizando apenas a régua e o compasso.

Considere um círculo cuja área seja $A = \pi r^2$. Como queremos construir um quadrado de lado l, de modo que sua área seja πr^2, então $l^2 = \pi r^2$, temos então:

$$l^2 = \pi r^2$$
$$l = \sqrt{\pi r^2}$$
$$l = r\sqrt{\pi}.$$

O problema agora consiste em construir com régua e compasso o segmento de medida $\sqrt{\pi}$, o qual é impossível. Pois como foi visto na Proposição 3.8.7, o número transcendente π não é construtível.

Arquimedes deu uma solução para este problema por volta de 250 a.C., mas utilizando outros meios além de régua não graduada e o compasso.

Após 2000 anos, Ferdinand Lindemann provou que π é um número transcendente, mostrando que é impossível construir um segmento cujo comprimento seja π.

3.11 Trissecção do Ângulo

Este pode ser o mais velho dos Três Problemas Clássicos e consiste em dividir um ângulo em três partes iguais. Como já foi visto, para alguns casos particulares é possível trisseccionar um ângulo. O ângulo de $90°$, não há problema, porque podemos construir o ângulo de $30°$ bisseccionando o ângulo de $60°$.

Definição 3.11.1: *Um ângulo será construtível se seu cosseno ou seno for construtível.*

De modo geral, se um ângulo qualquer 3θ for construtível, teremos como consequência que seu *seno* e seu *cosseno* também são construtíveis. Note que, das relações trigonométricas básicas, temos

$$cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta)$$
$$cos(3\theta) = \cos(\theta).cos(2\theta) - sen(\theta).sen(2\theta)$$
$$cos(3\theta) = \cos(\theta).[cos^2(\theta) - sen^2(\theta)] - sen(\theta).[2sen(\theta).cos(\theta)]$$
$$cos(3\theta) = cos(\theta).\{cos^2(\theta) - [1 - cos^2(\theta)]\} - 2sen^2(\theta).cos(\theta)$$
$$cos(3\theta) = cos(\theta).[2cos^2(\theta) - 1] - 2cos(\theta).[1 - cos^2(\theta)]$$
$$cos(3\theta) = 2cos^3(\theta) - cos(\theta) - 2cos(\theta) + 2cos^3(\theta)$$
$$cos(3\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta).$$

Nem todos os ângulos podem ser trisseccionado, o ângulo de $60°$ é um desses ângulos. De fato, é impossível construir o número $cos(20°)$, vejamos.

$$cos(3\theta) = 4cos^3(\theta) - 3cos(\theta)$$
$$cos(60°) = 4cos^3(20°) - 3cos(20°)$$
$$\frac{1}{2} = 4cos^3(20°) - 3cos(20°)$$
$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$$
$$1 = 8x^3 - 6x$$
$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Observe que a equação acima não possui raiz racional. De fato, suponha por contradição que exista uma raiz $x = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros primos entre si, então

$$8\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{8a^3}{b^3} - \frac{6a}{b} - 1 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por b^3, temos

$$8a^3 - 6ab^2 - b^3 = 0$$

$$\begin{cases} b^3 = 2a(4a^2 - 3b^2) \\ (2a)^3 = b^2(6a + b). \end{cases}$$

Desta forma, $2a$ é divisor de b^3, de modo que $a = \{-1, 1\}$, e b^2 é divisor de $(2a)^3$, de modo que $b = \{-2, -1, 1, 2\}$, já que a e b são primos entre si. Com isso, as possibilidades racionais para $\frac{a}{b}$ são $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Verificando estas possibilidades, vemos que nenhuma delas é raiz do polinômio dado.

Temos então que a equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$ não possui raízes racionais, assim o polinômio $8x^3 - 6x - 1$ é irredutível com coeficientes inteiros. Segue que $cos(20°)$ é algébrico de grau 3, e do Teorema 3.8.8 temos que ele não é construtível. Portanto, também o ângulo de $20°$ não é construtível via régua e compasso. Segue que o ângulo de $60°$ não pode ser trisseccionado.

Agora, o ângulo de $180°$, por exemplo, pode ser trisseccionado, pois podemos construir o ângulo de $60°$. De fato, basta lembrar que $cos(60°) = \frac{1}{2}$ que é construtível.

Conclusão

O uso de software de geometria dinâmica, como no caso o software *'Régua e Compasso'*, é um atrativo para o ensino da Geometria e das Construções Geométricas, pois é uma ferramenta de alta interação com o aluno. Interação que o aluno está habituado por conviver diariamente com aparelhos tecnológicos.

No decorrer do trabalho, foram verificados os conceitos básicos da Geometria que viria a ser importante no apoio às justificativas matemáticas de todo o restante da dissertação. Em seguida foram feitas as construções da mediatriz, da perpendicular, a paralela, a bissetriz, o transporte de ângulo, o arco capaz e o ângulo de $60°$, via software *'Régua e Compasso'*, bem como as verificações de suas propriedades. Foram também apresentados exemplos de Construções Geométricas por meio do software *'Régua e Compasso'*.

Em um segundo momento, foram feitas construções de segmentos a partir de expressões algébricas. Expressões que davam origem à medida do segmento a ser construído. Nestas construções também foram feitas as verificações de suas propriedades.

Em seguida foi apresentado um estudo sobre números construtíveis. Foi verificado a característica do número que pode ser construído via régua e compasso e por consequência, a característica do número que não pode ser construído. Foram vistos também os Três Problemas Clássicos da Geometria, e o motivo pelo qual eles não possuem solução.

Pretendemos com este trabalho, contribuir para que o ensino e a aprendizagem das Construções Geométricas estejam mais presentes nas escolas, seja ela por meio do software *'Régua e Compasso'* ou mesmo apenas pela régua não graduada e pelo compasso.

Podemos concluir que o ensino das Construções Geométricas utilizando o software *'Régua e Compasso'*, munido do rigor, dos conceitos e das propriedades geométricas é um meio de estimular no aluno a criatividade, a estrutura para planejamentos e o poder de abstração para seus estudos posteriores.

Referências Bibliográficas

[1] ACZEL, A. D. ***O Caderno Secreto de Descartes***. – 1. ed. – Rio de Janeiro: Zahar, 2007. ISBN: 978-85-711-0973-5.

[2] DOLCE, O. et. al. ***Fundamentos da Matemática Elementar, Geometria Plana.*** – 9. ed. – São Paulo: Atual, v. 9, 2013. ISBN: 978-85-357-0552-2.

[3] FIGUEIREDO, D. G. ***Números Irracionais e Transcendentes***. – 3. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2002. ISBN: 978-85-858-1818-0.

[4] FRALEIGH, J. B. **A First Course in Abstract Algebra**. – 7. ed. - Addison – Wesley, 1953. ISBN: 978-02-017-6390-4.

[5] GARBI, G. G. ***A Rainha das Ciências***. – 1. ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2006. ISBN: 978-85-883-2561-6.

[6] GARBI, G. G. ***O Romance das Equações Algébricas***. – 2. ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2007. ISBN: 978-85-883-2576-4.

[7] IEZZI, G. et. al. ***Fundamentos da Matemática Elementar, Geometria Analítica.*** – 6. ed. – São Paulo: Atual, v. 7, 2013. ISBN: 978-85-357-0546-5.

[8] ROONEY, A. ***A História da Matemática Desde a Criação da Pirâmides até a Exploração do Infinito***. – 1. ed. – São Paulo: M. Books, 2012. ISBN: 978-85-768-0133-7.

[9] WAGNER, E. ***Construções Geométricas***. Com colaboração de José Paulo Q. Carneiro. – 6. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2007. ISBN: 978-85-244-0084-1.

Apêndice A - Outros Tipos de Construções

Outros tipos de construções são as feitas apenas com régua, apenas compasso ou régua com uma graduação.

Todas as construções que podem ser feitas com régua sem graduação e compasso podem também ser feitas apenas com o compasso. Esta afirmativa foi provada por Mascheroni, em 1797. A justificativa é feita mostrando-se como se encontra, apenas com o compasso, a interseção de duas retas, dada apenas por dois pontos e a interseção de uma reta com um círculo, isso sem traçar as retas.

Um dos interesses da construção ser feita desse modo, em especial apenas com o compasso, seria pela pureza que os antigos gregos sempre procuraram, o compasso é, sob um certo aspecto, mais nobre que a régua, pois nesta, somos obrigados a criar a reta utilizando sua linha, que foge um pouco do conceito inicial da reta, que são os dois pontos distintos, enquanto o compasso é o instrumento baseado em apenas dois pontos, composto pelo centro e por um ponto de passagem, o compasso é mais fiel à teoria. Outro interesse seria transformar o movimento circular em um movimento retilíneo, o que equivale, geometricamente, a construir retas só com o compasso.

Agora, apenas com régua, não é possível fazer as construções que são feitas com a régua e o compasso. Como por exemplo, não se pode construir o segmento $\sqrt{2}$ apenas com a régua. No entanto, é possível fazer todas as construções com a régua e um único círculo de raio fixo.

Podemos ampliar a quantidade de construções, utilizando apenas o compasso e a régua, esta agora com graduação, e permitindo a possibilidade de se deslizar a régua durante a construção. De fato, a trissecção de um ângulo arbitrário pode ser obtida com esta nova ferramenta e possibilidade. Vejamos a construção ilustrada na figura abaixo:

- Seja $C\hat{O}D = x$ o ângulo dado;

- Construa um círculo de centro O *(vértice do ângulo)* e raio $r > 0$. Sejam C e D os pontos de interseção do círculo com o ângulo. Note que $C\hat{O}D = x$;

- Prolongue a semirreta $\overrightarrow{OD}$ de forma a obter a reta $\overleftrightarrow{OD}$;

- Marque sobre a régua os pontos A e B, distando r *(isto não é possível na construção com régua sem graduação e compasso)*;

- Deslize a régua sobre a reta $\overleftrightarrow{OD}$, mantendo A sobre o prolongamento de $\overrightarrow{OD}$;

- Marque A na reta $\overleftrightarrow{OD}$, com A fora do círculo, e marque B sobre o círculo de modo que a régua passe por C, obtendo então o ângulo $C\hat{A}D = y$.

Podemos afirmar que o ângulo y divide x em três partes iguais, veja a justificativa Figura 101 abaixo.

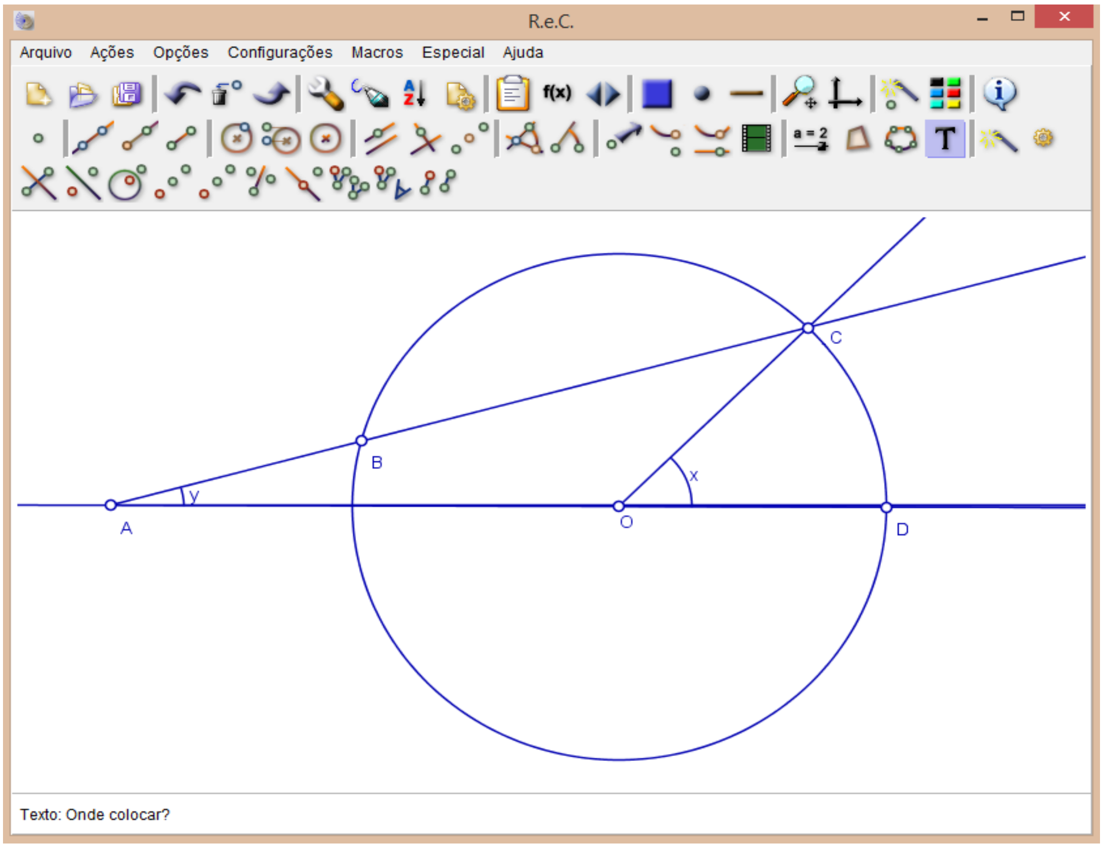


Figura 101: Trissecção do Ângulo

Justificativa: Na construção, $\overline{AB} = \overline{OB} = r$, de modo que do triângulo isósceles ΔABO têm-se:

$B\hat{A}O = B\hat{O}A = y$ (base do triângulo isósceles) e

$A\hat{B}O = (180° - 2y)$, tal que $O\hat{B}C = 2y$

Além disso, $\overline{OB} = \overline{OC} = r$, e então do triângulo isósceles ΔBOC, têm-se

$O\hat{B}C = O\hat{C}B = 2y$ e $B\hat{O}C = (180° - 4y)$. Logo,

$$A\hat{O}D = 180°$$
$$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D = 180°$$
$$y + (180° - 4y) + x = 180°$$
$$-3y + x = 0$$
$$x = 3y.$$

Apêndice B - Atividades Propostas

Neste apêndice deixamos como atividade, exercícios que podem ser resolvidos por meio do software *'Régua e Compasso'* e verificadas as propriedades das construções por meio do ícone *mover ponto*.

Atividade 4.1: Construa a reta s, perpendicular à reta r dada, e a reta t, paralela à r, ambas passando pelo ponto P dado.

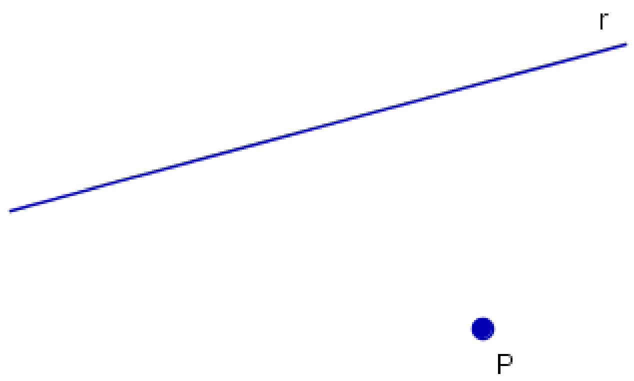


Figura 102: Atividade 4.1

Atividade 4.2: Construa um segmento de reta $\overline{AB}$. Em seguida encontre a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Chame de C o ponto de interseção do segmento $\overline{AB}$ e da mediatriz encontrada e, em seguida, encontre a mediatriz do segmento $\overline{AC}$.

Atividade 4.3: Construa um triangulo de vértice $A,\ B$ e C, cujos lados medem $7{,}0\ cm;\ 4{,}5\ cm$ e $6{,}0\ cm$, respectivamente.

Para que possamos construir um triângulo cujos lados meçam a, b e c, devemos ter:

- $a < b + c$
- $b < a + c$
- $c < a + b$.

Atividade 4.4: Construa um triângulo de vértices $A,\ B$ e C, onde $\overline{AB} = \overline{AC} = 4{,}5\ cm$ e $B\hat{A}C = 45°$. Como se classifica esse triângulo quanto aos lados?

Atividade 4.5: Construa um quadrado de vértices $A,\ B,\ C$ e D e de lado $\overline{AB} = a$.

Atividade 4.6: Construa o losango de vértices $A,\ B,\ C$ e D, onde $\overline{AB} = 4{,}5\ cm$ e $B\hat{A}C = 60°$.

Atividade 4.7: Construa o paralelogramo de vértices $A,\ B,\ C$ e D, onde $\overline{AB} = 6{,}0\ cm;\ \overline{AC} = 2{,}5\ cm$ e $B\hat{A}C = 60°$.

Atividade 4.8: Construa o trapézio de vértices $A,\ B,\ C$ e D de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, onde $\overline{AB} = 6{,}0\ cm;\ \overline{CD} = 3{,}5\ cm; h = 2{,}0\ cm\ (altura)$ e $\overline{AC} = 4{,}0\ cm$.

Atividade 4.9: Determine o centro O da circunferência seguinte:

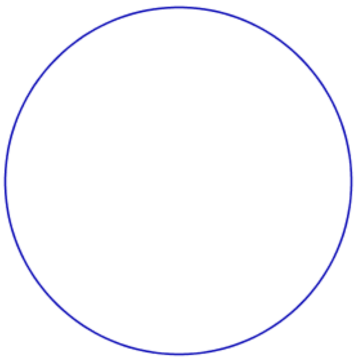


Figura 103: Atividade 4.9

Atividade 4.10: Construa o retângulo de vértices $A,\ B,\ C$ e D, cuja base $\overline{AB} = 5{,}0\ cm$ e a diagonal $\overline{AC}$ forme, com essa base, um ângulo de $30°$.

Atividade 4.11: Construa a circunferência inscrita ao quadrado $ABCD$ seguinte:

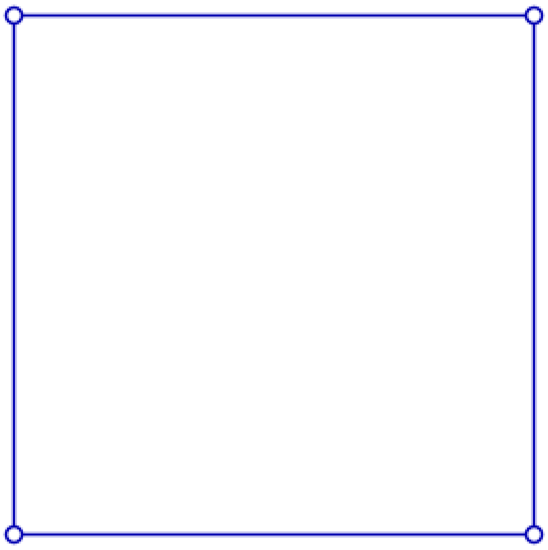


Figura 104: Atividade 4.11

Atividade 4.12: Dados os segmento $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ abaixo, construa os segmentos de medidas:

Figura 105: Atividade 4.12

a) $\overline{AB} + \overline{CD}$

b) $2.\overline{AB} - \overline{CD}$

c) $5.\overline{CD} - 2.\overline{AB}$.

Atividade 4.13: Do segmento $\overline{AB}$ seguinte, construa um arco capaz para um ângulo de $45°$.

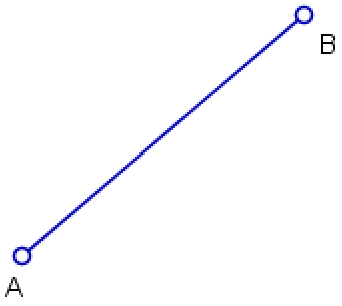


Figura 106: Atividade 4.13

Atividade 4.14: Construa $x = \frac{abc}{de}$ onde a, b, c, d e e são segmentos dados.

Atividade 4.15: Um *retângulo áureo* é um retângulo em que uma dimensão é segmento áureo da outra. Construa um retângulo áureo de perímetro dado.

Atividade 4.16: Inscreva em um círculo dado um retângulo de perímetro dado.