



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## Teorema de Euler em Sala de Aula

Helen Kássia Coelho Gontijo

Goiânia

2014

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	Helen Kássia Coelho Gontijo		
E-mail:	helenmatematica@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Estadual de Educação do Estado de Goiás		
Agência de fomento:	Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO      CNPJ:      00.889.834/0001-08
Título:	Teorema de Euler em Sala de Aula.		
Palavras-chave:	Geometria, Polígonos, Poliedros, Teorema de Euler.		
Título em outra língua:	Euler's Theorem in Classroom.		
Palavras-chave em outra língua:	Geometry, Polygons, Polyhedrons, Euler's Theorem.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	21/03/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional		
Orientador (a):	Prof.Dr. Durval José Tonon		
E-mail:	djtonon@gmail.com		
Co-orientador (a):*	-----		
E-mail:	-----		

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Helen Kássia Coelho Gontijo**

## **Teorema de Euler em Sala de Aula**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon

Goiânia

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)  
GPT/BC/UFG**

G641t Gontijo, Helen Kássia Coelho.  
Teorema de Euler em Sala de Aula [manuscrito] / Helen  
Kássia Coelho Gontijo. - 2014.  
59 f.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

1. Teorema de Euler 2. Polígonos 3. Poliedros 4.  
Geometria I. Título.

CDU: 517.983

**Helen Kássia Coelho Gontijo**

**Teorema de Euler em Sala de Aula**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 21 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



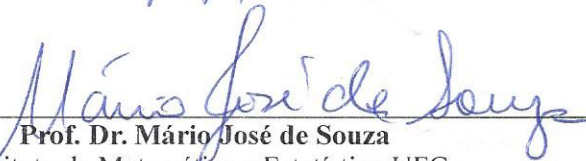
---

**Prof. Dr. Durval José Tonon**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



---

**Prof. Dr. Moisés dos Santos Ceconello**  
Matemática-UFMT



---

**Prof. Dr. Mário José de Souza**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Helen Kássia Coelho Gontijo graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás – Unidade Universitária Cora Coralina e pós-graduação em Matemática e Educação Matemática pela mesma Unidade. É professora da rede estadual de ensino desde 2004, participou de diversos cursos sempre buscando o aprimoramento profissional.**

Toda conquista é permeada de renúncia, são muitas as pessoas que contribuíram para que o hoje se tornasse mais presente, as minhas filhas e ao meu esposo que com muita paciência soube lidar com o longo período ausente.

# Agradecimentos

Alcançar essa vitória é uma conquista grandiosa, então, agradeço a Deus, que renovou minhas forças e me capacitou para a realização deste sonho.

A todos os professores que ao longo dessa jornada colaboraram conosco orientando e ensinando, sabendo nos conduzir com grande responsabilidade e valiosa sabedoria.

Ao professor Doutor: Durval José Tonon, pelo profissionalismo e sugestão de pesquisa para a composição deste trabalho.

Aos meus colegas, pessoas companheiras, que juntos aprimoramos os nossos conhecimentos, nos apoiando em momentos difíceis e compartilhando as alegrias de nossas conquistas.

Agradecendo também a CAPES, pela concessão da bolsa de estudos, contribuindo assim para a nossa dedicação aos estudos.



## Resumo

Este trabalho baseia-se no estudo dos Poliedros e o Teorema de Euler, aplicando estratégias de ensinar usando o material concreto, desencadeando melhoras no raciocínio e na percepção geométrica do Teorema de Euler. Não deixando de mencionar um pouco da história de caminhos já trilhados por vários matemáticos que contribuíram para o estudo da geometria, onde as ideias anteriormente aplicadas por eles nos ensinam e ajudam no dia-a-dia. Partindo então para apresentação de alguns conceitos e definições sobre Poliedros, bem como a demonstração de que só existem cinco poliedros de Platão. Buscamos expor a demonstração do Teorema de Euler, por dois pesquisadores, Adrien Marie Legendre e do professor Zoroastro Azambuja Filho, considerando-as bem interessantes e de fácil compreensão. Contudo, na perspectiva de que partir do concreto é uma alternativa para melhorar a qualidade de ensino, foi selecionada a atividade “Geometria dos cortes de sabão”, que se encontra em um artigo de Ana Maria Kaleff, veja em [10] e “Geometria de Canudos”, em [9], que são fundamentados em experiências de trabalho da mesma autora. Frente às novas tecnologias optamos pelo uso do software matemático *Poly*, disponível em <http://www.peda.com/poly>, que permite uma melhor visualização de poliedros de difícil construção. Todas estas atividades foram apresentadas para os alunos do 2º ano do Ensino Médio para a verificação do Teorema de Euler através de experiências concretas, obtendo assim um conhecimento geométrico criativo e útil, conquistando a participação e interesse dos estudantes.

## Palavras-chave

Geometria, Polígonos, Poliedros, Teorema de Euler.

## Abstract

This work is based on the study of the polyhedrons and the Euler's Theorem, by applying strategies of teaching using the concrete material, provoking improvements in the reasoning and in the geometrical perception the Euler's Theorem. Not mentioning a bit of history of tracks already made by several mathematicians who have contributed to the study of geometry, where the ideas previously applied by them teach us and help every day. Going to the presentation of a few concepts and definitions about polyhedrons, as well as the demonstration that exist only five polyhedrons of Plato. We've tried to expose the demonstration of the Euler's Theorem, through two researchers, Adrien Marie Legendre and of the professor Zoroastro Azambuja Filho, considering them very interesting and easy to understand. However, in the perspective that going from the concrete one is an alternative to improve the quality of teaching, it has been selected the activity "Geometry of cutting soaps", which is in an article of Ana Maria Kaleff, see at [10], and "Geometry of straws", at [9], which are based on work experiences of the same author. Before the new technologies we have opted for the mathematical software *Poly*, available on <http://www.peda.com/poly> which allows a better visualization of polyhedrons of difficult construction. All these activities have been presented to the students of the second grade in the Secondary Education to verify the Euler's Theorem through concrete experiences, obtaining this way a useful and creative geometrical knowledge, conquering the students' participation and interest.

## Keywords

Geometry, Polygons, Polyhedrons, Euler's Theorem.

## Lista de Figuras

1	Euclides de Alexandria. . . . .	18
2	Platão. . . . .	19
3	Leonard Euler. . . . .	20
4	Linhas poligonais que se cruzam. . . . .	20
5	Não é uma figura fechada. . . . .	21
6	Polígono de $n$ lados. . . . .	21
7	Polígono convexo. . . . .	22
8	Polígono não convexo. . . . .	22
9	Polígonos e poliedros convexos e não convexos. . . . .	24
10	Experiência com o octaedro regular. . . . .	24
11	Classificação dos Prismas de acordo com os polígonos da base. . . . .	25
12	Classificação das Pirâmides de acordo com os polígonos da base. . . . .	25
13	Transformação de poliedros platônicos em arquimedianos. . . . .	26
14	Transformação do icosaedro em um poliedro arquimediano com 32 faces: 12 pentagonais e 20 hexagonais. . . . .	26
15	Uma nova forma de carbono chamado buckminsterfullereno, contendo 60 átomos. . . . .	27
16	Poliedro que não satisfaz o Teorema de Euler. . . . .	28
17	Poliedro não convexo que satisfaz o Teorema de Euler. . . . .	28
18	Retas perpendiculares em Geometria esférica. . . . .	30
19	Triângulo esférico. . . . .	31
20	Projeção do triângulo $T$ sobre a esfera $E$ obtendo o triângulo esférico $t$ . . . . .	32
21	Um fuso de ângulo $\alpha$ . . . . .	33
22	Fuso completo a reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ . . . . .	33
23	A área $2\alpha.r^2$ da região hachurada é a parte do fuso completo. . . . .	34
24	A parte hachurada representa a região $R_\alpha$ . . . . .	35
25	Cubo apresentando as faces iluminadas, sombrias e o contorno aparente. . . . .	38
26	Poliedros regulares também conhecidos como Poliedros de Platão. . . . .	45
27	Construção do tetraedro regular. . . . .	49
28	Construção do octaedro regular. . . . .	49
29	Construção do icosaedro regular. . . . .	49
30	Construção do cubo. . . . .	50
31	Cubo com canudos. . . . .	50

32	Pirâmide pentagonal. . . . .	51
33	Dodecaedro Pentagonal com canudos. . . . .	52

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>16</b>
2.1	Os poliedros e sua origem . . . . .	16
2.2	Polígonos . . . . .	20
2.3	Poliedros . . . . .	23
2.4	Considerações sobre o Teorema de Euler. . . . .	27
<b>3</b>	<b>Demonstração do Teorema de Euler</b>	<b>30</b>
3.1	Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. . . . .	32
3.2	Demonstração do Teorema de Euler segundo Legendre. . . . .	35
3.3	Demonstração do Teorema de Euler segundo Zoroastro. . . . .	37
3.4	Os cinco Poliedros de Platão . . . . .	41
3.5	Poliedros Regulares . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Poliedros em sala de aula</b>	<b>46</b>
4.1	Geometria dos cortes de sabão . . . . .	46
4.2	Geometria de Canudos . . . . .	47
4.3	Atividade com o uso do software <i>Poly</i> . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Teorema de Euler em sala de aula</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>57</b>

# 1 Introdução

Este trabalho tem como título “Teorema de Euler em sala de aula”, onde serão trabalhadas atividades metodológicas diferenciadas, como a construção de materiais concretos e também o uso de software, que buscam complementar a teoria abordada favorecendo assim o processo de ensino e aprendizagem.

No primeiro momento tem-se um breve relato histórico da consolidação do saber geométrico e o seu desenvolvimento ao longo do tempo. Com essa parte, reconhece-se a importância da presença do conhecimento geométrico para a história da humanidade e também a contribuição de alguns grandes nomes como Tales de Mileto, Euclides, Platão e Leonard Euler, para a organização intelectual transformando a geometria em uma linha axiomático-dedutiva.

Estendendo para os conceitos e definições, foram explorados elementos geométricos do plano (polígonos e seus elementos, polígonos convexos e não convexos) para depois adequar algumas teorias para figuras tridimensionais, restringindo a essas figuras somente as que nos interessam para a apresentação do Teorema de Euler, os poliedros convexos, lembrando que existem contextos diferenciados que garantem a formalização destes tipos de poliedros, adotamos a que achava ser necessária para uma qualificação concisa do trabalho.

Sabendo da validade, do Teorema de Euler, o qual nos diz que  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces, é demonstrado o Teorema da existência de apenas cinco poliedros convexos regulares, a saber, o tetraedro, hexaedro, dodecaedro, octaedro e icosaedro, os quais são chamados Poliedros de Platão.

São apresentadas duas versões da demonstração do Teorema de Euler, a do notável matemático francês Adrien Marie Legendre que é considerada a primeira inteligível, apesar de usar noções sobre a Geometria Esférica. A outra demonstração é proveniente dos estudos do professor de matemática Zoroastro Azambuja Filho que o faz usando a soma dos ângulos internos de todas as faces do poliedro de duas maneiras e depois compara os resultados obtidos.

Dentre as estratégias de ensino usando metodologias interativas, iniciado com “Geometria dos cortes de sabão” e posteriormente “Geometria de canudos”, sendo que todas as duas atividades são pesquisas realizadas pela professora Ana Maria Kaleff, veja em [10] e [9], já a última envolve o uso do software matemático *Poly*. Todas essas propostas de ensino são articuladas para explorar os conceitos de polígonos e poliedros tornando

mais palpável e menos árido para o professor abordar este assunto em sala de aula e também dar uma praticidade da demonstração do Teorema de Euler.

Com a intenção de ver na prática a teoria, nas considerações finais é apresentado o relatório dos resultados alcançados com a aplicação do trabalho, esperando assim, que a proposta aqui sugerida possa expressar um pensar referente a ensinar com metodologias que permitam uma construção significativa do conhecimento.

## 2 Conceitos Preliminares

### 2.1 Os poliedros e sua origem

As figuras tridimensionais estão muito presentes, no nosso dia a dia, basta olhar ao nosso redor que encontramos desde pequenos objetos a até mesmo grandes construções. A atuação da Arquitetura Moderna que cada vez mais apresentam formas exuberantes encanta a nova sociedade, contudo, para que tenham sucesso em suas construções é necessário que os objetos tridimensionais e suas propriedades sejam grande fonte de estudos.

Observando os sólidos geométricos, notamos que eles existem em formas bastante diversas, contudo, é possível reuni-los em dois grupos: os poliedros e os corpos redondos.

Um processo simples para distinguir uns dos outros é cortá-los por planos e analisar a região do corte: se, em um dos cortes, for possível obter uma superfície não poligonal curva, o sólido é denominado corpo redondo; se, em qualquer região do corte, obtivermos uma superfície poligonal, o sólido é denominado poliedro. Para este trabalho vamos priorizar o grupo onde o corte é uma superfície poligonal, ou seja, os Poliedros.

É muito difícil estabelecer com precisão quando o ser humano passou a perceber os poliedros e a refletir sobre eles, porém evidências como as pirâmides egípcias revelam o seu conhecimento já na Antiguidade. A fascinação destes povos pelas pirâmides demonstra o quanto eram conhecedores de propriedades matemáticas.

Construídas com a função de proteger e abrigar o corpo mumificado do faraó e suas riquezas para uma vida após a morte, “A Grande Pirâmide de Gizé”, com toda a sua beleza, grandiosidade e engenhosidade, demonstram o alto grau de sofisticação artística e científica dos egípcios, adotando técnicas bastante avançadas para a época, a admiração e o mistério destas construções perdura até nossos dias.

Apesar de uma contribuição significativa para o desenvolvimento da Geometria, houve alguns questionamentos sobre a ciência da civilização egípcia, diziam tratar-se de uma ciência empírica com regras práticas para obter resultados aproximados, além também da ausência de documentos.

Os primeiros povos a se dedicarem ao estudo das várias formas geométricas como também suas propriedades foram os gregos, sendo esse o motivo pelo qual essas formas receberam nomes que derivam da língua grega.

Com os seus hábitos de investigação, os gregos interessavam em explicações para fatos naturais, acontece então, a transposição dos conceitos “práticos” da Matemática



egípcia para uma geometria axiomática. Howard, veja [6], em Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula, ressalta este fato:

[...] Os gregos insistiam em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformam a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônicos antigos no que poderíamos chamar de geometria “sistemática” ou “demonstrativa”. [...]

Tales de Mileto é conhecido como o introdutor da Geometria na Grécia. Afirmam alguns historiadores que ele era um comerciante bem sucedido e por esse motivo tenha viajado muito pelo Egito, analisando como estes se relacionavam com problemas geométricos para depois coordenar e sistematizar.

Ávila [1], em Várias Faces da Matemática, demonstra em sua obra, a busca de Tales de Mileto por explicações as afirmações geométricas a partir de outras, creditando a ele a Matemática Dedutiva:

[...] Os conhecimentos matemáticos de então, tanto nessas regiões do Oriente Médio, como na Índia e na China, eram de natureza empírica. Mas a partir de Tales, a Geometria grega vai assumindo o aspecto de um corpo de proposições logicamente ordenadas: cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, estas a partir de outras precedentes, e assim por diante; e como a demonstração de uma dada proposição teria de se basear em outras, estas teriam de ser demonstradas. [...]

Observa-se aí um círculo vicioso, então para que tivesse progresso percebe-se entre os matemáticos, a necessidade da criação de conceitos primitivos sendo bastante simples, que não seriam demonstrados e sim aceitos como o princípio do encadeamento dedutivo, surgindo assim os axiomas e postulados.

Entre os primeiros sábios a pesquisar essa linha axiomático-dedutiva, apresentado na Figura 1, destaca-se Euclides de Alexandria. Existem algumas incertezas quanto há uma data ou um local de nascimento associados a seu nome. Ele ficou conhecido como Euclides de Alexandria, pois foi um dos professores que lecionaram na famosa escola de Alexandria. Mais de dez trabalhos são vinculados a ele, sendo que apenas cinco chegaram até nós: Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos, Óptica, e Os Elementos.



Figura 1: Euclides de Alexandria.

Fonte: <http://www.infoescola.com/biografias/euclides/> Acesso em: novembro de 2013.

Este último faz com que Euclides seja reconhecido como “Pai da Geometria”, sendo que nesta obra, Euclides compilou e sistematizou o conhecimento matemático da época, de uma forma tão perfeita que se tornou o mais influente texto científico de todos os tempos com o maior número de publicações ao longo da história.

Seu trabalho é composto por 13 volumes, sendo que os cinco primeiros trata-se de Geometria Plana, três sobre Teoria dos Números, dois sobre grandezas e razões e três escreve sobre Geometria Espacial, dedicando ao último deles o estudo das propriedades dos cinco sólidos regulares, que foi explorado de forma mais intensa por Platão e seus seguidores.

O ateniense Platão, veja Figura 2, foi um dos mais influentes filósofos gregos da antiguidade, seus interesses eram muito diversificados e incluíam política, ética e filosofia da matemática. Fundou em sua cidade natal uma escola que ficou conhecida como “Academia”, onde na fachada tinha os dizeres: “Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui”, demonstrando a sua grande admiração pelo conhecimento geométrico.

Era um estudioso da origem do ser humano e buscava explicações constantemente, chegando a associar os elementos básicos da natureza e os poliedros. O nome de Platão está associado aos cinco poliedros regulares, não por que os tenha descoberto, três deles já eram conhecidos dos pitagóricos, conforme em [6] onde Howard afirma em Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula que:

[...] Os pitagóricos (500 a.C) provavelmente descobriram três dos cinco poliedros regulares e fizeram deles uma parte importante de estudo da geometria. Os gregos acreditavam que os cinco sólidos correspondiam aos



Figura 2: Platão.

Fonte: <<http://afilosofia.no.sapo.pt/platao4.jpg>> Acesso em: novembro de 2013.

elementos do Universo - o tetraedro ao fogo, o cubo à terra, o octaedro ao ar, o icosaedro à água e o dodecaedro ao Universo. Pouco depois dos pitagóricos, Platão e seus seguidores estudaram esses sólidos com tal intensidade, que eles se tornaram conhecidos como “poliedros de Platão”. [...]

A regularidade destes sólidos implica que cada um poderá ser inscrito numa casca esférica de tal modo que seus vértices toquem a esfera, ou seja, sejam pontos dela. Esse fato era de grande significado para os pitagóricos, pois consideravam a esfera como a mais perfeita figura tridimensional.

Outro matemático, exposto na Figura 3, que contribuiu para o estudo dos poliedros foi o suíço Leonard Euler. Mesmo ficando cego aos 59 anos de idade, continuou os seus estudos e foi considerado um dos matemáticos mais produtivos, durante toda a sua vida escreveu cerca de quinhentos trabalhos, entre livros e artigos.

Dentre as várias contribuições de Euler, vamos destacar um importante teorema envolvendo o número de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo. Esta relação será o foco principal do nosso trabalho.



Figura 3: Leonard Euler.

Fonte: <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/Euler/>> Acesso em: novembro de 2013.

## 2.2 Polígonos

Antes de explorar as figuras no espaço, vamos explicitar os elementos geométricos necessários no plano para assim aprofundar em três dimensões.

Começando por definir polígonos (poli=vários e gonos= ângulos), linha fechada formada apenas por segmentos de reta consecutivos que não se cruzam, a região interna de um polígono denomina-se superfície poligonal ou região poligonal.

A seguir apresentamos duas figuras, que não são polígonos, onde na Figura 4 temos um exemplo de linhas poligonais que se cruzam e na Figura 5 uma representação de uma figura que não é fechada.

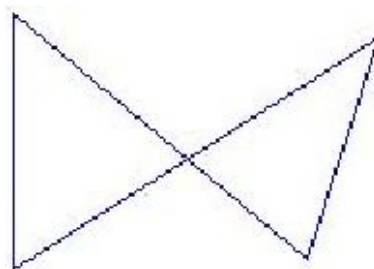


Figura 4: Linhas poligonais que se cruzam.

Agora, consideremos, num mesmo plano, os  $n$  pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  com  $n \geq 3$ , ordenados de tal forma que três pontos consecutivos nunca estejam numa mesma reta, isto é, não sejam colineares e não se cruzem.

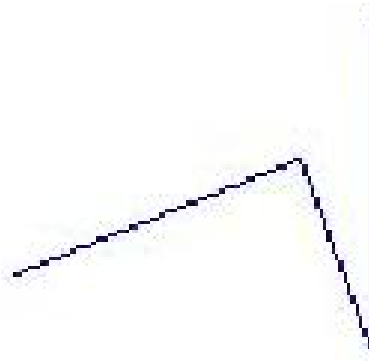


Figura 5: Não é uma figura fechada.

Tomemos os  $n$  segmentos consecutivos, não colineares,  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ ,  $\overline{A_3A_4}$ , ...,  $\overline{A_nA_1}$ . O polígono é a figura formada pela união desses  $n$  segmentos consecutivos.

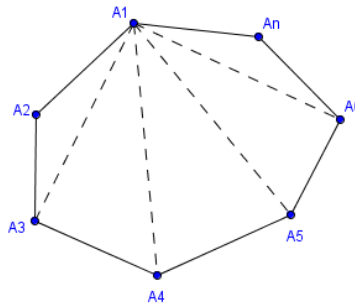


Figura 6: Polígono de  $n$  lados.

Na, figura 6, temos:

- Os pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , são os vértices do polígono;
- Os segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_nA_1}$ , são os lados do polígono (unem os vértices consecutivos);
- Os segmentos  $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \overline{A_1A_5}, \dots, \overline{A_{n-1}A_1}$ , são as diagonais do polígono (unem dois vértices não consecutivos).

Podemos dizer ainda que um polígono é considerado *Regular*, quando todos os seus lados e todos os seus ângulos internos forem iguais.

Agora, quando se fala de *Polígonos Convexos*, 7, uma forma de defini-los é que quando dois pontos quaisquer pertencentes à região poligonal forem unidos por um segmento, este segmento também está contido nesta região.

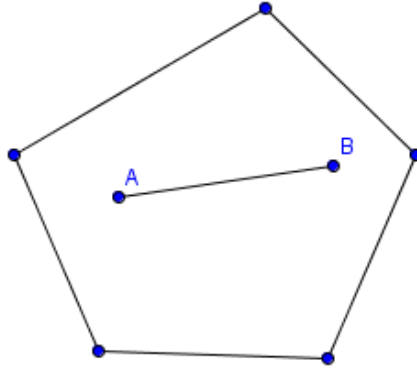


Figura 7: Polígono convexo.

Um polígono é não convexo ou côncavo (Figura 8), quando existirem dois pontos pertencentes à sua região poligonal, unidos por um segmento que não está contido nessa região.

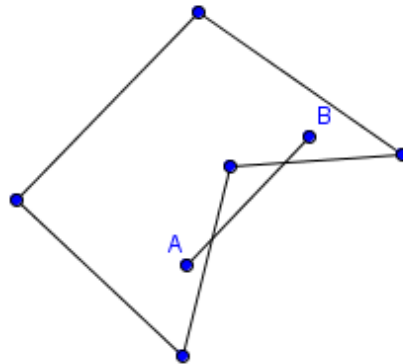


Figura 8: Polígono não convexo.

O objetivo de mostrar esses conceitos básicos no plano é para que haja uma adequação e interação de conhecimentos para quando for explorado no espaço possamos formular uma descrição entre as figuras bidimensionais e tridimensionais bem como as suas características.

## 2.3 Poliedros

A palavra Poliedros, é de origem grega, nela “poli” significa muitos(as) e “edro”, face, daí, poliedros quer dizer “muitas faces”.

Para a compreensão de poliedros, de início vamos apresentar conceitos preliminares como o de superfície poligonal fechada que é a reunião de diversas regiões poligonais de modo que divida o espaço em dois semiespaços, o interno e o externo à superfície fechada.

Então podemos definir os poliedros como sendo sólidos formados por todos os pontos do espaço delimitados por uma superfície poligonal fechada, que pode ser decomposta em um número finito de superfícies planas poligonais, maior ou igual a quatro, de tal modo que cada lado de uma delas coincida com apenas um lado de outra.

Em um poliedro, destacamos os elementos:

- Faces : cada uma das regiões poligonais que compõem a superfície do poliedro.
- Aresta: é o nome que se dá a cada lado de uma face do poliedro. Cada aresta de um poliedro é comum a somente duas faces.
- Vértice: é cada um dos pontos de interseção de 3 ou mais arestas. O vértice de cada face também é o vértice do poliedro.

Os poliedros que não apresentam reentrância ou “furos” em sua superfície são denominados convexos, caso contrário, são ditos não-convexos. Sendo que os poliedros que têm maior interesse na Geometria e principalmente para o nosso trabalho são os poliedros convexos, definidos a seguir:

**Definição 1.** *Dizemos que um poliedro é convexo quando um segmento de reta que liga quaisquer dois de seus pontos está inteiramente contido nele.*

Daí nota-se que o mesmo conceito de polígonos convexos se estendeu para poliedros convexos, podendo-se assim fazer uma comparação entre as figuras bidimensionais e tridimensionais. Observando a Figura 9, percebemos a transposição da definição de polígonos convexos para poliedros convexos e da mesma maneira ocorre de polígonos não convexos para poliedros não-convexos.

O método que Eduardo Colli , em seu texto “Poliedros”, veja [5], utilizou para descrever poliedros convexos foi a de que - “o poliedro seja homeomorfo a esfera (‘homeo’= mesmo, ‘morfo’= forma). Intuitivamente significa que ele pode ser inflado, como uma

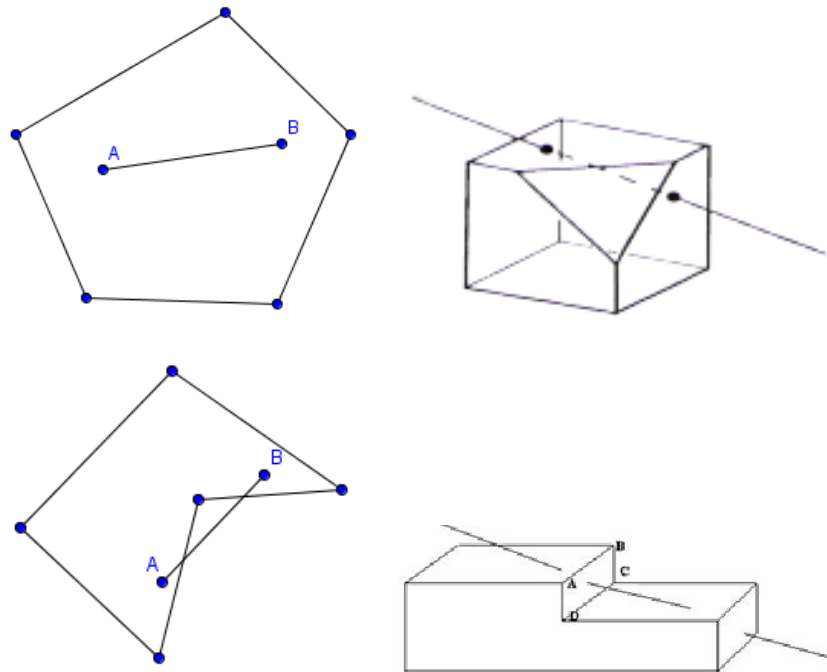


Figura 9: Polígonos e poliedros convexos e não convexos.

bexiga, de forma a assumir o formato esférico”. Para exibir seu argumento faz a experimentação com um octaedro regular, examinando a Figura 10, o octaedro é inflado até transformar em uma esfera.

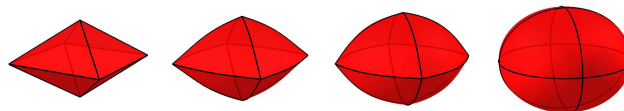


Figura 10: Experiência com o octaedro regular.

Desta forma segue-se que um poliedro convexo divide o espaço em duas regiões, o interior do poliedro que é a limitada e o exterior do poliedro seria a ilimitada.

Dentro do universo dos poliedros, os que mais se destacam em livros didáticos de Ensino Médio, são os poliedros regulares, primas, pirâmides e os sólidos de Arquimedes. Logo, classificaremos cada um destes junto com suas respectivas definições.

Os Poliedros Regulares, são determinados quando suas faces são polígonos regulares congruentes entre si e em cada vértice concorre o mesmo número de arestas. Um dos poliedros regulares, o hexaedro regular, recebe o nome especial que é o cubo. Os demais



são denominados tetraedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular. Demonstraremos mais adiante que existem apenas cinco tipos destes poliedros.

Já os Prismas são caracterizados por possuírem duas faces opostas, paralelas e congruentes e as demais faces têm forma de paralelogramo. As duas faces opostas congruentes são chamadas de bases e as outras, em forma de paralelogramo, de faces laterais.

Um dos critérios para a classificação dos prismas é o que leva em conta o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo é denominado prisma triangular, se é um quadrilátero, temos um prisma quadrangular; se é um pentágono, temos um prisma pentagonal e assim por diante, como pode ser observado na Figura 11.

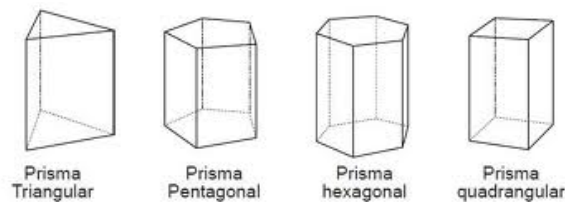


Figura 11: Classificação dos Prismas de acordo com os polígonos da base.

Nas pirâmides temos uma das faces uma região poligonal qualquer e as demais faces são triangulares com um vértice em comum. A região poligonal qualquer é chamada de base e as outras faces todas triangulares, são chamadas de faces laterais.

De modo análogo ao do prisma uma pirâmide pode ser classificada de acordo com o polígono que compõe sua base, veja Figura 12. Se a base for um triângulo, a pirâmide é triangular, se a base for um quadrilátero, a pirâmide é quadrangular e assim por diante.

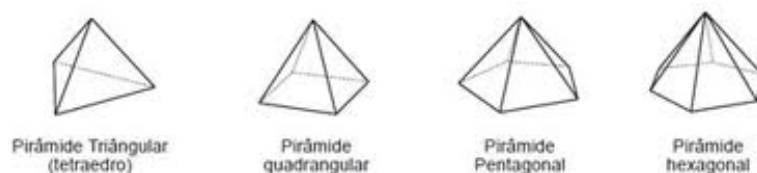


Figura 12: Classificação das Pirâmides de acordo com os polígonos da base.

Agora, falando de Arquimedes de Siracusa (cerca de 287 a.C.-212 a.C.) que estudou os poliedros convexos, não regulares, conhecidos também como poliedros semiregulares,

pois, mantêm a condição de suas faces serem polígonos regulares mas não de serem todas congruentes, embora estar dispostas simetricamente no espaço.

Existem 13 poliedros arquimedianos, e estes se relacionam com os poliedros regulares já citados anteriormente. Um exemplo da construção destes sólidos está representado na Figura 13, onde são efetuados cortes cada vez mais profundos nos vértices do cubo, obtendo poliedros arquimedianos.

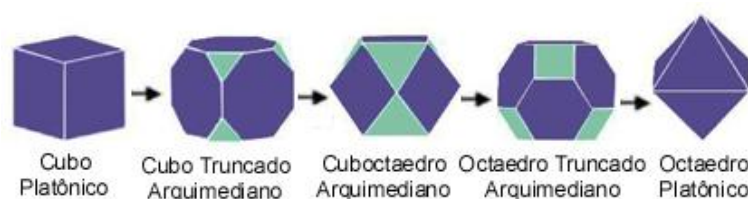


Figura 13: Transformação de poliedros platônicos em arquimedianos.

Note que estes cortes poderiam tanto ser feitos do cubo até o octaedro ou do octaedro ao cubo.

Outro poliedro arquimediano é obtido a partir de um icosaedro regular, observe Figura 14, retirando de cada vértice uma pirâmide regular pentagonal cujas arestas laterais medem  $\frac{1}{3}$  da aresta do icosaedro.

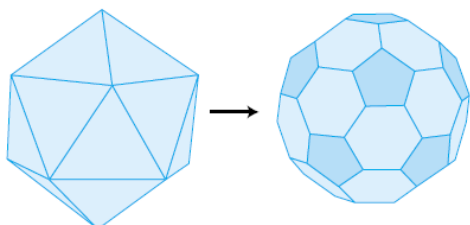


Figura 14: Transformação do icosaedro em um poliedro arquimediano com 32 faces: 12 pentagonais e 20 hexagonais.

Esse poliedro arquimediano teve destaques importantes no século XX: em 1970, no Campeonato Mundial de Futebol, usou-se pela primeira vez uma bola de futebol construída a partir desse poliedro.

E também, em 1985, foi descoberta uma nova forma de carbono, buckminsterfullereno, cujos 60 átomos localizam-se nos vértices desse poliedro arquimediano e as arestas representam as ligações químicas, conforme nota-se na Figura 15.

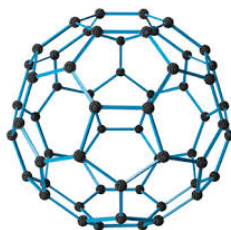


Figura 15: Uma nova forma de carbono chamado buckminsterfullereno, contendo 60 átomos.

## 2.4 Considerações sobre o Teorema de Euler.

Descoberto em 1758, o Teorema de Euler, diz que a seguinte relação é verdadeira:

$$V - A + F = 2,$$

em que  $V$  representa o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces.

Contudo, estudiosos geômetras da época se preocupavam na confirmação do Teorema, diante do fato de se encontrar exemplos de mesmas características (poliedros não convexos) como o da Figura 16 e a Figura 17, onde apresentam resultados que divergem para a veracidade da relação.

Na Figura 16 temos que  $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$ . Portanto, o Teorema de Euler não é verdadeiro para este poliedro. Agora, observando a Figura 17, apresentamos um poliedro não convexo contendo 16 vértices, 24 arestas e 10 faces onde já se confirma o Teorema de Euler, ou seja,  $V - A + F = 16 - 24 + 10 = 2$ .

Como há necessidade de limitar ao grupo de poliedros para o qual o Teorema se aplica e sendo ela verdadeira para qualquer poliedro convexo, ficam então restritos os sólidos onde possa explicar o Teorema sem contraexemplos.

**Definição 2.** *Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados de poliedros Eulerianos.*

*Todo poliedro convexo é Euleriano, mas nem todo poliedro Euleriano é convexo.*

Desta forma algumas considerações sobre os poliedros convexos são necessárias para melhor compreensão das demonstrações:

**Propriedade 1.** *A soma das arestas de todas as faces de um poliedro convexo é igual*

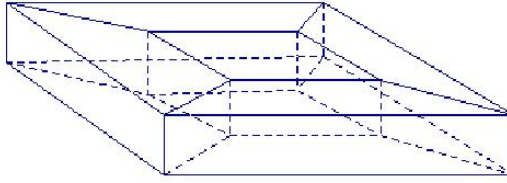


Figura 16: Poliedro que não satisfaz o Teorema de Euler.

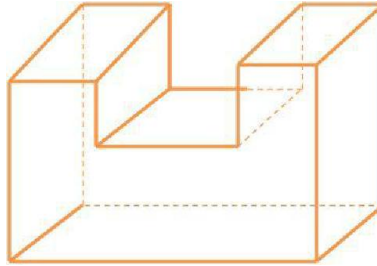


Figura 17: Poliedro não convexo que satisfaz o Teorema de Euler.

ao dobro do número de arestas do poliedro, pois cada aresta pertence a duas, e apenas duas, faces.

De fato, pois se cada aresta pertence a duas faces do poliedro, logo quando fazemos a contagem de todas as arestas o resultado será o dobro do número de arestas.

**Exemplo 1.** Se um poliedro possui exatamente cinco faces hexagonais e uma face octogonal, o número de arestas das faces é:

5 faces hexagonais, logo:  $5 \cdot 6 = 30$  arestas nas faces hexagonais;

1 face octogonal, logo:  $1 \cdot 8 = 8$  arestas na face octogonal.

O número  $A$  de arestas desse poliedro é:  $A = \frac{5 \cdot 6 + 1 \cdot 8}{2} = 19$  arestas.

**Propriedade 2.** A soma dos vértices de todas as faces de um poliedro convexo é igual a soma das arestas de todas as faces, que é igual ao dobro do número de arestas do poliedro, pois, cada aresta pertence a duas, e apenas duas, faces.

Da mesma forma se multiplicarmos o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada um deles, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro, isso porque cada aresta une exatamente dois vértices, portanto, cada aresta é contada duas vezes.

**Exemplo 2.** Se um poliedro possui 5 vértices o qual partem 4 arestas e 4 vértices o qual partem 3 arestas, o total de arestas deste poliedro é:

*5 vértices partem 4 arestas, logo:  $5 \cdot 4 = 20$  arestas;*

*4 vértices partem 3 arestas, logo:  $4 \cdot 3 = 12$  arestas.*

*O número  $A$  de arestas desse poliedro é:  $A = \frac{5 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{2} = 16$  arestas.*

### 3 Demonstração do Teorema de Euler

A primeira demonstração inteligível do Teorema de Euler foi apresentada por Adrien Marie Legendre (1752-1833) um notável matemático francês que é um dos principais personagens da elaboração da Geometria Esférica.

A maneira que Legendre validou o Teorema de Euler para poliedros convexos baseia-se em conceitos básicos da Geometria Esférica, apesar de apresentar características menos elementares, constitui segundo LIMA, veja [12], um raciocínio sofisticado e atraente. Contudo, faz-se necessário a apresentação de alguns conceitos da Geometria Esférica que serão utilizados em seguida para a demonstração do Teorema de Euler, todas as definições apresentadas aqui tem referência em [14].

**Definição 3.** (Superfície esférica): *Seja  $O$  um ponto e  $r$  um número real positivo. A superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do espaço, cuja a distância a  $O$  é igual a  $r$ .*

**Teorema 1.** *Considere uma esfera  $E$  de centro  $O$ , um ponto  $P$  em  $E$  e um plano  $\alpha$ . Temos que  $\alpha$  é tangente a  $E$  em  $P$  se, e somente se, a reta  $OP$  é perpendicular a  $\alpha$  em  $P$ .*

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada, em [14].

Comparando a Geometria Esférica e Geometria Euclidiana, nota-se que os conceitos são diferentes. A interseção da superfície esférica com um plano, passando pelo centro, é chamada de circunferência esférica máxima ou geodésica, as quais são chamadas retas na Geometria Esférica, como é mostrada na Figura 18.

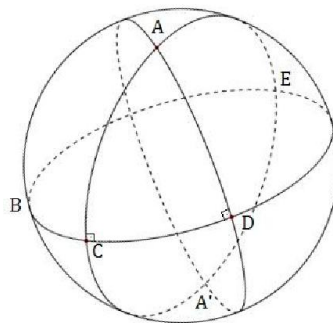


Figura 18: Retas perpendiculares em Geometria esférica.

**Definição 4.** (Segmento de reta na Geometria Esférica): *Dados dois pontos sobre a superfície esférica, o menor comprimento entre eles é dado por um trecho de reta denominado arco de circunferência máxima, que é definido como o menor segmento de reta na Geometria Esférica.*

**Definição 5.** (Ângulo esférico): *O ângulo esférico é a interseção de duas retas e, sua medida, é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes à superfície esférica, com vértices no ponto de interseção.*

**Definição 6.** (Polígono esférico): *A porção de superfície esférica, limitada exclusivamente por segmentos de reta, é chamada de polígono esférico.*

Agora para a demonstração do Teorema de Euler, o que vai nos interessar é o triângulo esférico, formado pela união de três segmentos geodésicos de uma esfera, onde cada segmento geodésico é o arco de círculo máximo da esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima, como pode ser observado na Figura 19, em que  $A$ ,  $B$  e  $C$  determinam o triângulo esférico  $ABC$ , de lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ .

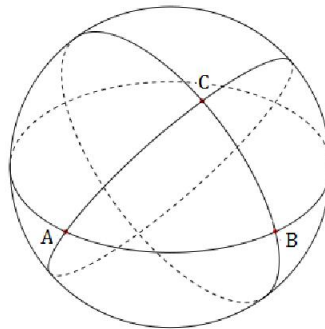


Figura 19: Triângulo esférico.

Seja um poliedro convexo  $P$ , com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Por conveniência e sem perda de generalidade, vamos supor que as faces de  $P$  são triângulos, pois, utilizando as diagonais sempre é possível decompor cada face em triângulos. Esse processo não altera a relação  $V - A + F = 2$ . De fato, toda vez que se traça uma diagonal em uma face, a quantidade  $V$  não altera, enquanto cada uma das quantidades  $A$  e  $F$  aumentam uma unidade, esses números se cancelam na expressão  $V - A + F = 2$ .

Agora, considerando uma esfera  $E$ , de raio  $r$ , cujo centro  $O$  é um ponto situado no interior do poliedro  $P$ . Projetando radialmente o poliedro  $P$  sobre a esfera  $E$ , obtemos

uma decomposição de  $E$  em triângulos esféricos, dispostos de modo parecido com  $P$ , porém cada face passa a ter um formato abaulado. Com essa transformação, a esfera  $E$  fica recoberta por  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices.

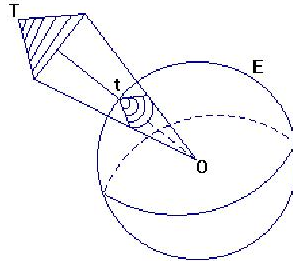


Figura 20: Projeção do triângulo  $T$  sobre a esfera  $E$  obtendo o triângulo esférico  $t$ .

Na Figura 20, o triângulo esférico  $t$ , sobre a esfera  $E$ , é a projeção radial do triângulo  $T$ . A interseção da esfera  $E$  com qualquer plano  $L$  que a encontre, é um círculo ou um ponto, no caso em que o plano  $L$  é tangente à esfera. Agora chamamos de interseção de círculo máximo, quando  $L$  passa pelo centro  $O$  da esfera  $E$ .

A projeção radial de um segmento de reta  $\overline{AB}$  é um arco de círculo máximo  $ab$  sobre a esfera  $E$ .

Continuando, temos que quando dois arcos de círculos máximos têm uma extremidade comum, o ângulo formado por esses arcos é o ângulo entre as semirretas tangentes a esses arcos.

Agora o passo fundamental para que Legendre demonstrasse o Teorema de Euler é conhecida pela Fórmula de Girard. O geômetra francês Albert Girard (em 1629), que enunciou a fórmula da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

### 3.1 Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Para compreendermos a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico vamos continuar com alguns conceitos necessários de Geometria Esférica, sendo que todas as definições e demonstrações contidas aqui tem como referência o livro Meu professor de Matemática e outras histórias, veja em [12].

Uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos recebe o nome de fuso. Os vértices dos fusos são dois pontos destes círculos (diametralmente opostos) em comum. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo  $\alpha$  entre os dois círculos máximos que constituem os lados dos fusos, observem na Figura 21.



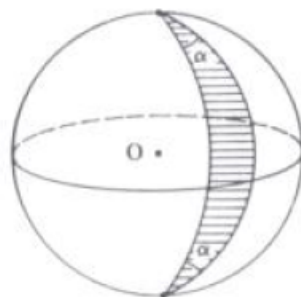


Figura 21: Um fuso de ângulo  $\alpha$ .

Sabe-se que um fuso de ângulo  $\alpha = \pi$  é um hemisfério, que tem área igual a  $2\pi r^2$  e um fuso de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  ocupa  $\frac{1}{4}$  da esfera, de modo que sua área é  $\pi r^2$  de um modo geral a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo. Usualmente então, se o ângulo mede  $\alpha$  radianos, a área desse fuso é igual a  $2\alpha r^2$ .

Agora dado um ponto qualquer  $x$  na esfera, seu antípoda (ponto diametralmente oposto)  $x'$  é, por definição, o único ponto da esfera tal que o segmento de reta  $xx'$  contém o centro  $O$ .

Assim, dado um fuso  $\varphi$  na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de  $\varphi$  é ainda um fuso  $\varphi'$ , chamado o fuso antípoda de  $\varphi$ , em que, a reunião  $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ , chama-se fuso completo, conforme a Figura 22.

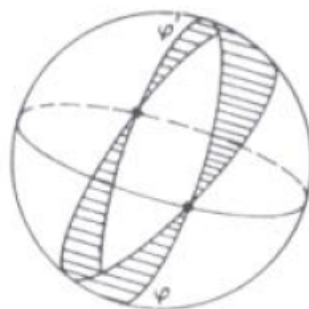


Figura 22: Fuso completo a reunião  $\Phi = \varphi \cup \varphi'$ .

**Teorema 2.** *Seja  $\Phi$  um fuso completo, cujo ângulo mede  $\alpha$  radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios  $H$  e  $H'$ . As partes  $R$ ,  $R'$  do fuso completo  $\Phi$  contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área  $2\alpha r^2$ .*

*Demonstração.* Consideremos a função  $f : E \rightarrow E$ , que transforma cada ponto  $x \in E$  em seu antípoda  $f(x) = x'$ . Esta função tem as seguintes propriedades:

- se  $x$  é um ponto do hemisfério  $H$ , seu antípoda  $x' = f(x)$  pertence ao hemisfério oposto  $H'$ ;
- se  $x$  é um ponto do fuso completo  $\Phi$ , seu antípoda  $x' = f(x)$  ainda pertence a  $\Phi$ ;
- dada qualquer região  $R$  na esfera, a região antípoda  $R' = f(R)$ , formada pelos pontos antípodas dos pontos de  $R$ , tem a mesma área de  $R$ .

Desta forma se chamarmos de  $R$  a parte do fuso completo  $\Phi$  situado no hemisfério  $H$ , veremos que sua região antípoda  $R'$  é a parte de  $\Phi$  situado no hemisfério  $H'$  e que área de  $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 \cdot (\text{área de } R)$ , logo:

$$\text{área de } R = 2\alpha \cdot r^2$$

□

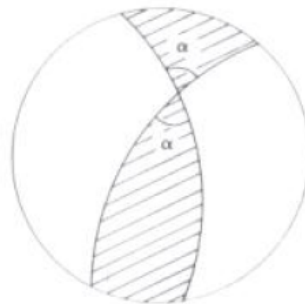


Figura 23: A área  $2\alpha \cdot r^2$  da região hachurada é a parte do fuso completo.

Depois de todos os preliminares necessários vamos demonstrar a Fórmula ou Teorema de Girard.

**Teorema 3.** (Fórmula de Girard): *Se os ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$  de um triângulo esférico forem medidos em radianos, a soma  $\alpha + \beta + \gamma$  é dada pela fórmula:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

onde  $a$  é a área do triângulo e  $r$  é o raio da esfera.

*Demonstração.* Seja um hemisfério  $H$  que contenha o triângulo dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo  $\alpha$ , até encontrarem o bordo do hemisfério  $H$ , obtemos uma região  $R_\alpha \subset H$ , cuja área mede  $2\alpha.r^2$ , pelo teorema anterior.



Figura 24: A parte hachurada representa a região  $R_\alpha$ .

O mesmo procedimento faz-se com os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , onde determinam as regiões  $R_\beta$  e  $R_\gamma$ , cujas áreas medem respectivamente  $2\beta.r^2$  e  $2\gamma.r^2$ .

A reunião destas três regiões é o hemisfério  $H$ , como o triângulo dado contado três vezes, ou seja, duas vezes mais do que devia. Logo, segue-se que a soma das áreas das regiões  $R_\alpha, R_\beta$  e  $R_\gamma$  é igual à área do hemisfério  $H(2\pi.r^2)$ , mais duas vezes a área  $a$  do triângulo dado, ou seja:

$$2\alpha.r^2 + 2\beta.r^2 + 2\gamma.r^2 = 2\pi.r^2 + 2a. \quad (1)$$

Então simplificando a equação (1) encontramos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}. \quad (2)$$

□

Então, sem mais delonga, passemos para a demonstração do Teorema de Euler, seguindo o raciocínio de Legendre.

### 3.2 Demonstração do Teorema de Euler segundo Legendre.

Teorema de Euler: Para todo Poliedro convexo, vale a relação  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.

*Demonstração.* Regressando à esfera, decomposta em  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices, daí, para cada um desses  $t$  triângulos esféricos vale a fórmula de Girard, ou seja:

$$S_t = \pi + \frac{a_t}{r^2}, \quad (3)$$

em que  $S_t$  é a soma dos ângulos e  $a_t$  é a área do triângulo esférico  $t$ .

Como temos ao todo  $F$  igualdades como a equação (3) e somando-se todas encontramos:

$$\sum S_t = \pi.F + \frac{\sum a_t}{r^2}. \quad (4)$$

Contudo a soma dos ângulos internos em torno de cada vértice é igual a  $2\pi$  (volta completa), então:

$$\sum S_t = 2\pi.V. \quad (5)$$

Além disso, a área de todos os triângulos esféricos é igual a da superfície esférica  $E = 4\pi r^2$ .

$$\sum a_t = 4\pi r^2. \quad (6)$$

Assim substituindo, (6) e (5) na equação (4) e simplificando obtemos:

$$2V - F = 4. \quad (7)$$

Para obter uma relação entre  $F$  (número de triângulos esféricos) e  $A$  (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos simultaneamente, logo  $3F = 2A$ , que pode ser escrito na forma  $F + 2F = 2A$ , ou ainda:

$$F = 2A - 2F.$$

Substituindo em (7) encontramos:

$$2V - (2A - 2F) = 4.$$

Donde, simplificando por 2 finalmente chegamos em:

$$V - A + F = 2.$$

□

### 3.3 Demonstração do Teorema de Euler segundo Zoroastro.

Seguindo as ideias de Legendre, o professor de matemática Zoroastro Azambuja Filho, adaptou sua demonstração de modo a evitar a Geometria Esférica, tornando-se mais elementar aos estudantes de Ensino Médio.

Em [12], encontra-se essa demonstração de maneira bem simplificada e concisa quanto à argumentação, a qual será exposta neste trabalho seguindo a notação e figuras sugeridas no material.

O nosso objeto de estudo será um poliedro convexo  $P$ , onde  $V$  representa o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces.

Antes de fazer a demonstração, primeiro vamos estabelecer algumas situações que vão nos ajudar a entender como Zoroastro chegou ao Teorema de Euler utilizando a ideia de calcular de duas maneiras distintas a soma dos ângulos internos que compõem o poliedro.

Começamos escolhendo uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo  $P$ . Agora tomamos também um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e que seja perpendicular a  $r$ . O plano  $H$  será chamado de plano horizontal e as retas paralelas a  $r$  que são perpendiculares a  $H$  serão chamadas retas verticais.

Logo  $H$  divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contém o poliedro  $P$ . Este será chamado o semiespaço superior e diremos que seus pontos estão acima de  $H$ .

Usando a ideia de Zoroastro, para melhor ilustrar o raciocínio, imaginaremos o sol brilhando à pino sobre o semiespaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto  $x$  do semiespaço superior corresponde um ponto  $x$  de  $H$ , chamado a sombra de  $x$ , obtido como interseção do plano  $H$  com a reta vertical que passa por  $x$ . A sombra de qualquer conjunto  $X$ , contido no semiplano superior é, por definição, o conjunto  $X'$ , contido em  $H$ , formado pelas sombras das partes de  $X$ .

Observando que uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro  $P$  é um subconjunto convexo dessa reta, daí se não for vazia é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a  $P$ , ou é um único ponto de  $P$ . Então nota-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo  $P$ .

De forma concisa podemos reformular que cada ponto da sombra  $P'$  do poliedro  $P$  é sombra de um ou de dois pontos de  $P$ .

Então, a sombra  $P'$  do poliedro  $P$  é um polígono convexo do plano horizontal,

cujo contorno  $y'$  é a sombra de uma poligonal fechada  $y$ , formada por aresta de  $P$ . Cada ponto de  $y'$  é sombra de um único ponto de  $P$ , pertencente a  $y$ . A poligonal  $y$  é chamada o *contorno aparente* do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$ , isto é, não pertencente a  $y'$  é sombra de 2 pontos de  $P$ . Dados dois pontos de  $P$ , que tem a mesma sombra, ao mais alto, ou seja o que mais distância de  $H$  será chamado de *ponto iluminado*; o mais baixo será chamado de *ponto sombrio*.

Diante disso, o poliedro  $P$  se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente.

Um exemplo da situação que apresentamos pode ser representado pela Figura 25, onde  $P$  é um cubo que tem os quadrados  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice  $A$ , da forma que  $A$  e  $C'$  estejam na mesma vertical, as faces  $AA'B'B$ ,  $AA'D'D$  e  $ABCD$  ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias e o contorno aparente será a poligonal  $A'B'BCDD'A'$ .

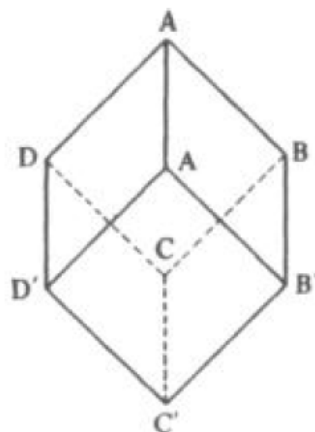


Figura 25: Cubo apresentando as faces iluminadas, sombrias e o contorno aparente.

Seja  $P_1$  o conjunto dos pontos iluminados de  $P$  mais o contorno aparente  $y$ . Cada ponto de  $P'$  é a sombra de um único ponto de  $P_1$ , ou seja, a regra que associa a cada ponto  $x$  de  $P_1$  sua sombra  $x'$  é uma correspondência biunívoca entre  $P_1$  e  $P'$ . A notação  $P_1$  será usada para representar o polígono  $P'$  decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em  $P_1$ , isto é, das faces iluminadas.

Claramente, poderíamos também considerar o conjunto  $P_2$ , formado pelos pontos sombrios de  $P$  mais o contorno aparente de  $y$ , ou seja, a regra que associa a cada ponto de  $y$  de  $P_2$  sua sombra  $y'$  também é uma correspondência biunívoca entre  $P_2$  e  $P'$ . Escrevemos  $P_2$  para indicar a sombra de  $P_2$  expressa como a reunião das sombras das

faces sombrias de  $P$ , isto é, contidas em  $P_2$ .

Agora para finalizar os preparativos, temos que se decompormos cada face de  $P$  em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos o número de  $F$ ,  $A$  e  $V$  individualmente, contudo, a expressão  $V - A + F$  permanecerá com o mesmo valor, sendo que, toda vez que se traça uma diagonal numa face, os números  $F$  e  $A$  aumentam de uma unidade cada um e o número  $V$  não muda, portanto os acréscimos de  $F$  e  $A$  se cancelam. Logo, para a demonstração do Teorema de Euler, vamos generalizar que todas as faces do poliedro  $P$  são triângulos.

**Teorema 4.** (Teorema de Euler): *Para todo Poliedro convexo, vale a relação  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.*

*Demonstração.* Seja um poliedro convexo  $P$  de  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $F$  faces, onde todas as faces são triangulares, então há  $F$  triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles são iguais a  $180^\circ$  (geometria plana), isto é,  $\pi$  radianos. Então chamando de  $S$  a soma dos ângulos internos de todos os triângulos que compõem o poliedro  $P$ , temos:

$$S = \pi.F. \quad (8)$$

Como as faces são triângulos têm-se a relação:

$$3F = 2A, \quad (9)$$

Pois, cada face possui três arestas e cada aresta pertence a duas faces. Contudo,  $3F = 2A$  pode ser escrito na forma  $F = 2A - 2F$ , substituindo em (8), obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \pi.(2A - 2F) \\ &= 2\pi.(A - F). \end{aligned} \quad (10)$$

Seguindo agora por outro lado, sabe-se que  $S = S_1 + S_2$ , em que  $S_1$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e  $S_2$  a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

Não podemos esquecer de que a soma dos ângulos internos de um triângulo  $T$  é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra  $T$ , resultando que  $S_1$  é igual à soma

dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo  $P'_1$ , sombra de  $P_1$ .

Fazendo de maneira diferente da anterior, vamos calcular a soma dos ângulos vértice a vértice.

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $y$ , logo  $V = V_0 + V_1 + V_2$ . Notemos que  $V_0$  é o número de vértices e de lados da poligonal  $y'$ , contorno do polígono convexo  $P'$ .

Daí em  $P_1$  temos  $V_1$  vértices interiores, representando a sombra dos vértices iluminados mais  $V_0$  vértices do contorno  $y'$  e como a soma dos ângulos internos que têm como vértice uma dado vértice interior é igual a  $2\pi$  radianos. A soma de todos os ângulos que tem vértice sobre o contorno  $y'$  é igual  $\pi.(V_0 - 2)$ , lembrando da geometria plana da soma dos ângulos internos de um polígono com  $V_0$  lados.

Segue-se que:

$$S_1 = 2\pi.V_1 + \pi.(V_0 - 2).$$

De maneira análoga, obtemos:

$$S_2 = 2\pi.V_2 + \pi.(V_0 - 2).$$

Somando  $S_1 + S_2$ , vem que:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= 2\pi.(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi \\ &= 2\pi.V - 4\pi. \end{aligned} \tag{11}$$

Comparando as equações (10) e (11), temos:

$$2\pi.(A - F) = 2\pi.(V - 2).$$

Dividindo por  $2\pi$ , encontramos:

$$A - F = V - 2 \text{ ou } V - A + F = 2.$$

□



Diante dos estudos realizados uma das demonstrações mais utilizadas é a de Cauchy, contudo, essa foi considerada insuficiente de argumentos. Logo, foi adaptada e corrigida por E. Lima em [12], sugerindo todas as hipóteses suficientes para que não deixasse mais resquícios de dúvida quanto a ideia que Cauchy deveria ter mencionado.

Contudo, analisando os estudiosos que fizeram as demonstrações do Teorema de Euler, consideramos que a de Legendre, apesar de utilizar a geometria esférica conteúdo não sugerido aos alunos do Ensino Médio, e a do professor Zoroastro que já apresenta conteúdos mais elementares aos estudantes, possuem fundamentos mais simples (soma dos ângulos internos de um polígono) e apresentam um raciocínio não muito excessivo.

Visto que os livros do Ensino Médio não abordam a demonstração de forma teórica e sim com a afirmação da relação comprovando através de exemplos, acreditamos que as demonstrações que foram apresentadas sejam acessíveis aos alunos e professores de Ensino Médio, permitindo assim um aprendizado sólido a respeito deste fato matemático.

### 3.4 Os cinco Poliedros de Platão

Usando o Teorema de Euler, pode-se demonstrar que existem apenas cinco poliedros de Platão, contudo, primeiro vamos determinar algumas características.

**Definição 7.** *Um poliedro é chamado poliedro de Platão, se e somente se, satisfaz simultaneamente as seguintes condições:*

- *Todas as faces são regiões poligonais com o mesmo número ( $n$ ) de lados.*
- *De cada vértice parte o mesmo número ( $m$ ) de arestas.*
- *É euleriano, ou seja, obedece o Teorema de Euler:  $V - A + F = 2$ .*

**Propriedade 3.** *Existem cinco, e somente cinco classes de poliedros de Platão.*

*Demonstração.* Seja um Poliedro de Platão com:  $F$  faces, cada uma com  $n$  lados sendo  $n \geq 3$ , de fato se  $n$  menor que 3 não é possível obter um polígono e  $m$  o número de arestas que partem de cada vértice com  $m \geq 3$ , pois se  $m$  também for menor que 3, não é possível formar um poliedro.

Logo temos:

Sendo o poliedro Euleriano, vale o teorema:

$$V - A + F = 2. \quad (12)$$

Cada uma das  $F$  faces do poliedro tem  $n$  arestas e cada aresta está em duas faces, obtemos que:

$$n.F = 2A. \quad (13)$$

Da mesma forma de cada vértice  $V$  tem  $m$  arestas e cada aresta tem dois vértices como extremidades, então:

$$m.V = 2A. \quad (14)$$

Substituindo (13) e (14) em (12) temos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2.$$

Dividindo por  $2A$  obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}.$$

Contudo, devemos ainda observar as condições para  $n \geq 3$  e  $m \geq 3$ .

Temos que  $A$  é positivo e, conseqüentemente,  $\frac{1}{A} > 0$ . Assim:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} > 0.$$

Dessa forma, para cada  $n$  teremos valores para  $m$  de modo que:

a)  $n = 3 \Rightarrow$  faces triangulares:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow m < 6$$

assim,  $m = 3, 4$  ou  $5$  (sendo  $m \geq 3$  é inteiro).

b)  $n = 4 \Rightarrow$  faces quadrangulares:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow m < 4$$

assim,  $m = 3$

c)  $n = 5 \Rightarrow$  pentagonais:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{3}{10} > 0 \Rightarrow m < \frac{3}{10} \cong 3,3333\dots$$

assim,  $m = 3$

d)  $n \geq 6$  obtemos  $m$  sempre menor que 3, o que contradiz a condição inicial.

Há portanto, cinco classes de poliedros de Platão, são elas:

- Primeira classe:  $n = 3$  e  $m = 3$ .

Como  $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$  então substituindo  $n = 3$  e  $m = 3$ , temos  $A = 6$ . Sendo  $n.F = 2A$ , temos  $F = 4$  e como  $m.V = 2A$ , temos  $V = 4$ .

Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem quatro faces triangulares como tetraedros.

- Segunda classe:  $n = 4$  e  $m = 3$ .

Analogamente, temos  $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$ , o que implica em  $A = 12$ ,  $n.F = 2A$ , temos  $F = 6$  e  $m.V = 2A$ , ou seja,  $V = 8$ . Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem seis faces quadrangulares, conhecidos como hexaedros.

- Terceira classe:  $n = 3$  e  $m = 4$ .

Continuando,  $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$ , então  $A = 12$ ,  $n.F = 2A \therefore F = 8$  e como  $m.V = 2A$ , temos  $V = 6$ . Esta classe de poliedros de Platão que possuem oito faces triangulares, conhecidos como octaedros.

- Quarta classe:  $n = 5$  e  $m = 3$ .  $\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$ , então  $A = 30$  e  $n.F = 2A \therefore F = 12$  e  $m.V = 2A$ , temos  $V = 20$ . Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem doze faces pentagonais, conhecidos como dodecaedros.

- Quinta classe:  $n=3$  e  $m=5$ .

$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$ , então,  $A = 30$ ,  $n.F = 2A \therefore F = 20$  e como  $m.V = 2A$  temos  $V = 12$ . Esta classe de poliedros de Platão inclui os poliedros que possuem vinte faces triangulares, conhecidos como icosaedros.

Utilizando as relações obtidas, vamos organizar em um quadro:

□

Classes	$n$	$m$	$A$	$V$	$F$	Nome do Poliedro.
1ª classe	3	3	6	4	4	Tetraedro.
2ª classe	4	3	12	8	6	Hexaedro.
3ª classe	3	4	12	6	8	Octaedro.
4ª classe	5	3	30	20	12	Dodecaedro.
5ª classe	3	5	30	12	20	Icosaedro.

Tabela 1: Poliedros regulares.

### 3.5 Poliedros Regulares

Dizemos que um poliedro convexo é regular quando satisfaz as seguintes condições:

- As faces são polígonos regulares e congruentes entre si;
- De cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas.

**Propriedade 4.** *Existem 5, e somente 5, poliedros regulares.*

*Demonstração.* Se um poliedro é regular, suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e, desse modo, todas as faces têm o mesmo número de lados. Além disso, em um poliedro regular, de cada vértice parte o mesmo número de arestas.

Assim, dizemos que todo poliedro regular é de Platão. Logo, existem no máximo, 5 poliedros regulares.  $\square$

Na Figura 26, visualizamos os Poliedros Regulares, em ordem da esquerda para a direita, a saber, o tetraedro regular (4 triângulos equiláteros), hexaedro regular (6 quadrados), octaedro regular (8 triângulos equiláteros), dodecaedro regular (12 pentágonos) e por último o icosaedro regular (20 triângulos equiláteros).

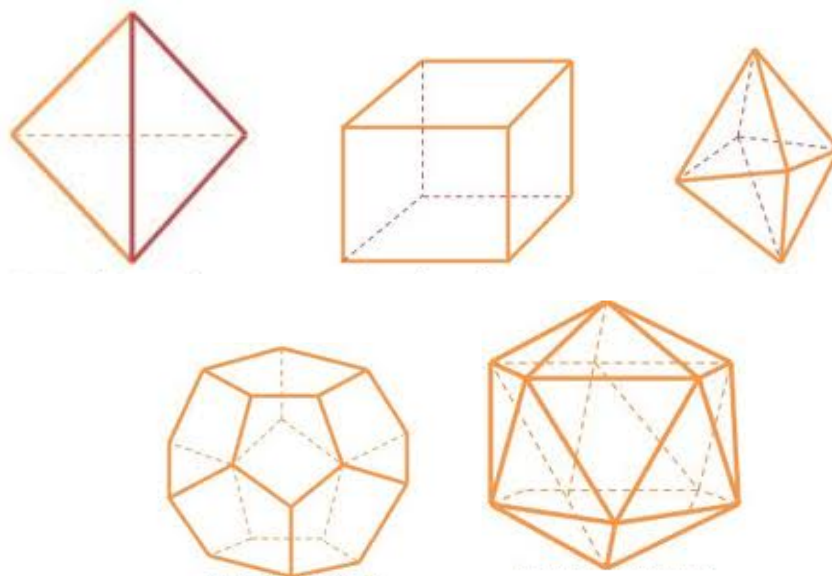


Figura 26: Poliedros regulares também conhecidos como Poliedros de Platão.

## 4 Poliedros em sala de aula

Frente ao desafio de aprender, cada criança, jovem ou adulto, percorrerão caminhos diferentes, cabe ao professor elaborar estratégias e critérios para atender a estes anseios. Partir do concreto é uma alternativa metodológica que pode contribuir para melhorar a qualidade do seu trabalho.

Faz parte do objetivo deste trabalho disseminar atividades pedagógicas que auxiliem o professor em sala de aula, contribuindo para a construção de um pensamento crítico e autônomo, melhorando o raciocínio geométrico e desenvolvendo a percepção espacial.

Sem abdicar da formalização da demonstração do Teorema de Euler, a intenção é envolver as atividades de apoio visual ou de visual-tátil como facilitador para a aprendizagem. Segundo Murari, em [13], acredita que a integração de material manipulativo enriquece a aprendizagem.

[...] Relativamente à Geometria, nas atividades em que os estudantes são estimulados a explorar ideias geométricas utilizando material que se pode manipular, proporcionam-se condições para a descoberta e o estabelecimento das relações geométricas existentes no universo. [...]

A intenção é a de acentuar a interação do aluno com o objeto de estudo (Teorema de Euler), através da construção e comparação de sólidos geométricos para que haja uma descoberta de conhecimento justificando o fato de que compreender é muito mais válido do que definir.

### 4.1 Geometria dos cortes de sabão

Entre as sugestões de atividades para representação de figuras geométricas com materiais concretos segue-se a ideia de Ana Maria Kaleff, em [10], o qual pode ser encontrado no site: [http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos\\_view.asp?](http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos_view.asp?)

#### *ATIVIDADE:*

Nome da atividade: Geometria dos Cortes de Sabão.

Tempo: 2 (duas) horas-aula.

Público-alvo: alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Materiais necessários: Barra de sabão em pedra e estilete (o uso do material deverá ser bem monitorado pelo professor).

Objetivos a serem alcançados:

Poliedro	$V$	$F$	$A$	$V + F$	$A + 2$	$V + F = A + 2$
Cubo						
Depois do 1º corte						
Depois do 2º corte						
Depois do 3º corte						

Tabela 2: Tabela dos cortes de sabão.

- Reconhecer as propriedades do cubo.
- Estabelecer o Teorema de Euler através das atividades apresentadas;

Desenvolvimento da aula:

Com uma barra de sabão em pedra, na primeira parte da atividade propõe-se fazer cortes até obter um cubo ou paralelepípedo reto retângulo, fazendo as lapidações necessárias, não se esquecendo da orientação emergente para obtenção da construção deste sólido que é a de perpendicularismo das faces. Cada aluno deverá ter em mãos uma tabela contendo o número de faces, vértices e arestas, então após a formação do sólido este deverá anotar na tabela o número de faces, arestas e vértices.

Agora, deve-se cortar um “naco” (uma pirâmide de base triangular), gerando um novo sólido, um poliedro de 7 faces, ou seja, 3 quadrados, 3 pentágonos e 1 triângulo. De forma análoga a anterior os alunos deverão anotar na tabela o número de faces, vértices e arestas do novo sólido.

Assim, sucessivamente, o professor poderá modificar o sólido, com vários cortes, sempre anotando os dados na tabela. Fazendo então, uma reflexão sobre os resultados encontrados e comparando o número de vértices, faces e arestas, verifica-se que  $V - A + F = 2$ , comprovando o Teorema de Euler.

## 4.2 Geometria de Canudos

Continuando com a proposta de usar materiais manipulativos, Kaleff em [9], apresenta uma atividade de construção dos Poliedros de Platão utilizando barbante e canudo. Dentro das figuras temos que  $\longrightarrow$  indica o sentido em que a linha deve passar pelo

canudo e o símbolo  $\implies$  indica o sentido em que a linha deve passar por um canudo que já foi ocupado.

*ATIVIDADE:*

Nome da atividade: Geometria de Canudos

Tempo: 2 (duas) horas-aula.

Público-alvo: alunos a partir do 6º ano.

Materiais necessários: Canudo, barbante e tesoura.

Objetivos a serem alcançados:

- Identificar as propriedades dos Poliedros de Platão.
- Reconhecer a Relação de Euler nos poliedros construídos.

Desenvolvimento da aula:

1º passo: Construção de um tetraedro regular:

Material necessário: 6 canudos de mesmo comprimento e um pedaço de linha (1 metro ou mais dependendo do tamanho do canudo).

Tome o fio de linha, passe-o através de três pedaços de canudo construindo um triângulo e feche-o por meio de um nó. Agora, passe o restante da linha por mais dois pedaços de canudo, juntando-se e formando mais um triângulo com um dos lados do primeiro triângulo.

Finalmente, passe a linha por um dos lados deste triângulo e pelo pedaço de canudo que ainda resta, fechando a estrutura com um nó. As etapas de construção podem ser observadas pela Figura 27.

2º Passo- Construção de um octaedro regular.

Material necessário: 12 canudos de mesmo comprimento e 2 metros ou mais de linha (dependendo do tamanho do canudo).

Com os pedaços de canudos e o fio de linha construa quatro triângulos e una-os dois a dois, seguindo o esquema da Figura 28.

3º Passo- Construção do icosaedro regular.

Material necessário: 30 pedaços de canudo de mesmo tamanho e 3 metros ou mais de linha (dependendo do tamanho do canudo).

Construa quatro triângulos seguindo o esquema da Figura 29. Una-os obtendo a estrutura de um pirâmide regular de base pentagonal. Repita a construção, obtendo mais uma pirâmide. Una cada uma das pirâmides através dos vértices das bases, por



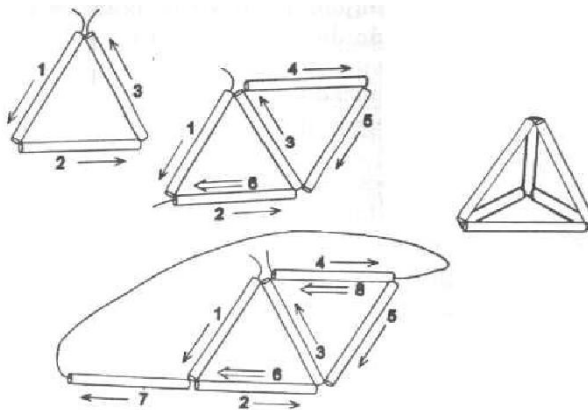


Figura 27: Construção do tetraedro regular.

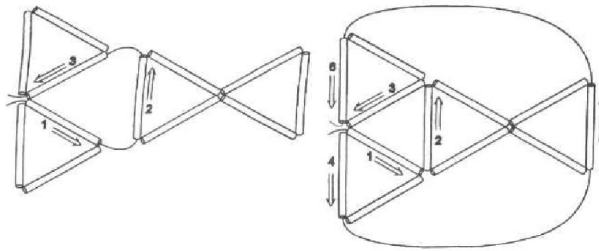


Figura 28: Construção do octaedro regular.

meio de pedaços de canudos, de tal forma que em cada vértice se encontrem cinco canudos.

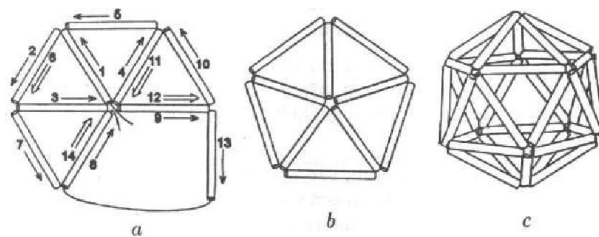


Figura 29: Construção do icosaedro regular.

4º passo: Construção do cubo e suas diagonais.

Materiais necessários: 12 canudos de mesmo comprimento e mais 6 canudos de cor diferente do tamanho das diagonais das faces.

Como o cubo não contém rigidez própria, daí a necessidade de construir o cubo com suas diagonais. Passe o fio por quatro canudos e passe a linha novamente por dentro

do primeiro canudo, construindo um quadrado, passe a linha por mais três canudos construindo mais um quadrado, repita o mesmo procedimento para a construção de outro quadrado. Observando agora que faltam dois canudos para completar as arestas do cubo, prenda-os de maneira a completá-lo, observando o esquema da Figura 30.

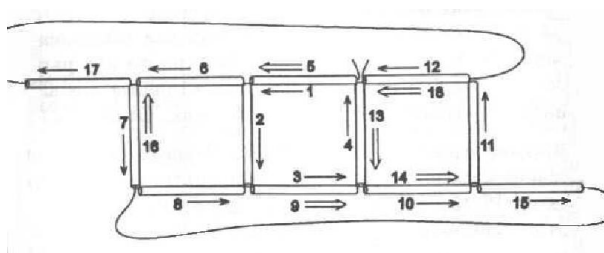


Figura 30: Construção do cubo.

Agora com pedaços de canudos de cor diferente representando as diagonais da face, construa uma diagonal em cada face e com mais um canudo de cor diferente das anteriores, construa a diagonal do cubo.

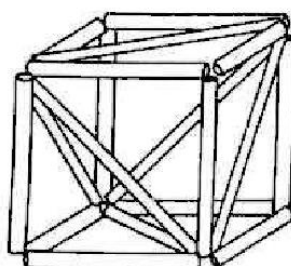


Figura 31: Cubo com canudos.

#### 5º passo: Construção do Dodecaedro Pentagonal

A construção do dodecaedro regular apresenta um grau de dificuldade maior, devido à falta de estabilidade, um método para que a figura não se achate é unir todos os vértices do dodecaedro ao centro do poliedro.

Precisaremos de 30 canudos de lado  $l$ , a construção começa pela base e depois levantamos uma pirâmide como a ilustrada conforme a Figura 32.

É necessário lembrar que toda pirâmide regular possui:

- o segmento que une o vértice ao centro da base é perpendicular ao plano da base, e seu comprimento é portanto a altura  $h$  da pirâmide;

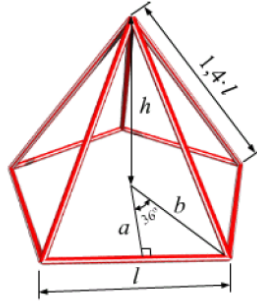


Figura 32: Pirâmide pentagonal.

- as faces laterais são triângulos isósceles congruentes;
- o apótema do polígono regular da base é chamado de apótema da base, onde apótema é o segmento de reta de um polígono regular inscrito num circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , cujas extremidades são o centro da circunferência e o ponto médio de um lado do polígono, forma o denominado apótema do polígono. A medida do apótema desse polígono regular é igual ao raio da circunferência inscrita nesse polígono.

Como o dodecaedro tem 12 pentágonos iguais, daí a pirâmide deverá ter uma altura específica, aplicando as propriedades necessárias encontramos o apótema  $a$  e a distância  $b$  do centro ao vértice do pentágono.

$$a = \frac{l}{2 \tan 36^\circ}, \quad b = \frac{l}{2 \sin 36^\circ}$$

É possível concluir depois de muita álgebra que a altura da pirâmide  $h$  é dada por  $h = \frac{2a+b}{2}$ .

Sendo  $l$  o lado do pentágono e também o comprimento dos canudos que formam as arestas e aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos o comprimento dos canudos que ligarão os vértices como sendo  $1,4l$ , ou seja, as arestas laterais da pirâmide.

Dessa forma, é preciso de mais 20 canudos de comprimento  $1,4l$  para fazer a estrutura interna, de onde obteremos um dodecaedro regular semelhante ao da Figura 33.

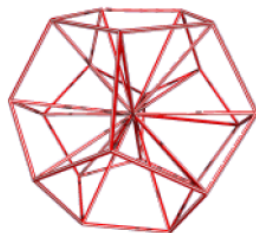


Figura 33: Dodecaedro Pentagonal com canudos.

### 4.3 Atividade com o uso do software *Poly*

Agora, atendendo as exigências de uma sociedade influenciada por novas tecnologias, existem hoje vários programas computacionais que são potentes ferramentas para o ensino da Geometria. São softwares onde os alunos podem modelar, analisar, fazer experimentos e associar suas ideias aos conceitos que objetivam chegar.

Entre a grande variedade de softwares que podem ser utilizados em sala de aula, destacamos o *Poly* que está disponível em <http://www.peda.com/poly>. A imagem de sólidos como prismas, poliedros platônicos e arquimedianos, aparecem na forma espacial giratória onde o aluno pode visualizar de todos os ângulos, como também na forma planificada facilitando a compreensão do aluno na diferenciação da geometria plana com a espacial.

Roteiro de execução das atividades para alunos de Ensino Médio usando o *Poly*:

1. Inicie o programa e maximize a janela onde aparece o poliedro e com o mouse posicione a flecha (seta) sobre a figura e clicando com o botão esquerdo acionado movimento a figura, visualizando sobre várias faces.

2. Explore livremente o software.

3. Selecione os Sólidos de Platão e identifique as regiões poligonais que aparecem como faces:

Tetraedro: \_\_\_\_\_ Ocatedro: \_\_\_\_\_

Dodecaedro: \_\_\_\_\_ Cubo: \_\_\_\_\_

Icosaedro: \_\_\_\_\_

4. Observe os Poliedros de Platão e complete a tabela a seguir:

5. Selecione o poliedro Prisma Hexagonal (da categoria prisma e antiprisma), e complete as Questões de 6 a 9. Depois faça a mesma coisa para a Pirâmide Pentagonal (da categoria de sólidos de Johnson). Procure, dentro dos modos de visualização/botões

Poliedros	Nº de Faces	Nº de Arestas	Nº de Vértices
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

Tabela 3: Poliedros de Platão usando o *Poly*.

disponíveis, qual é o melhor para se obter as respostas.

6.a) O prisma hexagonal possui \_\_\_\_\_ faces.

A pirâmide pentagonal possui \_\_\_\_\_ faces.

7. a) No prisma hexagonal, aparecem as seguintes regiões poligonais como faces:

---

b) Na pirâmide pentagonal, aparecem as seguintes regiões poligonais como faces:

---

8. a) O prisma hexagonal possui \_\_\_\_\_ arestas.

b) A pirâmide pentagonal possui \_\_\_\_\_ arestas.

9. a) O prisma hexagonal possui \_\_\_\_\_ vértices.

b) A pirâmide hexagonal possui \_\_\_\_\_ vértices.

10) Observe a tabela a seguir e complete com os dados que já foram determinados sobre cada um dos poliedros mencionados nela. A seguir, observe a última coluna e tente deduzir uma relação entre o número de vértices, faces e arestas para esses poliedros.

11. A relação matemática que se obtém analisando, na tabela anterior as colunas  $V + F$  e  $A$  é:

$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} + 2 \text{ ou } \underline{\quad} - \underline{\quad} + \underline{\quad} = 2.$$

Tal relação (válida para todos os poliedros convexos) é chamada *Teorema de Euler*.

Poliedros	$V = n^\circ$ de vértices	$F = n^\circ$ de faces	$A = n^\circ$ de arestas	$V + F$
Prisma Hexagonal				
Pirâmide Pentagonal				
Tetraedro				
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

Tabela 4: Poliedros usando o software *Poly*.

## 5 Teorema de Euler em sala de aula

As atividades foram aplicadas a alunos do 2º ano do Ensino Médio, onde as três propostas de trabalho foram direcionadas em uma única turma e seguidas, como cada uma apresenta visualizações de diferentes poliedros a intenção era a de que o Teorema de Euler ficasse bem definido diante da diversidade de exemplos.

No primeiro momento foram expostas algumas figuras espaciais poliédricas que fazem parte do seu convívio, baseando nas definições os elementos que nos interessariam, como por exemplo, as arestas, vértices e faces de cada objeto.

Para uma melhor qualidade do trabalho, separei a turma em grupos de no máximo 03 (três) alunos, acreditando que dessa forma eles poderiam se ajudar na manipulação dos objetos e trocarem informações necessárias para concretização de um resultado satisfatório.

Começando com a atividade da construção dos Poliedros de Platão utilizando barbante e canudo, compreende-se que os sólidos como o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, os quais apresentam faces triangulares foram às estruturas que os alunos montaram com mais agilidade.

Para representar o hexaedro perceberam a falta de rigidez, então quando indagados do que poderíamos fazer para oferecer uma maior estabilidade à figura, um dos componentes de um dos grupos já apresentou uma situação que faz parte da realidade do seu dia a dia “vamos colocar um canudo no meio de cada face igual faz com as porteiras”,

surgiu então à necessidade de complementar a atividade falando sobre a estabilidade do triângulo e explicando os conceitos de diagonais das faces e do cubo.

As diagonais foram expostas de cores diferentes para que não se confundisse com as arestas.

Salientamos que nenhum grupo efetuou cálculo para saber quanto que deveria medir os canudos das diagonais, simplesmente foram fazendo experimentos de tamanhos de acordo com as faces e iam cortando para deixar na medida desejada, analogamente fizeram com a diagonal do cubo.

A última figura, o dodecaedro pentagonal, o 5º passo da seção 4.2, não foi construída pelos alunos, apenas foi mostrado um exemplo de como ficaria a sua estrutura já com os devidos problemas solucionados de falta de estabilidade.

Figuras já montadas, foi apresentado um texto dos Poliedros Regulares ou Poliedros de Platão, que definia justamente os sólidos que eles haviam construídos e também para que fizessem anotações das figuras classificando-as por nomes e observando a quantidade de vértices, faces e arestas.

Agora, trabalhando com o artigo de Geometria dos Cortes de Sabão, apresentado em [10], esta é uma atividade que requer mais atenção do professor, pelo fato de usar objeto cortante. O material sabão e estilete foram repassados juntamente com a tabela de anotações, onde a construção do cubo bem como suas propriedades foi executada de forma bem satisfatória.

Todos os resultados foram registrados de acordo com cada corte, até o terceiro corte fizemos em conjunto. Em seguida, foi observado que eles poderiam continuar fazendo os cortes de maneira análoga e anotando as descrições necessárias de acordo com o número de vértices, faces e arestas.

A última atividade com o uso do software *Poly*, foi a mais atrativa para os alunos. Ressaltamos aqui a grande aplicabilidade do computador como um recurso didático de grande utilidade para o professor. A etapa de exploração foi direcionada de modo que eles observassem não só a variedade de poliedros, mas também a sua forma planificada ajudando a colaborar com a formação da imagem mental. Chegando ao fim da exploração, foi solicitado que respondessem ao questionário do roteiro das atividades sugeridas, para que pudéssemos fazer as considerações finais.

Agora, ao final das metodologias propostas, foi pedido que cada grupo discutisse entre eles as anotações feitas em relação ao número de arestas, faces e vértices dos poliedros analisados apresentando suas conclusões.

Diante do fato de que todos os grupos conseguiram perceber o Teorema de Euler

nos sólidos estudados, acredito que partir do concreto é uma alternativa metodológica que pode contribuir para melhorar a qualidade da aprendizagem, fundamentando a aproximação da representação teórica matemática com a representação cotidiana.

O objetivo de associar as três metodologias a uma única turma era a de permitir que o aluno compreenda o quão grande é o universo dos sólidos geométricos convexos que compartilham do Teorema de Euler. Contudo, diante dos resultados vejo que poderia organizar de forma a associar, Geometria de Canudos e *Poly* ou Geometria os Cortes de sabão e *Poly*.

Dessa forma, vejo que uma atividade complementa a outra, pois, quando desenvolvemos o propósito de construção com canudos limitamos aos poliedros de Platão, então, como o software *Poly* proporciona uma mostra maior de poliedros à dedução do Teorema de Euler fica mais representativo, ocorrendo situação análoga com os cortes de sabão.



## 6 Considerações finais

O Teorema de Euler junto com todos os conceitos que o precede para a sua interpretação vêm sendo objeto de estudo por várias décadas, a admiração pela forma simples do enunciado e a generalidade da sua validade tornam-no fascinante e popular.

Aprofundar no universo dos poliedros bem como suas propriedades proporcionou uma contribuição significativa, o estudo das demonstrações além de melhorar a formação científica aponta para uma reflexão sobre a solidez de toda a estrutura que fundamenta o Teorema de Euler.

Contudo, as construções de sólidos geométricos com os artigos Geometria de canudos, Geometria dos cortes de sabão e também a visualização dos diversos sólidos existentes usando o software *Poly*, apresentaram uma metodologia dotadas de um grande valor, garantindo interesse, participação e promovendo em sala de aula a construção de um aprendizado de qualidade.

Sendo assim, dispomos da certeza de que ensinar exige conhecimentos e competências que estão muito além de exposição quadro-giz, a figura geométrica associada ao objeto geométrico desempenha papel determinante no progresso de compreensão da Geometria.

## Referências

- [1] ÁVILA, G., *Várias faces da matemática: Tópicos para Licenciatura e leitura em geral*. São Paulo. Editora Edgar Blucher Ltda. 2010
- [2] AZAMBUJA FILHO, Z., *Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, nº3, 1983. p.15-17.
- [3] BOYER, C. B., *História da Matemática*. São Paulo. Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 1974.
- [4] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. PCN+, *Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/ Secretária de Educação Média e Tecnológica, 2002.
- [5] COLLI, E., *Artigo: Poliedros*. Disponível em: [www.ime.usp.br/matematica/textos/poliedros.pdf](http://www.ime.usp.br/matematica/textos/poliedros.pdf) Acesso em: 10 de novembro de 2013.
- [6] HOWARD, E., *Tópicos de História da Matemática para o uso em sala de aula*. São Paulo. Editora Atual. Tradução de Hygino H. Domingues. 1992.
- [7] IEZZI, G. ET AL., *Matemática: ciência e aplicações, v.2: Ensino Médio*. São Paulo. Editora Saraiva. 2010.
- [8] KALEFF, A. ET AL., *Quebra-cabeças geométricas e formas planas..* Niterói, RJ. Editora EdUFF. 2005.
- [9] KALEFF, A., *Vendo e entendendo poliedros*. Niterói, RJ. Editora EdUFF. 2003.
- [10] KALEFF, A., *Artigo: Geometria dos cortes de sabão*. Disponível em: [www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos\\_view.asp?](http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos_view.asp?) Acesso em: 16 de novembro de 2013.
- [11] LIMA, E. L. ET AL., *A matemática no ensino Médio, volume 2*. Rio de Janeiro. SBM. 2006.
- [12] LIMA, E. L., *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro. IMPA. 1991.

- [13] MURARI, C., *Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria*. In BICUDO, A.V.;BORBA, M.C.(ORGS). *Educação Matemática: Pesquisa em Movimento*. São Paulo. Editora Cortez. 2004.
- [14] NASCIMENTO, M.; SALGADO, S. A. B., *Uma demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos via Geometria Esférica*. In *Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática ( VI HTEM) 15-19 de julho de 2013*, UFSCar, São Carlos, SP, Brasil. Disponível em : [www.ufscar.br/anais/.../artigoCompleto\\_PO\\_T1-ZZ-mateus](http://www.ufscar.br/anais/.../artigoCompleto_PO_T1-ZZ-mateus). Acesso em : 10 de janeiro de 2014.
- [15] PAIVA,M. ET AL., *Matemática, v.2. Ensino Médio*. São Paulo. Editora Moderna. 2009.