



UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROFMAT

**O globo terrestre e a esfera celeste: uma
abordagem interdisciplinar de
Matemática, Geografia e Astronomia**

Tetsuo Usui

Dissertação de Mestrado

RECIFE
25/08/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tetsuo Usui

**O globo terrestre e a esfera celeste: uma abordagem
interdisciplinar de Matemática, Geografia e Astronomia**

*Trabalho apresentado ao Programa de PROFMAT do DE-
PARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito
parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva*

RECIFE
25/08/2014

*Para meus alunos e colegas professores, por
compartilharmos tantas experiências e aprendizados de
vida.*

Agradecimentos

Ao final deste trabalho não são poucas as pessoas a quem devo agradecer. Suas presenças durante este caminho tornaram-no mais afortunado. As alegrias e receios, além das dificuldades inerentes a construção de um conhecimento científico, somaram-se aos incentivos múltiplos e foram um compartilhar constante. Desta forma agradeço:

Ao Thiago. Orientador, pessoa generosa e capaz de organizar minhas ideias. Sua parceria intelectual foi definitiva para a construção deste trabalho, além dos incentivos e das alegrias. Este trabalho, em larga medida, é seu também.

Solange. Esposa querida a quem passamos tantas discussões acadêmicas, bem como tantas formas de carinhos. A distância só aproximou nossos corações e mentes. Você está em todos os parágrafos deste trabalho.

Ao André. Filho amado que faz de sua alegria minha energia para continuar.

Aos meus pai (Michio) e mãe (Yoshiko), por me permitirem ter o caráter e a abnegação suficientes para poder construir-me como sujeito, como pesquisador, como ser humano.

Em especial aos colegas: Ricardo Santiago. Amigo, incentivador e participante ativo na construção deste trabalho desde o momento em que era apenas um esboço de ideias; e ao caríssimo Fábio Nicácio, cuja simplicidade, calma e sinceridade me forneceu o apoio moral e laborioso para escrever.

E aos colegas e alunos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco. Uma coletividade sempre presente em minhas ideias.

”Não há entrada já aberta para a ciência e só aqueles que não temem a fadiga de galgar suas escarpas abruptas é que têm a chance de chegar a seus cimos luminosos.”

—KARL MARX

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal estabelecer uma conexão da Matemática com a Geografia e a Astronomia. Nesta perspectiva visa contemplar uma abordagem interdisciplinar na compreensão dos conceitos geográficos do globo terrestre, assim como, dos conceitos inerentes à esfera celeste acoplados na fundamentação teórica de Geometria Euclidiana, a fim de apresentar uma estrutura lógica e dedutiva da geometria e da trigonometria na esfera. O trabalho complementa a lacuna existente entre as disciplinas de Geografia e Matemática do Ensino Médio, pois fundamenta matematicamente, as linhas (paralelos e meridianos) e coordenadas geográficas. Sendo, portanto, útil para alunos de Graduação de Licenciatura em Matemática, da mesma forma que aos professores de Matemática e Geografia do Ensino Médio e Fundamental. Além disso, também contempla aos observadores do céu que queiram olhar a astronomia de um ponto de vista da antiguidade grega, pois o estudo da trigonometria esférica estava totalmente vinculado ao estudo celestial.

Palavras-chave: Esfera, geometria esférica, trigonometria esférica, globo terrestre, astronomia de posição.

Abstract

This work aims to establish a connection among Mathematics with Geography and Astronomy. In this perspective it aims to encompass an interdisciplinary approach in understanding the geographical concepts of the globe, as well as the concepts inherent in the celestial sphere underlying the theoretical foundations of Euclidean Geometry, in order to present a logical and deductive structure of Geometry and Trigonometry in that sphere. This work complements the existing gap between the subjects of Geography and Mathematics in High School because it gives Mathematical supports to the lines (parallels and meridians) and geographic coordinates. Being therefore useful for undergraduate Mathematics students, the same way that teachers of Mathematics and Geography from High School and Elementary Education. Moreover, it also contemplates the sky watchers who wish to have a look at Astronomy from a point of view of Greek antiquity, since the study of Spherical Trigonometry was totally linked to the celestial study.

Keywords: Sphere, spherical geometry, spherical trigonometry, globe, positional astronomy.

Sumário

I	Sintaxe Matemática	9
1	Edro	11
1.1	Diedro	11
1.2	Triedro	14
2	Geometria na Esfera	21
2.1	Círculo na esfera	21
2.2	Ângulo na esfera	43
2.3	Coordenada na esfera	48
2.4	Triângulo na esfera	51
3	Trigonometria na esfera	61
3.1	Triângulo retângulo esférico	61
3.2	Relações trigonométricas	64
3.2.1	Lei do cosseno para lados	64
3.2.2	Lei do cosseno para ângulos	67
3.2.3	Lei dos senos	68
3.2.4	Outras relações	69
3.2.5	Resolução de triângulos esféricos	76
3.3	Teorema de Menelau	78
II	A esfera como modelo físico	85
4	O globo terrestre	87
4.1	A esfericidade da Terra	87
4.2	Principais pontos e linhas do globo terrestre	90
4.3	Coordenadas geográficas	91
4.4	Distância esférica entre dois pontos no globo terrestre	94
4.5	A medida da Terra	102
5	A esfera celeste	107
5.1	O céu como esfera	107
5.2	Principais pontos e linhas da esfera celeste	109
5.3	Sistemas de referência	112
5.4	Coordenada horizontal	113

5.5	Coordenada equatorial horária	116
5.6	Coordenada equatorial universal	119
5.7	Coordenadas eclípticas	122
5.8	Transformação de coordenadas na esfera celeste	124
5.8.1	Transformação de coordenadas horizontais em equatoriais horárias e vice-versa	124
5.8.2	Transformação entre as coordenadas equatoriais	128
5.8.3	Transformação de coordenada equatorial universal em eclíptica e vice-versa	129
6	Aplicações	133
6.1	Distância esférica entre dois astros	133
6.2	Nascer e ocaso de um astro	134
6.3	Qibla	137
A	Considerações finais	141

Lista de Figuras

1.1	Diedro $\widehat{\alpha r \beta}$	12
1.2	Secção de um diedro: $A\widehat{P}B$	12
1.3	Secções paralelas de um diedro: $A\widehat{P}B \equiv A'\widehat{P}'B'$	13
1.4	Secção reta do diedro: $A\widehat{P}B$	13
1.5	Semiespaço	14
1.6	Triedro $tri(V, A, B, C)$	15
1.7	Secção de um triedro	16
1.8	Triedro	17
1.9	Soma dos ângulos das três faces de um triedro	19
2.1	Determinação da superfície esférica	22
2.2	Plano secante que passa pelo centro da esfera	24
2.3	Plano secante à superfície esférica que não passa pelo centro da esfera	25
2.4	Círculo máximo e círculo menor	25
2.5	Plano tangente a uma esfera	26
2.6	Plano tangente em um ponto da esfera	27
2.7	Retas tangentes em um ponto da esfera	28
2.8	A reta que passa pelos centros O e O' é perpendicular ao plano do círculo menor	29
2.9	Determinação do círculo máximo	30
2.10	Corda e diâmetro de uma esfera	31
2.11	Intersecção de dois círculos máximos	32
2.12	Círculos concorrentes em um ponto	33
2.13	Círculos concorrentes em dois pontos	33
2.14	Polos de um círculo máximo: P e P'	34
2.15	Círculos paralelos	35
2.16	Círculos paralelos têm os mesmos polos	36
2.17	Círculos perpendiculares	37
2.18	O meridiano e os círculos paralelos são perpendiculares entre si	38
2.19	Distância polar do polo P	38
2.20	Distância polar PA e $P'A$	39
2.21	Arcos e cordas em uma esfera	40
2.22	Arcos de círculo máximo entre dois paralelos	42
2.23	Ângulo entre a semirreta e o plano do círculo máximo.	43
2.24	Ângulo entre a semirreta e o plano do círculo máximo: $A\widehat{O}A'$	44
2.25	Ângulo esférico: $A\widehat{P}B = t_1\widehat{P}t_2 = \theta$	45

2.26	O ângulo esférico e o diedro	46
2.27	Fuso esférico	47
2.28	Ângulo entre os polos: $\widehat{POQ} = \widehat{COB}$	48
2.29	Coordenada na esfera: $\widehat{AB'} = \lambda$ e $\widehat{BB'} = \phi$.	50
2.30	Triângulo esférico ABC	52
2.31	O triângulo esférico ABC e o triedro $tri(O, P, Q, R)$	53
2.32	Triângulo não esférico: \widehat{AC} é um arco de círculo menor	53
2.33	Caminho ótimo entre dois pontos de uma superfície esférica	55
2.34	$A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC	57
2.35	Triângulos polares ABC e $A'B'C'$	58
3.1	Triângulo esférico retângulo	62
3.2	Lei do cosseno para lados	65
3.3	Triângulo esférico ABC com \widehat{BC} obtuso.	66
3.4	Triângulo esférico com dois lados obtusos.	67
3.5	Lei dos senos	69
3.6	Razão orientada: $\frac{AL}{LB}$	78
3.7	Teorema de Menelau: AD paralela a LN	79
3.8	Lema do Teorema de Menelau	81
3.9	Lema do Teorema de Menelau	82
3.10	Teorema de Menelau	83
3.11	Teorema de Menelau com OD e AB paralelos	84
4.1	Imagens do eclipse lunar de 28 de agosto de 2007.	88
4.2	Elipsóide de revolução.	89
4.3	Latitude do ponto B	93
4.4	Latitude e longitude do ponto P .	94
4.5	Distância esférica entre dois pontos A e B .	95
4.6	Comparação entre arcos de círculo máximo e de paralelo entre dois pontos A e B .	96
4.7	Desigualdade entre arcos e senod dos arcos correspondentes.	97
4.8	Comparação entre arcos de círculo máximo e de paralelo.	100
4.9	A medição da Terra por Eratóstenes (Os objetos da figura não estão na mesma escala).	103
5.1	Precessão e nutação.	109
5.2	A esfera celeste.	110
5.3	Horizonte. Fonte: http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula2.pdf . Acesso em julho de 2014.	111
5.4	Sistema de coordenada horizontal.	114
5.5	Sistema de coordenada horizontal depende do local da observação.	116
5.6	Sistema de coordenada equatorial horária.	118
5.7	Sistema de coordenada equatorial universal.	121
5.8	Sistema de coordenada eclíptica.	123

5.9	Coordenadas horizontais e equatoriais horárias: Origem do azimute no ponto cardeal sul.	124
5.10	Coordenadas horizontais e equatoriais horárias: Origem do azimute no ponto cardeal norte.	126
5.11	Transformação entre coordenadas equatoriais.	129
5.12	Transformação entre coordenada equatorial e eclíptico.	130
6.1	Distância esférica entre dois astros A e B .	134
6.2	Círculo diurno do astro: nascer e ocaso de um astro.	135
6.3	Triângulo de posição: nascer e ocaso de um astro.	136
6.4	Qibla Recife - Meca.	139

Introdução

Ao iniciarmos o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROF-MAT)¹, tínhamos em mente um tema ligado à aplicação da Matemática nas ciências e tecnologias e que envolvesse, também, tópicos do currículo do Ensino Médio e Fundamental.

Buscando aliar o conhecimento teórico da formação *stricto sensu* com a prática pedagógica, encontramos no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE), Campus Recife, vários alunos que, sob a orientação do professor doutor Guilherme Pereira, obtiveram êxitos nas Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) e na Olimpíada Latino-Americana de Astronomia e Astronáutica (OLAA), além da Olimpíada Internacional de Astronomia e Astrofísica (IOAA):

“Larissa [Aquino] foi uma das 200 mais bem colocadas na prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA) 2012...”

“... o IFPE também [estará] representado nas Olimpíadas latino-Americanas de Astronomia e Astronáutica (OLAA), a acontecer na Bolívia, pelo estudante (...) Marton Paulo dos Santos...” (GLOBO, 2013a)

“Pernambucana conquista o bronze em Olimpíada de Astronomia: Larissa Aquino era única mulher e única nordestina no grupo (...) a participar da 7ª Olimpíada Internacional de Astronomia e Astrofísica (IOAA) realizada na Grécia” (GLOBO, 2013b).

¹Este Mestrado Profissional foi criado em 2009 com o objetivo de atender aos professores de matemática atuantes no ensino básico. Coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, em conjunto com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, oportuniza a formação pós-graduada aos profissionais docentes, sempre buscando garantir “impacto substantivo na formação (...) do professor em todo o território nacional”. Conf. www.profmtat-sbm.org.br, acesso em agosto de 2014.

Desse contexto surgiu a ideia de associar a Matemática com a Astronomia, entrelaçando-as a partir da trigonometria esférica. Poderíamos ter como ponto de partida para a dissertação o uso da Álgebra Linear para obter as relações trigonométricas esféricas e as transformações entre as coordenadas celestes conforme Brunnow (1865), Newcomb (1906) e Green (1985), porém essa abordagem é tópico de curso superior.

Incentivado pelas perspectivas das Olimpíadas de Astronomia, optamos pela trigonometria esférica do ponto de vista da geometria euclidiana plana e espacial, devido a sua relação com o ensino básico não estar, atualmente, ligada a formulação do ensino de sala de aula, mas ao conhecimento necessário à astronomia, agrimensura e à navegação (PEREIRA, 2013). Neste caso, associando diretamente a uma prática pedagógica que tangencia os conhecimentos formais, porquanto não está em sala de aula, mas a ele complementa, de forma a criar ferramentas ao professor de matemática para dinamizar o fazer e o pensar sobre o fazer (FREIRE, 2003).

Da mesma forma, a apresentação da trigonometria esférica, tal qual está neste trabalho, também envolve uma perspectiva interdisciplinar entre a Matemática e Astronomia, além de agregar conhecimentos da Geografia e da História.

Diante deste quadro provocativo, de onde a visão interdisciplinar nos lançou em um amplo campo de possibilidades de pesquisas, iniciamos um levantamento sobre o tema da trigonometria esférica e encontramos uma intensa produção bibliográfica, principalmente em língua anglo-saxã, compreendendo mais de um século em pesquisas: Lacroix (1833), Young (1833), Chauvenet (1856), Twisde (1860), Davies (1872), Loomis (1886), Wells (1888), Casey (1889), Mcllelland (1890), Bowser (1892), Crockett (1896), Phillips (1899), Todhunter (1901), Taylor and Puryear (1902), Reeves (1904), Dupuis (1907), Goodwin (1907), Granville (1908), Murray (1908), Conant (1909), Moritz (1913), Bôcher (1914), Wentworth (1914), Palmer (1934), Kells (1940), Brenke (1943), Taylor (1946), Seymour (1948), Ayres (1954).

Essa produção estava fortemente influenciada pelo contexto histórico do período em que

foram realizadas, uma vez que estão compreendidas entre 1833 à 1954. Correspondendo as transformações econômicas, científicas e tecnológicas de um mundo que se transformava em razão da supremacia dos países ocidentais: inicialmente os europeus, com destaque para a Inglaterra, a qual construiu um Império territorial ao redor do globo terrestre, mas também França, Bélgica, Alemanha, Itália. A racionalidade do conhecimento científico no século XIX, sendo ele matemático, astronômico, histórico ou geográfico, estava justamente em desvelar este mundo que os impérios descobriam e queriam explorar (HOBSBAWM, 1995; 2003; 2010).

Mais além e já no século XX, a ascensão do poderio norte-americano, o qual se consolida após as duas grandes guerras, vai continuar produzindo um conhecimento sobre a trigonometria esférica dentro deste contexto bélico que atingiu o mundo. A própria belicosidade do período justifica a produção contínua dos estudos, da mesma forma que o final dos conflitos ensejou uma sombra à produção científica do tema, realidade muito bem percebida e explicada por Van Blummelen (2013, p. 03)

“Durante a segunda guerra mundial, a popularidade da trigonometria esférica manteve-se elevada. Aplicações em ambiente naval e militar foram aclamadas como motivações, e foi dado um lugar de destaque nos exercícios. Durante a década de 1950, livros continuaram a ser publicado, embora trigonometria esférica gradualmente viu-se relegado para a última seção principal em um livro dedicado, principalmente, à trigonometria plana. De repente, em meia década, ele desapareceu, caiu em uma maré pedagógica que estava indo em outras direções. Hoje quase não há textos de trigonometria, que sequer menciona a existência de uma contrapartida esférica.”

Diferentemente dos países imperialistas dos Oitocentos, no Brasil do mesmo período, a publicação da trigonometria esférica foi praticamente relegada à seção última da trigonometria plana¹. A partir do momento em que a Família Real chega ao Brasil, houve uma série de transformações pragmáticas, as quais ensejaram transformar a antiga colônia na nova sede do

¹Legendre (1794), Pereira (1913), F.T.D. (1928), Pedro (1955), Ayres (1958).

Império Colonial português. Para tanto a educação e o conhecimento científico foram modificados a partir da criação de faculdades de medicina e direito, academia de Belas Artes e também a Academia Militar, entre outras instituições que favoreceram a divulgação do conhecimento, como a Imprensa Régia, a Biblioteca Real (DIAS, 2005).

No que tange a este trabalho, o príncipe regente autorizou a criação da Real Academia Militar na sede da Corte no Rio de Janeiro em 1808. Dentre os cursos da Academia, constava o curso de matemática que durava quatro anos e um curso militar de três anos. A Real Academia Militar começou a funcionar em 23 de abril de 1811, com as seguintes disciplinas ministradas por ano:

- 1º ano: Aritmética, Álgebra (até equações do 3º grau e 4º graus), Geometria, Trigonometria, Noções de geometria esférica, Desenho;
- 2º Ano: Revisão de cálculo (1º ano), Métodos para a resolução das equações, Aplicações da álgebra à geometria das linhas e das curvas (segundo grau e superiores), Cálculo Diferencial e Integral (aplicações à Física, Astronomia e Cálculo das Probabilidades), Geometria Descritiva, Desenho;
- 3º Ano: Princípios de Mecânica (Estática e Dinâmica), Princípios de Hidrodinâmica (Hidrostática e Hidráulica), Problemas dos Projetis ou Balística, Desenho;
- 4º Ano: **Trigonometria Esférica**, Óptica, Catóptrica e Dióptrica, Sistema de Mundo, Noção das cartas geográficas (técnicas de projeção), Noções gerais sobre a geografia do globo e suas divisões, Física, Desenho;
- 5º Ano: Tática, estratégia, castrametação, fortificação de campanha e reconhecimento de terrenos, Química; 6º Ano: Fortificação regular e irregular: ataque e defesa das praças, princípios de arquitetura civil, traço e construções das estradas, pontes, canais e portos, Mineralogia (método de Verner), Desenho;
- 7º Ano: Artilharia teórica e prática, minas e geometria subterrânea, História natural nos dois Reinos animal e vegetal.

(MORMÉLLO, 2010, pp. 82-83)

Dentro destes conteúdos programáticos, os livros utilizados nas disciplinas de geometria

e de trigonometria da Real Academia, conforme Trentin (2011, p. 5), são traduções de obras europeias realizadas por Manoel Ferreira de Araújo (1777-1838), como “Éléments de Géométrie” e o “Trattè de Trigonométrie”, ambas de autoria de Adrien Marie Legendre (1752-1833). Neles, apesar de constar no programa, a trigonometria esférica é apresentada apenas como uma seção do livro “Tratado de trigonometria”.

Com o advento da República houve uma renovada preocupação com os conhecimentos científicos e o ensino praticados no Brasil, uma vez que estava nas bases da formação do novo modelo político do país um desenvolvimento que o levasse à equiparação com os países capitalistas industrializados ocidentais (JANOTTI, PRADO, CAPELATO, 2011). Para tanto coube ao militar, engenheiro e professor Benjamin Constant, enquanto Ministro da Instrução Pública do Governo Provisório da recém proclamada República, iniciar uma grande reforma no currículo escolar. Com o Decreto nº 891, de 8 de novembro de 1890, elaborado segundo a filosofia de Augusto Comte, o programa de Matemática da escola secundária ficou assim distribuído:

1 ano - Aritmética e álgebra elementar;

2 ano - Geometria elementar, trigonometria retilínea e geometria especial (estudo perfuntório das seções cônicas, da concóide, da cissóide, da limaçon de Pascal e da espiral de Arquimedes);

3 ano - Geometria geral e seu complemento algébrico; Cálculo diferencial e integral, limitando ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral, propriamente dita; geometria descritiva (teorias das sombras e perspectivas e trabalhos gráficos correspondentes);

4 ano - **Trigonometria esférica**, geometria celeste. Revisão de cálculo e geometria (uma hora por semana);

5 ano - Revisão de cálculo e geometria (uma hora por semana);

6 ano e 7º ano - Idem anterior, com relação à revisão. (ABRANCHES, 1904, pp. 14-15 apud MACIEL, 2012, pp. 92-93)

Todavia, mesmo estando inscrita na grade curricular conforme citou Abranches e reproduzida por Maciel, não ficou claro pelas demais fontes bibliográficas pesquisadas, se havia, na

prática, o ensino da trigonometria esférica. Pela profundidade do tema, não cabe a esta pesquisa ir adiante nestas pistas, cabendo a pesquisas futuras a possibilidade de responder à pergunta.

Por outro lado, este levantamento bibliográfico permitiu a visualização de uma linha construtiva do conhecimento sobre a trigonometria esférica no mundo contemporâneo, desde sua utilização prática num mundo imperialista e bélico, passando pela formulação de um conhecimento pedagógico e acadêmico no Brasil. Assim percebeu-se um contínuo esmaecimento nos dois vieses, estudos práticos e acadêmicos, de forma que a trigonometria esférica foi sendo reduzida a estudos cada vez mais localizados.

Mais além e saindo um pouco dos trabalhos pedagógicos, verificou-se ainda, sobre a Astronomia, um entrelaçamento desta com a Geografia (SOBREIRA, 2002, 2005), no tocante as coordenadas celestes com as geográficas. Esta percepção conduziu a uma busca e verificou-se que a maioria dos trabalhos dissertativos sobre a geometria esférica, tais como Pataki (2003), Prestes (2006), Camargo (2009), Andrade (2011), Dueli (2013), Honda (2013), Lima (2013), Santana (2013) e Zanella (2013), contemplam uma abordagem interdisciplinar com a Geografia, mas não fundamentam as linhas (paralelos e meridianos) e as coordenadas geográficas com base na Geometria Euclidiana. O que pode ser afirmado também em relação à esfera celeste perante os círculos e as coordenadas celestes.

Além disso, os livros da geometria euclidiana espacial pesquisada, tais como Lacroix (1833), Legendre (1867), Marin (1917), Slaughter (1919), Gabaglia (1930) e F.T.D. (1957), quando tratam da geometria na esfera, para a necessidade deste trabalho, abordam: secção do plano secante com a superfície esférica, plano tangente à esfera, ângulo esférico e triângulo esférico. A ênfase desses livros é o cálculo das áreas e volumes dos sólidos esféricos, tema abordado nos livros didáticos do Ensino Médio.

Partindo desta perspectiva lacunar, este trabalho tem como fundamento teórico a Geometria Euclidiana, a fim de identificar e justificar os objetos (círculos e ângulos), assim como as coor-

denadas geográficas e celestes com tratamento lógico e dedutivo desses objetos, considerando a esfera, como modelo físico da Terra e do Céu. Também, a utilização do globo terrestre com suas conseqüentes questões envolvendo a distância entre dois pontos e ângulos sobre a esfera, abre o caminho para um trabalho interdisciplinar da trigonometria esférica com a Geografia. E da mesma forma, entre a trigonometria esférica com a Astronomia, quando se trata da esfera celeste com suas coordenadas e as transformações entre as coordenadas celestiais.

Visando dar conta desta compreensão, este trabalho foi dividido em duas partes e seis capítulos.

Na Parte I, denominada “*Sintaxe Matemática I*”, apresenta-se a base teórica deste trabalho, fundamentada na geometria euclidiana plana e espacial e na trigonometria plana. Para tanto foi dividido em três capítulos, sendo o primeiro intitulado “*edro*”, e onde apresentamos os conceitos básicos do diedro e do triedro que são importantes para o desenvolvimento do capítulo seguinte; O segundo capítulo, *Geometria na esfera*, apresenta objetos matemáticos ligados ao estudo da geometria na esfera que são o círculo, o ângulo e o triângulo, bem como a coordenada na esfera, base para determinação das coordenadas geográficas e celestes; O terceiro capítulo, *Trigonometria na esfera*, aborda a trigonometria esférica, desenvolvendo as relações trigonométricas no triângulo esférico, retângulo e obtusângulo.

Findando o esboço teórico, na parte II, intitulada “*A esfera como modelo físico*”, apresenta-se a aplicação da geometria esférica e da trigonometria esférica na Geografia e na Astronomia. Razão pela qual produziu-se no quarto capítulo, “*O globo terrestre*”, um breve histórico sobre a forma da Terra, os referenciais sobre o globo terrestre, o sistema de coordenada geográfica, bem como, a distância entre dois pontos do globo e o experimento de Eratóstenes. No quinto capítulo, “*A esfera celeste*”, apresenta-se a visão espacial e temporal do céu, de um ponto de vista dos filósofos gregos antigos, e a seguir, aborda os referenciais da esfera celeste com as principais coordenadas celestes, horizontal, equatoriais e eclíptica, bem como, a utilização do triângulo de posição para a transformação entre as coordenadas celestes. No sexto e último

capítulo, “Aplicações”, aborda algumas aplicações do triângulo esférico na esfera celeste.

PARTE I

Sintaxe Matemática

Na seção “*Conceitos e Controvérsias*” da Revista do Professor de Matemática (1980, p.08), cujo objetivo é o esclarecimento dos temas do currículo do Ensino Fundamental e Médio onde ocorrem dúvidas e divergências, um dos questionamentos foi o seguinte: “Qual a diferença entre círculo e circunferência?”.

Nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, no Brasil, é comum fazer a distinção entre a circunferência e o círculo: a circunferência é curva e o círculo, a região limitada pela circunferência.

Porém, na Cartografia e na Astronomia, é muito comum o termo círculo ser utilizado para designar curva, por exemplo, na Geografia, o meridiano e o equador são denominados como círculos máximos. Também, nos livros de trigonometria esférica, esta significação é constatada. Por exemplo, Todhunter (1901, p. 01) diz na proposição: “a secção da superfície de uma esfera feita de qualquer plano é círculo”.

Conforme Lima (Revista do Professor de Matemática, 1980, p. 08), o termo círculo é ambíguo: “... ora quer dizer a curva, ora a região por ela limitada”

E, a seguir comenta a ambiguidade da esfera:

“Também poliedro, prisma, cilindro, esfera, etc. às vezes são superfícies (pois têm área) e às vezes corpos sólidos, pois têm volume. No caso da esfera, a palavra bola pode ser usada para significar o sólido, ficando esfera para a superfície, ...”.

(Revista do Professor de Matemática, 1980, p. 08)

Esse confronto lexical, também, é citada por Casey,

“O termo esfera é usado em um duplo significado - 1º. No sentido de designar superfície. 2º. O sólido limitado pela superfície. Estas correspondem ao duplo significado da palavra círculo da geometria plana, a saber, a circunferência e a área incluída nela”. (CASEY, 1889, p. 01)

Conforme Lima, no mesmo artigo da Revista de Professor de Matemática (1980, p. 08), cita um trecho do livro de “Alice no país das Maravilhas” quando Humpty Dumpty fala para Alice: “Quando eu uso uma palavra, ela significa exatamente aquilo que eu decidi que ela significasse - nem mais nem menos”.

Assim, neste trabalho, a definição adotada para círculo segue como afirma Muniz (2012, p. 94), onde: “Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o lugar geométrico dos pontos do plano que distam r do ponto O é o **círculo** de centro O e raio r ”.

Já, em relação ao conceito da esfera, segue a definição conforme Legendre (1867, p. 211): “A esfera é um sólido limitado por uma superfície que tem todos os pontos equidistantes de um ponto interior chamado centro”.

CAPÍTULO 1

Edro

Os fundamentos básicos do diedro e do triedro apresentados neste capítulo têm como referências: Gabaglia (1930), F.T.D. (1957), Antar Neto (1982) e Dolce (2005).

1.1 Diedro

Definição 1.1. *Diedro* ou **ângulo diedro** é a reunião de dois semiplanos que tem a mesma origem e não são coplanares.

A origem comum dos semiplanos, que é uma reta, chama-se **aresta** do diedro e os dois semiplanos são suas **faces**.

Na Figura 1.1, a reta r é a origem de cada um dos semiplanos, α e β . Indica-se o diedro como $\widehat{\alpha r \beta}$ ou $di(r)$.

Definição 1.2. Uma **secção** de um diedro é a intersecção do diedro com um plano secante à sua aresta.

Proposição 1.3. A secção de um diedro é um ângulo plano.

Demonstração.

A Figura 1.2 mostra a intersecção de um diedro $\widehat{\alpha r \beta}$ com um plano γ , secante à aresta do diedro no ponto P . A secção de um diedro é um ângulo plano \widehat{APB} formado pelas semirretas \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} , que são, respectivamente, as intersecções das faces do diedro α e β com o plano γ . ■

Proposição 1.4. Secções paralelas de um mesmo diedro são congruentes.

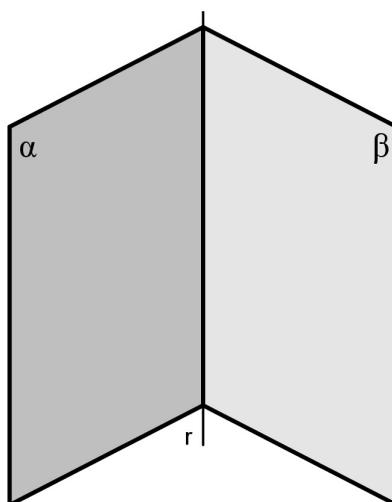


Figura 1.1 Diedro $\widehat{\alpha r \beta}$

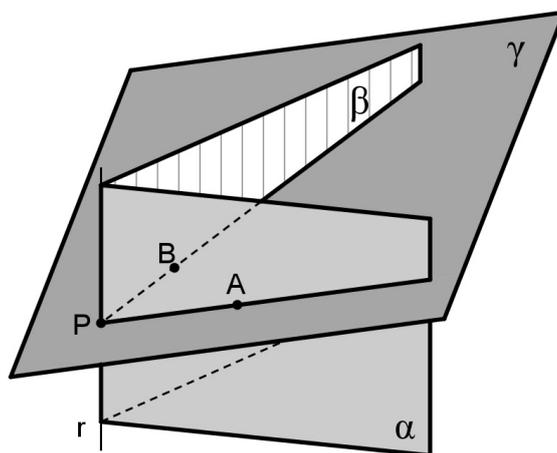


Figura 1.2 Secção de um diedro: \widehat{APB}

Demonstração.

Ora, se dois planos paralelos, distintos, intersectam um terceiro plano, então as intersecções são retas paralelas. Assim, pela proposição 1.3, as secções paralelas são dois ângulos que têm os lados com sentidos respectivamente concordantes¹, portanto, os ângulos são congruentes. ■

Definição 1.5. A **secção reta** de um diedro é uma secção cujo plano é perpendicular à aresta

¹Na Figura 1.3, \vec{PA} e \vec{PA}' tem sentidos concordantes, do mesmo modo \vec{PB} e \vec{PB}' tem sentidos concordantes.

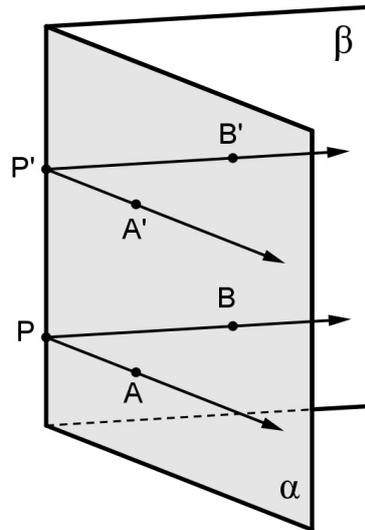


Figura 1.3 Secções paralelas de um diedro: $\widehat{APB} \equiv \widehat{A'P'B'}$

do diedro.

Definição 1.6. A medida de um diedro é a medida do ângulo de sua secção reta.

A Figura 1.4 mostra um diedro de aresta r e um plano γ perpendicular à reta r num ponto P . A medida do diedro $\widehat{\alpha r \beta}$ é a medida do ângulo \widehat{APB} .

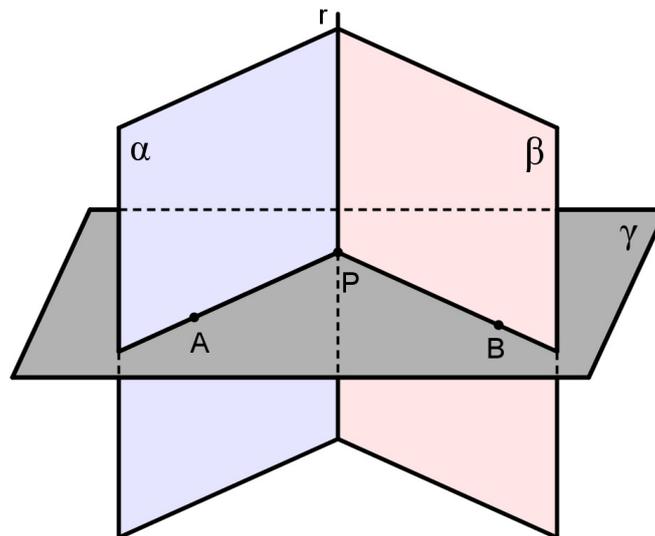


Figura 1.4 Secção reta do diedro: \widehat{APB}

Proposição 1.7. Secções retas de um mesmo diedro são congruentes.

Demonstração.

Duas secções retas de um mesmo diedro são secções paralelas, logo, pela proposição 1.4, são congruentes. ■

1.2 Triedro

Um plano divide o espaço em dois semiespaços. A Figura 1.5 mostra o ponto A não pertencente ao plano α , o qual é determinado pelos pontos não colineares V , B e C . O semiespaço E_a tem origem no plano α e contém o ponto A .

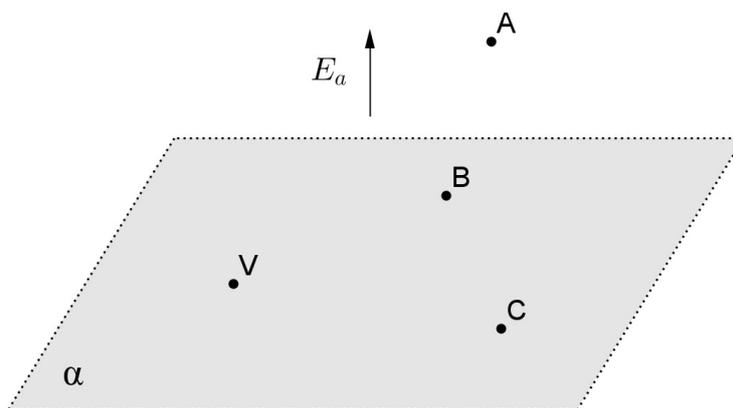


Figura 1.5 Semiespaço

Definição 1.8. Sejam \vec{VA} , \vec{VB} e \vec{VC} , três semirretas de mesma origem V , não coplanares. Considere os semiespaços E_a , E_b e E_c definidos como a seguir:

- E_a é o semiespaço com origem no plano determinados pelos pontos V , B e C e que contenha A ;
- E_b é o semiespaço com origem no plano determinados pelos pontos V , A e C e que contenha B ;

- E_c é o semiespaço com origem no plano determinados pelos pontos V , A e B e que contenha C .

A intersecção dos semiespaços E_a , E_b e E_c é uma região do espaço que recebe o nome de **triedro**.

Indica-se o triedro como $tri(V,A,B,C)$, cujos elementos são:

- O **vértice** é o ponto V .
- As **arestas** são as semirretas \vec{VA} , \vec{VB} e \vec{VC} .
- As **faces** ou **ângulos de face** são \widehat{AVB} , \widehat{AVC} e \widehat{BVC} .
- Os **diedros** são $di(\vec{VA})$, $di(\vec{VB})$ e $di(\vec{VC})$.

A Figura 1.6 mostra o vértice V , o ângulo de face \widehat{AVB} e a aresta \vec{VC} .

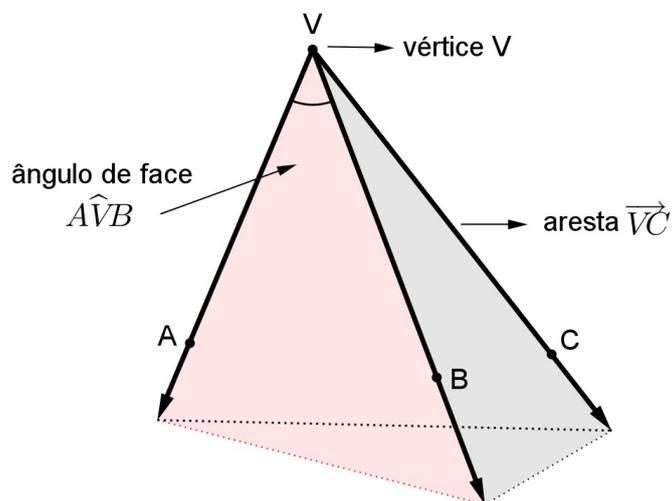


Figura 1.6 Triedro $tri(V,A,B,C)$

Proposição 1.9. A intersecção de um triedro com um plano secante às três arestas do triedro é um triângulo.

Demonstração.

Ao intersectar um plano secante α com as arestas \vec{VA} , \vec{VB} e \vec{VC} do triedro $tri(V,A,B,C)$ obtêm-se, respectivamente, os pontos A' , B' e C' (Veja a Figura 1.7). Em cada diedro do triedro, nesses pontos, determina os ângulos $B'\hat{A}'C'$, $A'\hat{B}'C'$ e $A'\hat{C}'B'$ (proposição 1.3). Portanto, a secção do plano α com $tri(V,A,B,C)$ é um triângulo $A'B'C'$.

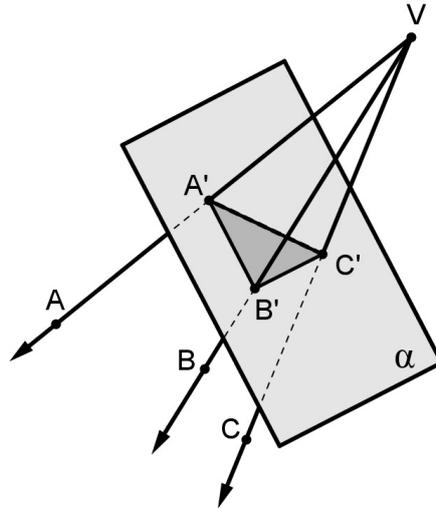


Figura 1.7 Secção de um triedro

■

Proposição 1.10. *Em todo triedro, a medida do ângulo de cada face é menor que a soma das medidas dos outros dois ângulos.*

Demonstração.

No triedro $tri(V,A,B,C)$, suponha que o ângulo da face $B\hat{V}C$ seja o maior dos três ângulos das faces. Sobre o ângulo da face $B\hat{V}C$, considere um ponto P de tal modo que, ao traçar a semirreta \vec{VP} forme um ângulo $P\hat{V}C$ congruente ao ângulo da face $A\hat{V}C$, ou seja,

$$P\hat{V}C \equiv A\hat{V}C. \quad (1.1)$$

Tome um ponto A' em \vec{VA} e um ponto P' em \vec{VP} de tal modo que tenham segmentos congruentes, $VA' \equiv VP'$. Trace um plano qualquer que contenham os pontos A' e P' e que intersecte

o triedro segundo um triângulo $A'B'C'$ (Proposição 1.9). A construção realizada acarreta na congruência dos triângulos $P'VC'$ e $A'VC'$, pelo caso LAL, já que, por construção, $VP' \equiv VA'$, $P'\widehat{V}C' \equiv A'\widehat{V}C'$ já que $P\widehat{V}C \equiv A\widehat{V}C$ e VC' é o lado comum dos triângulos. Portanto,

$$P'C' \equiv A'C'. \quad (1.2)$$

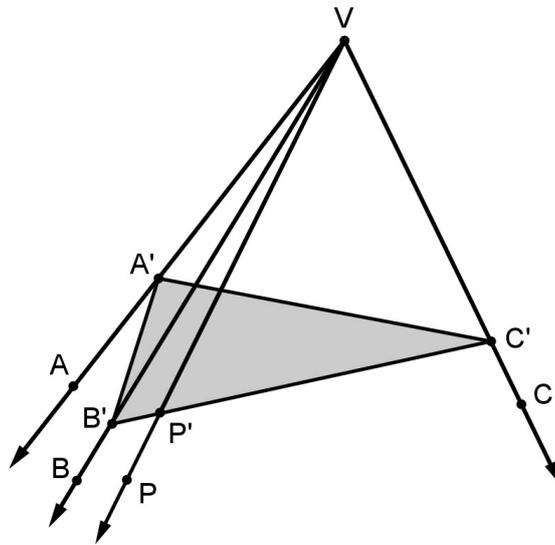


Figura 1.8 Triedro

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo $A'B'C'$, tem-se

$$B'C' < A'B' + A'C',$$

e, pela equação 1.2,

$$B'P' + P'C' < A'B' + A'C' \Rightarrow B'P' < A'B' \Rightarrow (B'P')^2 < (A'B')^2.$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos $B'VP'$ e $A'VB'$, tem-se que

$$(VB')^2 + (VP')^2 - 2 \cdot VB' \cdot VP' \cdot \cos B'\widehat{V}P' < (VB')^2 + (VA')^2 - 2 \cdot VB' \cdot VA' \cdot \cos A'\widehat{V}B'.$$

Logo,

$$\cos B'\widehat{V}P' > \cos A'\widehat{V}B'.$$

Como o valor do cosseno de um ângulo decresce quando esse ângulo varia do ângulo nulo ao ângulo raso, tem-se:

$$B'\widehat{V}P' < A'\widehat{V}B'.$$

Portanto,

$$B\widehat{V}P < A\widehat{V}B. \quad (1.3)$$

Somando as equações 1.1 e 1.3,

$$P\widehat{V}C + B\widehat{V}P < A\widehat{V}C + A\widehat{V}B,$$

obtem-se:

$$B\widehat{V}C < A\widehat{V}B + A\widehat{V}C. \quad (1.4)$$

Ou seja, a medida do maior ângulo da face é menor que a soma das medidas dos outros dois ângulos da face. Além disso, pela hipótese,

$$A\widehat{V}B < B\widehat{V}C \Rightarrow A\widehat{V}B < B\widehat{V}C + A\widehat{V}C.$$

Raciocínio análogo, para a medida do ângulo da face $A\widehat{V}C$. Portanto, qualquer ângulo da face de um triedro é menor do que a soma dos outros dois ângulos da face. ■

Proposição 1.11. *Em todo triedro, o ângulo de uma face qualquer é maior do que o módulo da diferença dos outros dois ângulos da face.*

Demonstração.

Da proposição 1.10, tem-se

$$B\widehat{V}C < A\widehat{V}B + A\widehat{V}C \Rightarrow A\widehat{V}C > B\widehat{V}C - A\widehat{V}B$$

e

$$A\widehat{V}B < B\widehat{V}C + A\widehat{V}C \Rightarrow A\widehat{V}C > A\widehat{V}B - B\widehat{V}C.$$

Ou seja,

$$A\widehat{V}C > |B\widehat{V}C - A\widehat{V}B|. \quad (1.5)$$

As outras desigualdades podem ser obtidas através de raciocínio análogo. ■

Corolário 1.12. *Em todo triedro, a medida de cada ângulo da face é menor que a soma das medidas dos outros dois ângulos da face e maior do que o módulo da diferença dos outros dois ângulos da face.*

Demonstração.

Das proposições 1.10 e 1.11, vem:

$$|\widehat{BVC} - \widehat{AVB}| < \widehat{AVC} < \widehat{BVC} + \widehat{AVC}. \quad (1.6)$$

As outras desigualdades podem ser obtidas através de raciocínio análogo. ■

Proposição 1.13. *A soma das medidas dos ângulos das três faces de um triedro qualquer é menor do que 360° .*

Demonstração.

Seja o triedro $tri(V, A, B, C)$ cujos ângulos das faces têm medidas \widehat{AVB} , \widehat{AVC} e \widehat{BVC} (Veja a Figura 1.9).

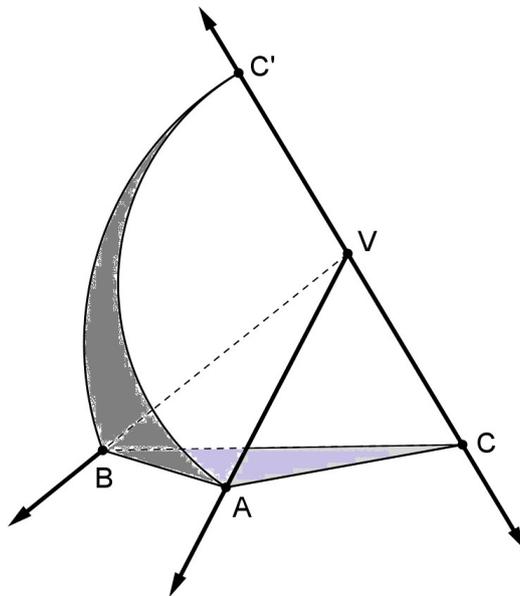


Figura 1.9 Soma dos ângulos das três faces de um triedro

Seja $\overrightarrow{VC'}$ a semirreta oposta a \overrightarrow{VC} e considere o triedro $tri(V, A, B, C')$. Como os ângulos

das faces \widehat{AVC}' e \widehat{AVC} são adjacentes e suplementares, tem-se

$$\widehat{AVC}' = 180^\circ - \widehat{AVC}. \quad (1.7)$$

Do mesmo modo, conclui-se que

$$\widehat{BVC}' = 180^\circ - \widehat{BVC}. \quad (1.8)$$

Aplicando a proposição 1.10 no $tri(V, A, B, C')$, tem-se

$$\widehat{AVB} < \widehat{AVC}' + \widehat{BVC}'. \quad (1.9)$$

Substituindo as equações 1.7 e 1.8 na equação 1.9:

$$\widehat{AVB} < (180^\circ - \widehat{AVC}) + (180^\circ - \widehat{BVC}).$$

Logo,

$$\widehat{AVB} + \widehat{AVC} + \widehat{BVC} < 360^\circ.$$



Geometria na Esfera

Os fundamentos básicos da geometria esférica apresentados neste capítulo têm como referências: Legendre (1867), Marin (1917), Gabaglia (1930), F.T.D. (1957) e Alves (2009).

2.1 Círculo na esfera

Definição 2.1. A **superfície esférica** é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância a um ponto fixo, chamado **centro**, é constante.

Definição 2.2. A distância do centro a um ponto qualquer da superfície esférica é denominado **raio**.

Definição 2.3. Os pontos do espaço cuja distância ao centro é menor que o raio são **pontos interiores** à superfície esférica e aqueles pontos cuja distância ao centro é maior que o raio são **pontos exteriores** à superfície.

Definição 2.4. A reunião da superfície esférica com seus pontos interiores é denominada **esfera**.

Definição 2.5. O segmento de reta que tem como extremidade dois pontos distintos da superfície esférica é chamada **corda**. Uma corda que contém o centro é denominado **diâmetro** da esfera.

Definição 2.6. Dois pontos de uma esfera são chamados **antípodas** se são as extremidades de um diâmetro. Os **antípodas** são dois pontos diametralmente opostos.

Proposição 2.7. Quatro pontos, não coplanares, determinam uma única superfície esférica.

Demonstração.**1ª. parte: Existência**

Da geometria plana, sabe-se que em um círculo, o diâmetro perpendicular a uma corda divide a corda no ponto médio e, reciprocamente, um diâmetro que divide uma corda no seu ponto médio é perpendicular a essa corda. Ou seja, a reta mediatriz de qualquer corda passa pelo centro do círculo. Assim, um círculo que passe pelos três pontos distintos e não colineares deve ter seu centro equidistante dos três pontos.

Sejam quatro pontos A, B, C e D , não coplanares (Veja a Figura 2.1).

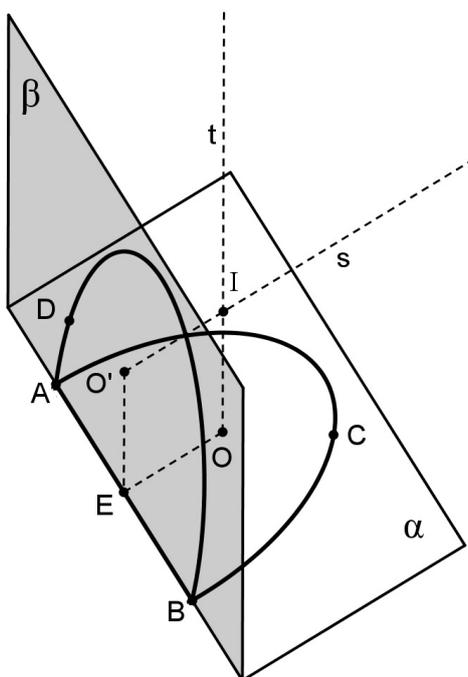


Figura 2.1 Determinação da superfície esférica

Os pontos A, B e C determinam um plano α e, neste plano, um círculo de centro O . De maneira análoga, os pontos A, B e D determinam um plano β e, neste plano, um círculo de centro O' . Assim, AB é uma corda comum aos dois círculos.

As perpendiculares traçadas do centro de cada círculo à corda comum AB , intersectam-se no ponto médio E dessa corda. Assim, os pontos O, E e O' determinam um plano γ . E, a corda AB é perpendicular ao plano γ , pois existem duas retas \overleftrightarrow{OE} e $\overleftrightarrow{O'E}$ de γ que são perpendiculares à AB .

Do ponto O traça-se uma reta t , perpendicular ao plano α e de O' traça-se uma reta s , perpendicular ao plano β . As retas t e s são coplanares, pois estão no mesmo plano γ , e não são paralelas, pois A, B, C e D não são coplanares. Logo, t e s são retas concorrentes em um ponto, I .

Como I é um ponto da reta t implica que I é equidistante de A, B e C . De modo análogo, I é equidistante de A, B e D , por pertencer à reta s . Então, o ponto I é equidistante dos quatro pontos A, B, C e D . Portanto, existe pelo menos uma superfície esférica de centro I que passa por A, B, C e D .

2ª. parte: Unicidade

Esta esfera é única pois qualquer outro ponto que equidista dos pontos dados, deve pertencer à reta t , perpendicular ao plano α passando por O , e à reta s , perpendicular ao plano β passando por O' , ou seja, coincide com o ponto I , único ponto do espaço equidistante dos quatro pontos não coplanares. ■

Definição 2.8. Um **plano** é **tangente** a uma esfera quando tem um só ponto comum com a superfície esférica. Esse ponto é chamado **ponto de tangência**. Caso, a intersecção entre o plano e a superfície esférica tenha mais de um ponto comum, diz-se **plano secante**.

Proposição 2.9. A secção de um plano que intersecta uma superfície esférica passando pelo seu centro é um círculo de mesmo centro e mesmo raio que a superfície esférica.

Demonstração.

Seja α um plano que passa pelo centro O de uma superfície esférica de raio r (Veja a Figura 2.2). A intersecção do plano α com a superfície esférica são todos os pontos de α cuja distância a O é igual a r . Ora, isso é a própria definição de círculo de centro O e raio r .

Inversamente, todo ponto P desse círculo tal que $PO = r$ pertence à intersecção de α com a superfície esférica. ■

Proposição 2.10. Toda secção plana de uma superfície esférica é um círculo.

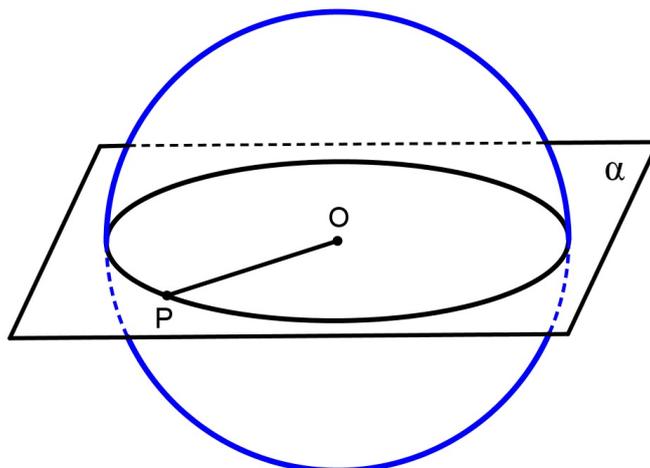


Figura 2.2 Plano secante que passa pelo centro da esfera

Demonstração.

Seja α um plano secante a uma superfície esférica de centro O e raio r e que não passa pelo centro da esfera.

Considerem dois pontos quaisquer A e B , pontos da intersecção do plano α com a superfície esférica (Veja a Figura 2.3). Traçando uma reta r perpendicular ao plano α , passando pelo centro O , e intersectando esse plano em O' , obtém-se os triângulos $OO'A$ e $OO'B$ congruentes entre si, pelo caso especial da congruência de triângulo retângulo, pois os lados OA e OB são iguais ao raio r da esfera, os ângulos $\widehat{OO'A}$ e $\widehat{OO'B}$ são retos, por construção, e o lado OO' é o lado comum aos triângulos. Portanto, os lados $O'A$ e $O'B$ são congruentes. Como os pontos A e B são arbitrários, conclui-se que qualquer ponto da intersecção do plano α com a esfera é equidistante do ponto O' . Ou seja, a secção plana de uma esfera é o círculo de centro O' e raio $O'A = \sqrt{r^2 - OO'^2}$, obtida com a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo $OO'A$.

Para provar que todo ponto do círculo é a intersecção do plano α com a superfície esférica, considere A um ponto qualquer de círculo com centro O' e raio $\sqrt{r^2 - OO'^2}$, contido em α . Pelo teorema de Pitágoras,

$$OA^2 = OO'^2 + O'A^2 = OO'^2 + r^2 - OO'^2 = r^2.$$

Portanto, $OA = r$. Ou seja, o ponto A pertence à intersecção de α com a superfície esférica. ■

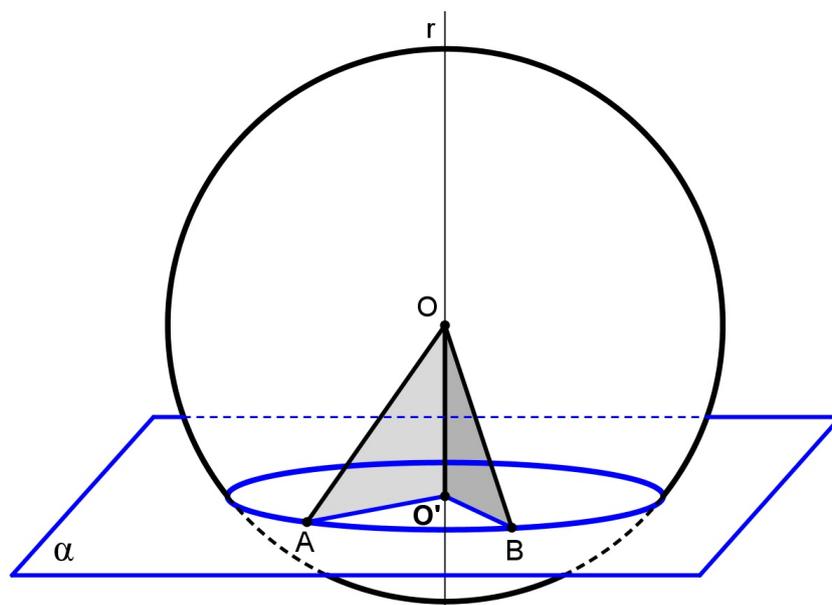


Figura 2.3 Plano secante à superfície esférica que não passa pelo centro da esfera

Definição 2.11. Um **círculo máximo** de uma superfície esférica resulta da intersecção de um plano que passa pelo seu centro. Qualquer secção da superfície esférica cujo plano secante não passa pelo seu centro, tem-se um **círculo menor**.

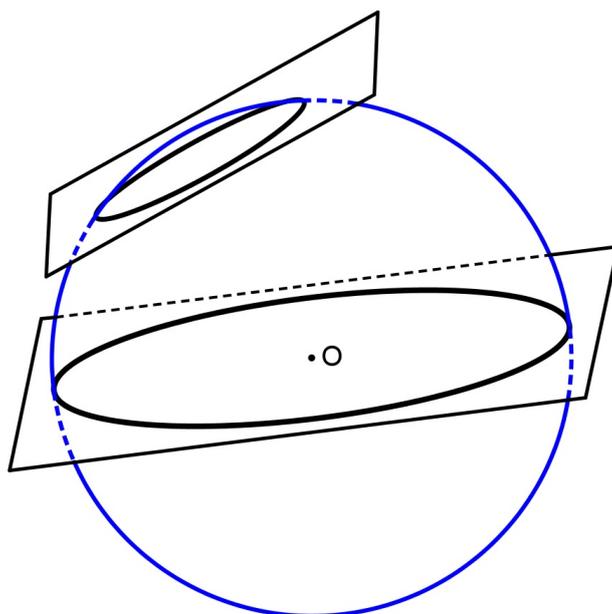


Figura 2.4 Círculo máximo e círculo menor

Proposição 2.12. *Todo plano perpendicular à extremidade de um raio, comum com a superfície esférica, é tangente à esfera.*

Demonstração.

Sejam os pontos O e T , respectivamente, o centro e um ponto na superfície esférica, e α , um plano perpendicular ao raio OT no ponto T (Veja a Figura 2.5). Para provar o teorema, basta mostrar que não existe outro ponto do plano α que pertença à superfície esférica.

Considere P , um ponto qualquer de α , porém distinto de T . Como α é perpendicular ao raio OT em T , o triângulo OTP é retângulo com hipotenusa OP e catetos OT e PT . Assim, $OP > OT$ e, portanto, P é um ponto exterior à superfície esférica. Ou seja, o plano α só tem um ponto comum, T , com a esfera. Logo, o plano α é tangente a essa esfera.

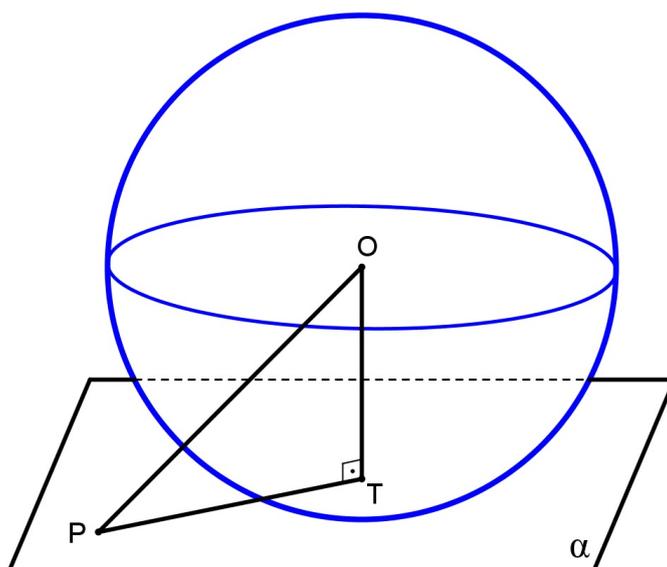


Figura 2.5 Plano tangente a uma esfera

■

Agora, veja a prova da recíproca da proposição 2.12.

Proposição 2.13. *Todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio no ponto de tangência.*

Demonstração.

Considere α um plano tangente à esfera no ponto T , e suponha por absurdo que α não seja perpendicular ao raio OT . Para provar o resultado, basta mostrar que a hipótese adotada leva a uma contradição.

Na Figura 2.6, considere Q , o ponto da perpendicular ao plano α traçada a partir de O , assim, tem-se que $Q \neq T$, pois α não é perpendicular a OT , por hipótese. Seja P o ponto da reta \overleftrightarrow{QT} tal que $QP \equiv QT$. Então, os triângulos OQP e OQT são congruentes pelo caso LAL da congruência de triângulos, pois, por construção, $QP \equiv QT$ e $\widehat{OQT} = \widehat{OQP} = 90^\circ$ e OQ é o lado comum dos triângulos. Assim, $OP \equiv OT$ e, portanto, P também pertence à superfície esférica. Logo, o plano α intersecta a superfície em um ponto P distinto de T , o que é absurdo, pois α é um plano tangente.

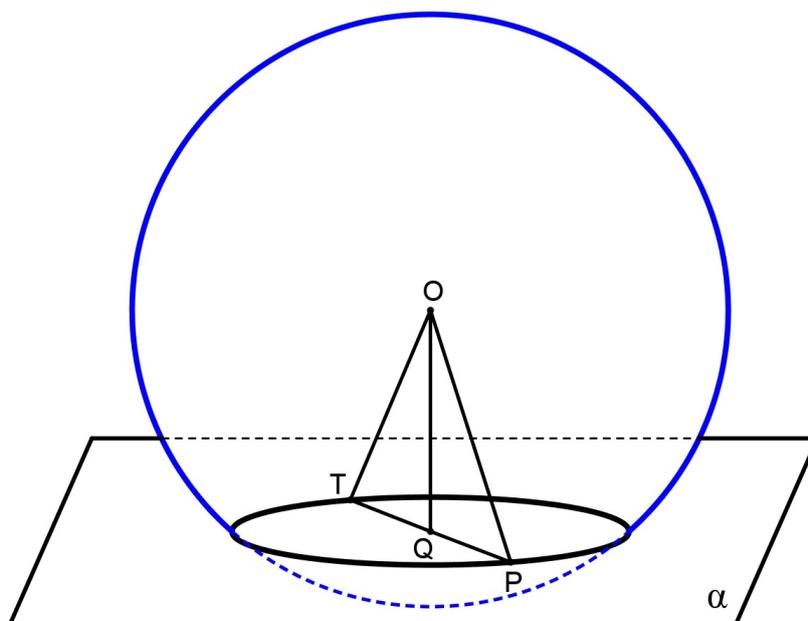


Figura 2.6 Plano tangente em um ponto da esfera

■

Definição 2.14. Toda reta do plano tangente à esfera e que passe pelo ponto de tangência é **reta tangente** à esfera nesse mesmo ponto.

Proposição 2.15. Por um ponto na superfície esférica, passam infinitas retas tangentes.

Demonstração.

Sejam T , A e B três pontos não colineares pertencente ao plano α , tangente à superfície esférica no ponto T (Veja a Figura 2.7). Pelo postulado da geometria plana, “se dois pontos distintos A e B de uma reta r pertencem a um plano α , então todos os pontos dessa reta pertencem a α ”, tem-se que a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ está contido em α . Tomando-se qualquer ponto $P \in r$, obtém-se uma reta $\overleftrightarrow{TP} \subset \alpha$, já que $T \in \alpha$. Como a reta r tem infinitos pontos, é possível obter infinitas retas contidas no plano α e que passam pelo ponto da tangência T .

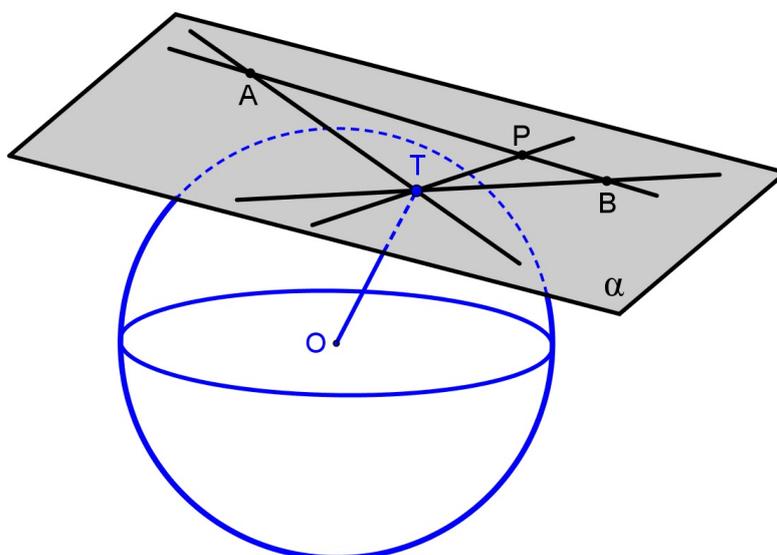


Figura 2.7 Retas tangentes em um ponto da esfera

■

Proposição 2.16. *Uma reta que intersecta uma superfície esférica não pode conter mais de dois pontos.*

Demonstração.

Ora, pela geometria plana, sabe-se que “por um ponto e uma reta sempre passa um plano”, portanto, a posição de uma reta e o centro da esfera determinam sempre um plano, a qual, pela proposição 2.9, a secção é um círculo máximo. Assim, a reta só pode intersectar um círculo máximo em um ou dois pontos, quando a posição relativa de uma reta e um círculo são, res-

pectivamente, tangente e secante entre si. ■

Proposição 2.17. *Uma reta que passa pelo centro de uma esfera e pelo centro de círculo menor dessa esfera é perpendicular ao plano do círculo menor.*

Demonstração.

Sejam O e O' , respectivamente, centros de uma esfera e do círculo menor dessa esfera. Considerem, A e B , pontos diametralmente opostos do círculo menor (Veja a Figura 2.8). Desse modo, os pontos O , A e B estão em um mesmo plano, assim os triângulos $OO'A$ e $OO'B$ são congruentes, pelo caso LLL, pois $OA \equiv OB$ (= raio da esfera), $O'A \equiv O'B$ (= raio do círculo menor) e OO' é o lado comum aos triângulos. Daí, decorre que $\widehat{OO'A}$ e $\widehat{OO'B}$ são ângulos congruentes e adjacentes, ou seja, são retos. Portanto, as retas \overleftrightarrow{AB} e $\overleftrightarrow{OO'}$ são perpendiculares.

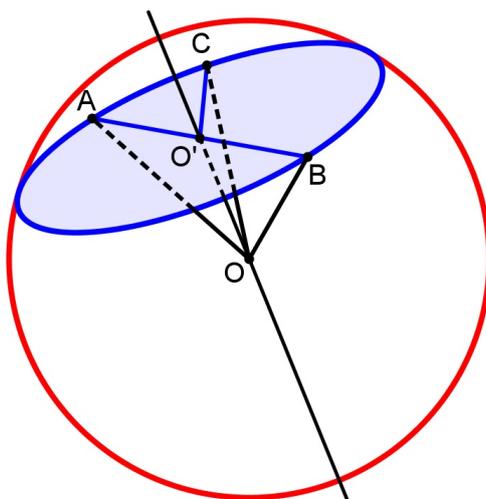


Figura 2.8 A reta que passa pelos centros O e O' é perpendicular ao plano do círculo menor

Resta provar que $\overleftrightarrow{OO'}$ é perpendicular ao plano que contém o círculo menor. Para isso, basta considerar um ponto qualquer C , distinto de A e B , e verificar que $\widehat{OO'C}$ é reto. Conclusão imediata obtida a partir da congruência dos triângulos $OO'A$ e $OO'C$. ■

Proposição 2.18. *Por dois pontos quaisquer não antípodas de uma esfera sempre passa um único círculo máximo.*

Demonstração.

Seja O o centro da esfera. Se dois pontos A e B não são antípodas, então a reta \overleftrightarrow{AB} não contém O , ou seja, O, A e B não são colineares, portanto, pelo postulado da determinação do plano, existe um único plano que passa pelos pontos O, A e B . Assim, pela proposição 2.9 e definição 2.11, a intersecção desse plano com a superfície esférica é um círculo máximo que contém os pontos A e B .

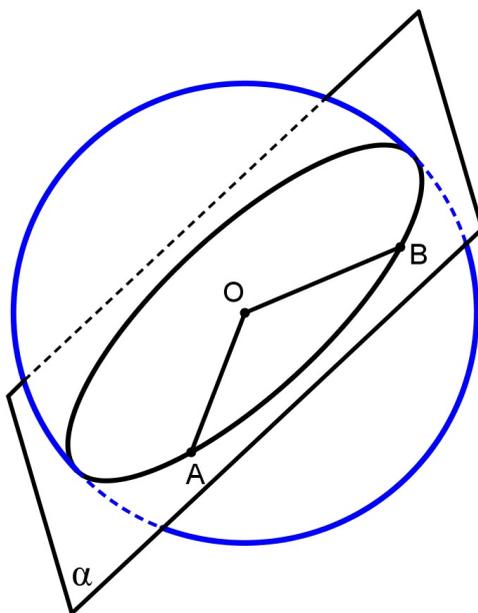


Figura 2.9 Determinação do círculo máximo

■

Proposição 2.19. *O diâmetro é a maior corda da esfera.*

Demonstração.

Sejam A e C dois pontos não antípodas da superfície esférica. Pela proposição 2.18, passa um único círculo máximo pelos pontos especificados. Seja B , a antípoda do ponto A , obtendo, assim, o diâmetro AB e uma corda AC como mostra a Figura 2.10.

Traçando o raio OC , obtem-se um triângulo AOC . Aplicando a desigualdade triangular nesse triângulo tem-se a relação:

$$AO + OC > AC.$$

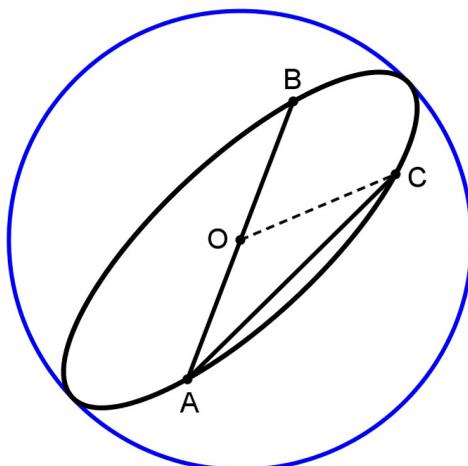


Figura 2.10 Corda e diâmetro de uma esfera

Mas, $OC = OB$, raio do mesmo círculo, portanto, $AO + OB = AB > AC$. Ou seja, o diâmetro é a maior corda da esfera. ■

Proposição 2.20. *Em uma mesma esfera, todos os círculos máximos são congruentes.*

Demonstração.

Ora, pela proposição 2.9, todos os raios de um círculo máximo de uma mesma esfera são todos iguais ao raio da esfera, daí a congruência dos círculos máximos. ■

Corolário 2.21. *Todo diâmetro divide o círculo máximo em dois arcos congruentes.*

Demonstração.

Pela definição 2.6, as extremidades do diâmetro são antípodas, assim, o ângulo central tem como lados, as semirretas opostas com origem no centro do círculo. Ou seja, os arcos divididos por um diâmetro, são congruentes. Esses arcos, assim formados, são chamados **semicírculos**. ■

Definição 2.22. *Todo plano secante que contém círculo máximo divide a superfície esférica em duas partes, chamados **hemisférios**.*

Definição 2.23. *Dois círculos distintos de uma superfície esférica são **concorrentes** quando os círculos têm ponto(s) em comum.*

Proposição 2.24. *Dois círculos máximos de uma esfera intersectam-se nas antípodas comuns aos dois círculos.*

Demonstração.

Sejam dois círculos máximos distintos de uma esfera. Pela definição 2.11, os planos que contêm esses círculos máximos passam pelo centro da esfera, além disso, a intersecção desses planos contém o diâmetro, já que “dois planos secantes intersectam segundo uma reta”. Portanto, a intersecção de dois círculos máximos são as antípodas, comuns a esses círculos. Pelo corolário 2.21, os semicírculos, assim formados, são congruentes.

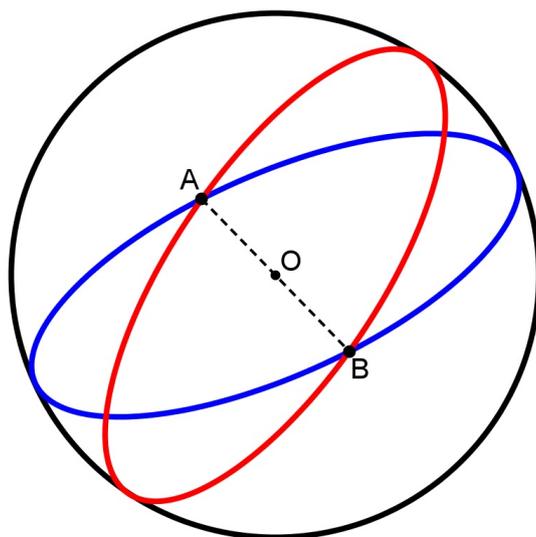


Figura 2.11 Intersecção de dois círculos máximos

■

Proposição 2.25. *Dois círculos concorrentes de uma esfera intersectam-se em um ou dois pontos.*

Demonstração.

Seja a esfera de centro O . Os planos α e β contêm, na superfície da mesma, os círculos concorrentes de centros O_1 e O_2 , respectivamente. Os planos secantes, α e β , intersectam segundo uma reta t e, pela proposição 2.16, a intersecção dessa reta t com a superfície pode conter um ou dois pontos. Caso o ponto comum seja um ponto, essa reta é tangente à esfera nesse ponto (Veja a Figura 2.12), caso tenham dois pontos, a reta t intersecta a superfície esférica nos pontos A e B , como mostra a Figura 2.13. Ou seja, dois círculos concorrentes de uma esfera intersectam-se em um ou dois pontos. ■

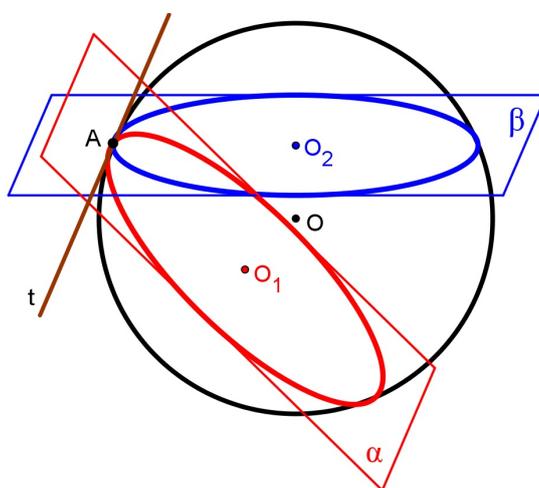


Figura 2.12 Círculos concorrentes em um ponto

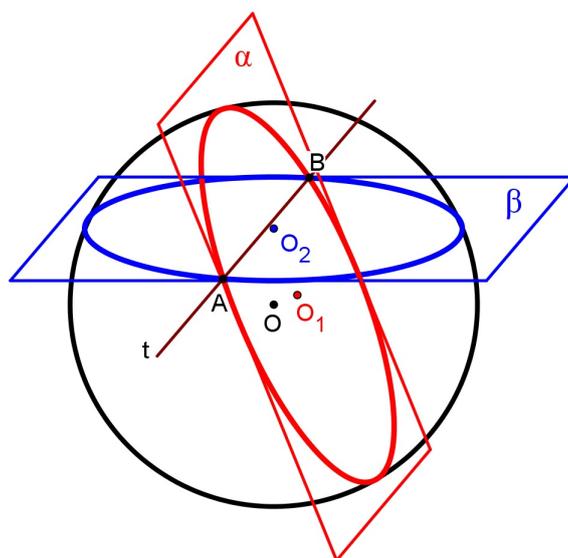


Figura 2.13 Círculos concorrentes em dois pontos

Definição 2.26. Uma reta perpendicular ao plano de um círculo máximo e que passa pelo centro desse círculo intersecta em dois pontos na superfície esférica chamados **polos**. A reta que contém esses polos chama-se **eixo polar**.

Na figura 2.14, os pontos P e P' são os polos de um círculo máximo. O eixo polar $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular ao plano desse círculo no ponto O .

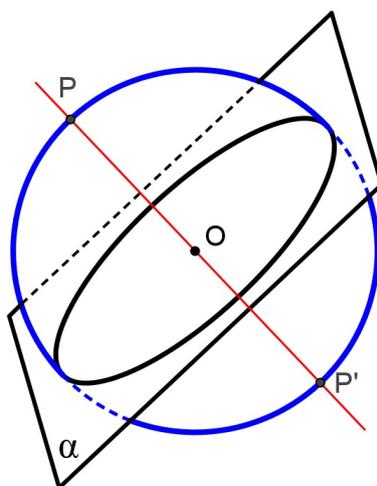


Figura 2.14 Polos de um círculo máximo: P e P'

Proposição 2.27. Em cada hemisfério só existe um polo.

Demonstração.

Ora, por um ponto passa uma, e somente uma reta perpendicular a um plano. Assim, uma reta perpendicular ao plano de um círculo máximo e que passa pelo centro desse círculo intersecta em cada hemisfério um único polo. ■

Definição 2.28. A intersecção de um plano secante à superfície esférica e paralela ao plano de um círculo máximo chama-se **círculo paralelo**.

Na Figura 2.15, os planos secantes α , que passa pelo centro da esfera, e β são paralelos. A secção do plano β é um círculo paralelo ao plano do círculo máximo. Esses círculos são paralelos.

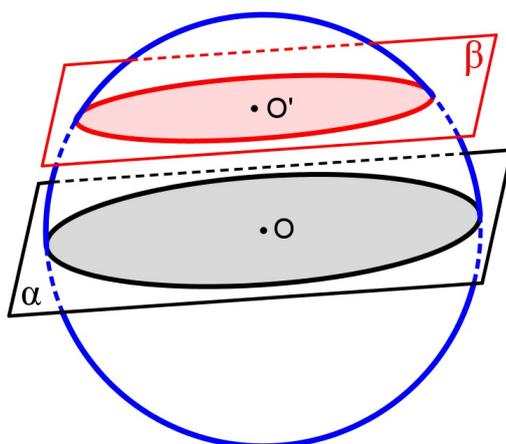


Figura 2.15 Círculos paralelos

Proposição 2.29. *Seja um círculo máximo e um ponto da superfície esférica, não pertencente a esse círculo. Por esse ponto passa um único círculo paralelo ao círculo máximo dado.*

Demonstração.

Por um ponto não pertencente a um plano passa um único plano paralelo ao plano dado. Portanto, pelo ponto Q da superfície esférica, não pertencente ao plano de um círculo máximo, passa um único plano paralelo, conseqüentemente, um único círculo paralelo ao círculo máximo dado. ■

Proposição 2.30. *Se dois círculos são paralelos a um plano do círculo máximo, então esses círculos são paralelos entre si.*

Demonstração.

A prova é imediata, pela transitividade do paralelismo dos planos, a saber: se dois planos são paralelos a um terceiro plano, então eles são paralelos entre si. ■

Definição 2.31. *Uma reta perpendicular ao plano de um círculo menor e que passa pelo centro desse círculo intersecta em dois pontos na superfície esférica chamados polos.*

A seguir, provar-se-á que um círculo máximo e seu paralelo têm os mesmos polos.

Proposição 2.32. *Todos os círculos paralelos têm os mesmos polos.*

Demonstração.

Sabe-se que “se dois planos são paralelos, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro”. Portanto, o eixo polar $\overleftrightarrow{PP'}$ de um círculo máximo é também o eixo polar do seu círculo paralelo. Pela transitividade, qualquer outro círculo paralelo aos círculos citados tem, também, o mesmo eixo polar. Consequentemente, todos os círculos paralelos têm o mesmo eixo polar, ou seja, os mesmos polos (Veja a Figura 2.16).

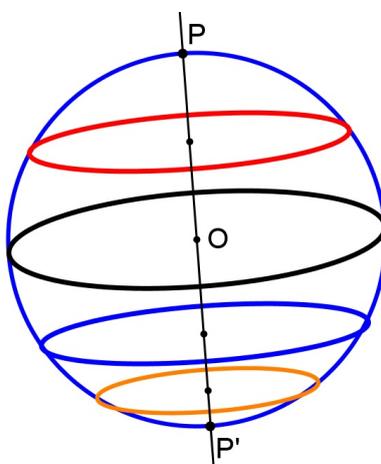


Figura 2.16 Círculos paralelos têm os mesmos polos

■

Proposição 2.33. *Todo plano que contém o eixo polar de um círculo máximo é perpendicular ao plano que contém esse círculo.*

Demonstração.

Como o eixo polar $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular ao plano do seu círculo máximo, qualquer plano que contém $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular ao plano do círculo máximo, já que a definição de planos perpendiculares diz: “o plano β é perpendicular ao plano α se existe uma reta contida no plano β que seja perpendicular a α ” (Veja a Figura 2.17). ■

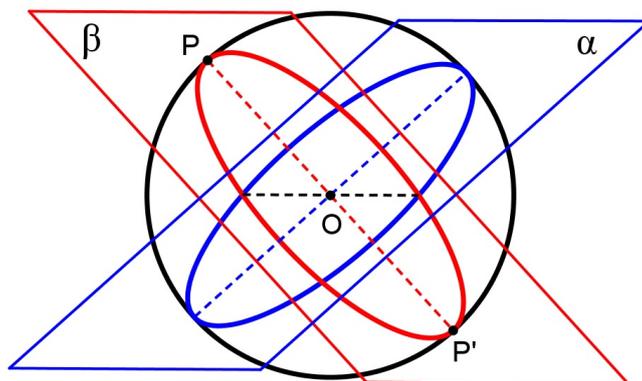


Figura 2.17 Círculos perpendiculares

Definição 2.34. Um círculo que contém os polos de um círculo máximo é chamado **círculo perpendicular**.

Definição 2.35. Um semicírculo que tem como extremidade os polos é chamado **meridiano**.

Proposição 2.36. Se um círculo é paralelo ao plano do círculo máximo, então todo círculo perpendicular ao círculo máximo é também perpendicular ao círculo paralelo.

Demonstração.

Basta utilizar as proposições 2.33 e 2.32. Portanto, o plano que contém o eixo polar de um círculo é perpendicular a todos os paralelos desse círculo.

■

Definição 2.37. A **distância polar** é a medida da corda que tem como extremidade o polo de um círculo da superfície esférica e um ponto qualquer desse círculo.

Proposição 2.38. As distâncias polares de um círculo da superfície esférica de um polo são congruentes.

Demonstração.

Seja O' , o centro do círculo menor da esfera de centro O e, P , um dos polos desse círculo.

Considere dois pontos quaisquer deste círculo, A e B (Veja a Figura 2.19).

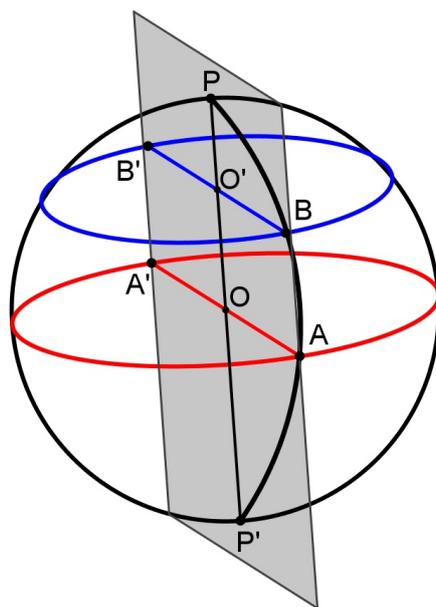


Figura 2.18 O meridiano e os círculos paralelos são perpendiculares entre si

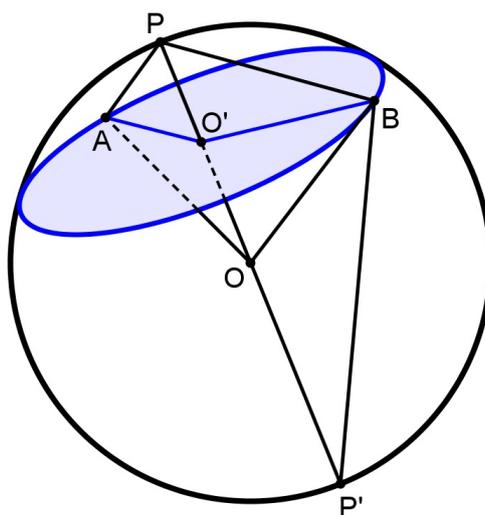


Figura 2.19 Distância polar do polo P

Os triângulos $PO'A$ e $PO'B$ são congruentes pelo caso de congruência LAL, pois PO' é o lado comum dos triângulos, os ângulos $\widehat{PO'A}$ e $\widehat{PO'B}$ são retos, por definição, e os lados $O'A$ e $O'B$ têm como medida, o raio do círculo menor. Portanto, as cordas PA e PB são congruentes. Ou seja, o polo de um círculo da superfície esférica é equidistante de todos os pontos desse círculo.

De modo análogo, prova-se para outro polo P' . ■

Corolário 2.39. *As distâncias polares de um ponto A são dadas por*

$$(PA)^2 = 2r(r - d)$$

e

$$(P'A)^2 = 2r(r + d),$$

onde r é o raio da esfera e $d = OO'$ é a distância entre o centro da esfera (O) e o centro do círculo menor (O').

Demonstração.

Os pontos P , P' e A determinam um plano. Esse plano intersecta a superfície esférica segundo um círculo, da qual PP' é o diâmetro (Veja a Figura 2.20). Assim, o ângulo $\widehat{PAP'}$ é reto, por ser inscrito em um semicírculo.

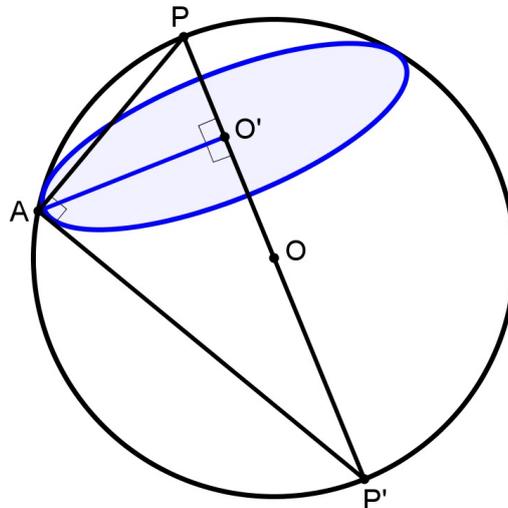


Figura 2.20 Distância polar PA e $P'A$

Usando as relações métricas no triângulo retângulo PAP' , tem-se:

$$(PA)^2 = PP' \cdot PO' = PP' \cdot (OP - OO') = 2r(r - d)$$

e

$$(P'A)^2 = PP' \cdot P'O' = PP' \cdot (OP' + OO') = 2r(r + d).$$



Definição 2.40. O *arco* de uma esfera é qualquer arco de um círculo máximo.

Definição 2.41. O *arco da paralela* é qualquer arco de círculo menor.

Proposição 2.42. Em uma mesma esfera, arcos congruentes são subtendidos por cordas congruentes. Reciprocamente, cordas congruentes subtendem arcos congruentes.

Demonstração.

Sejam os arcos \widehat{ACB} e $\widehat{A'C'B'}$ de uma esfera, congruentes entre si. Como a medida de um arco de círculo é igual à medida do ângulo central correspondente, isso acarreta à congruência dos ângulos centrais que subtendem esses arcos, ou seja, $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$. E, os lados adjacentes a esses ângulos são os raios de círculo máximo, assim os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes pelo caso LAL, logo as cordas AB e $A'B'$ são congruentes.

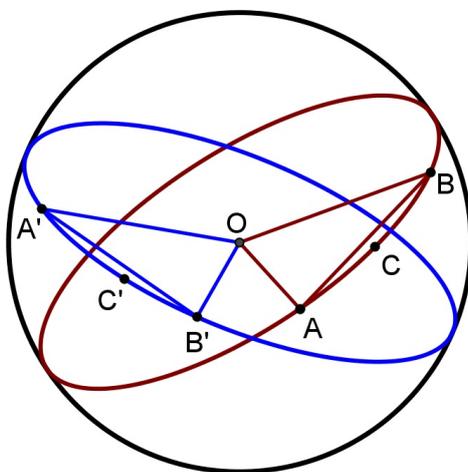


Figura 2.21 Arcos e cordas em uma esfera

Para a prova da proposição recíproca, tem-se que os triângulos isósceles AOB e $A'OB'$ são congruentes pelo caso LLL, já que as cordas são congruentes. Ou seja, os ângulos \widehat{AOB} e $\widehat{A'OB'}$ são congruentes, o que acarreta na congruência dos arcos que subtendem as cordas. ■

Proposição 2.43. *Os arcos de círculo máximo que subtendem as distâncias polares de um polo são congruentes.*

Demonstração.

Basta utilizar as proposições 2.39 e 2.43, a prova é imediata. ■

Proposição 2.44. *O arco formado entre um ponto qualquer de círculo máximo e seu polo é um quarto do círculo máximo, ou seja, um **quadrante**.*

Demonstração.

Pelas proposições 2.39 e definição 2.26, o arco de círculo máximo formado entre um ponto qualquer desse círculo e seu polo é reto, ou seja, um quarto de um círculo máximo. ■

Proposição 2.45. *Sejam dois círculos paralelos e meridiano desses. Os arcos dos meridianos compreendidos entre esses círculos paralelos são congruentes.*

Demonstração.

Sejam P e P' polos dos círculos paralelos λ_1 e λ_2 , com seus respectivos centros O_1 e O_2 . O meridiano μ intersecta λ_1 e λ_2 , respectivamente, nos pontos A_1 e A_2 . E, os pontos B_1 e B_2 são, respectivamente, as intersecções do meridiano ε com λ_1 e λ_2 (Veja a Figura 2.22).

Pela proposição 2.44, tem-se, respectivamente, para os paralelo λ_1 e λ_2 que:

$$\widehat{PA_1} \equiv \widehat{PB_1} \quad (2.1)$$

e

$$\widehat{PA_2} = \widehat{PB_2}. \quad (2.2)$$

Subtraindo as equações 2.1 e 2.2, membro a membro, vem

$$\widehat{PA_2} - \widehat{PA_1} = \widehat{PB_2} - \widehat{PB_1},$$

ou seja,

$$\widehat{A_2A_1} = \widehat{B_2B_1}. \quad (2.3)$$

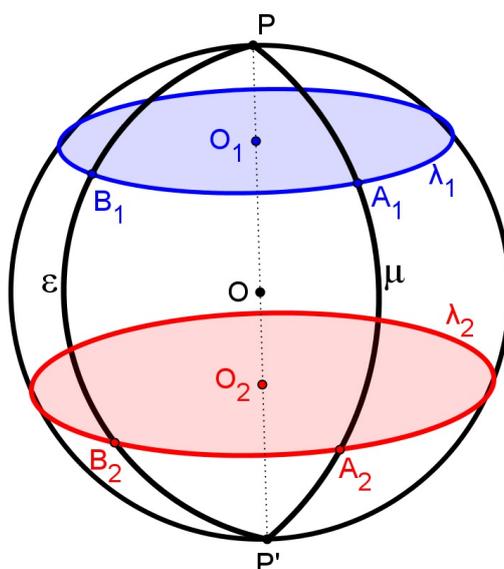


Figura 2.22 Arcos de círculo máximo entre dois paralelos

Ora, pela proposição 2.43, as cordas subtendidos por esses arcos são congruentes. Portanto, os arcos dos meridianos compreendido entre dois círculos paralelos são congruentes. ■

Definição 2.46. A *distância esférica* entre dois pontos A e B é o comprimento do menor arco \widehat{AB} do círculo máximo.

Proposição 2.47. A *distância esférica* ℓ entre dois pontos A e B é dada por

$$\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r,$$

onde α é o ângulo central, medido em graus, que subtende o menor arco \widehat{AB} do círculo máximo de raio r .

Demonstração.

Como o comprimento do arco de círculo, ℓ , é proporcional à sua medida α , em graus, portanto,

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi r}{\ell},$$

ou seja,

$$\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$



2.2 Ângulo na esfera

Definição 2.48. O ângulo entre uma semirreta com origem no centro da esfera e um plano de um círculo máximo é o ângulo que a semirreta forma com a sua projeção ortogonal sobre esse plano.

Na Figura 2.23, $\vec{OA'}$ é a projeção da semirreta \vec{OA} sobre o plano α do círculo máximo, e $\widehat{AOA'}$ é a medida do ângulo entre \vec{OA} e α . Se \vec{OA} está contida no plano α , obviamente, $\widehat{AOA'}$ é ângulo nulo.

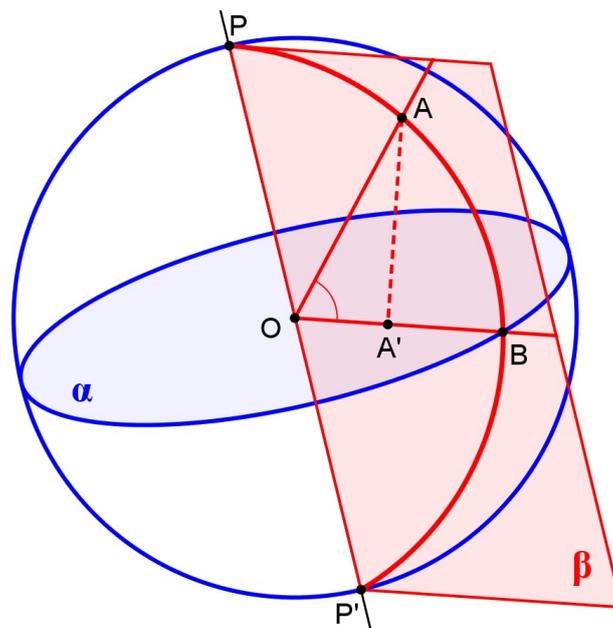


Figura 2.23 Ângulo entre a semirreta e o plano do círculo máximo.

Proposição 2.49. O ângulo entre uma semirreta e um plano de um círculo máximo é o ângulo de menor medida que se pode formar dessa semirreta com qualquer semirreta contida nesse plano.

Demonstração.

Seja A um ponto qualquer da superfície esférica de centro O . A projeção de A sobre o plano de um círculo máximo é A' . Tome, sobre a semirreta s contida nesse plano, o ponto B tal que $OB \equiv OA'$ (Veja a Figura 2.24). O triângulo $AA'B$ é retângulo em A' , por construção, logo o cateto AA' é menor do que a hipotenusa AB , ou seja,

$$AA' < AB.$$

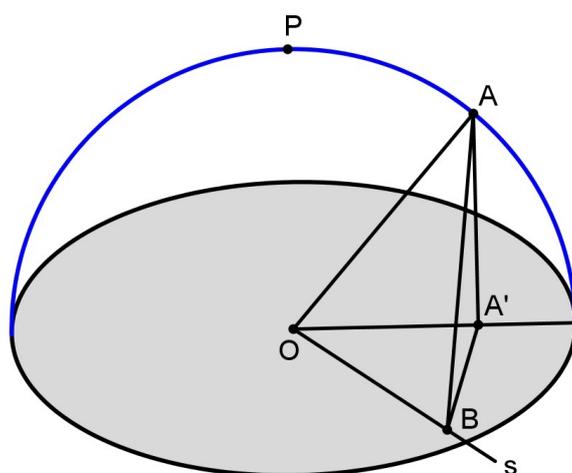


Figura 2.24 Ângulo entre a semirreta e o plano do círculo máximo: $\widehat{AOA'}$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos $OA'A$ e OBA , tem-se:

$$\sqrt{(OA)^2 + (OA')^2 - 2 \cdot OA \cdot OA' \cdot \cos \widehat{AOA'}} < \sqrt{(OA)^2 + (OB)^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}}.$$

Como $OA' \equiv OB$, tem-se:

$$\cos \widehat{AOA'} - \cos \widehat{AOB} > 0.$$

Como o valor do cosseno de um ângulo decresce quando esse ângulo varia do ângulo nulo ao ângulo raso,

$$\widehat{AOA'} < \widehat{AOB}.$$

Ou seja, o ângulo entre uma semirreta e um plano de um círculo máximo é o ângulo de menor medida que se pode formar dessa semirreta com qualquer semirreta contida nesse plano. ■

Proposição 2.50. *Seja a semirreta formada pelo centro e um ponto na superfície esférica. O ângulo formado entre essa semirreta e o plano do círculo máximo está no plano que contém o eixo polar e o ponto da superfície, ou seja, está no plano do meridiano desse ponto.*

Demonstração.

Prova imediata, pela definição 2.49 e proposição 2.33. ■

Definição 2.51. *Chama-se **ângulo esférico** à figura formada por dois arcos de círculo máximo que têm uma extremidade comum. Os arcos que formam o ângulo chamam-se lados do ângulo, e o extremo comum aos dois lados é o vértice do ângulo.*

Definição 2.52. *A medida de um ângulo esférico é igual à medida do ângulo formado pelas semirretas, com origem no vértice, tangentes aos arcos que o formam.*

A Figura 2.25 mostra um ângulo esférico \widehat{APB} de uma esfera de centro O . As semirretas t_1 e t_2 são, respectivamente, tangentes aos arcos \widehat{AP} e \widehat{BP} no ponto P .

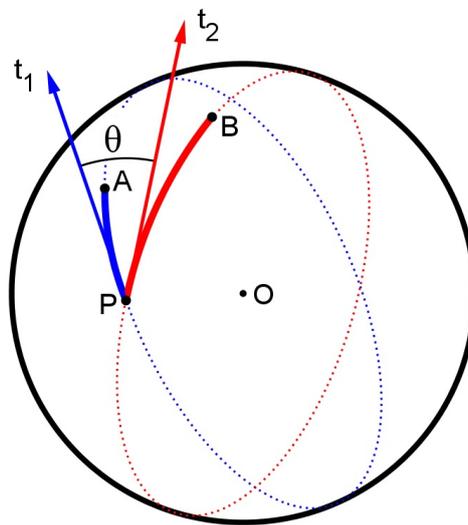


Figura 2.25 Ângulo esférico: $\widehat{APB} = t_1\widehat{P}t_2 = \theta$

Proposição 2.53. *O ângulo esférico tem a mesma medida que o arco do círculo máximo traçado do vértice como polo e limitado entre seus lados.*

Demonstração.

Considere o vértice P do ângulo esférico \widehat{APB} como polo de um círculo máximo λ e, P' , sua antípoda (Veja a Figura 2.26).

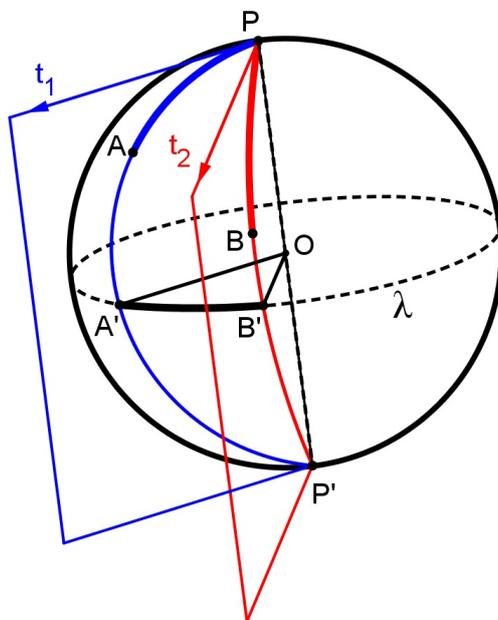


Figura 2.26 O ângulo esférico e o diedro

Pela definição 2.36, os semicírculos $\widehat{PAP'}$ e $\widehat{PBP'}$ são meridianos que intersectam o círculo máximo λ , respectivamente, nos pontos A' e B' . Os semiplanos determinados pelos meridianos com origem no eixo polar $\overleftrightarrow{PP'}$ forma um diedro.

Assim, pela proposição 1.7, o ângulo entre as retas tangentes t_1 e t_2 e o ângulo $\widehat{A'OB'}$ são as medidas dos ângulos da secção reta do diedro $di(\overleftrightarrow{PP'})$, portanto, $t_1\widehat{Pt}_2 = \widehat{A'OB'}$. Consequentemente, o ângulo \widehat{APB} tem por medida o arco $\widehat{A'B'}$. ■

Definição 2.54. *Fuso esférico* é a intersecção da superfície de uma esfera com um diedro cuja aresta contém o diâmetro dessa superfície esférica.

Evidentemente, um fuso é uma região da esfera compreendida entre dois meridianos. Esses meridianos tem dois pontos, diametralmente opostos, em comum chamados **vértices do fuso**. O **ângulo do fuso** é, por definição, o ângulo entre os dois meridianos que constituem os **lados do fuso**, ou seja, a secção reta do diedro.

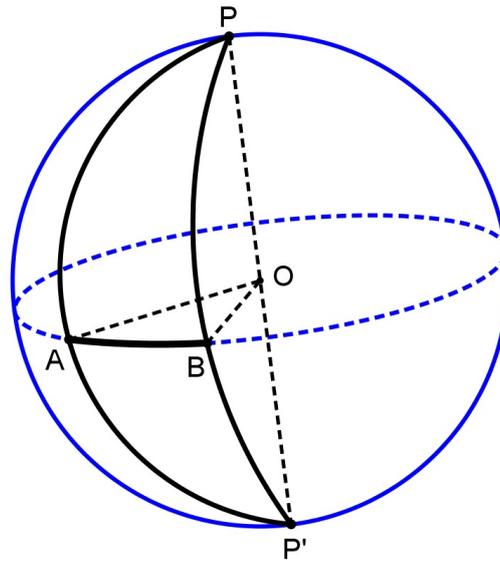


Figura 2.27 Fuso esférico

Definição 2.55. O ângulo entre dois círculos máximos de uma esfera é igual ao menor ângulo formado pelos planos que contêm esses círculos.

Proposição 2.56. O ângulo entre dois círculos máximos de uma esfera é igual ao ângulo formado pelos polos desses círculos.

Demonstração.

Seja a esfera de centro O e os círculos máximos λ_1 e λ_2 com seus respectivos polos P e Q . Pela proposição 2.24, λ_1 e λ_2 intersectam-se nas antípodas A e A' (Veja a Figura 2.28).

A partir do polo P , traça-se um meridiano que passa pelo polo Q e que intersecta λ_1 e λ_2 , respectivamente, em C e B . Pela proposição 2.45, tem-se

$$\widehat{CP} = \widehat{BQ} \Rightarrow \widehat{POC} = \widehat{QOB} = 90^\circ \quad (2.4)$$

Calculando o ângulo \widehat{POQ} no meridiano, verifica-se que

$$\widehat{POQ} = \widehat{POB} - \widehat{QOB} = (\widehat{POC} + \widehat{COB}) - \widehat{QOB}.$$

Mas, pela equação 2.4,

$$\widehat{POQ} = \widehat{COB},$$

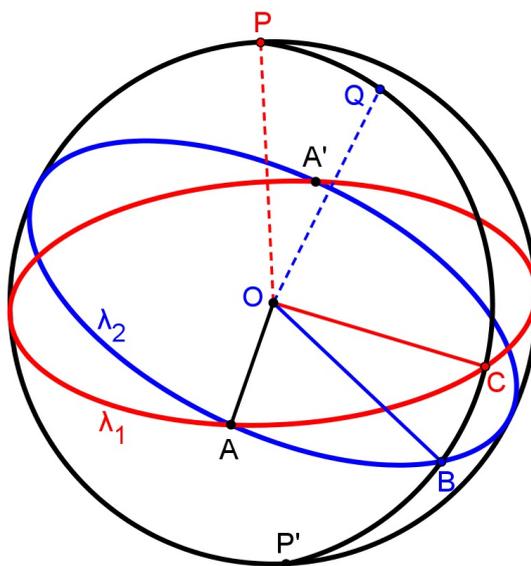


Figura 2.28 Ângulo entre os polos: $P\hat{O}Q = C\hat{O}B$

ou seja,

$$\widehat{PQ} = \widehat{CB}.$$

Portanto, o arco entre os polos \widehat{PQ} é igual ao menor arco \widehat{CB} formado entre os planos determinados por λ_1 e λ_2 . ■

2.3 Coordenada na esfera

Com o olhar interdisciplinar da Geografia e da Astronomia e de modo a justificar as coordenadas geográficas e celestiais que serão abordadas, respectivamente, nos capítulos 4 e 5; nesta seção será abordada a coordenada na esfera, pedra fundamental deste trabalho.

Definição 2.57. Considerando o raio da esfera como parâmetro constante, para localizar um ponto qualquer na superfície esférica (globo terrestre ou esfera celeste) é necessário definir:

- O centro da esfera denominado **origem das coordenadas**;
- Um **plano fundamental** que passa pelo centro da esfera e, cuja intersecção com a mesma, determina o **círculo máximo fundamental**, e conseqüentemente, a **direção fundamen-**

tal, a reta perpendicular a esse círculo que passa pela origem e que determina os **polos** da mesma;

- Um ponto arbitrário do círculo máximo fundamental denominado **ponto fundamental do sistema**;
- Um círculo perpendicular que passa pelo ponto fundamental do sistema denominado **círculo máximo secundário**;
- Um sentido de orientação do arco. Se o sentido adotado coincide com o movimento do ponteiro de relógio denomina-se **retrógrado**, caso contrário, denomina-se **direto**;

Veja a construção padrão de uma coordenada na esfera:

Seja a esfera de centro O , a origem das coordenadas¹, e raio unitário. Inicialmente, estabelece-se um plano fundamental, conseqüentemente, um círculo máximo fundamental, cujos polos são os pontos P e P' . Ao traçar um círculo perpendicular ao círculo fundamental, os mesmos intersectam-se nas antípodas A e A' (Proposição 2.24). Uma das antípodas pode ser considerada como ponto fundamental do sistema, suponha que seja A e, o meridiano que passa por esse ponto é o meridiano de referência. Assim, em relação à medida do arco no círculo fundamental, considerando o ponto A como origem do arco, existe a necessidade da escolha da orientação desse arco, e suponha que o sentido adotado seja retrógrado. A medida desse arco varia do arco nulo ao arco de uma volta completa.

Como o círculo máximo fundamental divide a esfera em dois hemisférios, a medida do arco em um meridiano qualquer, tem como origem do arco, o ponto de intersecção desse meridiano com o círculo fundamental. Se a extremidade desse arco estiver no hemisfério que contém o polo P , o sinal da medida desse arco é positivo, caso contrário, é negativo. Como o meridiano é um semicírculo, a medida desse arco varia, para cada hemisfério, do arco nulo a um quadrante.

¹A origem da coordenada esférica será abordada na definição 5.4.

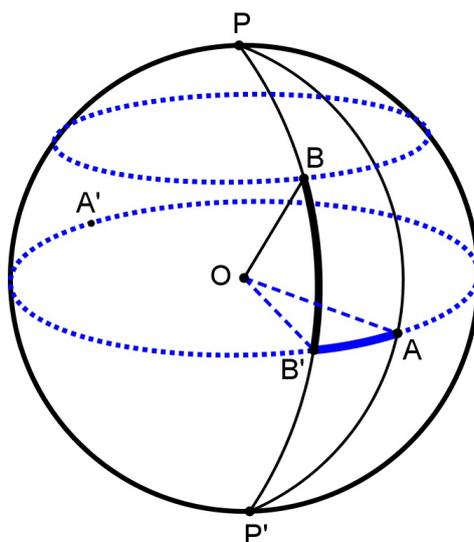


Figura 2.29 Coordenada na esfera: $\widehat{AB'} = \lambda$ e $\widehat{BB'} = \phi$.

Resta localizar a posição de um ponto qualquer B na superfície esférica. Conforme a construção realizada, a coordenada na esfera é determinada por dois arcos orientados de círculos máximos. A primeira coordenada, relativo ao arco medido ao longo do círculo fundamental, é o arco compreendido entre o meridiano de referência e o meridiano onde se localiza o ponto B . A segunda coordenada, relativo ao arco medido ao longo do meridiano a qual contém o ponto B , é o arco subtendido entre a semirreta \overrightarrow{OB} e o plano do círculo fundamental.

Na Figura 2.29, B' é o ponto de intersecção do círculo fundamental com o meridiano a qual se localiza o ponto B . Assim, determina-se $\widehat{AB'} = \lambda$ e $\widehat{BB'} = \phi$. Representa-se a coordenada do ponto B como par ordenado $(\lambda; \phi)$.

Proposição 2.58. *Entre o conjunto dos pontos B , distintos dos polos, da superfície esférica e o conjunto dos pares ordenados $(\lambda; \phi)$ de números reais, com $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$ e $-90^\circ < \phi < 90^\circ$, existe uma correspondência biunívoca.*

Demonstração.

Observe que entre os polos e o conjunto dos pares ordenados $(\lambda; \phi)$ não há correspondência biunívoca, pois as coordenadas dos polos P e P' são, respectivamente, $(\lambda; 90^\circ)$ e $(\lambda; -90^\circ)$, com $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$.

1ª. parte:

A construção padrão da coordenada de uma esfera realizada anteriormente indica que a todo ponto B , pertencente à superfície esférica porém distinto dos polos P e P' , corresponde um único par de arcos: $\widehat{AB'}$ sobre o círculo fundamental e $\widehat{BB'}$ sobre a meridiana que contém B . Determinando, assim, um único par ordenado de números reais $(\lambda; \phi)$, com $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$ e $-90^\circ < \phi < 90^\circ$, tais que λ e ϕ são representados por $\widehat{AB'}$ e $\widehat{BB'}$, respectivamente.

2ª. parte:

Dado o par ordenado de números reais $(\lambda; \phi)$, com $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$ e $-90^\circ < \phi < 90^\circ$, existem pares de arcos de círculo máximo que os representam sobre a superfície esférica.

Considere λ como a medida do arco sobre o círculo fundamental com origem em A , ponto fundamental do sistema, e extremidade B' , ou seja, $\lambda = \widehat{AB'}$. Das proposições 2.18 e 2.33 tem-se que pelos pontos B' e P passa um único meridiano. Assim, qualquer ponto pertencente a esse meridiano tem o mesmo ângulo esférico $A\widehat{OB'} = \widehat{AB'} = \lambda$ (Proposição 2.54).

Agora, considere ϕ como a medida do arco sobre esse meridiano com origem em B' e extremidade B , ou seja, $\phi = \widehat{BB'}$. Ora, pela proposição 2.29, a extremidade desse arco pertence a um único círculo paralelo.

Pela proposição 2.24 e definição 2.36, a intersecção entre meridiano e círculo paralelo determina um único ponto. Portanto, a todo par $(\lambda; \phi)$, com $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$ e $-90^\circ < \phi < 90^\circ$, corresponde um único ponto da superfície esférica. ■

2.4 Triângulo na esfera

Definição 2.59. O *triângulo esférico* é a figura formada por três arcos de círculos máximos que unem tais pontos, dois a dois, com cada arco menor do que um semicírculo.

Os arcos formados são chamados de **lados** do triângulo esférico e os vértices dos três ângulos esféricos são os **vértices** do triângulo esférico, tal como mostra a Figura 2.30. Denotam-se

os ângulos de um triângulo esférico ABC por letras maiúsculas A , B e C , e os lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} , respectivamente, por letras minúsculas a , b e c .

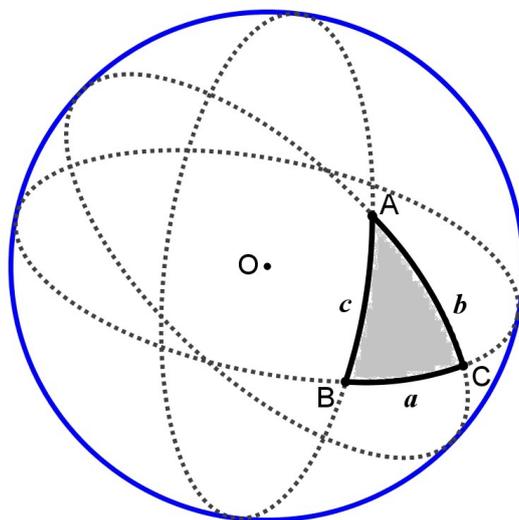


Figura 2.30 Triângulo esférico ABC

Proposição 2.60. *A cada triângulo esférico corresponde um triedro na esfera e vice-versa.*

Demonstração.

Ao traçar, do centro O da esfera, as semirretas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} , obtém-se um triedro $tri(O, A, B, C)$.

Reciprocamente, a cada triedro $tri(O, P, Q, R)$ (Veja a Figura 2.31) pode-se determinar um triângulo esférico. Para isso, considere o vértice O do triedro como centro da esfera e sobre as arestas \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OR} marque, respectivamente, os pontos A , B e C de tal modo que $OA = OB = OC$.

Traçando um círculo de centro O que passa pelos pontos A e B , determina-se o arco \widehat{AB} , subtendido pelo ângulo da face do triedro $P\widehat{O}Q$. Do mesmo modo, obtêm-se os arcos \widehat{AC} e \widehat{BC} , subtendido, respectivamente, pelos ângulos de face $P\widehat{O}R$ e $Q\widehat{O}R$.

Seja o ponto P , distinto de A e B , mas pertencente ao círculo determinado pelos pontos A e B . Assim, os quatro pontos A , B , P e C , pela proposição 2.7, determinam a superfície esférica.

Por construção, \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} são arcos de círculo máximo de uma esfera de centro O e raio OA , determinando, assim, o triângulo esférico ABC . ■

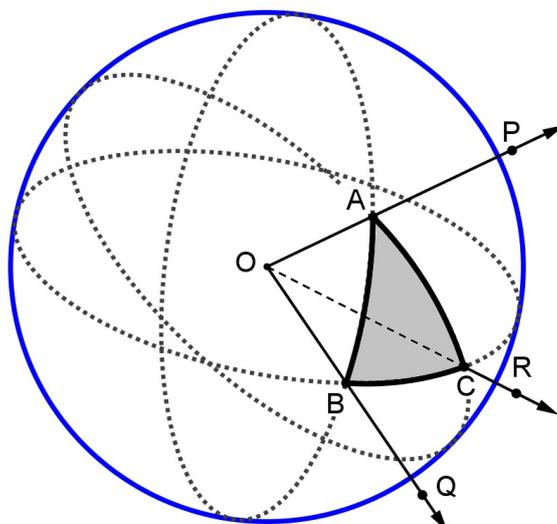


Figura 2.31 O triângulo esférico ABC e o triedro $tri(O, P, Q, R)$

Note que um triângulo esférico não é qualquer figura de três vértices desenhada sobre uma esfera. Para ser um triângulo esférico esta figura tem que ter lados que sejam arcos de círculos máximos. A figura 2.32 ilustra um exemplo na qual o triângulo formado pelos arcos não é um triângulo esférico.

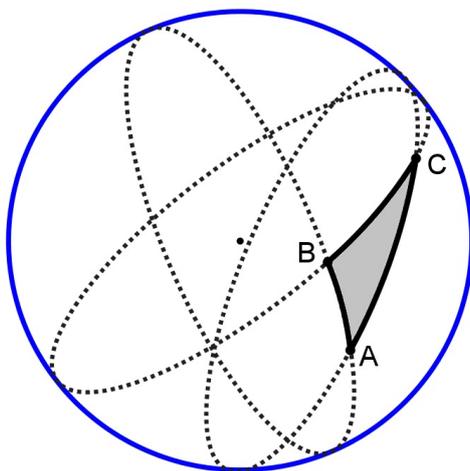


Figura 2.32 Triângulo não esférico: \widehat{AC} é um arco de círculo menor

Proposição 2.61. *Qualquer lado de um triângulo esférico é menor do que a soma dos outros dois lados e maior do que o módulo da diferença dos mesmos.*

Demonstração.

Seja o triângulo esférico ABC de lados a , b e c . Os lados do triângulo esférico servem de medida às faces do triedro $tri(O, A, B, C)$. Pela proposição 1.10, cada face deste triedro é menor que a soma dos outros dois e, pela proposição 1.11, cada face deste triedro é maior que o módulo da diferença dos outros dois, assim, pela equação 1.6:

$$| \widehat{AOC} - \widehat{AOB} | < \widehat{BOC} < \widehat{AOC} + \widehat{AOB}.$$

Substituindo estes ângulos pelos arcos que os medem, vem:

$$| b - c | < a < b + c.$$

As outras desigualdades podem ser obtidas através de raciocínio análogo. ■

Proposição 2.62. *O caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície esférica é o comprimento do menor arco de círculo máximo que passa por esses dois pontos.*

Como a fundamentação teórica deste trabalho é a Geometria Euclidiana Plana e Espacial, a prova apresentada desta proposição é intuitiva.

Ideia da prova:

Sejam A e B dois pontos quaisquer de uma superfície esférica sendo que \widehat{AB} é o arco do círculo máximo e $C(A; B)$, outro caminho qualquer traçado de A para B sobre a superfície da esfera.

Sobre o contorno $C(A; B)$, marca-se diferentes pontos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n$ que, pela proposição 2.18, podem ser unidos dois a dois por meio de arcos de círculo máximo formando deste modo vários triângulos esféricos como mostra a Figura 2.33

Aplicando a proposição 2.62 para os triângulos esféricos $ABC_1, AC_1C_2, AC_2C_3, \dots, AC_{n-1}C_n$, obtém-se, respectivamente:

$$\widehat{AB} < \widehat{BC_1} + \widehat{C_1A}$$

$$\widehat{C_1A} < \widehat{C_1C_2} + \widehat{C_2A}$$

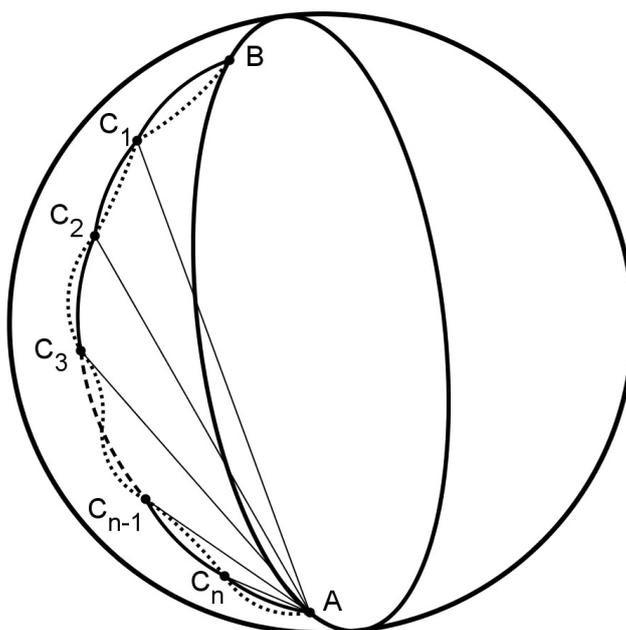


Figura 2.33 Caminho ótimo entre dois pontos de uma superfície esférica

$$\widehat{C_2A} < \widehat{C_2C_3} + \widehat{C_3A}$$

$$\vdots$$

$$\widehat{C_{n-1}A} < \widehat{C_{n-1}C_n} + \widehat{C_nA}$$

Somando, membro a membro, as desigualdades acima, tem-se

$$\widehat{AB} < \widehat{BC_1} + \widehat{C_1C_2} + \widehat{C_2C_3} + \cdots + \widehat{C_{n-1}C_n} + \widehat{C_nA} \quad (2.5)$$

A desigualdade 2.5 persiste qualquer que seja o número de pontos tomados na curva $C(A;B)$ e qualquer que seja a distância que os separe, conseqüentemente, a mesma desigualdade se verifica no limite, quando os pontos sejam em número ilimitado e infinitamente próximos.

Porém, o limite da soma dos arcos de círculo máximo $\widehat{BC_1}$, $\widehat{C_1C_2}$, $\widehat{C_2C_3}$, \cdots , $\widehat{C_{n-1}C_n}$ e $\widehat{C_nA}$ é o mesmo que a soma das cordas destes arcos, ou seja, o limite que tende a soma das cordas consecutivas, inscrita na curva $C(A;B)$. Como o limite desta soma é o comprimento da referida curva, conclui-se que a soma dos arcos, $\widehat{BC_1} + \widehat{C_1C_2} + \widehat{C_2C_3} + \cdots + \widehat{C_{n-1}C_n} + \widehat{C_nA}$, tem por limite, o comprimento da curva:

$$\widehat{AB} \leq C(A;B). \quad (2.6)$$

A igualdade na expressão acima ocorre, se o contorno $C(A;B)$ é o próprio arco de círculo máximo \widehat{AB} .

Uma demonstração da proposição 2.63, com recurso da Geometria Diferencial, encontra-se no trabalho de Camargo (2009, pp. 19-22) e Créach (pp 6-10).

Proposição 2.63. *A soma dos lados de um triângulo esférico é menor do que 360° .*

Demonstração.

Seja o triângulo esférico ABC de lados a , b e c . Os lados do triângulo esférico servem de medida às faces do triedro $tri(O,A,B,C)$. Pela proposição 1.13, a soma das medidas das três faces de um triedro qualquer é menor do que 360° , ou seja,

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOB} < 360^\circ$$

Substituindo estes ângulos pelos arcos que os medem, vem:

$$a + b + c < 360^\circ.$$

■

Definição 2.64. *Um triângulo esférico pode ter um, dois ou três ângulos retos ou obtusos, chamando-se:*

- **Retângulo** - quando tem um ângulo reto;
- **Birretângulo** - quando têm dois ângulos retos;
- **Trirretângulo** - quando têm três ângulos retos.

Um triângulo esférico é **isósceles**, **equilátero** ou **obtusângulo** no mesmo sentido que empregado na geometria plana.

Definição 2.65. *O triângulo polar $A'B'C'$, associado ao triângulo esférico ABC , é um triângulo obtido com vértices que são os polos dos lados de ABC e no mesmo hemisfério em que se encontram esses lados.*

Seja ABC um triângulo esférico. O círculo máximo de que forma parte \widehat{AB} , por exemplo, tem dois polos, um em cada hemisfério, porém considere somente o polo C' , situado no mesmo hemisfério que o vértice C em relação a \widehat{AB} , e suponha, nas mesmas condições, que B' e A' são, respectivamente, os polos de \widehat{AC} e \widehat{BC} . Ligando os três pontos A' , B' e C' , dois a dois, por arcos de círculo máximo, obtém-se um triângulo polar $A'B'C'$ (Veja a Figura 2.34).

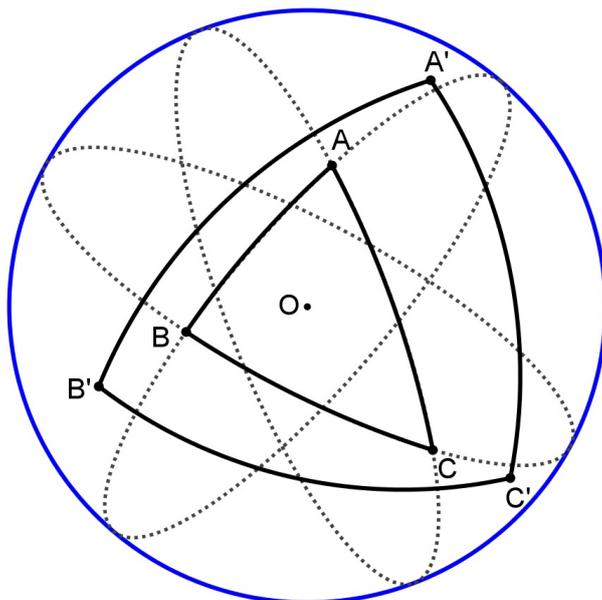


Figura 2.34 $A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC

Proposição 2.66. *Se um triângulo esférico é polar de um outro, este é também polar do primeiro.*

Demonstração.

Seja $A'B'C'$ o triângulo esférico polar de ABC . Sendo A' o polo de \widehat{BC} e B' o polo de \widehat{AC} , assim o vértice C está a uma distância esférica de um quadrante de $\widehat{A'B'}$, pois $\widehat{A'C} = \widehat{B'C} = 90^\circ$. Portanto, C é o polo de $\widehat{A'B'}$. De modo análogo, demonstra-se que A é o polo de $\widehat{B'C'}$ e B é o polo de $\widehat{A'C'}$. Então, o triângulo ABC é um triângulo formado pelos círculos máximos cujos polos são A' , B' e C' .

Se A' é o polo de \widehat{BC} , a distância esférica de A' a qualquer ponto do círculo a que pertence o lado \widehat{BC} é igual a um quadrante, e como A está no mesmo hemisfério que A' em relação a esse círculo, a distância esférica $\widehat{AA'}$ é menor que um quadrante. Como A é o polo de $\widehat{B'C'}$ e

sendo o lado $\widehat{AA'}$ menor do que um quadrante, A está no mesmo hemisfério que A' em relação ao círculo de que forma parte o lado $\widehat{B'C'}$. A demonstração é análoga para os outros vértices, assim, fica provado que ABC é triângulo polar de $A'B'C'$. ■

Proposição 2.67. *Em dois triângulos esféricos polares, cada ângulo de um deles tem por medida o suplemento do lado que lhe é diretamente oposto no outro triângulo.*

Demonstração.

Sejam os triângulos polares ABC e $A'B'C'$, como mostra a Figura 2.35.

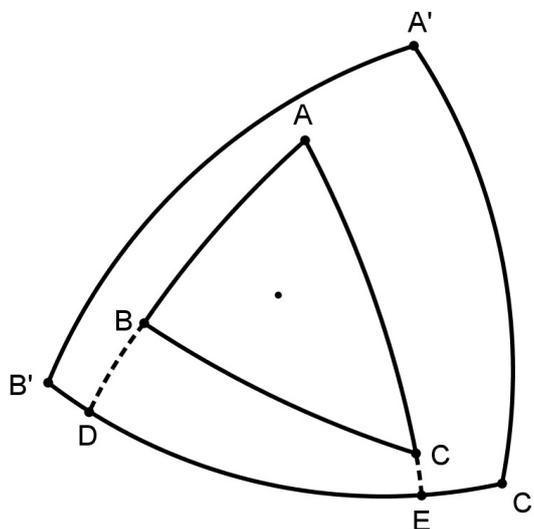


Figura 2.35 Triângulos polares ABC e $A'B'C'$

Prolongando os lados \widehat{AB} e \widehat{AC} , respectivamente, até D e E , pontos do lado $\widehat{B'C'}$. Pela proposição 2.54, a medida do ângulo \widehat{BAC} é o arco \widehat{DE} , pois é o arco de círculo máximo, considerando A como polo.

Em relação ao polo C' , tem-se $\widehat{AC'} = \widehat{C'D} = 90^\circ$. E, em relação ao polo B' , tem-se $\widehat{AB'} = \widehat{B'E} = 90^\circ$. Assim, a medida do lado $\widehat{B'C'} = a'$ é dada por:

$$a' = \widehat{B'E} + \widehat{C'D} - \widehat{DE} = 90^\circ + 90^\circ - A.$$

Ou seja,

$$A = 180^\circ - a'.$$

De modo análogo, prova-se que $B = 180^\circ - b'$, $C = 180^\circ - c'$, $A' = 180^\circ - a$, $B' = 180^\circ - b$ e $C' = 180^\circ - c$. ■

Proposição 2.68. *Em todo triângulo esférico, a soma dos ângulos é maior que 180° e menor que 540° .*

Demonstração.

Seja o triângulo ABC e o seu triângulo polar $A'B'C'$. Da proposição 2.68, tem-se:

$$a' = 180^\circ - A;$$

$$b' = 180^\circ - B;$$

$$c' = 180^\circ - C.$$

Somando membro a membro as três equações,

$$a' + b' + c' = 540^\circ - (A + B + C).$$

Da proposição 2.64, tem-se:

$$0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ.$$

Assim,

$$0^\circ < 540^\circ - (A + B + C) < 360^\circ,$$

ou seja,

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ.$$

■

Proposição 2.69. *Qualquer ângulo de um triângulo esférico acrescido de 180° é maior que a soma dos outros dois.*

Demonstração.

Seja o triângulo ABC e o seu triângulo polar $A'B'C'$.

Aplicando a proposição 2.62 no triângulo polar $A'B'C'$, tem-se:

$$a' + b' > c',$$

Assim, utilizando a proposição 2.68,

$$(180^\circ - A) + (180^\circ - B) > (180^\circ - C).$$

Portanto,

$$180^\circ + C > A + B.$$

Para obterem as outras desigualdades, a prova é análoga. ■

Trigonometria na esfera

Os fundamentos básicos apresentados neste capítulo tem como referências: Chauvenet (1856), Casey (1889), Todhunter (1901), Murray (1908), Moritz (1913), Isidoro (1955) e Berrocoso (2003).

A trigonometria esférica estabelece relações convenientes entre os seis elementos de um triângulo esférico (3 lados e 3 ângulos) tornando possível o cálculo de três destes elementos quando forem conhecidos os outros três.

3.1 Triângulo retângulo esférico

Proposição 3.1. *Para qualquer triângulo retângulo esférico ABC , com ângulo reto em B , valem as seguintes relações:*

$$\tan c = \cos A \tan b$$

$$\tan a = \tan A \sin c$$

$$\sin a = \sin A \sin b$$

$$\tan a = \cos C \tan b$$

$$\tan c = \tan C \sin a$$

$$\sin c = \sin C \sin b$$

$$\cos A = \sin C \cos a$$

$$\cos C = \sin A \cos c$$

$$\cos b = \cos a \cos c$$

$$\cos b = \cot A \cot C$$

Demonstração.

Seja ABC um triângulo esférico retângulo de centro O . Suponha, inicialmente, que os lados a , b e c sejam menores do que 90° .

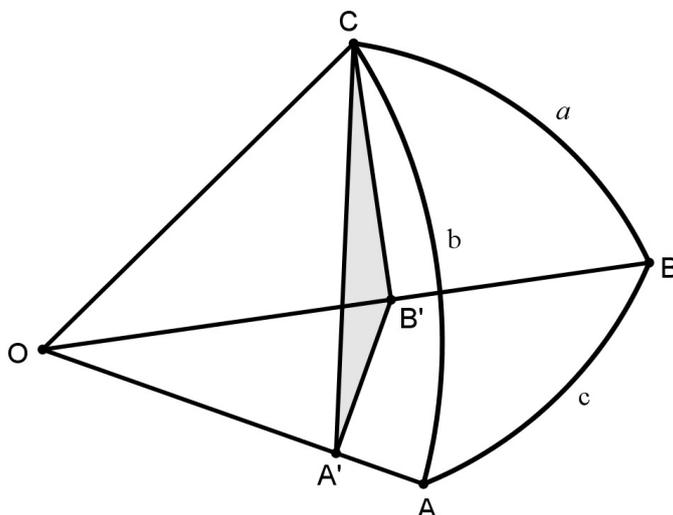


Figura 3.1 Triângulo esférico retângulo

Por ser o ângulo \widehat{ABC} reto, os planos OAB e OBC são perpendiculares. Sejam os pontos A' e B' pertencentes, respectivamente, a OA e OB , de tal modo que, a partir do vértice C , traçam-se $B'C$ perpendicular a OB e $A'B'$ perpendicular a OA , logo $B'C$ é perpendicular a $A'B'$. Assim, o plano $A'B'C$ é perpendicular a AOB e, portanto, o plano $A'B'C$ é perpendicular a OA . Ou seja, $A'C$ é perpendicular a OA e o ângulo $\widehat{CA'B'}$ é a medida do diedro $di(\vec{OA})$. Consequentemente, os triângulos $OA'B'$, $OB'C$ e $OA'C$ são triângulos retângulos. Tem-se, pois

$$\tan c = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{\frac{A'B'}{A'C}}{\frac{OA'}{A'C}} = \frac{\cos A}{\cot b} = \cos A \tan b; \quad (3.1)$$

$$\tan a = \frac{B'C}{OB'} = \frac{\frac{B'C}{A'B'}}{\frac{OB'}{A'B'}} = \frac{\tan A}{\csc c} = \tan A \sin c; \quad (3.2)$$

$$\sin A = \frac{B'C}{A'C} = \frac{\frac{B'C}{OC}}{\frac{A'C}{OC}} = \frac{\sin a}{\sin b} \implies \sin a = \sin A \sin b. \quad (3.3)$$

Agora, permutando no triângulo esférico as letras dos vértices A e C e as letras correspondentes nos lados e ângulos esféricos, as características da figura em nada se alteram, podendo assim ser demonstrado, de modo análogo, as relações:

$$\tan a = \cos C \tan b; \quad (3.4)$$

$$\tan c = \tan C \sin a; \quad (3.5)$$

$$\sin c = \sin C \sin b. \quad (3.6)$$

Além disso,

$$\cos A = \frac{A'B'}{A'C} = \frac{\frac{A'B'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC}}{\frac{A'C}{OC}} = \frac{\sin c \cdot \cos a}{\sin b}$$

Substituindo a equação 3.6 na expressão acima, tem-se:

$$\cos A = \sin C \cos a. \quad (3.7)$$

Novamente, permutando A por C e a por c , a equação 3.7 fica:

$$\cos C = \sin A \cos c. \quad (3.8)$$

Tem-se, ainda

$$\cos b = \frac{OA'}{OC} = \frac{\frac{OA'}{OB'}}{\frac{OB'}{OC}} = \cos a \cos c. \quad (3.9)$$

Substituindo na equação 3.9, os valores:

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin C}$$

e

$$\cos c = \frac{\cos C}{\sin A},$$

obtidos, respectivamente, a partir das equações 3.7 e 3.8, a equação 3.9 fica:

$$\cos b = \cot A \cot C. \quad (3.10)$$



Embora as fórmulas deduzidas tenha sido realizada apenas para lados inferiores a 90° , pode-se demonstrar para triângulos obtusângulos, a qual será abordada nas seções 3.2.1 e 3.2.3.

Note que no caso do triângulo esférico birretângulo e trirretângulo, as relações em que aparecem $\tan 90^\circ$ não são aplicáveis.

3.2 Relações trigonométricas

3.2.1 Lei do cosseno para lados

Proposição 3.2. *Em todo triângulo esférico, o cosseno de um lado qualquer é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados, mais o produto dos senos desses mesmos lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.*

Demonstração.

- **1º. caso:** Três lados menores do que um quadrante.

Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O . Pelo ponto C traçam-se as retas t_1 e t_2 tangentes no ponto C , respectivamente, aos arcos \widehat{AC} e \widehat{BC} , o que acarreta a $O\hat{C}D = O\hat{C}E = 90^\circ$, onde o ponto D é a intersecção da reta t_1 com a semirreta \overrightarrow{OA} e o ponto E , a intersecção da reta t_2 com \overrightarrow{OB} conforme mostra a Figura 3.2.

Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos CDE e ODE ,

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CD \cdot CE \cdot \cos D\hat{C}E$$

e

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos D\hat{O}E.$$

Como $D\hat{O}E = A\hat{O}B = c$ e $D\hat{C}E = C$,

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CD \cdot CE \cdot \cos C, \quad (3.11)$$

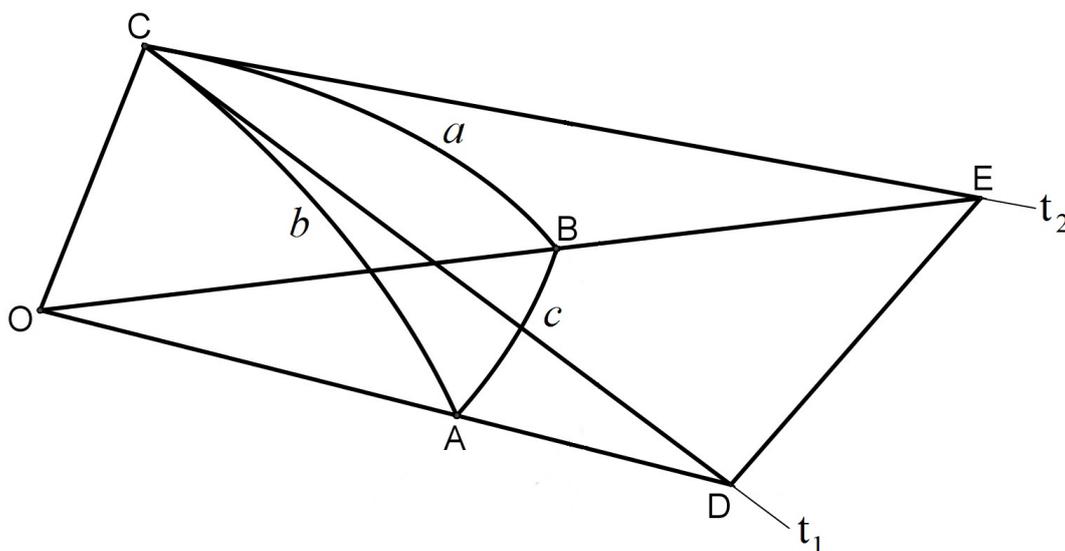


Figura 3.2 Lei do cosseno para lados

e

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos c. \quad (3.12)$$

Igualando as equações 3.11 e 3.12,

$$2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos c - 2 \cdot CD \cdot CE \cdot \cos C = (OD^2 - CD^2) + (OE^2 - CE^2)$$

Como os triângulos OCD e OCE são retângulos, aplicando Teorema de Pitágoras, tem-se

$$OD \cdot OE \cdot \cos c - CD \cdot CE \cdot \cos C = OC^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por $OD \cdot OE$,

$$\cos c = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OC}{OE} + \frac{CD}{OD} \cdot \frac{CE}{OE} \cdot \cos C,$$

portanto, tem-se:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad (3.13)$$

De modo análogo, demonstra-se que:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (3.14)$$

e

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B. \quad (3.15)$$

A seguir, serão analisados casos em que os lados de um triângulo esférico são obtusos.

- **2º. caso:** Um dos lados é obtuso.

Seja um triângulo esférico ABC com um dos lados obtuso, \widehat{BC} , como mostra a Figura 3.3.

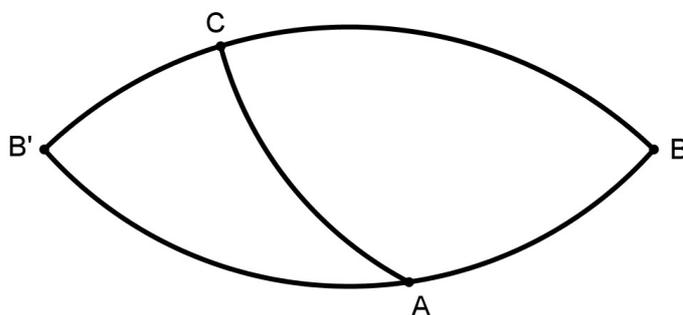


Figura 3.3 Triângulo esférico ABC com \widehat{BC} obtuso.

Os círculos máximos BC e BA intersectam-se nos pontos B e B' , com B e B' antípodas. Assim, obtem-se um triângulo $AB'C$, com $B'C = a'$ e $B'A = c'$. Aplicando a equação 3.13 nesse triângulo, tem-se

$$\cos c' = \cos a' \cos b + \sin a' \sin b \cos B'\widehat{CA},$$

mas, $a' = 180^\circ - a$, $c' = 180^\circ - c$ e $B'\widehat{CA} = 180^\circ - C$, portanto,

$$\cos(180^\circ - c) = \cos(180^\circ - a) \cos b + \sin(180^\circ - a) \sin b \cos(180^\circ - C),$$

Como $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ e $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, tem-se

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

que é a relação 3.13.

- **3º. caso:** Dois lados são obtusos.

Seja um triângulo esférico ABC com lados \widehat{BC} e \widehat{AC} obtusos, como mostra a Figura 3.4.

Ao prolongar \widehat{BC} e \widehat{AC} , os arcos intersectam-se em C' , obtendo, assim, um triângulo ABC' , com $C'B = a'$ e $C'A = b'$. Aplicando a equação 3.13 nesse triângulo, tem-se

$$\cos c = \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos \widehat{BC'A},$$

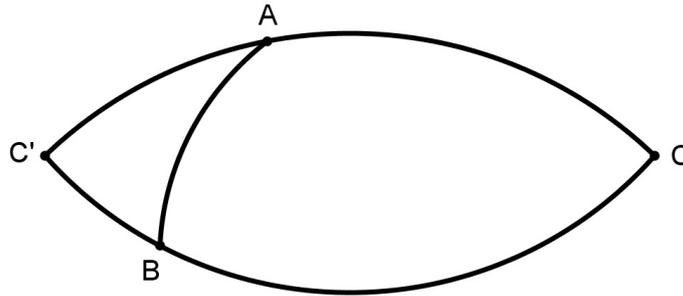


Figura 3.4 Triângulo esférico com dois lados obtusos.

mas, $a' = 180^\circ - a$, $b' = 180^\circ - b$ e, pela proposição 2.54, $\widehat{BC'A} = \widehat{BCA} = C$, portanto,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

resultado idêntico à relação 3.13. ■

3.2.2 Lei do cosseno para ângulos

Proposição 3.3. *Em todo triângulo esférico, o cosseno de um ângulo qualquer é igual ao oposto da diferença entre o produto dos cossenos dos outros dois ângulos e o produto de seus senos pelo cosseno do lado que formam.*

Demonstração.

Seja o triângulo esférico polar $A'B'C'$ de ABC . Pela proposição 2.68 tem-se que $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$, $c' = 180^\circ - C$ e $A' = 180^\circ - a$.

Aplicando a lei do cosseno para lados ao triângulo polar $A'B'C'$, a equação 3.14, tem-se:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Assim,

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - a).$$

portanto,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \quad (3.16)$$

De modo análogo, prova-se as seguintes relações:

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \quad (3.17)$$

e

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \quad (3.18)$$

■

3.2.3 Lei dos senos

Proposição 3.4. *Em um triângulo esférico, os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo esférico e O o centro da esfera. Na Figura 3.5, o ponto H é a projeção do vértice C no plano AOB , logo CH é perpendicular a esse plano.

Sejam os pontos A' e B' as projeções do ponto H , respectivamente, a OA e OB . Portanto, os triângulos $A'HC$, $B'HC$, $OA'C$ e $OB'C$ são retângulos. Assim,

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin \widehat{HA'C} = \frac{CH}{CA'} \\ \sin B &= \sin \widehat{HB'C} = \frac{CH}{CB'} \end{aligned}$$

Daqui,

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CB'}{CA'} = \frac{\frac{CB'}{OC}}{\frac{CA'}{OC}} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

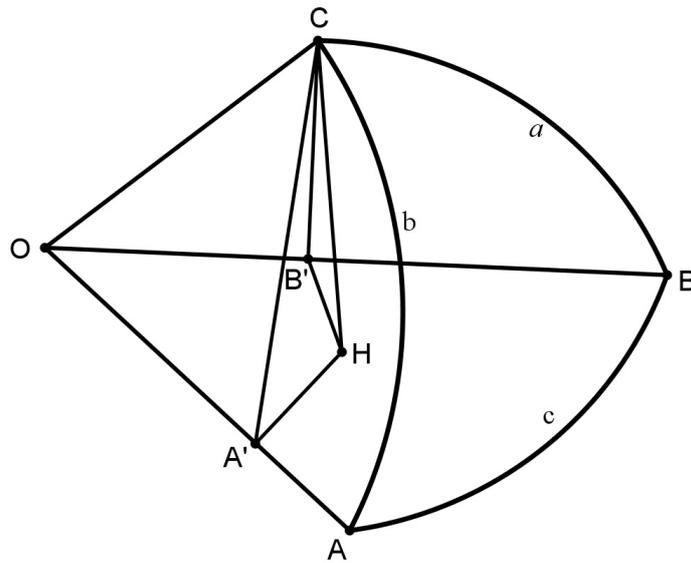


Figura 3.5 Lei dos senos

Logo,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}.$$

Similarmente, prova-se que:

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Portanto,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (3.19)$$

É imediato que a relação 3.19 é válida para triângulo esférico obtusângulo, pois $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. ■

3.2.4 Outras relações

Proposição 3.5. Analogias de Bessel

Em um triângulo esférico ABC , verifica-se as seguintes relações:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \quad (3.20)$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \quad (3.21)$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \quad (3.22)$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \quad (3.23)$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \quad (3.24)$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C. \quad (3.25)$$

Demonstração.

Ao substituir o valor de $\cos a$ expresso na equação 3.14 na equação 3.15,

$$\cos b = (\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A) \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

E, usando a relação fundamental da trigonometria, $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$, obtem-se a relação 3.20:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A.$$

Para obter as demais equações, basta fazer a permutação cíclica das letras na equação 3.20. ■

Proposição 3.6. *Em um triângulo esférico ABC , verifica-se as seguintes relações:*

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a. \quad (3.26)$$

$$\sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \quad (3.27)$$

$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \quad (3.28)$$

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \quad (3.29)$$

$$\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \quad (3.30)$$

$$\sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c. \quad (3.31)$$

Demonstração.

Seja o triângulo esférico polar $A'B'C'$ de ABC . Pela proposição 2.68 tem-se que $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$, $c' = 180^\circ - C$, $A' = 180^\circ - a$, $B' = 180^\circ - b$ e $C' = 180^\circ - c$.

Usando o triângulo polar $A'B'C'$, a equação 3.20 fica:

$$\sin a' \cos B' = \cos b' \sin c' - \sin b' \cos c' \cos A',$$

Assim, obtem-se a equação 3.26:

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a.$$

Para obter as demais equações, basta fazer a permutação cíclica das letras na equação 3.26. ■

Proposição 3.7. *Em um triângulo esférico ABC, verifica-se as seguintes relações:*

$$\cos c \cos A = \sin c \cot b - \sin A \cot B; \quad (3.32)$$

$$\cos c \cos B = \sin c \cot a - \sin B \cot A; \quad (3.33)$$

$$\cos a \cos B = \sin a \cot c - \sin B \cot C; \quad (3.34)$$

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B; \quad (3.35)$$

$$\cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A; \quad (3.36)$$

$$\cos b \cos A = \sin b \cot c - \sin A \cot C. \quad (3.37)$$

Demonstração.

Seja a equação 3.20,

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

e, a lei dos senos 3.19,

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A.$$

dividindo as equações acima, membro a membro,

$$\frac{\sin a \cos B}{\sin a \sin B} = \frac{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}{\sin b \sin A},$$

obtem-se a equação 3.32:

$$\cos c \cos A = \sin c \cot b - \sin A \cot B.$$

Permutando ciclicamente as letras na equação 3.32, obtem-se as equações restantes. ■

Proposição 3.8. Fórmula de Cagnoli

Em um triângulo esférico ABC , verifica-se as seguintes relações:

$$\sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b; \quad (3.38)$$

$$\sin b \sin a + \cos b \cos a \cos C = \sin B \sin A - \cos B \cos A \cos c; \quad (3.39)$$

$$\sin c \sin b + \cos c \cos b \cos A = \sin C \sin B - \cos C \cos B \cos a. \quad (3.40)$$

Demonstração.

Utilizando as equações 3.15 e 3.17, e multiplicando essas equações, membro a membro,

$$\cos b(-\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b) = \cos B(\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B),$$

e usando a relação fundamental da trigonometria, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, tem-se:

$$-\cos b \cos A \cos C + \sin A \sin C - \sin^2 b \sin A \sin C = \cos B \cos a \cos c + \sin a \sin c - \sin^2 B \sin a \sin c. \quad (3.41)$$

Aplicando a lei dos senos, 3.19,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

verifica-se que:

$$\sin^2 b \sin A \sin C = \sin b \sin C \sin B \sin a = \sin^2 B \sin a \sin c. \quad (3.42)$$

Das equações 3.41 e 3.42, obtém-se a equação 3.38:

$$\sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b = \sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B$$

Permutando ciclicamente as letras em 3.38, obtém-se as duas equações restantes. ■

Proposição 3.9. Fórmula de borda

Se $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo esférico ABC definido pelos lados a , b e c , verifica-se que:

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}; \quad (3.43)$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}; \quad (3.44)$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}. \quad (3.45)$$

Demonstração.

Seja a lei do cosseno para lados, equação 3.14,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

deduz-se que

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Substituindo este valor nas expressões:

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

e

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A,$$

obtem-se

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}. \quad (3.46)$$

Donde tem-se aplicado as relações

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Posto que para o semiperímetro, verificam-se as relações $\frac{a+b-c}{2} = s-c$, $\frac{a+c-b}{2} = s-b$ e $\frac{b+c-a}{2} = s-a$. Ao substituí-los na equação 3.46, obtém-se ¹

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin b \sin c}}. \quad (3.47)$$

Efetando um processo análogo, demonstra-se que

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}. \quad (3.48)$$

Consequentemente,

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

De modo análogo, demonstra-se as outras duas equações. ■

A fórmula de borda, permite resolver problemas de triângulo esférico quando são conhecidos os três lados.

Proposição 3.10. Analogias de Gauss-Delambre

Em um triângulo esférico ABC , verifica-se as seguintes relações:

$$\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2}; \quad (3.49)$$

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2}; \quad (3.50)$$

$$\cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2}; \quad (3.51)$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2}; \quad (3.52)$$

Demonstração.

De modo análogo, como foi deduzida as equações 3.47 e 3.48, obtém-se as relações para o ângulo B :

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-a)}{\sin a \sin c}}. \quad (3.53)$$

¹Observe que na fórmula antes do radical deveria ter o sinal \pm . Entretanto, se os ângulos estão entre 0° e 180° , os senos, os cossenos e os tangentes das metades desses ângulos são positivas. Daí, a manutenção do sinal $+$. Mas, nas aplicações astronômicas, o sinal $-$ deve também ser considerado.

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}. \quad (3.54)$$

Sabe-se que

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B,$$

ou,

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2},$$

Utilizando as relações 3.47, 3.48, 3.53 e 3.54 na expressão acima, obtem

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

Mas, por analogia à equação 3.47, tem-se

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}$$

Logo,

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c} \sin \frac{C}{2}$$

Porém, sabe-se da transformação trigonométrica em produto que

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Assim,

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\sin c} \sin \frac{C}{2}$$

Mas, $\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}$, Portanto,

$$\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2}$$

De modo análogo, demonstra-se demais relações. ■

Proposição 3.11. Analogias de Napier

Em um triângulo esférico ABC , verifica-se as seguintes relações:

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \tan \frac{c}{2}; \quad (3.55)$$

$$\tan \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \tan \frac{c}{2}; \quad (3.56)$$

$$\tan \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}; \quad (3.57)$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}. \quad (3.58)$$

Demonstração.

Para obter a expressão de $\tan \frac{a+b}{2}$, basta ter em conta que

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}$$

e, utilizar as analogias de Gauss-Delambre, 3.49 e 3.51,

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{\cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sin \frac{C}{2}}}{\frac{\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{c}{2}}{\sin \frac{C}{2}}}.$$

Assim,

$$\tan \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \tan \frac{c}{2}.$$

Analogamente, prova-se as equações restantes. ■

3.2.5 Resolução de triângulos esféricos

As fórmulas 3.19, 3.13 e 3.16 e sua apropriada combinação, permitem abordar a resolução de triângulos esféricos em todos os casos, em função dos lados e ângulos que são:

- 1º. caso: Dados os três lados.
- 2º. caso: Dados dois lados e o ângulo compreendido.
- 3º. caso: Dados dois lados e o ângulo oposto a um deles.
- 4º. caso: Dados os três ângulos.
- 5º. caso: Dados dois ângulos e o lado adjacente.
- 6º. caso: Dados dois ângulos e o lado oposto a um deles.

Resolvendo o triângulo polar, os casos 4, 5 e 6 reduzem-se, respectivamente, aos casos 1, 2 e 3, de modo que basta considerar os três primeiros casos.

O primeiro caso pode ser resolvida com aplicação da lei do cosseno para lados ou utilizar as fórmulas de borda.

O segundo caso pode ser resolvida através da lei do cosseno para lados, para calcular o terceiro lado, e os ângulos restantes, através da lei do seno. Também, pode ser utilizada as analogias de Napier, resolvendo um sistema de equações, e depois aplicar a lei do seno.

O terceiro caso pode ser resolvida mediante a lei do seno, para determinar o outro lado oposto, e para o terceiro ângulo e lado, através da resolução de um sistema envolvendo a lei do cosseno e do seno.

Ao determinar o quarto elemento, utilizando as leis do seno e do cosseno, as fórmulas de borda ou analogias de Napier, pode ocorrer ambiguidade na solução do quarto elemento, para isso, as equações da proposição 3.7 são úteis para analisar a solução viável, pois essas equações envolvem quatro elementos.

As analogias de Bessel e as equações da proposição 3.6 são úteis quando se conhecem quatro elementos para determinar o quinto, também, são úteis para verificar a ambiguidade na solução da equação.

3.3 Teorema de Menelau

Definição 3.12. Sejam A e B pontos distintos de um plano. AB denota **segmento orientado** de A para B . Assim, $AB = -BA$ significa que os segmentos orientados AB e BA têm orientações opostas.

Definição 3.13. Seja L , distinta de A e B , um ponto da reta \overleftrightarrow{AB} . A razão $\frac{AL}{LB}$ é denominada **razão orientada**.

- Se L está entre A e B , a razão $\frac{AL}{LB} > 0$. De fato, neste caso, \overrightarrow{AL} e \overrightarrow{LB} têm as mesmas orientações (Veja a Figura 3.6(a)).
- Se L não está entre A e B , a razão $\frac{AL}{LB} < 0$. De fato, neste caso, \overrightarrow{AL} e \overrightarrow{LB} têm orientações opostas (Veja a Figura 3.6(b)).



Figura 3.6 Razão orientada: $\frac{AL}{LB}$

Lema 3.14. Teorema de Menelau plana: Seja ABC um triângulo e L , M e N são, respectivamente, os pontos sobre as retas suportes dos lados \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AC} . Os pontos L , M e N são colineares se, e somente se,

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1. \quad (3.59)$$

Demonstração.

Suponha que L , M e N são pontos colineares. Traçando uma reta paralela à \overleftrightarrow{LN} e que passe pelo ponto A , essa reta intersecta \overleftrightarrow{BC} no ponto D (Veja a Figura 3.7). Considerando as paralelas e as retas transversais \overleftrightarrow{BA} e \overleftrightarrow{BD} tem-se, pelo Teorema de Tales, e considerando segmentos colineares com as mesmas orientações,

$$\frac{AL}{DM} = \frac{LB}{MB},$$

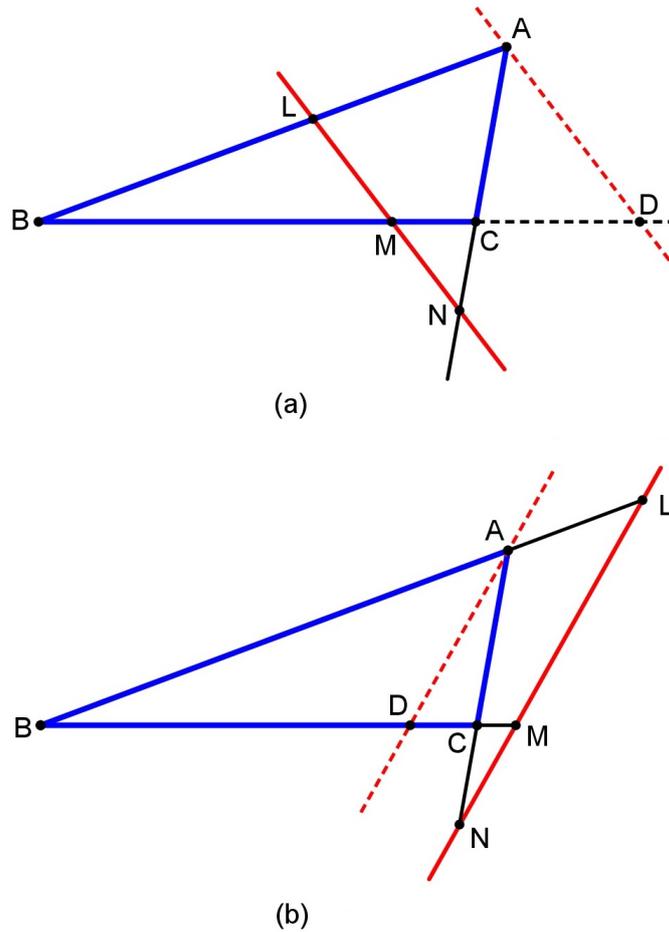


Figura 3.7 Teorema de Menelau: AD paralela a LN

ou seja,

$$\frac{AL}{DM} \cdot \frac{MB}{LB} = 1. \quad (3.60)$$

Agora, considerando as paralelas e as retas transversais \overleftrightarrow{MD} e \overleftrightarrow{NA} tem-se, considerando segmentos colineares com as mesmas orientações,

$$\frac{DM}{AN} = \frac{CM}{CN},$$

ou seja,

$$\frac{DM}{AN} \cdot \frac{CN}{CM} = 1. \quad (3.61)$$

Multiplicando, membro a membro, as equações 3.60 e 3.61,

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{MB}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1.$$

Pela definição 3.12, tem-se: $MB = -BM$, $CM = -MC$ e $AN = -NA$. Portanto,

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1.$$

Pode-se verificar o sinal das razões orientadas da equação 3.59 através da definição 3.13. Os sinais das razões orientadas da Figura 3.7(a) são $\frac{AL}{LB} > 0$, $\frac{BM}{MC} > 0$ e $\frac{CN}{NA} < 0$, enquanto que da Figura 3.7(b) são $\frac{AL}{LB} < 0$, $\frac{BM}{MC} < 0$ e $\frac{CN}{NA} < 0$. Portanto, $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$ já que para os dois casos, o número de termos da razão orientada negativa é ímpar.

Reciprocamente, sejam os três pontos L , M e N situados, respectivamente, sobre os lados \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AC} do triângulo ABC , satisfazendo a relação 3.59.

Agora, trace a reta \overleftrightarrow{LM} e, seja N' , o ponto que \overleftrightarrow{LM} intersecta \overleftrightarrow{AC} , assim,

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN'}{N'A} = -1. \quad (3.62)$$

Comparando com as equações 3.59 com 3.62, tem-se que:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{CN'}{N'A}.$$

Ou seja, o ponto N coincide com N' e, por conseguinte, os pontos L , M e N são colineares. ■

Lema 3.15. *Se C é o ponto de intersecção entre o diâmetro DD' com a corda AB de um círculo de centro O , como mostra a Figura 3.8, então vale a seguinte relação:*

$$\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}} = \frac{AC}{BC}. \quad (3.63)$$

Demonstração.

Os pontos M e N são, respectivamente, as projeções dos pontos A e B no diâmetro DD' . Assim, os triângulos OMA e ONB são retângulos. Portanto, tem-se as seguintes razões trigonométricas:

$$\frac{AM}{AO} = \sin \widehat{AD'} = \sin \widehat{AD} \quad (3.64)$$

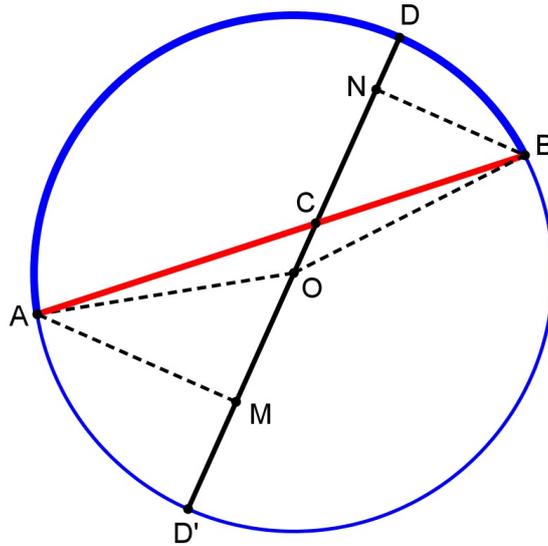


Figura 3.8 Lema do Teorema de Menelau

e

$$\frac{BN}{BO} = \sin \widehat{BD}. \quad (3.65)$$

Dividindo as equações 3.64 e 3.65,

$$\frac{AM}{BN} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}}. \quad (3.66)$$

Como os triângulos AMC e BNC são semelhantes,

$$\frac{AM}{BN} = \frac{AC}{BC}. \quad (3.67)$$

Assim, das equações 3.66 e 3.67, tem-se:

$$\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}} = \frac{AC}{BC}.$$

■

Lema 3.16. Se por um ponto C , exterior a um círculo de centro O , conduz duas retas secantes, a primeira, que intersecta nos pontos A e B e o segundo, que passa pelo centro e intersecta nos pontos D e D' , como mostra a Figura 3.8, então vale a seguinte relação:

$$\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}} = \frac{AC}{BC}. \quad (3.68)$$

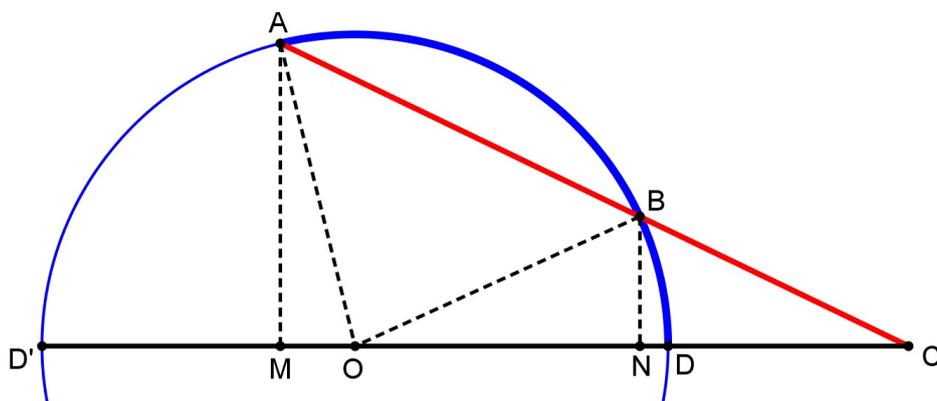


Figura 3.9 Lema do Teorema de Menelau

Demonstração.

Os pontos M e N são, respectivamente, as projeções dos pontos A e B na reta secante $\overleftrightarrow{DD'}$. Assim, os triângulos OMA e ONB são retângulos. Portanto, tem-se as seguintes razões trigonométricas:

$$\frac{AM}{AO} = \sin \widehat{AD'} = \sin \widehat{AD} \quad (3.69)$$

e

$$\frac{BN}{BO} = \sin \widehat{BD}. \quad (3.70)$$

Dividindo as equações 3.69 e 3.70,

$$\frac{AM}{BN} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}}. \quad (3.71)$$

Como os triângulos AMC e BNC são semelhantes,

$$\frac{AM}{BN} = \frac{AC}{BC}. \quad (3.72)$$

assim, das equações 3.71 e 3.72, tem-se:

$$\frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{BD}} = \frac{AC}{BC}.$$

■

Proposição 3.17. *Sejam \widehat{AD} , \widehat{AC} , \widehat{BC} e \widehat{DE} , arcos de círculo máximo de uma esfera de centro O e, que são menores do que um semicírculo. Se entre dois arcos \widehat{ABD} e \widehat{AEC} , tem dois outros*

arcos \widehat{BFC} e \widehat{DFE} que intersectam entre si no ponto F (Veja a Figura 3.10(a)) então, vale a seguinte relação:

$$\frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{EA}} = \frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{FB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{DA}}. \quad (3.73)$$

Demonstração.

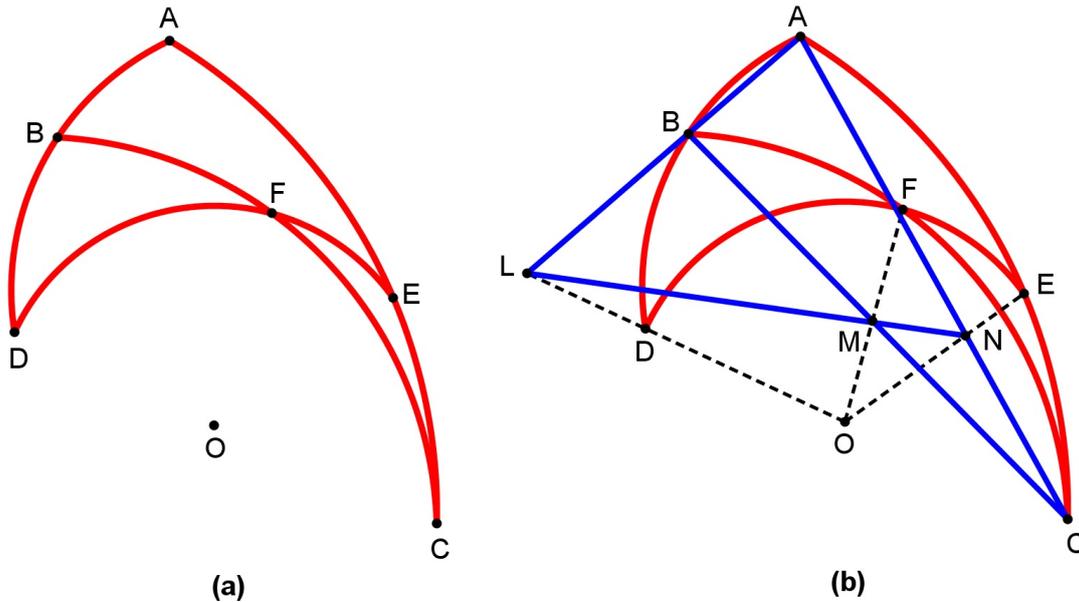


Figura 3.10 Teorema de Menelau

O arco \widehat{ABD} e o centro O estão no mesmo plano $\{O, A, B\}$, consequentemente, as retas \overleftrightarrow{OD} e \overleftrightarrow{AB} são coplanares que podem ser paralelas ou concorrentes.

Caso as retas sejam concorrentes, \overleftrightarrow{OD} e \overleftrightarrow{AB} intersectam em L , um ponto exterior (Veja a Figura 3.10(b)). Assim, pelo lema 3.16, tem-se a razão:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{DA}}. \quad (3.74)$$

O arco \widehat{AEC} e o centro O estão no mesmo plano $\{O, A, C\}$, consequentemente, a corda AC e o raio OE são coplanares e que se intersectam no ponto N . Assim, pelo lema 3.15, tem-se a seguinte razão:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{EA}}. \quad (3.75)$$

De modo análogo, o arco \widehat{BFC} e o centro O estão no mesmo plano $\{O, B, C\}$, consequentemente, a corda BC e o raio OF são coplanares e, intersectam-se no ponto M . Assim, pelo lema

3.15, tem-se a relação:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{FB}}. \quad (3.76)$$

A reta \overleftrightarrow{AB} e as cordas AC e BC estão no mesmo plano $\{A, B, C\}$, pelo axioma de determinação de um plano. Como L , N e M pertencem, respectivamente, à \overleftrightarrow{AB} , AC e BC , ou seja, esses pontos pertencem ao plano $\{A, B, C\}$. E, pelo lema 3.14, conclui-se que L , N e M são colineares e, que satisfaz a relação 3.59:

$$\frac{LA}{LB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Ou seja,

$$\frac{NC}{NA} = \frac{MC}{MB} \cdot \frac{LB}{LA}. \quad (3.77)$$

Substituindo as equações 3.74, 3.75 e 3.76 em 3.77, obtém-se;

$$\frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{EA}} = \frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{FB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BD}}{\sin \widehat{DA}}.$$

A demonstração é análoga, no caso em que as retas \overleftrightarrow{OD} e \overleftrightarrow{AB} são paralelas (Veja a Figura 3.11). ■

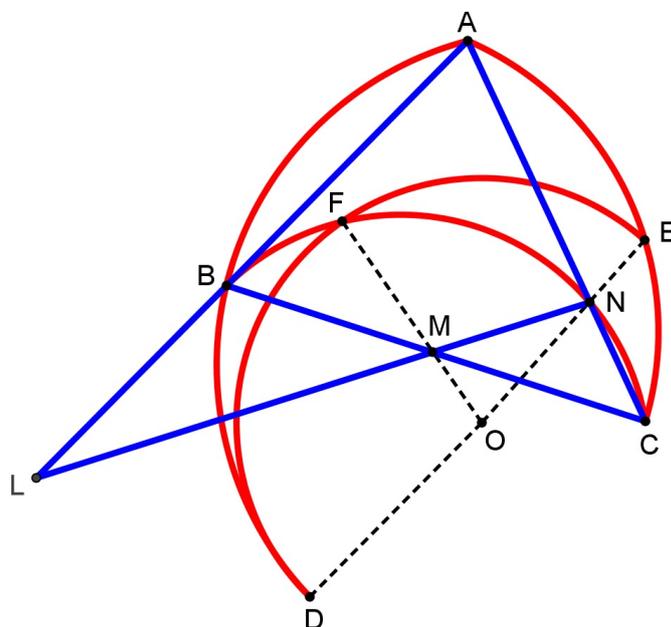


Figura 3.11 Teorema de Menelau com OD e AB paralelos

PARTE II

A esfera como modelo físico

O globo terrestre

Neste capítulo será apresentado um breve histórico sobre a esfericidade da Terra e os referenciais utilizados para o globo terrestre. As principais referências utilizadas foram: Sedgwick (1950), Ronan (2001), Alves (2004) e Duarte (2006).

4.1 A esfericidade da Terra

As primeiras evidências da esfericidade da Terra vem de fontes gregas antigas, não há relato de como a forma esférica da Terra foi descoberta. De acordo com Diogenes Laércio (por volta do século III, Livro VIII, p. 48, apud HEATH, 1932, p. 11), “Pitágoras foi o primeiro que chamou ... a terra redonda, embora de acordo com Theophrastus atribua a Parmênides”.

No século IV a.C, Aristóteles de Estagira (384 a.C. - 322 a.C.) apresenta argumentos muito claros para mostrar a forma da Terra. Segundo Sedgwick:

“Sua forma esférica, além de lógica, é evidente aos sentidos: durante os eclipses da Lua, o contorno da sombra da Terra é sempre curvo. Além disso, se viaja um pouco para o sul ou para o norte, nota-se considerável mudança nas estrelas do céu, sendo algumas delas visíveis no Egito e não nas terras mais setentrionais, e observando-se, ao sul, o ocaso de certas estrelas que no norte jamais desaparecem do horizonte.” (SEDGWICK, 1950, p. 80)

A figura 4.1 mostra a esfericidade da Terra evidenciada pela sombra projetada na Lua durante o eclipse.

No século III a.C., Eratóstenes de Cirene (276 - 195 a.C), astrônomo e geógrafo grego,



Figura 4.1 Imagens do eclipse lunar de 28 de agosto de 2007.

Fonte: <http://www.nasa.gov/vision/universe/watchtheskies/eclipseimages.html>

conseguiu determinar a medição do tamanho da Terra, usando o conhecimento do ângulo de elevação do Sol ao meio-dia no solstício de verão, em Alexandria e em Siene (atual Assuã, Egito). Na seção 4.5, ver-se-á como essa medida foi efetuada por Eratóstenes.

No século XVII, Isaac Newton (1642 - 1727) publicou, em 1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que fundamentaram a Mecânica Clássica e demonstrou que a Terra não era uma esfera perfeita. Segundo Porto, a ideia do achatamento da forma da Terra, vem das leis da mecânica newtoniana:

“Newton explicou que se a Terra não possuísse um movimento de rotação em torno de seu eixo ela teria a forma esférica. No entanto, devido a esse movimento de rotação, existem forças inerciais que fazem com que ela seja achatada nos polos e alongada no equador.” (PORTO, 2008, p. 07)

Como a Terra é de fato ligeiramente achatada nos polos e alargada no Equador, a forma da Terra que mais se aproxima da real é o **elipsóide de revolução**¹, uma figura que pode ser obtida a partir da rotação de uma elipse em torno de seu semi-eixo menor (Veja a Figura 4.2).

¹No início do século XIX, vários cientistas de renome, tais quais Clairaut (1713-1765), Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855) e Bessel (1784-1846) lançaram as bases da nova teoria, a geóide, que atribuiu à Terra uma forma mais irregular e complexa do que aquela adotada pelo modelo elipsoidal. (Fonte: SÁ, 2014, pp. 9-10)

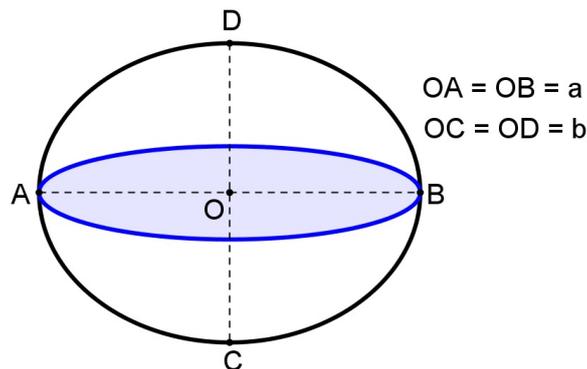


Figura 4.2 Elipsóide de revolução.

A forma do elipsóide é dada pelo achatamento f que indica o quanto o elipsóide se aproxima da forma esférica, dada pela seguinte expressão:

$$f = \frac{a - b}{a}, \quad (4.1)$$

onde a e b são, respectivamente, as medidas do semi-eixo maior e do semi-eixo menor. O achatamento é a razão entre o módulo da diferença dos semi-eixos e o semi-eixo maior.

Devido à irregularidade na forma terrestre, várias medidas para raio equatorial (a) e raio polar (b) foram obtidas por vários pesquisadores e, assim, tornou-se necessário adotar o Elipsóide Internacional de Referência. Em 1979, a conferência realizada em Canberra, a IUGG (The International Union and Geodesy and Geophysics) adotou o Geodetic Reference System 1980 tendo como parâmetro de referência:

- Raio equatorial: $a = 6378137$ m;
- Raio polar: $b = 6356752,3141$ m.

Atribuindo esses valores na equação 4.1, obtém-se um achatamento de $f = 0,0035281$. Segundo Alves (2004, p. 20), o valor relativamente baixo de f permite, com a finalidade de aplicação didática, desprezar esse achatamento e adotar a esfera como modelo de representação da superfície terrestre, chamado **globo terrestre**.

Eratóstenes foi o primeiro a tentar produzir um mapa do mundo ao incorporar paralelos e meridianos, com base no conhecimento geográfico disponível da época. Hiparco de Nicéia (190

a.C. - 120 a.C.) foi o primeiro a especificar as posições dos lugares na Terra usando latitude e longitude como coordenadas.

4.2 Principais pontos e linhas do globo terrestre

Definição 4.1. *Os principais elementos definidores da posição de um lugar na superfície terrestre são:*

- O **eixo terrestre** é uma linha imaginária que passa pelo centro da Terra em torno da qual a Terra executa seu movimento de rotação.
- Os **polos terrestres** são pontos, diametralmente opostos, decorrente da intersecção da superfície da Terra com o eixo terrestre. O **polo norte** ou **boreal** situa-se no oceano Ártico, já o **polo sul** ou **austral** situa-se no continente Antártico.
- O **Equador terrestre** ou a **linha do Equador** é o círculo máximo resultante da intersecção da superfície terrestre com o plano perpendicular ao eixo terrestre.
- O plano que contém o Equador terrestre chama-se **plano do Equador**.
- O plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o **hemisfério norte** e o **hemisfério sul** que contém, respectivamente, o polo norte e o polo sul.
- Os **paralelos terrestres** são os círculos resultantes da intersecção da superfície terrestre com os planos paralelos ao plano do Equador. Entre os paralelos destacam-se o Trópico de Câncer, o Trópico de Capricórnio, o Círculo Polar Ártico e o Círculo Polar Antártico.
- A **vertical do lugar** é a reta suporte do vetor aceleração da gravidade em um ponto da superfície terrestre onde se realiza a observação astronômica. O instrumento utilizado para materializar a direção da vertical é o fio de prumo.
- O **plano do horizonte** é o plano perpendicular à vertical do lugar.

- Os **meridianos** são os semicírculos determinados pelos polos norte e sul através da intersecção da superfície terrestre com um semiplano que tem como origem o eixo terrestre. Cada meridiano possui o seu antimeridiano, isto é, ao conjunto de dois meridianos diametralmente opostos forma-se um círculo máximo. O meridiano que contém os polos e um dado local na superfície terrestre é denominado **meridiano do lugar**.
- O **meridiano de Greenwich** foi estabelecido através de uma convenção mundial, realizado em 1884 na cidade de Washington, como meridiano de referência com o intuito de estabelecer uma padronização de horários em qualquer ponto da superfície terrestre. O meridiano de Greenwich leva esse nome porque passa sobre Observatório Real de Greenwich situado na cidade de Londres na Inglaterra.
- A **linha internacional de mudança de data** é o antimeridiano de Greenwich. Quando se cruza esta linha há uma diferença de um dia no calendário.

4.3 Coordenadas geográficas

Definição 4.2. O sistema de coordenada geográfica tem as seguintes características:

- Origem da coordenada: o centro de massa terrestre;
- Plano fundamental: o plano do Equador;
- Círculo máximo fundamental: a linha do Equador;
- Eixo fundamental: o eixo terrestre;
- Polos: o polo norte e o polo sul;
- Círculo máximo secundário: o meridiano de Greenwich;
- Ponto fundamental: o ponto de intersecção entre o meridiano de Greenwich e a linha do equador;

- *Sentido do arco: Retrógrado e direto.*

A posição de um local sobre a superfície terrestre é determinado pelas coordenadas angulares, **latitude** e **longitude**.

Definição 4.3. A **longitude geográfica** (λ) de um lugar é o arco, medido sobre a linha do equador, entre o meridiano de Greenwich e o meridiano do lugar. A longitude varia de -180° a $+180^\circ$. A longitude do meridiano de Greenwich é 0° . Adota-se o sinal positivo para longitude de pontos localizados a leste de Greenwich e o sinal negativo para pontos situados a oeste.

Também, costuma-se representar a longitude geográfica como a diferença entre a hora do lugar e a hora de Greenwich. Como um dia é definido como período de rotação da Terra em torno do seu eixo, a Terra percorre um arco de 360° em 24 horas, portanto, um arco de 15° corresponde à 1 hora, abreviada por 1 *h*. Assim, em unidade de tempo, a longitude varia de $-12 h$ a $+12 h$.

Definição 4.4. A **latitude geográfica** (ϕ) de um lugar é o arco, medido ao longo do meridiano do lugar, entre a linha do Equador e o paralelo do lugar. O referencial da latitude é a linha do Equador (0°). A latitude varia entre -90° e $+90^\circ$, sendo positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul.

Na navegação astronômica, o termo colatitude é muito utilizado.

Definição 4.5. A **colatitude** (η) é o arco medido sobre o meridiano do lugar, entre o polo Norte e o paralelo do lugar.

Proposição 4.6. A colatitude é o complemento da latitude geográfica, ou seja,

$$\eta = 90^\circ - \phi.$$

Demonstração.

Demonstração trivial, conforme as definições 4.4, 4.5 e do arco complementar. ■

A colatitude correspondente ao polo Norte, à linha do Equador e ao polo Sul são, respectivamente, iguais a 0° , 90° e 180° .

Proposição 4.7. *A latitude geográfica é definida, também, como o ângulo entre a vertical do lugar e o plano do Equador.*

Demonstração.

A vertical do lugar B é a semirreta \overrightarrow{OB} , com O o centro da Terra, como mostra a Figura 4.3. O meridiano de B intersecta a linha do Equador em B' , assim, $\phi = \widehat{BB'}$ é a latitude do ponto B .

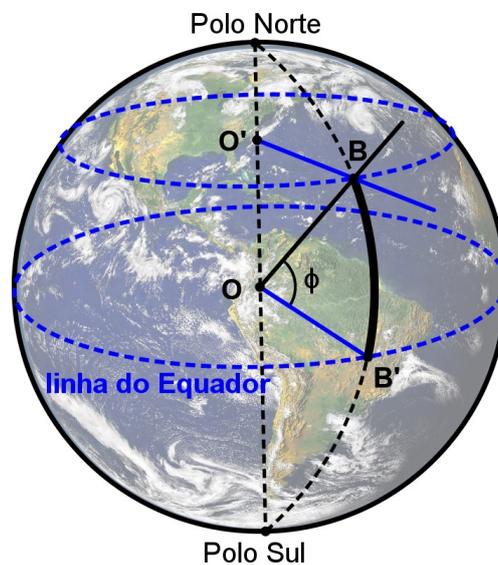


Figura 4.3 Latitude do ponto B

Sendo O' o centro do paralelo terrestre, tem-se que $\overrightarrow{OB'}$ e $\overrightarrow{O'B}$ são paralelas. Assim, o ângulo entre a vertical do lugar e o plano do Equador é igual ao ϕ , pois são ângulos correspondentes.

■

Proposição 4.8. *Todos os pontos que tem o mesmo paralelo terrestre possuem a mesma latitude e todos os pontos sobre um mesmo meridiano tem a mesma longitude.*

Demonstração.

Pela definição 4.4 e pela proposição 2.46, todos os pontos que tem o mesmo paralelo possuem a mesma latitude.

Para provar que todos os pontos sobre um mesmo meridiano tem a mesma longitude, basta considerar que esse meridiano e o meridiano de Greenwich sejam os lados do fuso esférico. Ora, qualquer ângulo esférico com vértice no polo Norte (ou Sul) e lados nos meridianos citados, pela proposição 2.54 têm o mesmo arco que determina a longitude. ■

Pela proposição 2.59, a posição de um ponto qualquer da superfície terrestre fica univocamente definido pela sua latitude e sua longitude com respectivos hemisférios e posição em relação ao meridiano de Greenwich.

Por exemplo, na Figura 4.4, tem-se que $\phi = \widehat{P'P}$ é a latitude de P enquanto que $\lambda = \widehat{GP'}$ é a longitude de P .

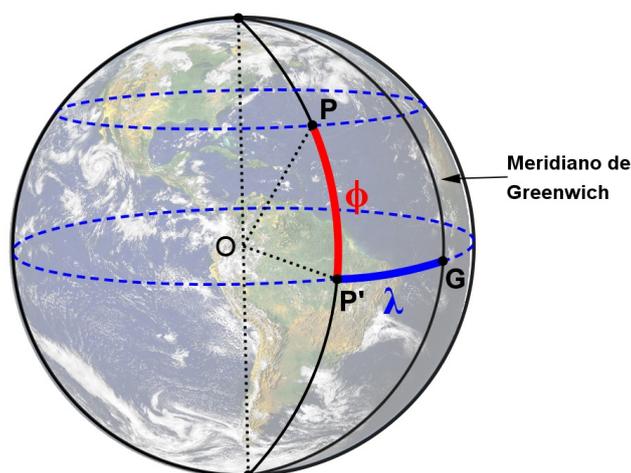


Figura 4.4 Latitude e longitude do ponto P .

O sistema de posicionamento global GPS (do inglês global positioning system) é um sistema de navegação por satélite que fornece a um aparelho receptor GPS a sua localização em função, principalmente, da longitude e latitude do lugar.

4.4 Distância esférica entre dois pontos no globo terrestre

Proposição 4.9. *Sejam os pontos A , com latitude ϕ_A e longitude λ_A , e B , com latitude ϕ_B e longitude λ_B , no globo terrestre. A distância esférica, d , entre dois pontos A e B é dada pela*

expressão:

$$\cos d = \sin \phi_A \sin \phi_B + \cos \phi_A \cos \phi_B \cos \Delta\lambda, \quad (4.2)$$

onde $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$.

Demonstração.

Inicialmente, considerem os pontos A e B localizados no hemisfério norte. Na Figura 4.5, P é o polo Norte e, A' , B' e G são os pontos de intersecção entre a linha do Equador, respectivamente, com os meridianos de A , B e Greenwich. Sejam $\widehat{AA'} = \phi_A$, $\widehat{BB'} = \phi_B$, $\widehat{A'G} = \lambda_A$ e $\widehat{B'G} = \lambda_B$.

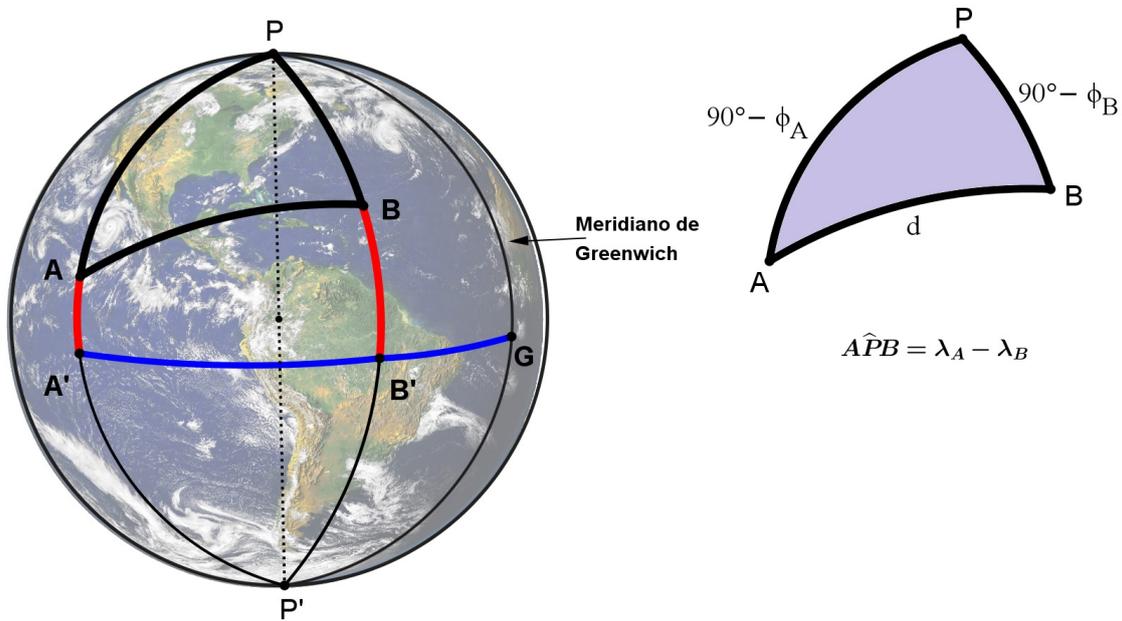


Figura 4.5 Distância esférica entre dois pontos A e B .

Aplicando a lei do cosseno para lados, equação 3.13, para o triângulo esférico PAB , tem-se:

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{AP} \cos \widehat{BP} + \sin \widehat{AP} \sin \widehat{BP} \cos \widehat{APB},$$

Como $\widehat{AB} = d$, $\widehat{AP} = 90^\circ - \phi_A$, $\widehat{BP} = 90^\circ - \phi_B$ e $\widehat{APB} = \widehat{A'B'} = \lambda_A - \lambda_B$, tem-se:

$$\cos d = \cos(90^\circ - \phi_A) \cos(90^\circ - \phi_B) + \sin(90^\circ - \phi_A) \sin(90^\circ - \phi_B) \cos(\lambda_A - \lambda_B),$$

mas, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ e $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Portanto,

$$\cos d = \sin \phi_A \sin \phi_B + \cos \phi_A \cos \phi_B \cos \Delta\lambda.$$

Agora, considere os pontos A e B : ambos localizados no hemisfério sul ou em hemisférios distintos. Como $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ e $\cos(90^\circ + \alpha) = \sin(-\alpha)$, então, para ambos os casos, a relação é a própria equação 4.2. Basta considerar, $\phi > 0$, para pontos localizados no hemisfério norte e, $\phi < 0$, para pontos localizados no hemisfério sul na equação 4.2. ■

Intuitivamente, quando duas cidades estão sobre um mesmo paralelo, que não seja a linha do Equador, o caminho mais curto parece ser o menor arco da paralela que liga essas cidades, porém, pela proposição 2.63, o caminho mais curto entre duas cidades é o comprimento do menor arco de círculo máximo que passa por essas cidades. A proposição 4.11 far-se-á essa comparação (Veja a Figura 4.6).

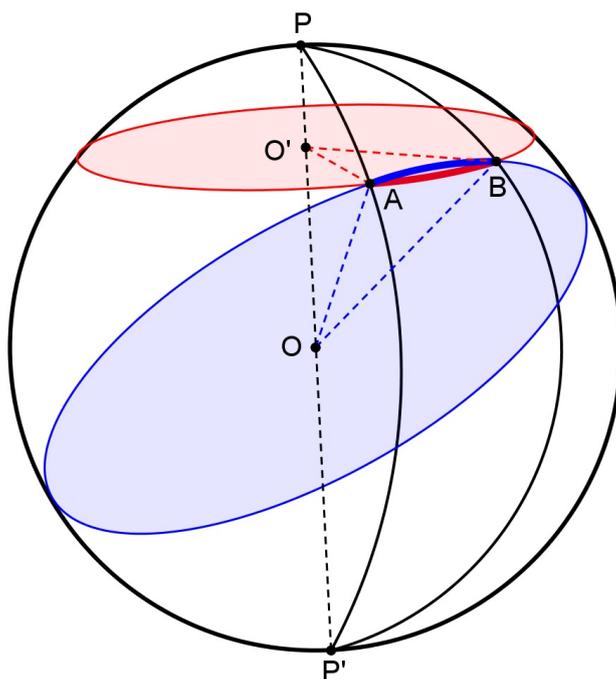


Figura 4.6 Comparação entre arcos de círculo máximo e de paralelo entre dois pontos A e B .

Lema 4.10. Sendo $0^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$, verifica-se a desigualdade:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} < \frac{\sin \beta}{\beta}. \quad (4.3)$$

Demonstração.

Seja um triângulo ABC , inscrito em um círculo de centro O , com lado AB menor do que BC , ou seja, as medidas dos arcos correspondentes $\widehat{AB} = 2\beta$ é menor do que $\widehat{BC} = 2\alpha$. A partir do vértice B , traça-se uma bissetriz interna que intersecta o círculo no ponto D . Ligando esse ponto, D , com os pontos A e C , obtêm-se as cordas AD e CD . Por construção, os ângulos inscritos \widehat{ABD} e \widehat{CBD} são congruentes. Como "a medida de um ângulo inscrito é igual a metade da medida do arco correspondente", os arcos \widehat{AD} e \widehat{CD} são congruentes. Da geometria plana, sabe-se que "em um mesmo círculo, arcos congruentes são subtendidos por cordas congruentes e, reciprocamente, cordas congruentes são subtendidos por arcos congruentes", logo as cordas AD e CD são congruentes, formando, assim, um triângulo isósceles ADC (Veja a Figura 4.7).

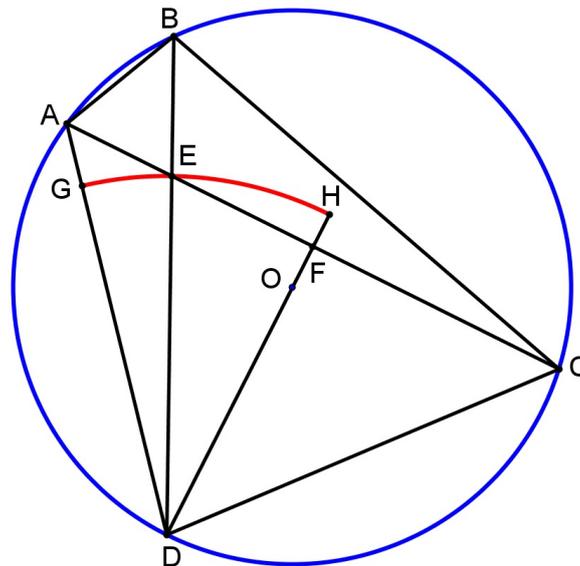


Figura 4.7 Desigualdade entre arcos e senod dos arcos correspondentes.

Ao traçar a bissetriz interna no vértice D do triângulo ADC , essa bissetriz intersecta o lado AC em F . Assim, os triângulos ADF e CDF são congruentes, pelo caso LAL, pois $AD \equiv CD$, $\widehat{ADF} \equiv \widehat{CDF}$, por construção, e o lado DF , comum aos dois triângulos. Portanto, os ângulos \widehat{AFD} e \widehat{CFD} são congruentes e retos e os lados AF e CF são congruentes, ou seja, F é o ponto médio de AC .

O ponto E é a intersecção de AC com BD . A seguir, traça-se um círculo centrado em D com raio DE que intersectam o lado AD e a bissetriz \overrightarrow{DF} , respectivamente, nos pontos G e H .

Observe que a área do setor circular DGE é menor do que a área do triângulo DAE ,

$$Area_{setorDGE} < Area_{\Delta DAE}, \quad (4.4)$$

Além disso, a área do triângulo DEF é menor do que a área do setor circular DEH ,

$$Area_{\Delta DEF} < Area_{setorDEH}, \quad (4.5)$$

Ora, sabe-se que, se $a < b$ e $c < d$ então $ac < bd$, com a, b, c e d , números reais positivos. Assim, como as áreas são medidas positivas, das equações 4.4 e 4.5, tem-se:

$$Area_{setorDGE} \cdot Area_{\Delta DEF} < Area_{\Delta DAE} \cdot Area_{setorDEH}$$

Daí, vem

$$\frac{Area_{\Delta DEF}}{Area_{\Delta DAE}} < \frac{Area_{setorDEH}}{Area_{setorDGE}}.$$

Como a área dos setores circulares de um mesmo círculo são proporcionais aos ângulos centrais,

$$\frac{\frac{EF \cdot DF}{2}}{\frac{AE \cdot DF}{2}} < \frac{E\hat{D}H}{G\hat{D}E},$$

ou seja,

$$\frac{EF}{AE} < \frac{E\hat{D}F}{A\hat{D}E}.$$

Adicionando 1, a cada membro da equação acima,

$$\frac{EF}{AE} + 1 < \frac{E\hat{D}F}{A\hat{D}E} + 1 \Rightarrow \frac{AF}{AE} < \frac{A\hat{D}F}{A\hat{D}E}.$$

Multiplicando por 2, a cada membro da equação,

$$2 \frac{AF}{AE} < 2 \frac{A\hat{D}F}{A\hat{D}E} \Rightarrow \frac{AC}{AE} < \frac{A\hat{D}C}{A\hat{D}E}$$

pois, DF é mediana e bissetriz interna do triângulo ADC . Além disso,

$$\Rightarrow \frac{AE + EC}{AE} < \frac{A\hat{D}E + E\hat{D}C}{A\hat{D}E},$$

assim,

$$\frac{EC}{AE} < \frac{E\hat{D}C}{A\hat{D}E}, \quad (4.6)$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo ABC , tem-se:

$$\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB}, \quad (4.7)$$

assim como,

$$\frac{\widehat{EDC}}{\widehat{ADE}} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}. \quad (4.8)$$

Substituindo as equações 4.7 e 4.8 em 4.6,

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}, \quad (4.9)$$

No triângulo ABC , os ângulos internos \widehat{BAC} e \widehat{ACB} são, respectivamente, os ângulos inscritos dos arcos \widehat{BC} e \widehat{AB} , ou seja, $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{ACB} = \beta$, assim,

$$\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{ACB}} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.10)$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC , tem-se:

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}}$$

portanto,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (4.11)$$

Substituindo as equações 4.10 e 4.11 em 4.9, vem:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} < \frac{\sin \beta}{\beta}.$$

■

Proposição 4.11. *Sejam dois pontos no globo terrestre, localizados em um mesmo paralelo geográfico, porém com longitudes distintos. O comprimento do menor arco do círculo máximo formado por esses pontos é menor do que o comprimento do menor arco do paralelo desses pontos.*

Demonstração.

Sem perda de generalidade, considerem os pontos A e B do hemisfério Norte e localizados em um mesmo paralelo. Na Figura 4.8, P é o polo Norte e A' , B' e G são os pontos de intersecção entre a linha do Equador, respectivamente, com os meridianos de A , B e Greenwich. As longitudes de A e B são dados, respectivamente, $\widehat{A'G} = \lambda_A$ e $\widehat{B'G} = \lambda_B$ e, as latitude são iguais, ou seja, $\phi = \widehat{AA'} = \widehat{BB'}$.

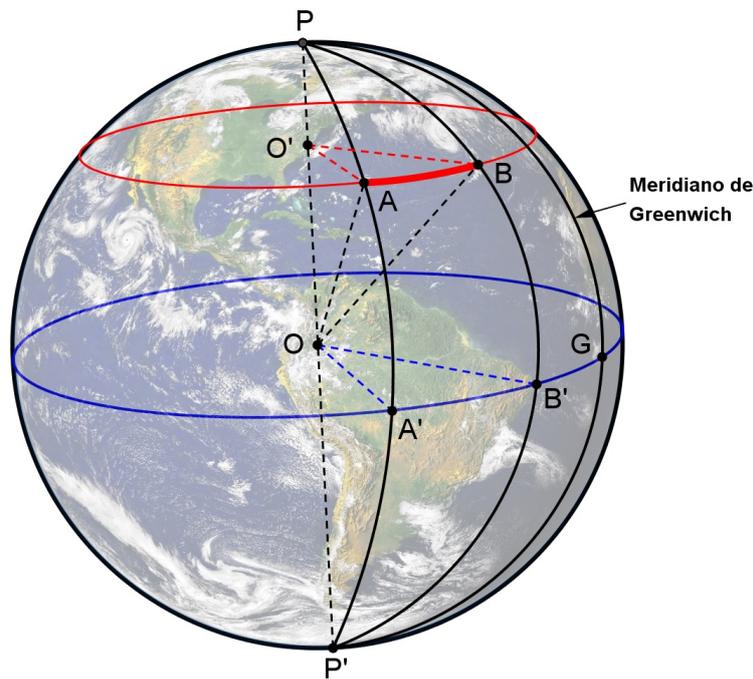


Figura 4.8 Comparação entre arcos de círculo máximo e de paralelo.

Aplicando a lei do cosseno para lados, equação 3.13, para o triângulo esférico PAB , tem-se:

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{AP} \cos \widehat{BP} + \sin \widehat{AP} \sin \widehat{BP} \cos \widehat{APB}.$$

Mas, as colatitudes de A e B são iguais, $\widehat{AP} = \widehat{BP} = 90^\circ - \phi = \eta$ e $\widehat{APB} = \widehat{A'B'} = \lambda_A - \lambda_B = \Delta\lambda$.

Portanto,

$$\cos d = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta \cos \Delta\lambda,$$

onde $d = \widehat{AB}$ é a distância esférica entre dois pontos no globo terrestre. Adicionando, $\sin^2 \eta - \sin^2 \eta$, no segundo termo da relação acima, tem-se:

$$\cos d = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta - \sin^2 \eta \cdot (1 - \cos \Delta\lambda),$$

ou seja,

$$1 - \cos d = \sin^2 \eta \cdot (1 - \cos \Delta\lambda).$$

Sabe-se que $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$, assim

$$\sin \frac{d}{2} = \sin \eta \sin \frac{\Delta\lambda}{2}.$$

Como o comprimento do arco correspondente ao círculo máximo é dado por $D = d \cdot R$, onde R é o raio da Terra, a expressão acima fica:

$$\sin \frac{D}{2R} = \sin \eta \sin \frac{\Delta\lambda}{2}. \quad (4.12)$$

Agora, para calcular o arco formado na paralela, considerem os triângulos retângulos congruentes $OO'A$ e $OO'B$, da qual se obtém:

$$O'A = O'B = R \sin(90^\circ - \phi) = R \sin \eta. \quad (4.13)$$

Assim, o comprimento do arco formado pelos pontos A e B , no círculo paralelo de centro O' , é dada por:

$$\ell = A\widehat{O'}B \cdot O'A = \Delta\lambda \cdot R \sin \eta,$$

ou seja,

$$\frac{\ell}{2R} = \frac{\Delta\lambda}{2} \sin \eta. \quad (4.14)$$

Fazendo $\alpha = \frac{\Delta\lambda}{2}$ e $\beta = \frac{\Delta\lambda}{2} \sin \eta$ e como $0^\circ < \eta < 90^\circ$ tem-se que $0^\circ < \beta < \alpha < 180^\circ$ e, substituindo-as na equação 4.3, obtém

$$\frac{\sin \frac{\Delta\lambda}{2}}{\frac{\Delta\lambda}{2}} < \frac{\sin(\frac{\Delta\lambda}{2} \sin \eta)}{\frac{\Delta\lambda}{2} \sin \eta},$$

portanto,

$$\sin \frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \sin \eta < \sin(\frac{\Delta\lambda}{2} \sin \eta). \quad (4.15)$$

Substituindo as equações 4.12 e 4.14 em 4.15, tem-se:

$$\sin \frac{D}{2R} < \sin \frac{\ell}{2R} \Rightarrow \sin \frac{D}{2R} - \sin \frac{\ell}{2R} < 0$$

Da relação da transformação em produto, $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, tem-se:

$$2 \sin \frac{D - \ell}{4R} \cos \frac{D + \ell}{4R} < 0. \quad (4.16)$$

Como $D = d \cdot R$ e pela equação 4.13, verifica-se que

$$0^\circ < \frac{D + \ell}{4R} = \frac{d + \Delta\lambda \sin \eta}{4} < 90^\circ,$$

já que $0^\circ < d + \Delta\lambda \sin \eta < 360^\circ$, assim na desigualdade 4.16:

$$\cos \frac{D + \ell}{4R} > 0 \Rightarrow \sin \frac{D - \ell}{4R} < 0,$$

o que acarreta a

$$D < \ell.$$

Ou seja, o comprimento do menor arco do círculo máximo formado pelos pontos A e B é menor do que o comprimento do menor arco do paralelo dos pontos citados. ■

4.5 A medida da Terra

Nesta seção, será apresentado o experimento de Eratóstenes e as referências utilizadas foram: Heath (1932, pp. 109-112), Dreyer (1953, pp. 171-176) e Crease (2006, pp. 17-30).

Até Eratóstenes, conhecia-se apenas estimativas do tamanho da Terra. Segundo Dreyer (1953, p. 118, 173), a mais antiga é de Aristóteles, que escreveu “os matemáticos que tentam calcular a extensão da circunferência terrestre, sustentam que ela é de cerca de 400000 estádios”. Mas, Aristóteles não revelou suas fontes nem explicou seu raciocínio. Próxima estimativa foi de Arquimedes (287 a.C - 212 a.C.), ligeiramente menor que Aristóteles, 300000 estádios. Também, sem citar sua fonte e seu raciocínio. O estádio era uma unidade de medida de comprimento usada na Grécia Clássica, referia ao comprimento de uma pista de corrida grega, que variava de cidade para cidade.

Proposição 4.12. Experimento de Eratóstenes: *As hipóteses assumidas para a medição do tamanho da Terra foram:*

- a Terra é uma esfera;
- os raios solares são paralelos quando atingem a Terra;
- na cidade de Siena¹, no dia do solstício de verão, ao meio-dia, os raios solares incidem perpendicularmente no fundo do poço;
- as cidades, Siena e Alexandria, estão no mesmo meridiano².

As ferramentas de medição utilizadas por Eratóstenes foram:

- a sombra projetada pelo ponteiro de um relógio de Sol;
- a medição da distância entre Siena e Alexandria.

Com essas suposições e ferramentas, Eratóstenes mediu a dimensão da Terra.

Demonstração.

Sejam A e S dois pontos de um meridiano da Terra de centro O representando, respectivamente, as cidades de Siena e Alexandria. As semirretas \vec{OA} e \vec{OS} são, respectivamente, as verticais dos lugares A e S (Veja a Figura 4.9).

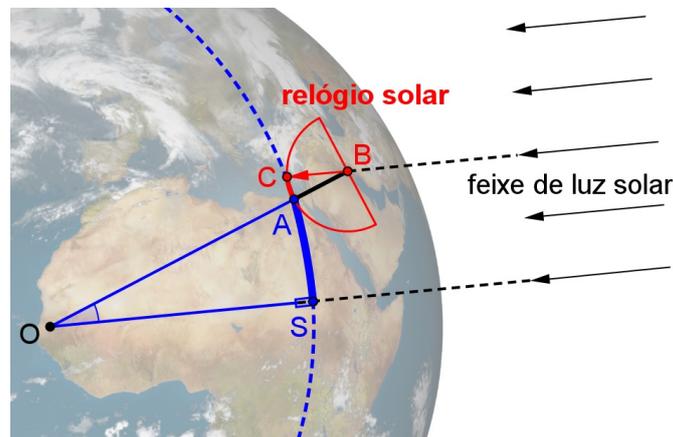


Figura 4.9 A medição da Terra por Eratóstenes (Os objetos da figura não estão na mesma escala).

Ora, se conhece o ângulo entre as verticais do lugar, o problema está resolvido! Porém, não é possível medir diretamente esse ângulo, \widehat{AOS} , com as ferramentas de Eratóstenes.

¹ atual Assuã, no Egito, localizado perto do trópico de Câncer.

² Siena situa próximo do meridiano de Alexandria.

A partir da hipótese, no dia do solstício de verão, ao meio-dia, uma haste vertical em Siena projeta sombra pontual, a base da haste, enquanto que em Alexandria a haste projeta uma sombra de tamanho mensurável.

Como as cidades estão em um mesmo meridiano, em Alexandria, coloca-se um relógio de Sol na vertical \vec{OA} , centrada no ponto B . E, como os raios solares são paralelos quando atingem a Terra, o feixe de luz \vec{BC} é paralela à vertical \vec{OS} , formando, assim, um ângulo \widehat{ABC} no relógio de Sol. Mas, a reta \vec{OA} é transversal às paralelas \vec{OS} e \vec{BC} , logo, os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{AOS} são iguais, já que são alternos internos. Portanto, $\widehat{ABC} = \widehat{AOS} = \widehat{AS}$.

A distância entre Alexandria e Siena, ℓ_{AS} , é conhecida, assim, pela proporcionalidade entre os arcos e os comprimentos dos arcos correspondentes:

$$\frac{\widehat{AS}}{\widehat{ASA}} = \frac{\ell_{AS}}{L}, \quad (4.17)$$

onde \widehat{ASA} é o arco de uma volta completa e L é o perímetro do círculo máximo.

A medida obtida no relógio de Sol, em Alexandria, foi de um quinquagésimo parte do círculo celeste. Esse arco, portanto, representava a diferença de latitude:

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{ACA}} = \frac{\widehat{AS}}{\widehat{ASA}} = \frac{1}{50},$$

onde \widehat{ACA} é o arco de uma volta completa do relógio solar e \widehat{AC} é a sombra projetada no relógio. Portanto, pela equação 4.17, tem-se:

$$L = 50 \cdot \ell_{AS}. \quad (4.18)$$

A distância entre Alexandria e Siena foi medida para Eratóstenes, achando o valor de 5000 estádios e, conseqüentemente, a circunferência da Terra era de 250000 estádios. ■

Mais tarde, Eratóstenes ou algum sucessor corrigiu esta cifra para 252000 estádios, provavelmente a fim de obter um número redondo, 700 estádios, para o comprimento do arco de um grau. Veja o cálculo:

$$\frac{1^\circ}{\frac{360^\circ}{50}} = \frac{700}{\ell_{AS}},$$

ou seja, $\ell_{AS} = 5040$ estádios. Portanto, da equação 4.18, tem-se: $L = 252000$ estádios.

Nessa medição, não se sabe qual unidade de estádio foi utilizada, além disso, a contagem de passos para medida de comprimento não inspirava confiança e o número redondo de 5000 estádios admite margem de imprecisão.

Segundo Dreyer (1953, p. 175), o estádio de Eratóstenes media 157,5 metros, portanto

$$252000 \cdot 157,5 = 39690000m = 39690km.$$

Usando a equação da proposição 2.48: $r = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{39690}{2\pi} = 6320$ km, tem-se um erro de 0,58%, quando comparado com o valor aceito do raio polar da Terra, 6357 km.

Segundo Crease (2006, p. 17), a medida efetuada por Eratóstenes é um dos 10 mais belos experimentos científicos pela simplicidade e instrutivo que, anualmente, quase 2250 anos depois, crianças de todo mundo medem o comprimento da sombra. Em 2013, participaram, no projeto eratóstenes ¹, 143 escolas americanas (34 brasileiras) e 79 europeias, com uma quantidade estimada de 8.400 alunos envolvidos na atividade submetendo 598 medições efetuadas entre 14 e 24 de setembro de 2013, obtendo o raio terrestre de (6350 ± 20) km ².

¹Eratosthenes Project: Global School cooperation Project. Site: <http://www.eaae-astronomy.org/eratosthenes/>.

²Fonte: <https://sites.google.com/site/projetoerato/conclusion>. Acesso em agosto de 2014.

CAPÍTULO 5

A esfera celeste

Neste capítulo será apresentado um breve histórico sobre a esfera celeste e os sistemas de referências utilizados para a esfera celeste. As principais referências utilizadas foram: Kamp (1967), Boczko (1984), Arana (2000), Berrocoso (2003), Oliveira (2004), Friaça (2008), Gonçalves (2007), Rojas (2012) e Lima (2013).

5.1 O céu como esfera

Quando se olha para o céu em uma noite estrelada, num lugar de horizonte amplo, por razões fisiológicas, o cérebro humano não consegue distinguir a distância relativa entre dois astros, abstrai como se os dois astros estivessem a uma mesma distância na sua interpretação da imagem que se vê. Isso, dá a impressão de estar no meio de uma grande esfera incrustada de astros, com o observador situado no centro dessa esfera. Essa impressão inspirou, nos antigos gregos, a idéia do céu como esfera, o modelo mais perfeito que existe na natureza, como diz Platão (428 a.C. - 348 a.C.) no diálogo *Timeu*:

“Como forma [o Demiurgo] deu [ao mundo] aquela que lhe convinha e lhe era aparentada [...]. É então a forma de uma esfera, cujo centro é equidistante de todos os pontos da periferia, uma forma circular, que ele lhe deu como se trabalhasse num torno - forma que, de todas, é a mais perfeita e a mais semelhante a si mesma - certo de que há mil vezes mais beleza no semelhante do que no dessemelhante [...]. Eis por que, imprimindo-lhe um movimento de rotação uniforme no mesmo lugar e sobre si mesmo, fez com que se movesse com um movimento circular [...]. Constituiu assim um céu circular, evidentemente arrastado num movimento circular.” (PLATÃO, apud EVANGELISTA, 2011, p. 64)

Agora, veja a visão de Aristóteles:

“A esfericidade do céu é necessária, pois a esfera é a figura mais conforme a sua natureza e substância. Além disso, a esfera é entre todas as figuras (planas e tridimensionais) a mais perfeita, a única limitada por uma só superfície e a única figura que durante a rotação contínua ocupa sempre o mesmo lugar; o que não ocorre com uma figura de linhas retas submetida à rotação.” (ARISTÓTELES, De Caelo, II, 4, 286^b 10 – 287^a 1, apud ÉVORA, 2005, p. 134)

O universo aristotélico é finito e geocêntrico, que tem como estrutura básica duas esferas, a Terra e a esfera das estrelas fixas:

“Na cosmologia aristotélica, o Universo é único, contínuo e tem como estrutura básica o universo das duas esferas, composto por uma pequena esfera, a Terra, fixada no centro de uma segunda, vasta, porém finita, esfera em rotação que leva consigo as estrelas fixas, e é dividido em duas regiões nitidamente distintas: a celeste e a terrestre, ocupadas por materiais distintos e governadas por leis distintas.” (ÉVORA, 2005, p. 129)

Durante o dia, um observador na Terra tem a impressão de que o Sol nasce de um lado, chamado Nascente ou Oriente, move-se pela esfera celeste e, finalmente, põe-se do outro lado, chamado Poente ou Ocidente. Já, à noite, as estrelas também parecem nascer no lado leste e se deslocam pela abóbada celeste até se porem do lado oeste. Essa observação foi constatada pelo Platão: “A esfera do Universo gira uniformemente de leste para oeste, no mesmo lugar, em torno do seu próprio eixo, que passa pelo centro da Terra.” (ÉVORA, 2005, p. 134)

Na verdade, esse movimento é aparente, devido ao fato de a Terra estar em rotação. A rotação é apenas uma das componentes do movimento da Terra. As principais dessas componentes são apresentadas a seguir:

Definição 5.1. *Movimentos da Terra*

- A **rotação** é o movimento giratório que a Terra realiza em torno de seu próprio eixo.

- A **translação** é o movimento que a Terra realiza ao redor do Sol, completando uma volta completa em 1 ano sideral ou 365,256363 dias solares a uma velocidade orbital média de 29,78 km/s.
- A **precessão** é o movimento cíclico do eixo de rotação terrestre, em torno de um eixo perpendicular ao plano da órbita da Terra. Seu período é cerca de 26000 anos. O eixo, nesse movimento, descreve uma superfície cônica com uma amplitude de 47° .
- A **nutação** é o movimento do eixo terrestre que se superpõe ao movimento de precessão. Devido a esse movimento, o eixo da Terra move-se em oscilações, com períodos de 18,6 anos, como mostra a Figura 5.1.

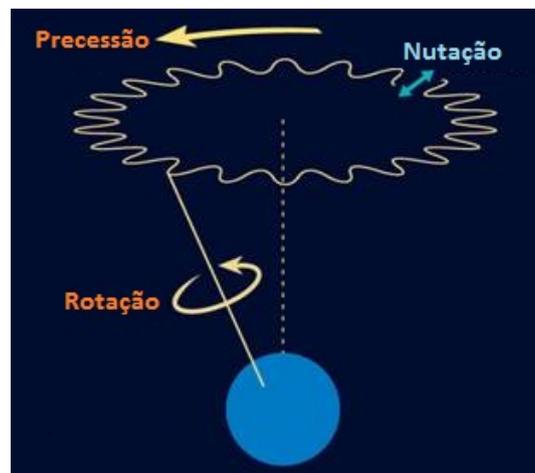


Figura 5.1 Precessão e nutação.

Fonte: <http://www.kosmosimwandel.at/praezession.html>. Acesso em julho de 2014

5.2 Principais pontos e linhas da esfera celeste

Definição 5.2. A **esfera celeste** é uma esfera ideal de raio arbitrário, com centro em um ponto qualquer do espaço, sobre a superfície da qual estão projetadas as posições relativas dos astros.

Definição 5.3. Os principais pontos, círculos e planos da esfera celeste são:

- O **eixo celeste** ou o **eixo do mundo** é uma reta imaginária resultante do prolongamento

do eixo terrestre, em torno do qual a esfera celeste executa seu movimento aparente de rotação.

- O **polo norte celeste** e o **polo sul celeste** são pontos imaginários, diametralmente opostos, onde o eixo celeste intersecta a esfera celeste. Como o eixo celeste coincide com o eixo de rotação da Terra, os polos celestes são as projeções dos polos terrestres sobre a esfera celeste.
- O **equador celeste** é o círculo máximo resultante da intersecção do plano do Equador com a esfera celeste. Ou seja, o equador celeste é a projeção do equador terrestre na esfera celeste.

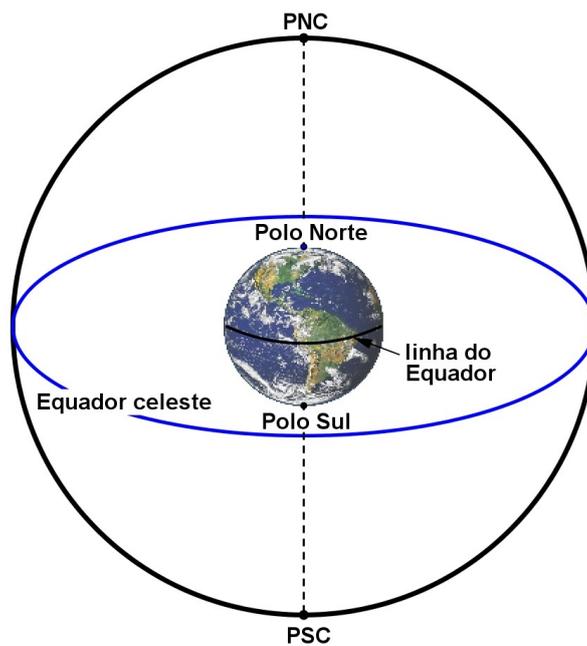


Figura 5.2 A esfera celeste.

- O **paralelo celeste** é qualquer círculo menor que resulta da intersecção da esfera celeste com um plano paralelo ao plano do equador celeste.
- A intersecção do plano do horizonte com a esfera celeste é um círculo máximo denominado **linha do horizonte** ou **horizonte astronômico** ou **horizonte celeste**. A parte

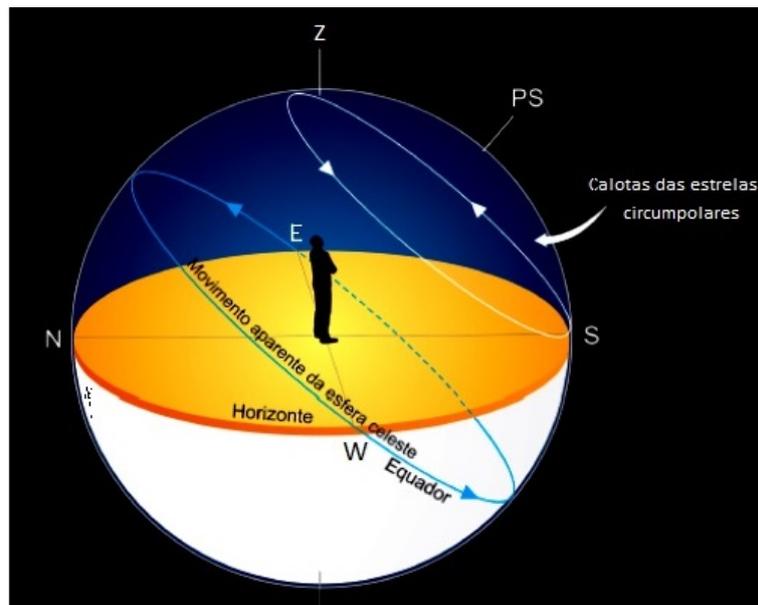


Figura 5.3 Horizonte. Fonte: <http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula2.pdf>. Acesso em julho de 2014.

visível da esfera celeste é o hemisfério que está acima do plano do horizonte e o hemisfério invisível localiza-se abaixo do plano do horizonte.

- O **zênite** e o **nadir** são pontos, diametralmente opostos, da esfera celeste obtidos pela intersecção da vertical do lugar com a esfera celeste. O zênite está situado no hemisfério visível, enquanto que o nadir, no hemisfério invisível. Observe ainda que o zênite e o nadir são polos da linha do horizonte.
- O **círculo de altura** é qualquer círculo menor que resulta da intersecção de um plano paralelo ao plano do horizonte com a esfera celeste. A esse círculo, também, é dado o nome de **almucântara** ou **paralelo de altura**.
- O **círculo vertical** é qualquer semicírculo máximo da esfera celeste que contém o zênite e o Nadir. A vertical do lugar é a origem do semiplano que contém o círculo vertical.
- O **ponto cardinal norte** é o ponto da esfera celeste em que o círculo vertical que passa pelo polo norte celeste intersecta a linha do horizonte. Já, o círculo vertical que passa pelo polo sul celeste intersecta a linha do horizonte no **ponto cardinal sul**. A reta, no

*plano do horizonte, que passa pelos pontos geográficos norte e sul recebe o nome de **linha norte-sul**. A **linha leste-oeste** é perpendicular à linha norte-sul, sobre o plano do horizonte.*

- *O **círculo horário** ou **meridiano celeste** é qualquer semicírculo da esfera celeste que contém os dois polos celestes. A origem do semiplano que contém o círculo horário é o eixo celeste. O círculo horário da esfera celeste que contém o zênite chama-se **meridiano local**.*
- *O **plano meridiano** é o plano que contém o meridiano local e intersecta o plano do horizonte sobre a linha norte-sul.*

5.3 Sistemas de referência

Um corpo está em **movimento** em relação a um outro corpo quando sua posição varia com o tempo, medida em relação ao segundo corpo. Quando sua posição relativa não varia com o tempo, diz-se que o corpo está em **repouso** relativo. Portanto, movimento e repouso são conceitos relativos, ou seja, dependem da escolha do corpo que serve como referência. Por exemplo, pode-se dizer que tanto um prédio quanto um poste de iluminação estão em repouso relativo à superfície terrestre, pois não mudam de posição em relação à Terra. Porém, em relação ao Sol, o prédio e o poste de iluminação estão em movimento, pois juntamente com a Terra, mudam de posição relativo ao Sol. No entanto, um observador fixo na superfície terrestre pode, simplesmente, afirmar que o Sol, a Lua e as estrelas estão em movimento relativo a ele. Assim, para descrever o movimento, o observador deve definir um **sistema de referência** ou **referencial** em relação ao qual o movimento será analisado.

Definição 5.4. *De acordo com a localização do centro da esfera celeste, tem-se diferentes sistemas de referências. Segundo Brumberg (1991, apud MARTIN, 2005, p. 27), os sistemas de referência, no interior do sistema solar, podem ser classificados como:*

- (i) **Baricêntrico:** centrado no baricentro do Sistema Solar;

- (ii) **Heliocêntrico**: centrado no Sol;
- (iii) **Terra-Lua**: centrado no baricentro do sistema Terra-Lua;
- (iv) **Geocêntrico**: centrado no centro de massa da Terra;
- (v) **Topocêntrico**: com origem num ponto situado na superfície da Terra.

A posição de um astro na esfera celeste é determinada por meio de coordenada esférica, uma vez que a posição aparente dos astros localiza-se sobre a esfera celeste. Se a distância de um astro qualquer à origem de coordenada é adotado como raio unitário, então, pela proposição 2.59, a direção de um astro na esfera celeste fica definida univocamente mediante a especificação de dois arcos, medidos sobre os círculos máximos da esfera celeste.

Definição 5.5. Para especificar a posição dos astros na esfera celeste, utilizam-se os seguintes sistemas de coordenadas esféricas:

- Sistema de coordenada horizontal;
- Sistema de coordenada equatorial horária;
- Sistema de coordenada equatorial universal;
- Sistema de coordenada eclíptica;

5.4 Coordenada horizontal

Definição 5.6. O sistema de coordenada horizontal ou **azimutal** é um sistema topocêntrico, que tem como:

- Plano fundamental: o plano do horizonte do observador;
- Círculo máximo fundamental: a linha do horizonte;
- Eixo fundamental: a vertical do lugar;

- *Polos: o zênite e o nadir;*
- *Círculo máximo secundário: o círculo vertical contido no plano meridiano;*
- *Ponto fundamental: o ponto cardeal norte ou o ponto cardeal sul¹;*
- *Sentido do arco: Retrógrado²*

A Figura ?? ilustra o sistema de coordenada horizontal. A posição do observador é representada pelo ponto O e a posição do astro na esfera celeste pelo ponto P . Os pontos cardeais norte, sul, leste e oeste são, respectivamente, simbolizados por N , S , E e W .

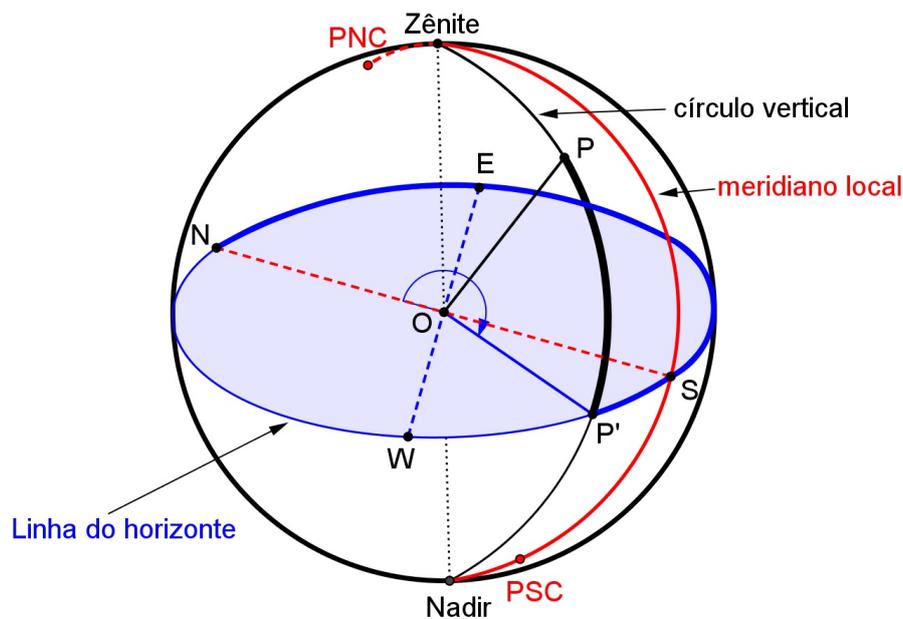


Figura 5.4 Sistema de coordenada horizontal.

Neste sistema de referência, a posição de um astro sobre a esfera celeste é caracterizado pelo **azimute** e pela **altura**.

¹A definição do ponto fundamental é bastante arbitrária, depende do pesquisador ou de centro de pesquisa. Por exemplo, Arana (2000), Berrocoso (2003) e Lima (2013) adotaram o ponto cardeal sul enquanto que Smart (1949), Kamp (1967), Boczko (1984), Oliveira (2004), Friaça (2008), Gonçalves (2007) e Rojas (2012), o ponto cardeal norte.

²Das fontes pesquisadas, todas adotaram o retrógrado, a exceção de Smart (1949, p. 27) que determinou o sentido do arco do azimute como retrogrado, caso o astro esteja no lado do ponto cardeal leste, e como direto, caso o astro esteja no lado do ponto cardeal oeste.

Definição 5.7. O *azimute* (A) de um astro é o arco medido ao longo da linha do horizonte entre o círculo vertical contido no plano meridiano e o círculo vertical do astro. O azimute varia de 0° a 360° .

Por exemplo, considerando a origem do arco do azimute no ponto cardeal norte ($A = 0^\circ$), o azimute no ponto cardeal oeste mediria 270° . Caso a origem do arco seja o ponto cardeal sul, o azimute no ponto cardeal oeste mediria 90° , no sentido retrógrado.

Definição 5.8. A *altura* (h) de um astro é o arco, medida ao longo do círculo vertical que contém o astro, entre o plano do horizonte e o astro considerado. A altura varia entre -90° e $+90^\circ$. Por convenção, tem valor positivo para astros situados no hemisfério visível e negativo para astros no hemisfério invisível.

A altura correspondente ao zênite, a qualquer ponto da linha do horizonte e ao nadir são, respectivamente, iguais a $+90^\circ$, 0° e -90° .

Em geral, nos problemas astronômicos, em vez da altura é utilizada a distância zenital.

Definição 5.9. A *distância zenital* (z) é o arco medido sobre o círculo vertical de um astro, com origem no zênite e extremidade no astro.

Proposição 5.10. A distância zenital é o complemento da altura, ou seja,

$$z = 90^\circ - h.$$

Demonstração.

Demonstração trivial, conforme as definições 5.8, 5.9 e do arco complementar. ■

A distância zenital correspondente ao zênite, a qualquer ponto da linha do horizonte e ao nadir são, respectivamente, iguais a 0° , 90° e 180° .

Na Figura ??, a altura é o arco $h = \widehat{PP'}$ e o azimute, $A = \widehat{NP'}$ ou $A = \widehat{SP'}$ caso, a origem do azimute seja, respectivamente, ponto cardeal norte ou sul, ambos no sentido retrógrado.

Já que o sistema de coordenada horizontal é definido pelo horizonte do observador, o mesmo astro visto, no mesmo instante, de outros locais, por exemplo O_1 e O_2 como mostra

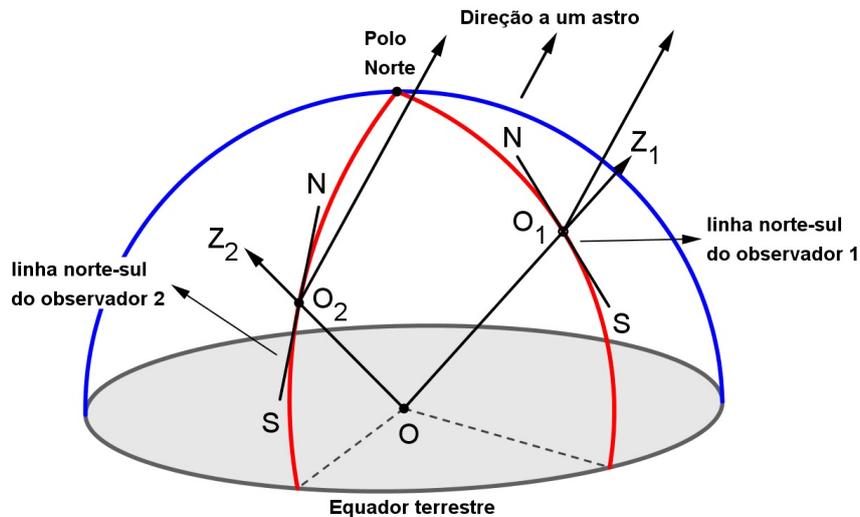


Figura 5.5 Sistema de coordenada horizontal depende do local da observação.

a Figura 5.5, terão diferentes valores de altura e azimute. O sistema horizontal é tipicamente local, as coordenadas de um astro dependem do lugar de observação.

Além disso, em virtude do movimento de rotação da Terra, as coordenadas horizontais de um astro dependem também do momento em que a observação foi realizada, mesmo que se considere um observador fixo em um determinado local.

A dependência espacial e temporal deste sistema de coordenada torna pouco prático para uso em Astronomia. Desse modo, será visto a seguir um **sistema de referência equatorial** que tem como plano fundamental, o plano do Equador. Esse sistema tem duas variantes, classificada conforme a dependência ou não da posição do observador: o **sistema equatorial horária** e o **sistema equatorial universal**.

5.5 Coordenada equatorial horária

Definição 5.11. *O sistema de coordenada equatorial horária ou sistema de coordenada local é um sistema geocêntrico, que tem as seguintes características:*

- *Plano fundamental: o plano do Equador;*
- *Círculo máximo fundamental: o equador celeste;*

- *Eixo fundamental: o eixo celeste;*
- *Polos: o polo norte celeste e o polo sul celeste;*
- *Círculo máximo secundário: o meridiano local do observador;*
- *Ponto fundamental: ponto de intersecção entre o meridiano local e o equador celeste;*
- *Sentido do arco: retrógrado.*

As coordenadas de um astro sobre a esfera celeste que caracterizam este sistema são: o **ângulo horário** e a **declinação**.

Definição 5.12. *O ângulo horário (H) de um astro é o arco, medido ao longo do equador celeste, com origem no meridiano local e extremidade no círculo horário do astro. O ângulo horário varia de 0° a 360° .*

Todavia, devido a forte vinculação com problemas horários, o ângulo horário, geralmente, é medido em horas. Assim, os ângulos horários de diversos astros da esfera celeste varia de 0 h a 24 h ou de -12 h a $+12$ h. O sinal negativo indica que o astro está a leste do meridiano local, e o sinal positivo, a oeste do meridiano local. Um ângulo horário de 0 h indica que o astro está exatamente sobre o meridiano local. Se um astro tem um ângulo horário de $+4$ h significa que cruzou o meridiano local há 4 horas, e se tem um ângulo horário de -5 h significa que falta 5 horas para cruzar o meridiano local. Os polos celestes não têm ângulo horário definido.

Definição 5.13. *A declinação (δ ou DEC) de um astro é o arco, medido ao longo do círculo horário do astro, com origem no equador celeste e extremidade na posição do astro. A declinação varia entre -90° e $+90^\circ$.*

Adota-se que astros no hemisfério norte celeste têm declinações positivas, enquanto que no hemisfério sul celeste têm declinações negativas.

Definição 5.14. *A distância polar (Δ) é o arco medido sobre o círculo horário de um astro, com origem no polo norte celeste e extremidade no astro.*

Proposição 5.15. *A distância polar é o complemento da declinação, ou seja,*

$$\Delta = 90^\circ - \delta.$$

Demonstração.

Demonstração trivial, conforme as definições 5.13, 5.14 e do arco complementar. ■

A distância polar varia de 0° (no polo norte celeste) a 180° (no polo sul celeste).

A Figura 5.6 representa o sistema de coordenada horária. O ponto O representa o observador e o ponto P , a posição do astro na esfera celeste. O ângulo horário e a declinação são, respectivamente, $H = \widehat{QP'}$ e $\delta = \widehat{PP'}$.

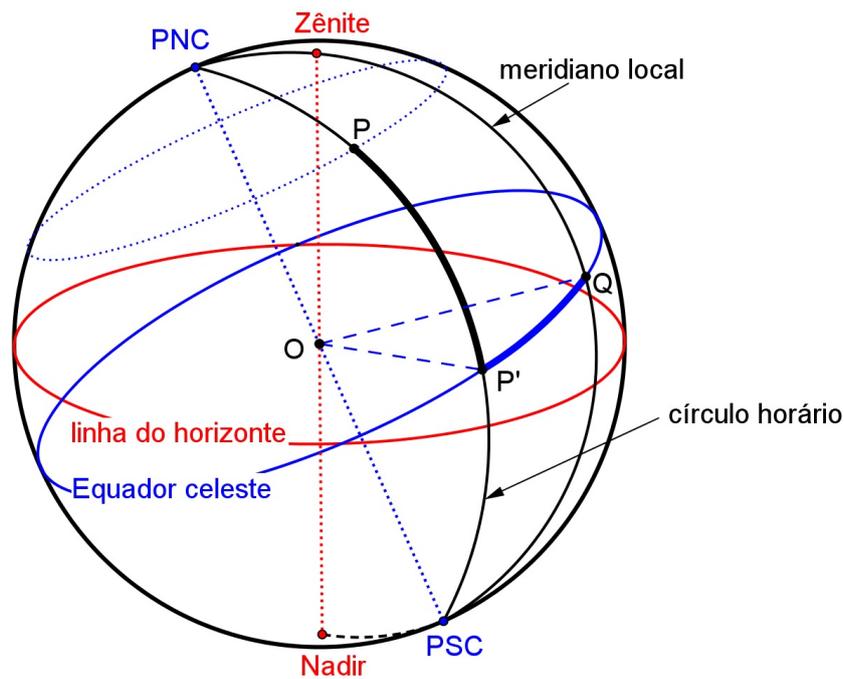


Figura 5.6 Sistema de coordenada equatorial horária.

Neste sistema de coordenadas, o plano fundamental é o mesmo para todos os observadores, ou seja, para qualquer observador um determinado astro terá a mesma declinação, se observado no mesmo instante. No entanto, o sistema equatorial local, como o próprio nome diz, é local, ou seja, depende da posição do observador na superfície terrestre. O ângulo horário de um astro

depende do meridiano do observador, portanto, convém utilizar um meridiano que não dependa da posição do observador. Esta é uma das propriedades do sistema de coordenadas celestes que será abordado a seguir.

5.6 Coordenada equatorial universal

Este sistema é baseado na posição da Terra em relação aos astros, por isso, não depende da posição do observador na superfície terrestre. Mas, para introduzir a coordenada equatorial celeste, antes, é necessário compreender o termo **eclíptica**.

Definição 5.16. Referências na órbita da Terra:

- A **eclíptica** é um círculo máximo da esfera celeste que resulta da intersecção do plano orbital da Terra com a esfera celeste. Portanto, a eclíptica representa a projeção sobre a esfera celeste da trajetória aparente do Sol no decurso de um ano, observada a partir da Terra.
- O **plano da eclíptica** é o plano que contém a eclíptica, ou seja, o plano sobre a qual a Terra descreve seu movimento de translação ao redor do Sol.
- O **eixo eclíptico** é a reta perpendicular, ao plano da eclíptica, que passa pelo centro da esfera celeste.
- O **polo norte eclíptico** e o **polo sul eclíptico** são pontos imaginários, diametralmente opostos, onde o eixo eclíptico intersecta a esfera celeste.
- Os **máximos de longitude** são semicírculos máximos que passam pelos polos eclípticos.
- Os **paralelos de latitude** são círculos menores paralelos à eclíptica.
- A **obliquidade da eclíptica**, representada por ε , é o ângulo formado entre o plano da eclíptica e o plano do equador que mede, aproximadamente, $23^{\circ}26'21''$.

- O **equinócio** é o instante em que o Sol, em sua órbita aparente, cruza o equador celeste. A intersecção da eclíptica e do equador determinam, na esfera celeste, dois pontos que correspondem aos equinócios: o equinócio de primavera e o equinócio de outono. Ao medir a duração do dia, durante os equinócios, a duração do dia e da noite são iguais.
- O ponto da esfera celeste correspondente ao equinócio de primavera chama-se **ponto vernal**. Quando o Sol está neste ponto tem-se o início do outono no hemisfério Sul e da primavera no hemisfério Norte. Apesar de localizar-se hoje, devido à precessão dos equinócios, na constelação de peixes, é também conhecido como **ponto Áries** e representa-se por γ .
- Trópico de Câncer e Capricórnio são, respectivamente, paralelos terrestres de latitude $+\varepsilon$ e $-\varepsilon$.
- Círculo polar ártico e antártico são, respectivamente, paralelos terrestres de colatitude $+\varepsilon$ e $180^\circ - \varepsilon$.

Definição 5.17. O sistema de coordenada equatorial universal ou celeste é um sistema geocêntrico, que tem as seguintes características:

- Plano fundamental: o plano do Equador;
- Círculo máximo fundamental: o equador celeste;
- Eixo fundamental: o eixo celeste;
- Polos: o polo norte celeste e o polo sul celeste;
- Círculo máximo secundário: o círculo horário do ponto Áries;
- Ponto fundamental: ponto Áries;
- Sentido do arco: direto.

O sistema equatorial universal é semelhante ao sistema de coordenadas horárias diferindo apenas no fato da coordenada sobre o equador, a ascensão reta, ser medida a partir do ponto Áries.

A Figura 5.7 representa o sistema de coordenada equatorial universal. O ponto O representa o observador e o ponto P a posição de um astro na esfera celeste. Os pontos PNC e PSC são, respectivamente, os polos norte e sul celestes.

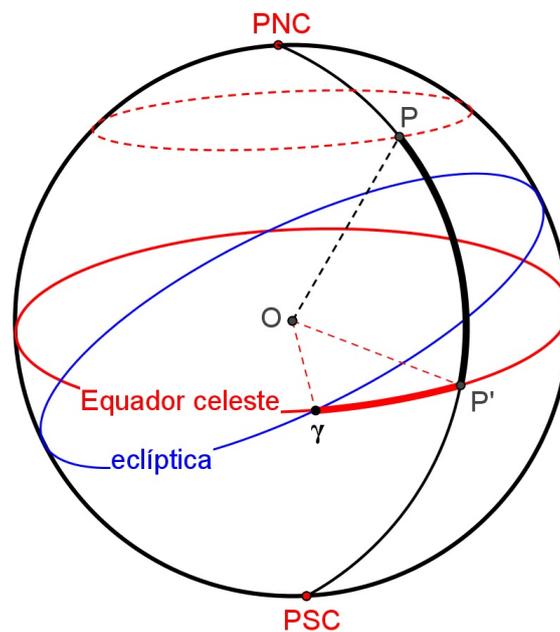


Figura 5.7 Sistema de coordenada equatorial universal.

As coordenadas de um astro sobre a esfera celeste que caracterizam este sistema são: a **ascensão reta** e a **declinação**.

Definição 5.18. A **ascensão reta** (AR ou α) é o arco, medido ao longo do equador celeste, entre o círculo horário do ponto Áries e o círculo horário do astro.

A ascensão reta, geralmente, é medida em horas, minutos e segundos, embora também possa ser medida em graus. Varia de $0\ h$ a $24\ h$ (ou de 0° a 360°).

Na Figura 5.7, a ascensão reta e a declinação são, respectivamente, $\alpha = \widehat{\gamma P'}$ e $\delta = \widehat{PP'}$.

O sistema equatorial universal independe da localização geográfica e do instante da observação, pois suas coordenadas, declinação e ascensão reta, são medidas com relação à esfera

celeste. As coordenadas equatoriais universais são aproximadamente constantes para intervalos de tempo da ordem de décadas ou mesmo séculos, com pequenas variações devidas aos movimentos de nutação e precessão e ao movimento próprio dos astros.

Porém, quando se pretende descrever movimentos de corpos do Sistema Solar é mais útil o sistema de coordenada que será vista a seguir, a coordenada eclíptica, uma vez que a maioria dos planetas, a exceção do Mercúrio, e muitos pequenos corpos do Sistema Solar têm órbitas com pequenas inclinações ao plano da eclíptica.

5.7 Coordenadas eclípticas

Definição 5.19. *O sistema de coordenada eclíptica é um sistema que pode ser geocêntrico ou heliocêntrico, e tem as seguintes características:*

- *Plano fundamental: o plano da eclíptica;*
- *Círculo máximo fundamental: a eclíptica;*
- *Eixo fundamental: o eixo da eclíptica;*
- *Polos: o polo norte eclíptico e o polo sul eclíptico;*
- *Círculo máximo secundário: o máximo de longitude do ponto Áries;*
- *Ponto fundamental: o ponto de Áries;*
- *Sentido do arco: direto.*

A Figura 5.8 representa o sistema de coordenada eclíptica. O ponto O representa a origem e o ponto P a posição de um astro na esfera celeste. Os pontos PNE e PSE são, respectivamente, os polos norte e sul eclípticos.

As coordenadas de um astro sobre a esfera celeste que caracterizam este sistema são: a **longitude eclíptica** e a **latitude eclíptica**.

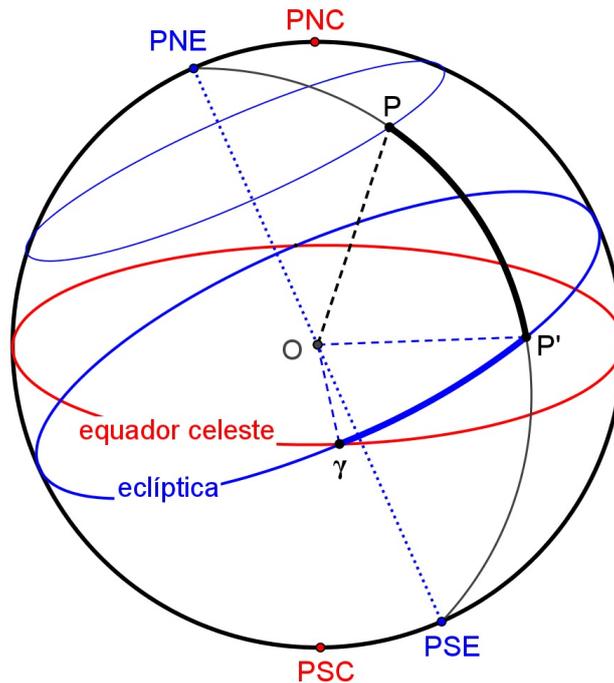


Figura 5.8 Sistema de coordenada eclíptica.

Definição 5.20. A **longitude eclíptica** (λ) é a medida do arco da eclíptica entre a projeção da direção de um astro sobre a eclíptica e o ponto vernal, ou seja, indica o afastamento angular do máximo de longitude de um astro em relação ao máximo de longitude do ponto vernal.

A partir do ponto vernal, no sentido do movimento anual aparente do Sol (de oeste para leste na esfera celeste) a longitude eclíptica varia de 0° a 360° .

Definição 5.21. A **latitude eclíptica** (β) do astro é a medida do arco do máximo de longitude que contém o astro, contada da eclíptica até o astro considerado, ou seja, indica o afastamento angular de um astro em relação ao plano da eclíptica.

A latitude eclíptica varia entre 0° e 90° a partir do plano da eclíptica, sendo positiva em direção ao polo norte eclíptico e negativa em direção ao polo sul eclíptico.

Na Figura 5.8, a longitude eclíptica e a latitude eclíptica são, respectivamente, $\lambda = \widehat{\gamma P'}$ e $\beta = \widehat{PP'}$.

5.8 Transformação de coordenadas na esfera celeste

Considere um astro X de coordenadas horizontais, A e h , e de coordenadas equatoriais horárias, H e δ , e um lugar na superfície terrestre de latitude geográfica, ϕ . Sobre a esfera celeste, forma-se um triângulo esférico PZX , denominado **triângulo de posição**, que tem como vértices: o astro X , o polo norte celeste P e o zênite Z (Veja a Figura 5.9).

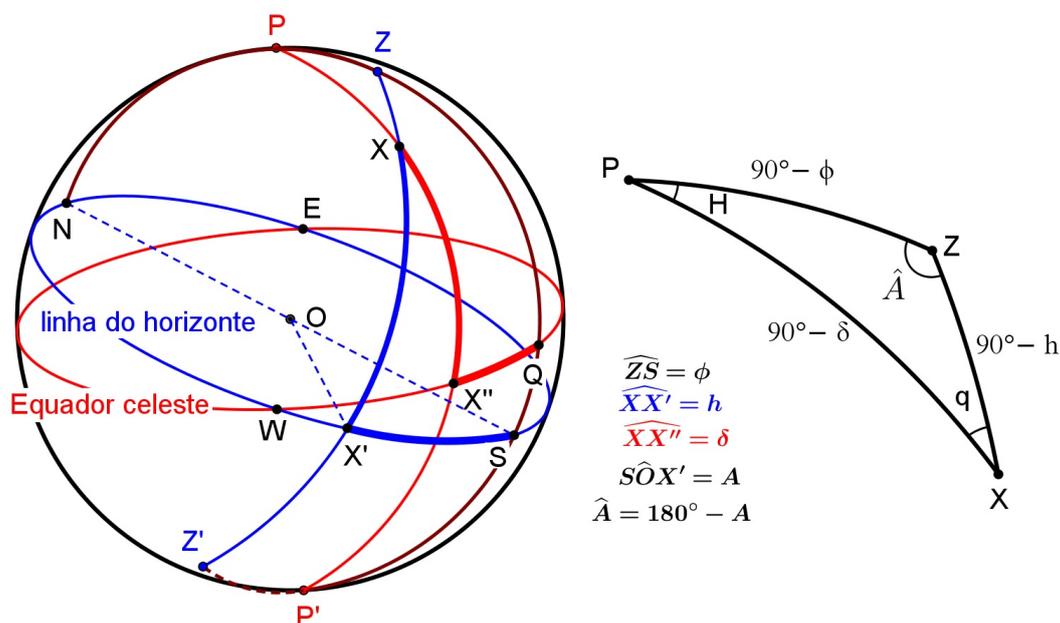


Figura 5.9 Coordenadas horizontais e equatoriais horárias: Origem do azimute no ponto cardeal sul.

O triângulo de posição é utilizado para determinar as coordenadas do astro quando é conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando são conhecidas as coordenadas do astro. Também, é usado para fazer as transformações de um sistema de coordenada para outro, por exemplo, determinar as coordenadas do sistema equatorial horária a partir do sistema horizontal e vice-versa.

5.8.1 Transformação de coordenadas horizontais em equatoriais horárias e vice-versa

O ângulo de vértice no polo norte celeste P , determinado pelo meridiano local e pelo círculo horário que passa pelo astro X , depende do ângulo horário H , enquanto que o ângulo de

vértice no zênite Z , determinados pelos círculos verticais que passam pelo polo norte celeste e pelo astro, depende do azimute A . Os valores desses ângulos, H e A , dependem da posição do astro e de latitude do lugar. O ângulo de vértice no astro X , determinado pelo círculo vertical e pelo círculo horário que passa pelo astro, é denominado **ângulo paralático** q .

Os lados do triângulo de posição PZX , conforme ilustra a Figura 5.9, são:

- arco entre o zênite e o polo: $\widehat{PZ} = 90^\circ - \phi$;
- arco entre o zênite e astro: $\widehat{ZX} = 90^\circ - h$;
- arco entre o polo e o astro: $\widehat{PX} = 90^\circ - \delta$;

que são, respectivamente, a colatitude, a distância zenital e a distância polar.

Os ângulos do triângulo de posição PZX são:

- ângulo com vértice no polo: $\widehat{ZPX} = \widehat{QX''} = H$;
- ângulo com vértice no astro: $\widehat{PXZ} = q$;
- ângulo com vértice no zênite: $\widehat{PZX} = \widehat{A}$ com $\widehat{A} = 180^\circ - A$, se a origem do arco de azimute é o ponto cardeal sul (Veja a Figura 5.9) e $\widehat{A} = 360^\circ - A$ se a origem é o ponto cardeal norte (Veja a Figura 5.10).

Proposição 5.22. *Sejam ϕ , a latitude geográfica de um lugar na superfície terrestre. O astro X tem coordenadas horizontais, A e h , e coordenadas equatoriais horárias, H e δ . As coordenadas equatoriais horárias e o ângulo paralático, em função das coordenadas horizontais e da latitude do lugar, são expressas mediante as fórmulas:*

$$\sin \delta = \sin \phi \sin h + \cos \phi \cos h \cos \widehat{A}, \quad (5.1)$$

$$\tan H = \frac{\cos h \sin \widehat{A}}{\sin h \cos \phi - \cos h \sin \phi \cos \widehat{A}}, \quad (5.2)$$

$$\tan q = \frac{\cos \phi \sin \widehat{A}}{\cos h \sin \phi - \sin h \cos \phi \cos \widehat{A}}. \quad (5.3)$$

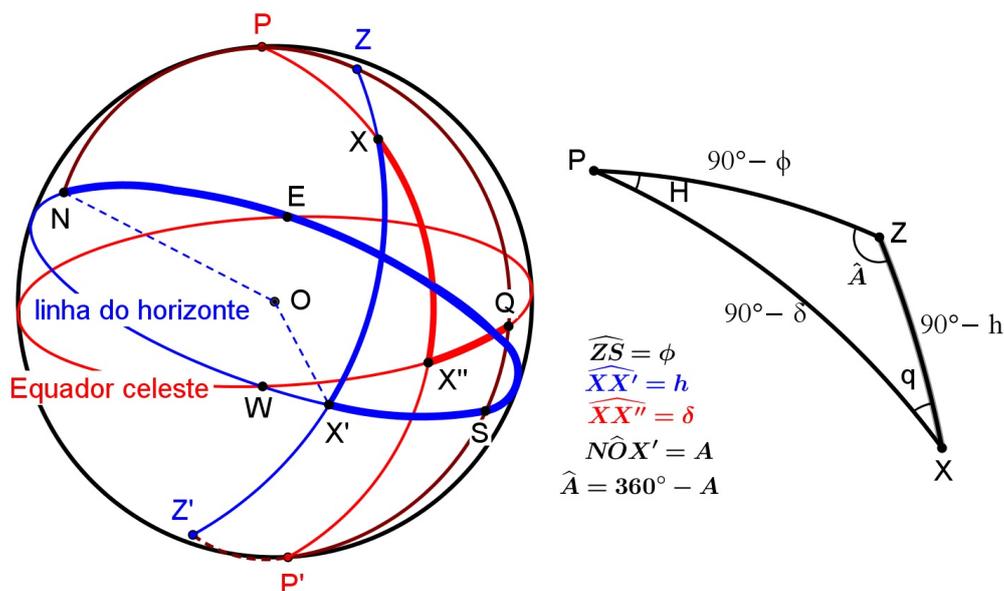


Figura 5.10 Coordenadas horizontais e equatoriais horárias: Origem do azimute no ponto cardinal norte.

Reciprocamente, as coordenadas horizontais e o ângulo paralático se expressam, em função das coordenadas equatoriais horárias e da latitude do lugar, mediante as equações:

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H, \quad (5.4)$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\cos \delta \sin H}{\cos \phi \sin \delta - \sin \phi \cos \delta \cos H}, \quad (5.5)$$

$$\tan q = \frac{\cos \phi \sin H}{\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos H}. \quad (5.6)$$

com $\hat{A} = 180^\circ - A$, se a origem do arco de azimute é o ponto cardinal sul e $\hat{A} = 360^\circ - A$ se a origem é o ponto cardinal norte.

Demonstração.

Sem perda de generalidade, considere o local de observação astronômica no hemisfério geográfico norte ($\phi > 0$) e um astro X localizado no hemisfério norte celeste ($\delta > 0$) e visível ($h > 0$).

Aplicando a lei do cosseno para lados, equação 3.13, tem-se:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - h) \cos \hat{A},$$

ou seja,

$$\sin \delta = \sin \phi \sin h + \cos \phi \cos h \cos \hat{A},$$

que é a equação 5.1, donde se obtém a declinação δ . Agora, aplicando a lei dos senos, equação 3.19, tem-se:

$$\frac{\sin H}{\sin(90^\circ - h)} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin q}{\sin(90^\circ - \phi)},$$

portanto,

$$\cos \delta \sin H = \cos h \sin \hat{A}, \quad (5.7)$$

$$\cos \delta \sin q = \cos \phi \sin \hat{A}. \quad (5.8)$$

Finalmente, aplicando a equação 3.20, obtêm-se as seguintes relações:

$$\sin(90^\circ - \delta) \cos H = \cos(90^\circ - h) \sin(90^\circ - \phi) \hat{A} - \sin(90^\circ - h) \cos(90^\circ - \phi) \cos \hat{A}$$

e

$$\sin(90^\circ - \delta) \cos q = \cos(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - h) - \sin(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - h) \cos \hat{A}.$$

Ou seja,

$$\cos \delta \cos H = \sin h \cos \phi - \cos h \sin \phi \cos \hat{A} \quad (5.9)$$

e

$$\cos \delta \cos q = \sin \phi \cos h - \cos \phi \sin h \cos \hat{A}. \quad (5.10)$$

Ao dividir a equação 5.7 por 5.9, obtém-se o ângulo horário,

$$\tan H = \frac{\cos h \sin \hat{A}}{\sin h \cos \phi - \cos h \sin \phi \cos \hat{A}}.$$

E, a divisão da equação 5.8 por 5.10 determina o ângulo paralático,

$$\tan q = \frac{\cos \phi \sin \hat{A}}{\cos h \sin \phi - \sin h \cos \phi \cos \hat{A}}.$$

De modo análogo, se as coordenadas horárias são conhecidas e para determinar as coordenadas horárias, basta resolver o sistema:

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H,$$

$$\cos h \sin q = \cos \phi \sin H,$$

$$\cos h \sin \hat{A} = \cos \delta \sin H,$$

$$\cos h \cos q = \sin \phi \cos \delta - \cos \phi \sin \delta \cos H,$$

$$\cos h \cos \hat{A} = \sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi \cos H.$$

para obterem as equações 5.4, 5.5 e 5.6.

Caso o local de observação astronômica seja hemisfério geográfico sul, basta considerar $\phi < 0$, e um astro X localizado no hemisfério sul celeste e invisível considere, respectivamente, $\delta < 0$ e $h < 0$. ■

As coordenadas δ e h são univocamente determinados em seus intervalos de definição, $[-90^\circ, 90^\circ]$, ao ser calculado mediante seus arcosenos.

5.8.2 Transformação entre as coordenadas equatoriais

Considere um astro X de coordenadas equatoriais horárias, H e δ , e de coordenadas equatoriais universais, α e δ . Como a declinação δ é comum a ambos os sistemas equatoriais, a relação da transformação entre esses sistemas, obviamente, envolve o ângulo horário H e a ascensão reta α . Porém, antes, veja a definição a seguir:

Definição 5.23. A *hora sideral* (H_S) ou *tempo sideral* é o ângulo horário do ponto Áries.

Proposição 5.24. Relação Fundamental da Astronomia de Posição: A hora sideral pode ser medida, a partir de qualquer astro, pela relação:

$$H_S = H + \alpha. \tag{5.11}$$

Demonstração.

Da Figura 5.11, verifica-se que:

$$\widehat{\gamma Q'} = \widehat{X'Q'} + \widehat{\gamma X'},$$

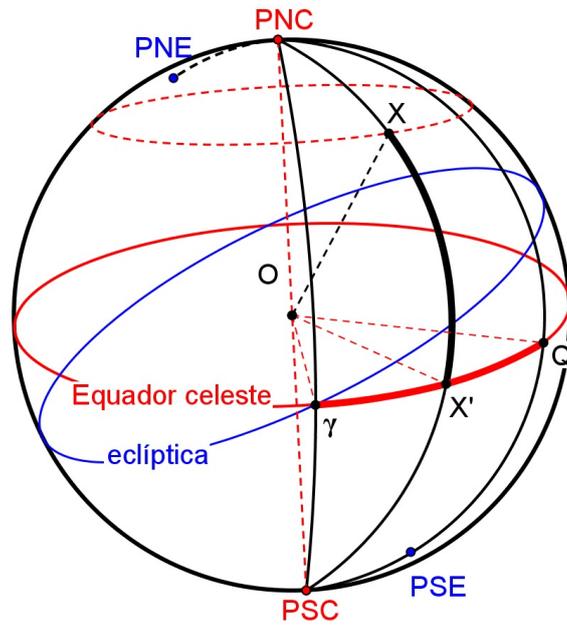


Figura 5.11 Transformação entre coordenadas equatoriais.

ou seja,

$$H_S = H + \alpha.$$

■

5.8.3 Transformação de coordenada equatorial universal em eclíptica e vice-versa

Considere um astro X de coordenadas equatoriais universais, α e δ , e de coordenadas eclípticas, λ e β . Sobre a esfera celeste, forma-se um triângulo esférico $P\pi X$ que tem como vértices: o polo norte celeste P , o polo norte eclíptico π e o astro X (Veja a Figura 5.12).

O ângulo de vértice no polo norte celeste P depende da ascensão reta α , enquanto que o ângulo de vértice no polo norte eclíptico π depende da longitude eclíptica λ .

Os ângulos e os lados do triângulo de posição $P\pi X$ são:

- ângulo com vértice no polo norte eclíptico: $P\hat{\pi}X = 90^\circ - \lambda$
- ângulo com vértice no polo norte celeste: $\pi\hat{P}X = 90^\circ + \alpha$

- ângulo com vértice no astro: $\widehat{\pi X P} = \eta$
- arco entre o polo norte eclíptico e o polo norte celeste: $\widehat{\pi P} = \varepsilon$;
- arco entre o polo norte celeste e o astro: $\widehat{P X} = 90^\circ - \delta$;
- arco entre o polo norte eclíptico e o astro: $\widehat{\pi X} = 90^\circ - \beta$;

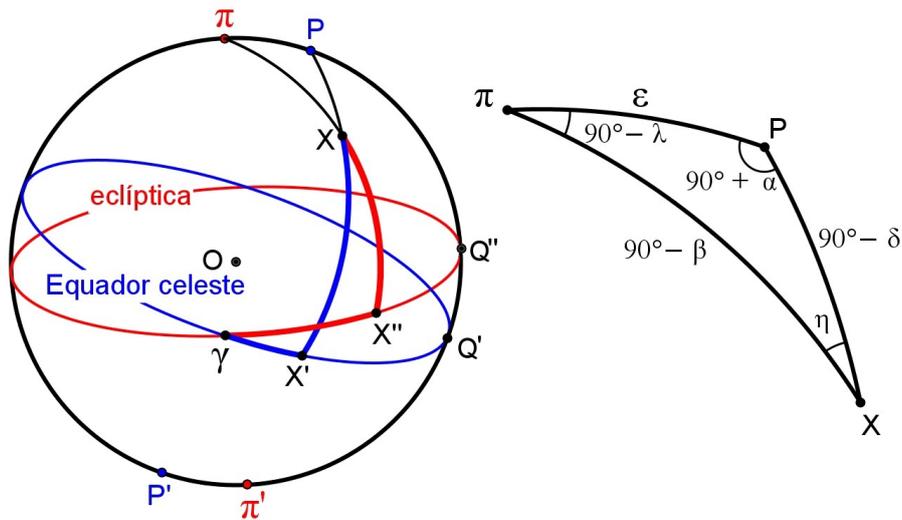


Figura 5.12 Transformação entre coordenada equatorial e eclíptico.

Proposição 5.25. *Seja X um astro de coordenadas equatoriais universais, α e δ , e de coordenadas eclípticas, λ e β . As coordenadas eclípticas e o ângulo no astro, em função das coordenadas equatoriais universais, são expressas mediante as fórmulas:*

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha, \quad (5.12)$$

$$\tan \lambda = \frac{\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha}, \quad (5.13)$$

$$\tan \eta = \frac{\cos \alpha \sin \varepsilon}{\cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \sin \alpha}. \quad (5.14)$$

Reciprocamente, as coordenadas equatoriais universais e o ângulo no astro se expressam, em função das coordenadas eclípticas, mediante as equações:

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda, \quad (5.15)$$

$$\tan \alpha = \frac{-\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda}{\cos \beta \cos \lambda}, \quad (5.16)$$

$$\tan \eta = \frac{\cos \lambda \sin \varepsilon}{\cos \beta \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \sin \lambda}. \quad (5.17)$$

onde ε é a obliquidade da eclíptica.

Demonstração.

Sem perda de generalidade, considere um astro X localizado no hemisfério norte celeste ($\delta > 0$) e no hemisfério que contém o polo norte eclíptico ($\beta > 0$).

Aplicando a lei do cosseno para lados, equação 3.13, tem-se:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \cos(90^\circ - \delta) \cos \varepsilon + \sin(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon \cos(90^\circ + \alpha),$$

ou seja,

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha,$$

que é a equação 5.12, donde se obtém a latitude eclíptica β . Agora, aplicando a lei dos senos, equação 3.19, tem-se:

$$\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{\sin(90^\circ - \lambda)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin \eta}{\sin \varepsilon},$$

portanto,

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha, \quad (5.18)$$

$$\cos \beta \sin \eta = \cos \alpha \sin \varepsilon. \quad (5.19)$$

Finalmente, aplicando a equação 3.20, obtêm-se as seguintes relações:

$$\sin(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ - \lambda) = \cos(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon - \sin(90^\circ - \delta) \cos \varepsilon \cos(90^\circ + \alpha)$$

e

$$\sin(90^\circ - \beta) \cos \eta = \cos \varepsilon \sin(90^\circ - \delta) - \sin \varepsilon \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ + \alpha).$$

Ou seja,

$$\cos \beta \sin \lambda = \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \quad (5.20)$$

e

$$\cos \beta \cos \eta = \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \sin \alpha. \quad (5.21)$$

Ao dividir a equação 5.20 por 5.18, obtém-se a longitude eclíptica,

$$\tan \lambda = \frac{\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha}{\cos \delta \cos \alpha}.$$

E, a divisão da equação 5.19 por 5.21 determina o ângulo no astro,

$$\tan \eta = \frac{\cos \alpha \sin \varepsilon}{\cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \sin \alpha}.$$

De modo análogo, se as coordenadas eclípticas são conhecidas, para determinar as coordenadas equatoriais universais, basta resolver o sistema:

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda,$$

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda,$$

$$\cos \delta \sin \eta = \cos \lambda \sin \varepsilon,$$

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda,$$

$$\cos \delta \cos \eta = \cos \beta \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \sin \lambda.$$

para obterem as equações 5.15, 5.16 e 5.17.

Caso o astro X esteja localizado no hemisfério sul celeste considere $\delta < 0$ e se localiza no hemisfério que contém o polo sul eclíptico considere $\beta < 0$. ■

As coordenadas δ e β são univocamente determinados em seus intervalos de definição, $[-90^\circ, 90^\circ]$, ao ser calculado mediante seus arcosenos.

CAPÍTULO 6

Aplicações

Neste capítulo será abordado algumas aplicações da trigonometria esférica na esfera celeste tais como a distância esférica entre dois astros, nascer e ocaso de um astro e a determinação de qibla. As principais referências utilizadas foram: Boczko (1984), Oliveira (2004) e Roegel (2008).

6.1 Distância esférica entre dois astros

Definição 6.1. *A distância esférica entre dois astros é o menor arco medido ao longo do círculo máximo passando por esses astros.*

Proposição 6.2. *Sejam A e B dois astros com suas coordenadas equatoriais universais, α_A , δ_A , α_B e δ_B . A distância esférica entre esses astros satisfaz a relação:*

$$\cos \widehat{AB} = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B). \quad (6.1)$$

Demonstração.

Sejam $\delta_A = \widehat{AA'}$, $\delta_B = \widehat{BB'}$, $\alpha_A = \widehat{\gamma A'}$ e $\alpha_B = \widehat{\gamma B'}$ como mostra a a Figura 6.1.

Assim, $\widehat{PA} = 90^\circ - \delta_A$ e $\widehat{PB} = 90^\circ - \delta_B$ são, respectivamente, as distâncias polares dos astros A e B , enquanto que \widehat{AB} , a distância esférica entre esses astros. Além disso, $\widehat{A'PB} = \widehat{A'B'} = \widehat{\gamma B'} - \widehat{\gamma A'} = \alpha_B - \alpha_A$. Substituindo esses valores na equação 3.13, da lei do cosseno para lado, tem-se:

$$\cos \widehat{AB} = \cos(90^\circ - \delta_A) \cos(90^\circ - \delta_B) + \sin(90^\circ - \delta_A) \sin(90^\circ - \delta_B) \cos \widehat{A'PB},$$

ou seja,

$$\cos \widehat{AB} = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B).$$

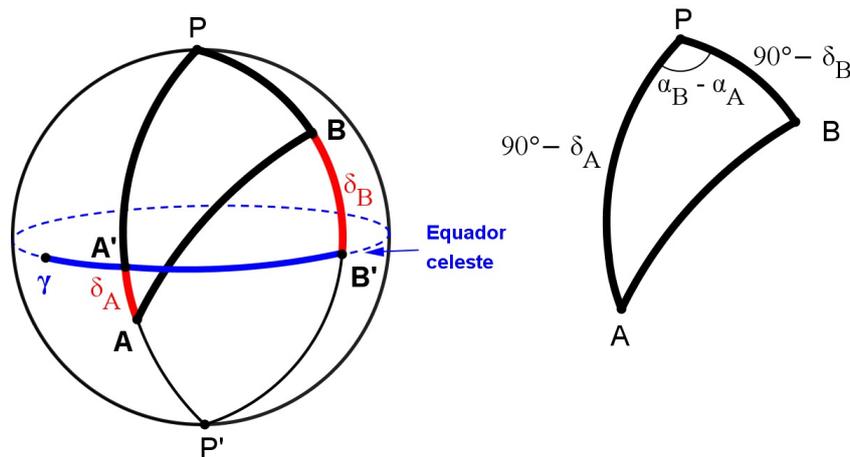


Figura 6.1 Distância esférica entre dois astros A e B .

■

6.2 Nascer e ocaso de um astro

O movimento aparente dos astros faz-se de leste para oeste. A Figura 6.2 ilustra o trajeto aparente de um astro na esfera celeste ao longo de 24 horas, o círculo diurno.

Definição 6.3. *O nascer e o ocaso de um astro são, respectivamente, os instantes em que o astro aparece e desaparece no horizonte.*

Na Figura 6.2, E e W são, respectivamente, ponto cardinal leste e oeste e mostra o círculo diurno de um astro de declinação positiva. Note que o círculo diurno do astro é paralelo ao equador celeste. O nascer e o ocaso de um astro, pela definição 6.3, são os pontos de intersecção do círculo diurno do astro com a linha do horizonte, portanto, nesses pontos, a altura do astro é nula, $h = 0$, e sua distância zenital é igual a 90° .

Como o ângulo horário é o arco medido ao longo do equador celeste em relação ao meridiano local, a sua variação diurna cresce à mesma velocidade angular de um dia de 24 horas. Assim, a diferença entre os ângulos horários do astro no ocaso e no nascer corresponde exatamente ao período de tempo em que o astro passa acima do horizonte, ou seja, é o tempo de

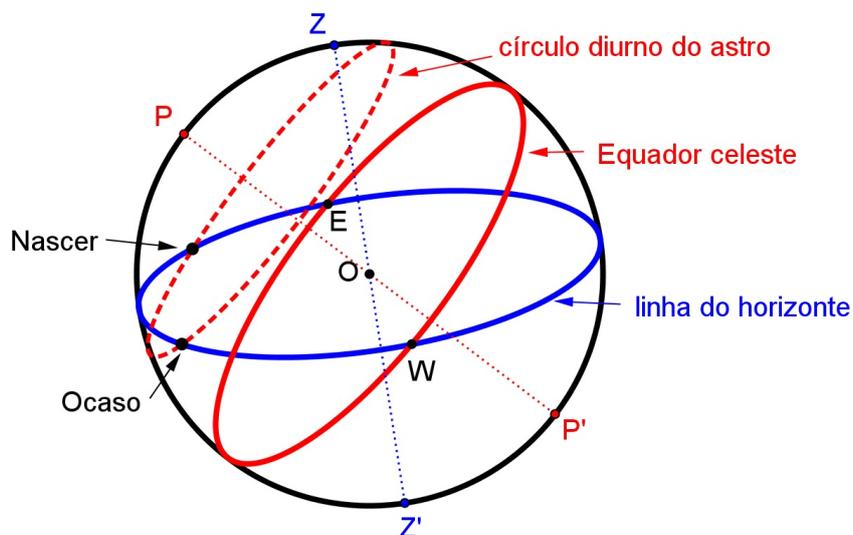


Figura 6.2 Círculo diurno do astro: nascer e ocaso de um astro.

visibilidade do astro.

Proposição 6.4. *Sejam δ e ϕ , respectivamente, a declinação do astro e a latitude do lugar de observação. O azimute e o ângulo horário do nascer e do ocaso são expressas mediante as fórmulas:*

$$\cos \hat{A} = \sin \delta \sec \phi. \quad (6.2)$$

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta. \quad (6.3)$$

com $\hat{A} = 180^\circ - A$, se a origem do arco de azimute é o ponto cardinal sul e $\hat{A} = 360^\circ - A$ se a origem é o ponto cardinal norte.

Demonstração.

Seja a latitude geográfica de um lugar $\phi = \widehat{PY}$ e a declinação do astro $\delta = \widehat{XX'}$, conforme mostra a Figura 6.3. A altura no nascer e no ocaso é igual a 0, $h = 0$. Substituindo esse valor de h na equação 5.1, tem-se:

$$\sin \delta = \cos \phi \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \sin \delta \sec \phi$$

Para calcular o ângulo horário no nascer e no ocaso, sabe-se que $z = \widehat{ZX} = 90^\circ$. Portanto, da lei do cosseno para lado, equação 3.13, tem-se:

$$\cos 90^\circ = \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - \delta) \cos H,$$

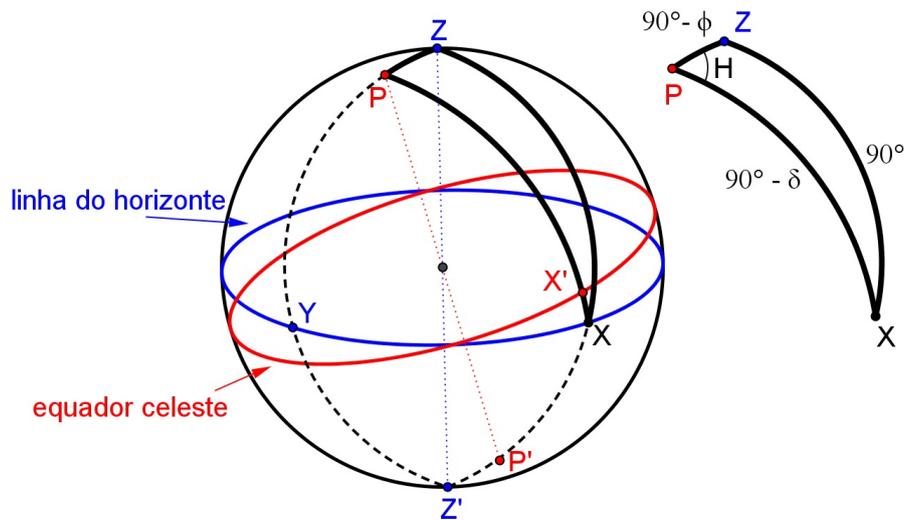


Figura 6.3 Triângulo de posição: nascer e ocaso de um astro.

ou seja,

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta.$$

■

Os valores possíveis de H , segundo Boczko (1984, pp 95-96), vão corresponder ao ângulo horário do nascer e do ocaso, qualquer que seja o valor da declinação do astro,

- Nascer: $12 \text{ h} < H < 24 \text{ h}$;
- Ocaso: $0 \text{ h} < H < 12 \text{ h}$.

A equação 6.3 permite calcular, por exemplo, quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte em um certo local e em certa data do ano, pois, para qualquer astro, o tempo de visibilidade acima do horizonte é duas vezes o ângulo horário desse astro no momento do nascer ou ocaso.

6.3 Qibla

“Se a distância da Kaaba é pequena, a sua direção pode ser determinada por um investigador diligente, mas quando a distância é grande, apenas os astrônomos podem determinar que direção.” (BIRUNI, 1967)

Segundo o site <http://pt.wikipedia.org/wiki/Qibla>, no idioma árabe, **al-qibla** ou, simplesmente, **qibla** é a palavra genérica para direção. No Islã é definido como a direção da Kaaba em Meca para onde devem ser dirigidas as orações. De fato, um dos versos do Alcorão:

“Vimos-te (ó Mensageiro) orientar o rosto para o céu; portanto, orientar-te-emos até um qibla que te satisfaça. Orienta teu rosto (ao cumprires a oração) para a Sagrada Mesquita (de Makka)! E vós (crentes), onde quer que vos encontréis, orientai vossos rostos até ela.” (Alcorão, Surat 2, Ayat 144)

“Aonde quer que te dirijas, orienta teu rosto para a Sagrada Mesquita. Onde quer que estejais, voltaí vossos rostos na direção dela ...” (Alcorão, Surat 2, Ayat 150)

Determinar o qibla era uma questão central e um gerador constante de um ambiente científico durante o auge da ciência árabe, que exigiu conhecimento matemático e astronômico. Os matemáticos árabes que contribuíram para determinar o qibla de qualquer ponto da superfície da Terra foram: Al-Khawarizmi (780-850), Habash al-Hasib al-Marwazi (?-869), Al-Nayrizi (865-922), Al-Battani (858-929), Abu al-Wafa Buzjani (940-998), Ibn Yunus (950-1009), Al-Sijzi (945-1020), Abu Nasr Mansur (960-1036), Ibn al-Haytham (965-1040), Al-Biruni (973-1048), Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), Ibn al-Shatir (1304-1375) e Al-Khalili (1320-1380), entre outros.

O desenvolvimento a seguir para determinar o qibla é devido a Al-Khalili. Segundo Roegel (2008, pp. 5-7), Al-Khalili produziu uma tabela de qibla muito precisa, em função da latitude e longitude do local de oração. A cópia dessa tabela de qibla encontra-se na Bibliothèque Nationale em Paris.

Proposição 6.5. *Sejam as coordenadas geográficas do lugar de oração λ_R e ϕ_R e as coordenadas de Meca λ_M e ϕ_M . O qibla do lugar de oração à Meca, q , é dada por:*

$$\tan q = \frac{\sin \Delta\lambda}{\cos \phi_R \tan \phi_M - \sin \phi_R \cos \Delta\lambda} \quad (6.4)$$

com $\Delta\lambda = \lambda_M - \lambda_R$

Demonstração.

Sejam $\phi_M = \widehat{MM'}$, $\phi_R = \widehat{RR'}$, $\lambda_M = \widehat{GM'}$ e $\lambda_R = \widehat{R'G}$ como mostra a Figura 6.4. Assim, $\widehat{PM} = 90^\circ - \phi_M$, $\widehat{PRM} = q$ e $\widehat{PR} = 90^\circ - \phi_R$, $\widehat{R'PM} = \widehat{M'R'} = \lambda_M - \lambda_R = \Delta\lambda$. Substituindo esses valores na equação 3.32, tem-se:

$$\cos(90^\circ - \phi_R) \cos \Delta\lambda = \sin(90^\circ - \phi_R) \cot(90^\circ - \phi_M) - \sin \Delta\lambda \cot q,$$

ou seja,

$$\sin \Delta\lambda \cot q = \cos \phi_R \frac{\sin \phi_M}{\cos \phi_M} - \sin \phi_R \cos \Delta\lambda,$$

logo,

$$\cot q = \frac{\cos \phi_R \sin \phi_M - \sin \phi_R \cos \phi_M \cos \Delta\lambda}{\cos \phi_M \sin \Delta\lambda},$$

portanto, a seguinte expressão calcula o Qibla do lugar de oração:

$$\tan q = \frac{\sin \Delta\lambda}{\cos \phi_R \tan \phi_M - \sin \phi_R \cos \Delta\lambda}.$$

■

Exemplo 6.1. *Sabendo-se que as coordenadas geográficas de Meca são latitude $\phi_M = 21^\circ 27' 00'' N$ e longitude $\lambda_M = 39^\circ 49' 00'' E$ e, para a cidade do Recife, latitude $\phi_R = 8^\circ 3' 14'' S$ e longitude $\lambda_R = 34^\circ 52' 51'' W$. Determine o qibla de Recife.*

Atribuindo os valores $\phi_M = 21,416667^\circ$, $\lambda_M = 39,816667^\circ$, $\phi_R = -8,053889^\circ$, $\lambda_R = -34,880833^\circ$ e $\Delta\lambda = \lambda_M - \lambda_R = 74,6975^\circ$ na equação 6.4, tem-se:

$$\tan q = 2,26771457 \Rightarrow q = 66,2038^\circ.$$

O qibla de Recife para Meca é igual a $66^\circ 12' 13,7''$, no sentido horário, de Norte para Leste.

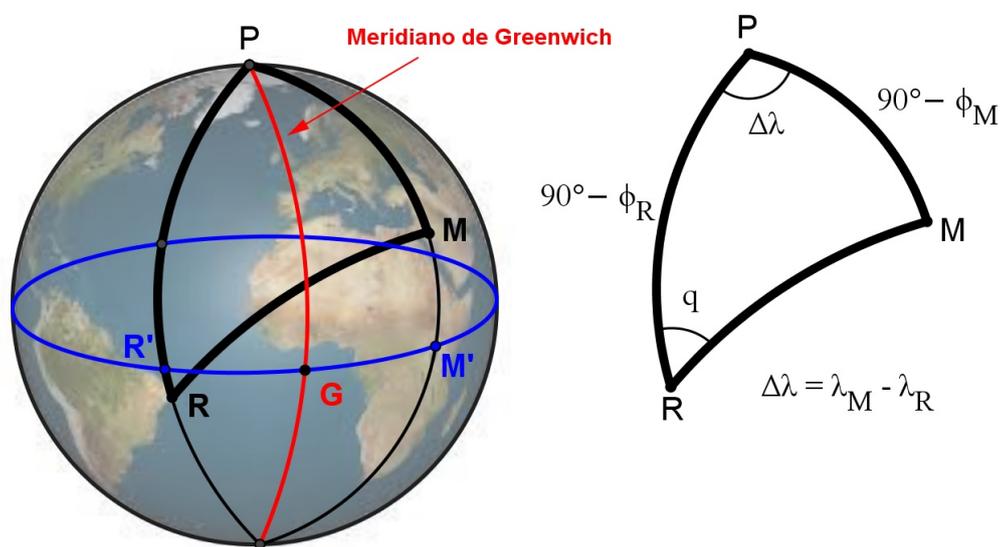


Figura 6.4 Qibla Recife - Meca.

Considerações finais

Neste trabalho apresentamos a “esfera” enquanto objeto matemático fundamentada na geometria euclidiana, de forma a utilizá-la o globo terrestre e a esfera celeste como modelo físico representativo da Terra e do Céu.

Para tanto nos apropriamos de conceitos pedagógicos gerais sobre os recursos da interdisciplinaridade, tal qual preconiza um dos objetivos para a educação básica dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997, p. 37), o qual busca “Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares”.

Assim, partindo desse pressuposto, conseguimos apresentar, a partir da relação entre as disciplinas de Geografia, História, Astronomia e da Matemática, a compreensão de uma leitura relacional, apropriadas a partir de vários conceitos. Deste campo múltiplo conseguimos de forma prática, estabelecer conexões e passagens entre os conhecimentos, contribuindo para a percepção de convergências e até mesmo de divergências no campo pedagógico.

Ao realizarmos este trabalho pudemos perceber as ricas interfaces entre campos que por si só seduzem aqueles que se aventuram em pô-los em prática. A meta desta pesquisa foi perseguida tendo como percepção o afastamento disciplinar dos campos de estudos. Contudo a sua finalização mostrou que o afastamento é mero método científico e que seus usos conseguem, pragmaticamente, enriquecer o conhecimento sobre o mundo.

Assim, trabalhos futuros para o Ensino Fundamental e Médio podem ser desenvolvidos com a Geometria Esférica fazendo uma conexão entre a Matemática, a Geografia, a História, a Astronomia e a Física, no contexto da Trigonometria Esférica.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRANCHES, D. *Relatório apresentado ao Ministro da Justiça e Negócios Interiores, Dr. J. J. Seabra*. 1904. Relatório acrescentado disponível em <<http://seer.ufrgs.br/asphe/article/viewFile/30262/pdf>>. Acesso em ago. 2014.
- [2] ALCORÃO SAGRADO. *ALCORÃO SAGRADO: Tradução Samir el Hayek*. Guarulho, SP. Federação das Associações Islâmicas do Brasil, 1974.
- [3] ALVES, S. A. *Geometria do Globo Terrestre*. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2, 2004, Bahia. Anais eletrônicos da II Bienal da SBM, Bahia: SBM, 2004. Mini-curso. Disponível em <www.bienasbm/M29.pdf>. Acesso em abr. 2014.
- [4] ANDRADE, M. L. T. D. *Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico*. 2011, 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.
- [5] ANTAR NETO, A. et al. *Noções de Matemática: Geometria*. São Paulo: Editora Moderna, 1982. (v. 5)
- [6] ARANA, J. M. *Astronomia de Posição: Notas de aula*. São Paulo, UNESP, 2000.
- [7] AYRES, F. *Schaum's outline of theory and problems of plane and spherical trigonometry*. New York: Schaum Publishing Co., 1954.
- [8] AYRES, F. *Trigonometria plana e esférica: Coleção Schaum*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1958.

- [9] BARONE, J. *Livros didáticos de matemática da Editora FTD no cenário brasileiro: as primeiras décadas do século XX*. 2008, 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2008.
- [10] BERROCOSO, M. et. al. *Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición*. Puerto Real: Universidad de Cádiz, 2003.
- [11] BIRUNI, M. A. *The Book on the Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities*. American University of Beirut, 1967.
- [12] BÔCHER, M. et. al. *Trigonometry with the theory and use of logarithms*. New York: Henry Holt and Company, 1914.
- [13] BOCZKO, R. *Conceitos de astronomia*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1984.
- [14] BOWSER, E. A. *A treatise on plane and spherical trigonometry and its applications to astronomy and geodesy, with numerous examples*. Boston: D. C. HEATH and Co., 1892.
- [15] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, 1997.
- [16] BRENKE, W. C. *Plane and spherical trigonometry*. New York: The Dryden Press, 1943.
- [17] BRUMBERG, V. A. *Relativistic Hierarchy of Reference Systems and Time Scales*. In HUGHES, J.A.; SMITH, C.A.; KAPLAN, G.H. (eds.). Reference systems of the 127th Colloquium of IAU. Washington, United States Naval Observatory - USNO, 1991.
- [18] BRUNNOW, F. *Spherical astronomy*. London: Asher and Company, 1865.
- [19] CAMARGO, V. L. V. *Trajelórias sobre o globo terrestre: Um estudo da geometria da esfera nos mapas cartográficos*. 2009, 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2009.
- [20] CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

- [21] CASAS, G. G. *Trigonometría esférica con aplicaciones a la Navegación*. Oviedo: Universidad de Oviedo, 1999.
- [22] CASEY, J. *A treatise on spherical trigonometry and its application to geodesy and astronomy with numerous examples*. Dublin: Hodges and Figgis Co., 1889.
- [23] CHAUVENET, W. *A treatise on plane and spherical trigonometry*. Philadelphia: J. B. Lippincott Co., 1856.
- [24] CONANT, L. L. *Plane and spherical trigonometry*. New York: American Book Company, 1909.
- [25] CRÉACH, P. Y. *Trigonométrie sphérique. In Mathématiques au lycée: cours, animations et outils*. Disponível em <<http://pycreach.free.fr/archives/Trigonometrie%20spherique.pdf>>. Acesso em maio 2014.
- [26] CREASE, R. P. *Os 10 mais belos experimentos científicos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2006.
- [27] CROCKETT, C. W. *Elements of plane and spherical trigonometry*. New York: American Book Company, 1896.
- [28] DAVIES, C. *Elements of geometry and trigonometry from the works of A. M. Legendre adapted to the course of mathematical instruction in the United States*. New York: A. S. Barnes and Company, 1872.
- [29] DIAS, M. O. L. S. *A Interiorização da Metrópole e outros ensaios*. São Paulo: Alameda, 2005.
- [30] DOLCE, O. et. al. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial: posição e métrica*. 6ª Ed. São Paulo: Atual Editora, 2005. (v. 10)
- [31] DREYER, J. L. E. *History of astronomy from Thales to Kepler*. 2a. Ed. New York: Dover Publications Inc., 1953.

- [32] DUARTE, P. A. *Fundamentos de Cartografia*. 3ª Ed. Florianópolis: Editora UFSC, 2006. (Série Didática)
- [33] DUELI, L. J. *Geometria esférica: proposta de sequências didáticas interdisciplinares*. 2013, 126 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora - MG, 2013.
- [34] DUPUIS, N. F. et. al. *An elementary treatise on spherical trigonometry with applications to geodesy and astronomy*. Kingston: R. Uglow and Company, 1907.
- [35] EVANGELISTA, L. R. *Perspectivas em História da Física: dos Babilônios à Síntese Newtoniana*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011. (V. 1)
- [36] ÉVORA, F. R. R. *Natureza e Movimento: um estudo da física e da cosmologia aristotélicas*. Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Campinas, s. 3, v. 15, n. 1. pp. 127-170, jan./jun. 2005.
- [37] F. T. D. *Elementos de geometria segundo os programas de admissão às escolas superiores*. São Paulo: Editora do Brasil, 1957.
- [38] F. T. D. *Trigonometria elementar. Programma do Collegio Pedro II seguido de trigonometria esférica*. São Paulo: Editora Paulo de Azevedo, 1928.
- [39] FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2003.
- [40] FRIAÇA, A. C. S. et. al. *Astronomia: Uma visão geral do Universo*. 2ª. Ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.
- [41] GABAGLIA, E. B. R. *Elementos de geometria contendo noções sobre as curvas usuais e numerosos exercícios numéricos por F. I. C. Revistos e adaptados à instrução secundária do Brazil pelo Dr. Engenio Le Barros Raja Gabaglia do Gymnasto Nacional*. Rio de Janeiro: Livraria Garnier, 1925.

- [42] GLOBO. <http://g1.globo.com/pernambuco>, do dia 6 de abril de 2013a, acesso em ago. 2014.
- [43] GLOBO. <http://g1.globo.com/pernambuco>, do dia 7 de agosto de 2013b, acesso em ago. 2014.
- [44] GONÇALVES, F. I. R. et, al. *Matemática na Astronomia: trabalho de projecto*. Portugal: Departamento de Matemática da Universidade do Minho, 2007.
- [45] GOODWIN, H. B. *Trigonometry plane and spherical*. New York: Longmans, Green, and Co., 1907.
- [46] GRANVILLE, W. A. *Plane and spherical trigonometry and four-place tables of logarithms*. Boston: Ginn and Company, 1908.
- [47] GREEN, R. M. *Spherical astronomy*. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [48] GUSSI, J. C. *O ensino da matemática no Brasil: análise dos programas de ensino do colégio Pedro II (1837 a 1931)*. 2011, 142f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, São Paulo, 2011.
- [49] HAIDAR, M. L. M. *O ensino secundário no Brasil Império*. 2ª Ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.
- [50] HEATH, T. *Greek astronomy*. New York: Dover Publications, Inc., 1932.
- [51] HEATH, T. *A History of Greek Mathematics: from Aristarchus to Diophantus*. New York: Dover Publications Inc., 1981. (v. II)
- [52] HOBSBAWM, E. *Era dos extremos: o breve século XX (1914-1991)*. São Paulo: Cia das Letras, 1995.
- [53] HOBSBAWM, E. *Era dos impérios: (1875-1914)*. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2003.
- [54] HOBSBAWM, E. *Era do capital: (1848-1875)*. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2010.

- [55] HONDA, A. M. C. *Matemática e Geografia: uma interdisciplinaridade*. 2013, 107 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2013.
- [56] JANOTTI, M. L. M. et. al. *Sociedade e política na Primeira República*. São Paulo: Atual, 2011. (Série Discutindo a história do Brasil).
- [57] KAMP, P. V. *Principles of Astronomy*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1967.
- [58] KELLS, L. M. et. al. *Plane and spherical trigonometry*. 2nd. Ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1940.
- [59] LACROIX, S. F. *An elementary treatise on plane and spherical trigonometry and on the application of algebra to geometry*. 3rd. Ed. Boston: Hilliard, Gray and Co., 1833.
- [60] LEGENDRE, A. M. *Elements of Geometry*. Baltimore: Kelly and Piet Publishers, 1867.
- [61] LEGENDRE, A. M. *Tratado de trigonometria traduzido por Manoel Ferreira de Araújo*. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1809.
- [62] LIMA NETO, G. B. *Astronomia de Posição: notas de aula*. In: Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. São Paulo: Universidade São Paulo, 2013. Disponível em <<http://www.astro.iag.usp.br/gastao/astroposicao.html>>. Acesso em jun. 2014.
- [63] LIMA, D. D. *Desvendando a Matemática do GPS*. 2013, 50 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão - SE, 2013.
- [64] LIMA, E. L. *Seção conceitos e controvérsias*. Revista do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1980.
- [65] LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1991.

- [66] LOOMIS, E. *Elements of plane and spherical trigonometry, with their applications to mensuration, surveying, and navigation*. New York: Harper and Brother, 1886.
- [67] MACIEL, V. B. *Da corte à província, do império à república, do colégio pedro II ao liceu de goiás: dinâmicas de circulação e apropriação da matemática escolar no Brasil, 1856-1918*. 2012, 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, 2012.
- [68] MARIN, A. P. et. al. *Elementos de geometria*. São Paulo: Editora Weiszflog Irmãos, 1917.
- [69] MARTIN, V. A. F. et. al. *Sobre os Sistemas de Referência Celeste*. Revista Sitientibus, Feira de Santana-Bahia, v. 01(01), pp 25-29, jan-dez 2005. (Série Ciências Físicas)
- [70] MCLELLAND, W. J. et. al. *A treatise on spherical trigonometry with application to spherical geometry and numerous examples*. London: Macmillan and Co., 1890.
- [71] MORITZ, H. *Geodetic reference system 1980*. In: Bulletin Géodésique. v. 58(3), pp. 388-398, 1984.
- [72] MORITZ, R. F. *Spherical trigonometry for colleges and secondary schools*. London: Longmans, Green and Co., 1908.
- [73] MORMÊLLO, B. H. *O ensino de matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro de 1811 a 1874*. 2010, 198 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática). Universidade de Campinas, Campinas - SP, 2010.
- [74] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (v. 2)
- [75] MURRAY, D. A. *A text-book on spherical trigonometry*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1913.
- [76] NEWCOMB, S. *A compendium of spherical astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars*. New York: The Macmillan Company, 1906.

- [77] OLIVEIRA FILHO, K. S. et. al. *Astronomia e Astrofísica*. 2ª. Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [78] PALMER, C. J. et. al. *Plane and spherical trigonometry*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1934.
- [79] PATAKI, I. *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*. 2003, 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [80] PEDRO, I. *Trigonometria plana e esférica para o ciclo colegial e admissão às Escolas Superiores*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955.
- [81] PEREIRA, A. C. C. *A Trigonometria esférica presente na obra de Triangulis de Regiomontanus*. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, X, 2013, Campinas-SP: SBHM, 2013. Anais. Disponível em <www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/article/download/.../63>. Acesso em mai. 2014.
- [82] PEREIRA, T. *Curso de trigonometria rectilinea e espherica*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1913.
- [83] PHILLIPS, A. W. et. al. *Elements of trigonometry plane and spherical*. New York: Harper and Brothers Publishers, 1899.
- [84] PORTO, C. M. et. al. *A evolução do pensamento cosmológico e o nascimento da ciência moderna*. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 30, n. 4, 2008.
- [85] PRESTES, I. C. R. *Geometria esférica: uma conexão com a Geografia*. 2006, 210 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.
- [86] REEVES, E. A. *Trigonometry plane and spherical*. London: Royal Geography Society, 1904.

- [87] ROEGEL, D. *An Extension of Al-Khalili's Qibla Table to the Entire World*. 2008. Disponível em <<http://www.loria.fr/roegel/articles/khalili-ext.pdf>>. Acesso em jul. 2014.
- [88] ROJAS, L. J. P. *Enseñanza de elementos básicos de trigonometría en la astronomía: Una propuesta para trabajar con estudiantes de educación media*. 2012, 66 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e Naturais). Faculdade de Ciências, Universidade Nacional de Colômbia, Bogotá, 2012.
- [89] RONAN, C. A. *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge: Das origens à Grécia*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2001. (v. 1)
- [90] SÁ, N. C. *Elementos de Geodésia*. In: Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas. São Paulo: Universidade São Paulo, s.d. Disponível em <www.social.stoa.usp.br/geografia/apostila-elementos-da-geodesia-1pdf>. Acesso em mar 2014.
- [91] SANTANA, A. L. M. *Trabalhando com a geometria não-euclidiana, com ênfase para a geometria do globo terrestre na Educação Básica: proposta de novas atividades*. 2013, 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal da Bahia, Salvador - BA, 2013.
- [92] SEDGWICK, W. T, et. al. *História da Ciência: Desde a remota antiguidade até o alvorecer do século XX*. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1950.
- [93] SEYMOUR, F. E. et. al. *Plane and spherical trigonometry*. New York: The Macmillan Company, 1948.
- [94] SLAUGHT, H. E. *Solid geometry with problems and applications*. New York: Allyn and Bacon, 1919.
- [95] SOBREIRA, P. H. A. *Astronomia no ensino de Geografia: análise crítica nos livros didáticos de Geografia*. 2002, 276 f. Dissertação (Mestrado em Geografia Física). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

- [96] SOBREIRA, P. H. A. *Cosmografia geográfica: a Astronomia no ensino de Geografia*. 2005, 246 f. Tese (Doutorado em Geografia Física). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- [97] TAYLOR, J. M. *Plane and spherical trigonometry with answers and tables*. New York: Barnes and Noble, Inc., 1946.
- [98] TAYLOR, T. U. et. al. *The elements of plane and spherical trigonometry*. Boston: Ginn and Company, 1902.
- [99] TODHUNTER, I. *Spherical trigonometry for the use of colleges and schools*. London: Macmillan and Co., 1901.
- [100] TRENTIN, P. H. *Matemática no Brasil: as traduções de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838) das obras de Adrien Marie Legendre*. 2011, 154 f. Tese (Doutorado em História da Ciência). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.
- [101] TWISDEN, J. F. *Plane trigonometry, mensuration, and spherical trigonometry*. London: Richard Griffin and Company, 1860.
- [102] VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)*. São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.
- [103] VAN BRUMMELEN, G. *Heavenly Mathematics: the forgotten art of spherical trigonometry*. New Jersey: Princeton University Press, 2013.
- [104] WELLS, W. *A practical text-book on plane and spherical trigonometry*. Boston: Leach, Shewell, and Sanborn, 1888.
- [105] WENTWORTH, G. et. al. *Plane and spherical trigonometry*. Boston: Ginn and Company, 1914.

- [106] YOUNG, J. R. *Elements of plane and spherical trigonometry with its applications to the principles of navigation and nautical astronomy, with the logarithmic and trigonometrical tables*. London: John Souter, 1833.
- [107] ZANELLA, I. A. *Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações*. 2013, 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2013.