PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

Círculos notáveis associados a um triângulo

por

Glebison de Souza

Preprint PROFMAT 1 (2014) 29 de agosto, 2014

Círculos notáveis associados a um triângulo

Glebison de Souza
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
Brazil
e-mail: profgleb@gmail.com

29 de agosto de 2014

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns conceitos clássicos a respeito de triângulos, suas propriedades, definições e teoremas. Mostrar as relações que representam a área de um triângulo qualquer, como por exemplo, a Fórmula de Herão. Construir e calcular os raios dos círculos ex-inscritos, inscrito e circunscrito a um triângulo e, em especial, a relação existente entre as medidas dos raios desses círculos.
Palavras-chave: Círculos tangentes notáveis; raios de círculos ex-inscritos, inscrito e circunscrito.

Abstract

The objective of this work is to present some classic concepts about triangles, their properties,definitions and theorems. We prove the formulas for the area of any triangle such as Herao formula; we construct and compute the radii of inscribed and circunscribed circles , excircles,in particular,the relation between the radii of those.
Keywords: Remarkable tangent circles; rays excircles, inscribed and circumscribed.

Introdução

Este é um trabalho oportunizado pelo Departamento de Matemática da UFPR, através do programa PROFMAT, com a orientação do Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto. Procuramos demonstrar com um certo rigor alguns dos teoremas, proposições e corolários da geometria euclidiana plana, sendo apresentados de maneira gradativa para serem utilizados em teorema dos capítulos subsequentes, o qual citaremos a seguir. No capítulo 1 iniciamos com os postulados de distância, retas, planos e medição de ângulos. Em seguida, definimos triângulo, classificação enquanto aos lados; o postulado para a congrência de triângulos (LAL) bem como os teoremas: ALA, LLL, LAA_o e o caso especial de congruência entre triângulos retângulos; citamos algumas proposições clássicas, como o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, desigualdade do ângulo externo e um corolário que juntamente com Postulado das paralelas (O $5.^o$ Postulado de Euclides) mostra que os ângulos alternos internos são iguais; por conseguinte, definimos círculo, bissetriz e mediatriz.
Já no capítulo 2, iniciamos com o Teorema fundamental sobre proporcionalidade e a recíproca. Em seguida, apresentamos os teoremas de semelhança entre triângulos (LLL, AA e LAL). Em seguida definimos área, seus postulados e as proposições de área para: quadrado e retângulo (estes demonstrados exaustivamente: para os naturais, racionais e reais). Citamos também proposições para: paralelogramo, triângulo, losango e trapézio. Provamos o Teorema de Pitágoras via áreas utilizando um corolário de equivalência entre área de triângulos.
No capítulo 3, daremos início ao propósito deste trabalho, iniciando com a construção do círculo inscrito a um triângulo ABC e a área em função do semiperímetro (p) e o raio (r) deste círculo, ou seja, Área$= p \cdot r$. Em seguida, construímos os círculos ex-inscritos a um triângulo ABC de raios r_a, r_b e r_c e área $(p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$. Por conseguinte, construímos o círculo circunscrito ao triângulo ABC de raio R de área $\dfrac{abc}{4R}$. O cálculo de umas das alturas de um triângulo em função dos lados, para então deduzirmos a conhecida fórmula de Herão: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Demonstramos também a lei dos senos e cossenos. E, por fim demonstramos as fórmulas que relacionam os raios dos círculos ex-inscritos com o raio do círculo inscrito $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$ e com o raios dos círculos: $4R = r_a + r_b + r_c - r$.
Na última seção, apresentamos um exerício para construção dos círculos usando o Geogebra, versão **4.2**. O propósito deste trabalho é, além de dar ênfase às proposições e teoremas da geometria plana, divulgar resultados interessantes que ela, a geometria, ainda nos proporciona.

1 Postulados, definições

Nesta seção, apresentaremos os postulados e definições que fundamentam a Geometria Plana.

1.1 Distância, reta e plano

Postulado .1. *(O Postulado da Distância) A todo par de pontos distintos corresponde um único número positivo.*

Definição .2. *A distância entre dois pontos é o número dado pelo postulado .1 Se os dois pontos são denotados por R e S, a distância será representado por RS.*

Admitimos a possibilidade de R e S serem o mesmo ponto. Neste caso, $RS = 0$. A distância é definida para um par de pontos e não depende da ordem em que esses pontos são mencionados.
Portanto, sempre temos $RS = SR$.

Postulado .3. *(O postulado da Régua) Os pontos de uma reta podem ser postos em correspondência com os números reais, de tal maneira que*
(1) a cada ponto da reta corresponde exatamente um número real;
(2) a cada número real corresponde exatamente um ponto da reta; e
(3) a distância entre dois pontos quaisquer é o valor absoluto da diferença dos números correspondentes.

Postulado .4. *(O Postulado da colocação da Régua) Dados dois pontos R e S numa reta, o sistema de coordenadas pode ser escolhido de tal maneira que a coordenada de R seja zero e a coordenada de S seja positiva.*

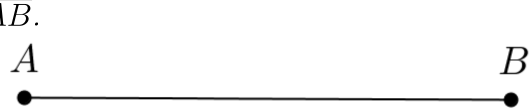
Definição .5. *B está entre A e C se A, B e C são pontos distintos de uma reta e $AC = AB + BC$.*

O significado da palavra *se* é *ser equivalente a*.

Postulado .6. *(O Postulado da Reta) Para cada par de pontos distintos existe exatamente uma reta que os contêm.*

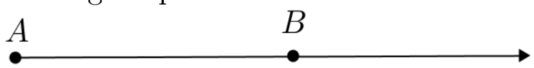
Figura 1: A reta $\overleftrightarrow{AB}$

Definição .7. *Para dois pontos quaisquer A e B, o segmento $\overline{AB}$ é o conjunto de todos os pontos que estão entre A e B. Os pontos A e B são chamados extremos de $\overline{AB}$.*



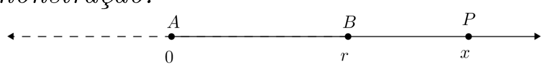
Definição .8. *O número AB é chamado comprimento do segmento $\overline{AB}$.*

Uma figura para a semirreta $\overrightarrow{AB}$:



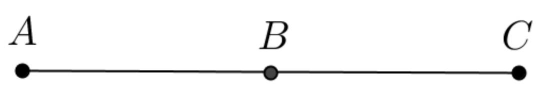
Teorema .9. *Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e x um número positivo. Então existe exatamente um ponto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.*

Demonstração.



Pelo postulado de Colocação da Régua, podemos escolher um sistema de coordenadas para a reta $\overleftrightarrow{AB}$ de tal maneira que a coordenada de A seja 0 e $AP = |x - 0| = |x| = x$. Como somente um ponto da semirreta em coordenada x, somente um ponto da semirreta está a uma distância x de A. □

Definição .10. *Um ponto B é dito ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se B está entre A e C e $AB = BC$.*



Teorema .11. *Todo o segmento tem exatamente um ponto médio.*

Demonstração. Queremos um ponto satisfazendo as duas condições: $AB + BC = AC$ e $AB = BC$. Relacionando estas duas equações, teremos: $AB = \dfrac{AC}{2}$. Logo, há um ponto B da semirreta $\overrightarrow{AC}$ que está a uma distância $\dfrac{AC}{2}$. Então $\overline{AC}$ tem exatamente um ponto médio. □

Postulado .12. *(O Postulado do Plano) Três pontos quaisquer coplanares e não colineares determinam um plano.*

Postulado .13. *(O postulado da separação do plano) Dados uma reta e um plano que a contêm, os pontos do plano que não pertencem à reta formam dois conjuntos tais que:*
(1) cada um dos conjuntos é convexo, e (2) se P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então $\overline{PQ}$ intercepta a reta.

1.2 Ângulos

Definição .14. *Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem.*

As semirretas são os lados do ângulo, enquanto que a origem é o vértice desse ângulo. Na figura 2, temos o ângulo $A\hat{O}B$, onde os lados do ângulo são as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e o ponto O, o vértice do ângulo. Um ângulo formado por

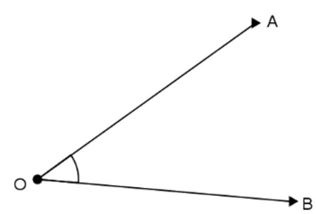


Figura 2: Definição de ângulo

duas semirretas distintas contidas numa mesma reta é chamado de ângulo raso (figura 3).

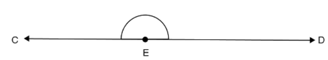


Figura 3: Ângulo raso $C\hat{E}D$

Definição .15. *(Interior de um ângulo) Seja $\angle BAC$ um ângulo num plano E. Um ponto P está no interior do $\angle BAC$ se P e B estiverem do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ e P e C estiverem do mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$. O exterior do $\angle BAC$ é o conjunto de todos os pontos de E que não estão no ângulo nem no seu interior.*

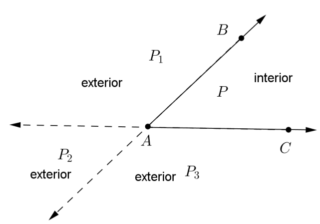


Figura 4: Ponto interior e exterior de um ângulo

A seguir apresentaremos os postulados de medida angular.

Postulado .16. *(Postulado da medida de um ângulo) A todo $\angle BAC$ corresponde um número real r entre 0 e 180.*

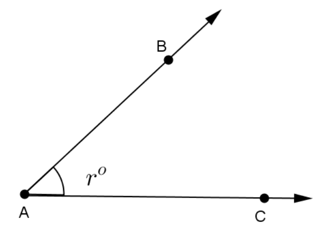


Figura 5: $m(\angle BAC) = r^o$

Definição .17. *O número dado pelo Postulado da medida de um ângulo é chamado de medida do $\angle BAC$ e escrevemos $m(\angle BAC) = r$ ou (r^o).*

Postulado .18. *(Postulado da construção de ângulo)*

Seja $\overrightarrow{OB}$ uma semirreta contida na origem de um semiplano H. Então, para todo número real r, $0 \leq r \leq 180$, existe uma única reta $\overrightarrow{OB}$, tal que $m(\angle BOA) = r$.

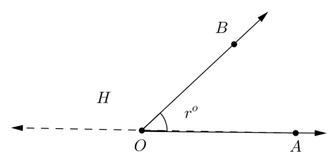


Figura 6: Construção do ângulo $\angle BOA = r$

Postulado .19. *(Postulado da adição de ângulos) Se C está no interior do $\angle AOB$, então $m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle COB)$.*

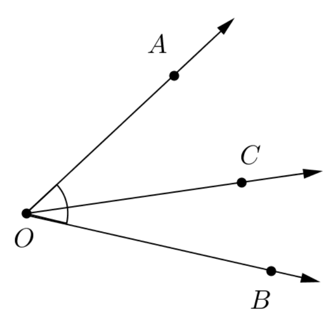


Figura 7: Adição de ângulos

Definição .20. *Sejam $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$ semirretas opostas e $\overrightarrow{OC}$ uma outra semirreta qualquer. Então os ângulos $\angle COA$ e $\angle COB$ formam um par linear.*

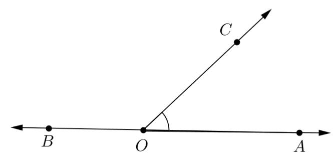


Figura 8: Par linear $\angle COA$ e $\angle COB$

Definição .21. *Dizemos que dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é 180.*

Postulado .22. *Se dois ângulos formam um par linear, então eles são suplementares. Na figura 8, $\angle COA$ e $\angle COB$ formam um par linear. Portanto, $m(\angle COA) + m(\angle COB) = 180$.*

Definição .23. *Dizemos que dois ângulos são opostos pelo vértice se os seus lados formam dois pares de semirretas opostas.*

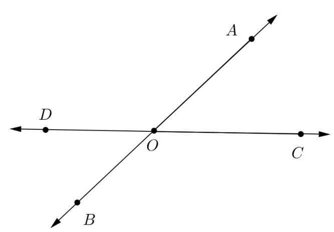


Figura 9: OPV

Por exemplo, na figura 9 temos: $\angle AOC$ e $\angle DOB$ são opv, bem como $\angle DOA$ e $\angle BOC$.

Definição .24. *Dois ângulos são ditos congruentes se possuem a mesma medida.*

Proposição .25. *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes*

Demonstração. Da figura 9 temos que
m$(\angle AOC) + m(\angle BOC) = 180$
m$(\angle BOD) + m(\angle BOC) = 180$

Resolvendo o sistema, teremos: $m(\angle AOC) = m(\angle BOD)$. Analogamente, temos $m(\angle COB) = m(\angle AOD)$.

$\square$

Definição .26. *Um ângulo cuja medida é 90^o é chamado de ângulo reto.*

Então, o suplemento de um ângulo reto também é um ângulo reto. Quando duas retas se intersectam, se um dos quatro ângulos for reto, então, todos os outros serão. Ocorrendo isso, tais retas são ditas perpendiculares.

1.3 Triângulos

Considere três pontos A, B e C no plano. Se C estiver sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, diremos que esses pontos são colineares; caso contrário, diremos que são não colineares.

Figura 10: Pontos não colineares

Definição .27. *Sejam A, B e C pontos não colineares. A reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ é chamado de triângulo o qual representamos por . Os pontos A, B e C são chamados de vértices do triângulo e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os lados do triângulo. Cada triângulo $\triangle ABC$ determina três ângulos: $\angle BAC = \hat{A} = B\hat{A}C$, $\angle ABC = \hat{B} = A\hat{B}C$ e $\angle ACB = \hat{C} = A\hat{C}B$ que são chamados de ângulos internos do triângulo.*

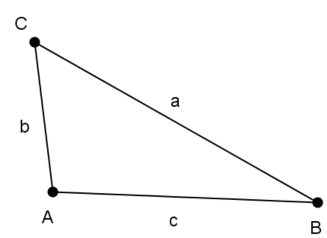


Figura 11: Um triângulo ABC

Definição .28. *(Interior de um triângulo) Um ponto está no interior de um triângulo se ele estiver no interior de todos os ângulos do triângulo. Um ponto está no exterior de um triângulo se ele estiver no plano do triângulo, mas não estiver no triângulo nem no seu interior.*

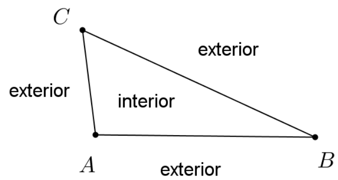


Figura 12: Interior e exterior de um triângulo

Com relação a um triângulo ABC qualquer, geralmente escrevemos $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, que são os comprimentos dos seus lados.

1.4 Classificação de triângulos em relação aos lados

Considere um triângulo qualquer ABC, com AB, AC e BC, os comprimentos dos seus lados . A classificaçao em relação a esses lados são: **triângulo equilátero:** Se as medidas dos seus lados forem iguais entre si. Em símbolos: $AB = AC = BC$.

triângulo isósceles: Se ao menos dois dentre os lados AB, AC, BC forem iguais (do grego "issoskelos- "pernas iguais"). Em símbolos $AB = BC$ ou $AB = AC$ ou $AC = BC$.

triângulo escaleno: Se as medidas dos lados forem diferentes entre si. Em símbolos $AB \neq AC \neq BC$ (que em grego significa "capenga").

1.5 Congruência entre triângulos

Definição .29. *Dois triângulos serão congruentes quando pudermos estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices e, com isso, os ângulos e as medidas dos lados correspondentes forem iguais.*

Postulado .30. *(Caso LAL - Lado-Ângulo-Lado) Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem, respectivamente, iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

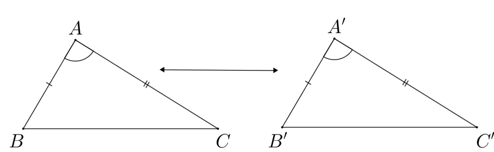


Figura 13: O postulado da congruência entre triângulos: caso LAL

Em símbolos, temos: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$. Pelo caso LAL, temos $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Teorema .31. *(caso ALA - Ângulo-Lado-Ângulo) Dados 2 triângulos ABC e $A'B'C'$. Se $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

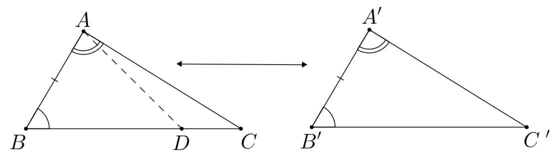


Figura 14: demonstração congruência entre triângulos: caso ALA

Demonstração. Seja $D \in \overline{BC}$, tal que $BD = B'C'$ (figura: 14), então, por LAL $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$. Portanto, $B\hat{A}D = \hat{A}' = B\hat{A}C$, logo $D = C$ (o ponto D coincide com o ponto C), e, pelo caso LAL, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

Proposição .32. *Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração.

Seja um $\triangle ABC$, com $AB = AC$, pois tal triângulo é isósceles. Pela correspondência entre os vértices dos triângulos, temos: $AB = AC$, $\hat{A} = \hat{A}$ e $AC = AB$. Pelo postulado LAL, $\hat{B} = \hat{C}$.

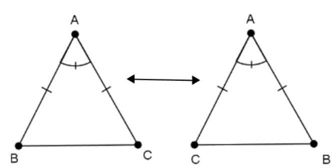


Figura 15: Triângulo isósceles pelo caso LAL

□

Proposição .33. *Se um triângulo ABC tem dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.*

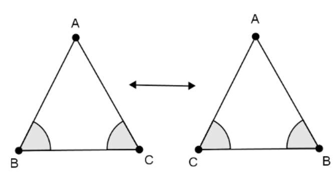


Figura 16: Triângulo isósceles pelo caso ALA

Demonstração.

Seja um $\triangle ABC$, com $\hat{B} = \hat{C}$. Vamos mostrar que $AB = AC$. Pela correspondência entre os vértices dos triângulos, temos: $\hat{B} = \hat{C}$, $= CB$ e $\hat{C} = \hat{B}$. Pelo teorema ALA, $AB = AC$, logo o triângulo ABC é isósceles.

$\square$

Teorema .34. *(caso LLL – Lado – Lado – Lado) Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$*

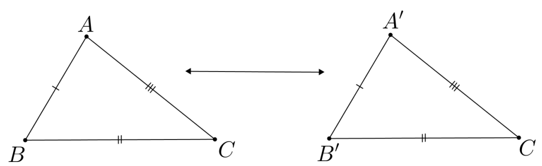


Figura 17: congrência entre triângulos: caso LLL

Demonstração.

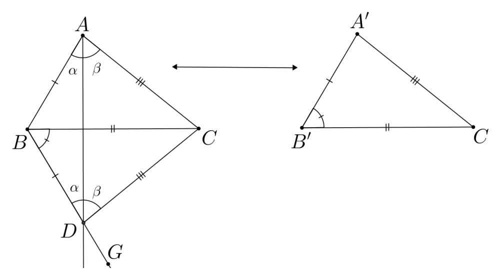


Figura 18: Congruência entre triângulos: construção caso LLL

Conforme figura 18, por construção, existe um ponto G, tal que $C\hat{B}G = \hat{B}'$. Seja $D \in \overline{BG}$ tal que $BD = A'B'$. Temos então que $\triangle BCD \cong \triangle A'B'C'$ por LAL. Observamos então que o triângulo ABD é isósceles $\Rightarrow B\hat{A}D = A\hat{D}B = \alpha$. Também temos que o triângulo DAC é isósceles $\Rightarrow D\hat{A}C = A\hat{D}C = \beta$. Temos então, por LAL, que $\triangle ABC \cong \triangle BCD$. $\square$

Teorema .35. *(Caso especial de congruência entre triângulos retângulos). Considere os triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, retângulos em $\hat{B}$ e $\hat{B}'$, respectivamente. Se $AC = A'C'$ e $AB = A'B'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Demonstração.

Contruímos o ponto D (figura: 20), de modo que $A'B' = DB$ e $B'\hat{A}'C' = B\hat{D}C$. Por LAL, temos que $\triangle BDC \cong \triangle A'B'C'$. Observamos também que o triângulo ADC é isósceles, pois $AC = DC$, então $\hat{A} = \hat{D}$. Por LAL, concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\square$

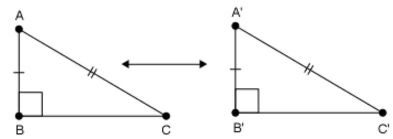


Figura 19: Congruência entre triângulos retângulos

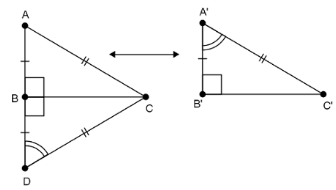


Figura 20: Demonstração: congruência entre triângulos retângulos

1.6 Proposições clássicas, o postulados das paralelas

Lema .36. *(Desigualdade do ângulo externo de um triângulo)*

Em todo triângulo, a medida do ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele

Demonstração. Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ (figura: 21). Prolonguemos a semirreta $\overrightarrow{AM}$ até o ponto N, tal que $AM = MN$, e observe os triângulos AMB e NMC. Temos, $AM = MN$ (por construção), $A\hat{M}B = N\hat{M}C$ (proposição: .25) e $BM = CM$. Portanto, pelo caso LAL, temos que $\triangle AMB \cong \triangle NMC$, então $A\hat{B}M = N\hat{C}M$. Logo, $Y\hat{C}B > N\hat{C}M = A\hat{B}M = A\hat{B}C$. Analogamente, prova-se que $Y\hat{C}B > B\hat{A}C$ □

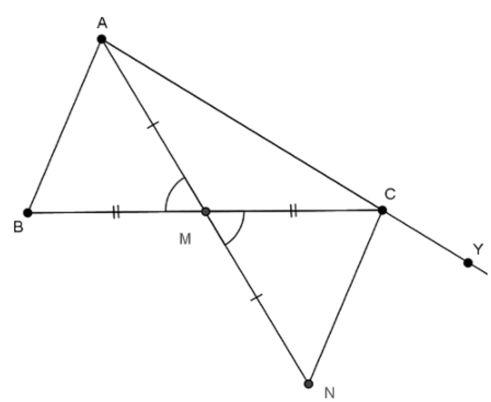


Figura 21: Desigualdade do ângulo externo

Postulado .37. *(O postulado das paralelas) Dados uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s paralela a r que passa por A.*

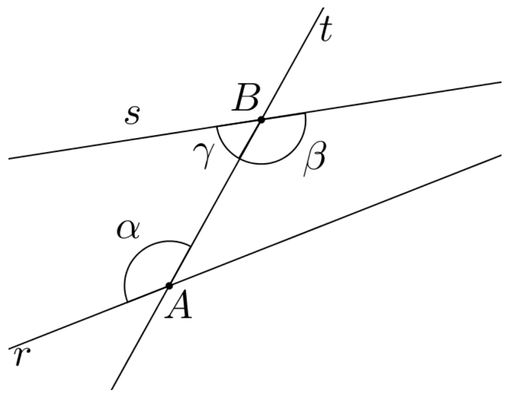


Figura 22: O 5^o Postulado de Euclides

Com esse postulado, vamos provar alguns dos resultados mais importantes da Geometria Euclidiana. Considere dadas, no plano, as retas r, s e t, com t intersectando r e s nos pontos A e B, respectivamente. Na figura 22, temos os ângulos α e β são ditos alternos internos, ao passo que os ângulos α e γ são denominados colaterais internos.

Corolário .38. *A reta r é paralela a reta s ($r//s$) se, e, somente se, $\alpha = \beta$ e $\alpha + \gamma = 180^o$.*

Demonstração.
Inicialmente, note que, como $\beta + \gamma = 180^o$, temos $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^o$. Portanto, basta provarmos que $r||s \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Mostraremos que $\alpha = \beta \Rightarrow r||s$. Vamos prolongar as retas r e s (figura: 22) de modo a formar o triângulo ABP, conforme a figura 23.

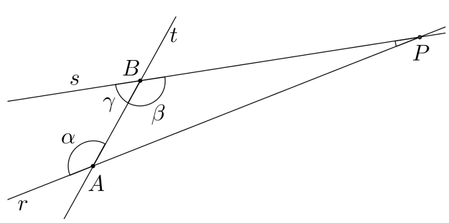


Figura 23: demonstração de Paralelismo

Pelo lema .36, a medida do ângulo α é maior do que β e maior do que $B\hat{P}A$, contradição pois já tínhamos admitido que $\alpha = \beta$. Logo, $\alpha = \beta \Rightarrow r//s$. Suponhamos que $r//s$. Então, pelo Postulado da paralelas, s é a única reta paralela r passando por B, e portanto, $r//s \Rightarrow \alpha = \beta$

$\square$

Teorema .39. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o*

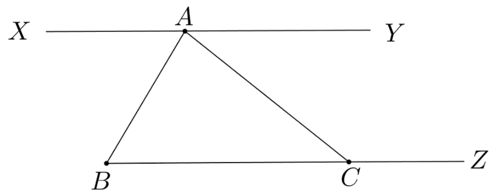


Figura 24: soma dos ângulos internos

Demonstração. Considerando o triângulo ABC e a reta $\overrightarrow{XY}$ paralela a reta $\overrightarrow{BC}$ passando por A (figura 24), temos que $\hat{B} = X\hat{A}B$ e $\hat{C} = Y\hat{A}C$ (ângulos alternos internos). Segue que $\hat{A} + X\hat{A}B + Y\hat{A}C = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

□

Teorema .40. *(Teorema do ângulo externo) Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos interno não adjacentes a ele.*

Demonstração. No triângulo ABC da figura 24, temos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$, conforme teorema .39 e $A\hat{C}Z + \hat{C} = 180^o$. Temos que, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = A\hat{C}Z + \hat{C}$. Então, $A\hat{C}Z = \hat{A} + \hat{B}$. Analogamente, prova-se para os outros ângulos externos.

□

Teorema .41. *(Lado - Ângulo - Ângulo oposto - LAA_o)*

Seja os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

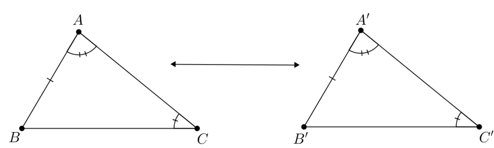


Figura 25: Congruência entre triângulos: caso LAA_o

Demonstração. Por hipótese, temos que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Vamos mostrar que $\hat{B} = \hat{B}'$. Do teorema .39, temos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$ e $\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^o$. Então, $\hat{B} = 180^o - \hat{A} - \hat{C} = 180^o - \hat{A}' - \hat{C}' = \hat{B}'$. Logo, pelo caso ALA, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. □

1.7 Círculo, bissetriz e mediatriz

Definição .42. *Dados um ponto O e um $r \in \mathbb{R}_+$, o círculo de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano que estão à distância r de O, isto é, tais que $OP = r$.*

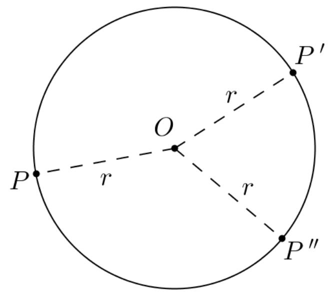


Figura 26: Definição para círculo

Da figura 26, de acordo com a definição .42, temos que $OP = OP' = OP'' = r$.

Definição .43. *(Bissetriz) Seja o ângulo $\angle AOB$. Se C está no interior do ângulo $\angle AOB$ e $m(\angle AOP) = m(\angle BOP)$, dizemos que $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $\angle AOB$ (figura: 27).*

Proposição .44. *Seja $A\hat{O}B$ um ângulo dado. Então, P pertence à bissetriz m de $A\hat{O}B$ se, e somente se, $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$.*

Demonstração.

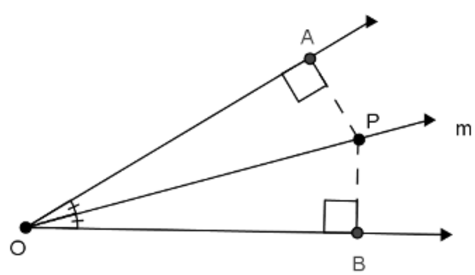


Figura 27: A bissetriz

Da figura 27, considere os triângulos retângulos $\triangle OPA$ e $\triangle OPB$. Temos que: $\overline{OP}$ - lado comum dos triângulos, $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ e $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$. Pelo caso LAA$_o$, $\triangle OPA \cong \triangle OPB$, e portanto $\overline{PA} = d(P, \overrightarrow{OA}) = \overline{PB} = d(P, \overrightarrow{OB})$. Reciprocamente, se $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$ e $\overline{OP}$ é lado comum dos triângulos, então pelo caso especial de congruência entre triângulos retângulos, $\triangle OPA \cong \triangle OPB$, então $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ e $\overline{AO} = \overline{BO}$ e, portanto, $P \in m$.

□

Definição .45. *(Mediatriz)*

Dado o segmento $\overline{AB} \subset \pi$. A mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta $m \subset \pi$, perpendicular à $\overline{AB}$ e que passa pelo seu ponto médio.

Proposição .46. *A mediatriz de um segmento, em um plano, é o conjunto de todos o pontos do plano que equidistam das extremidades do segmento.*

Demonstração.

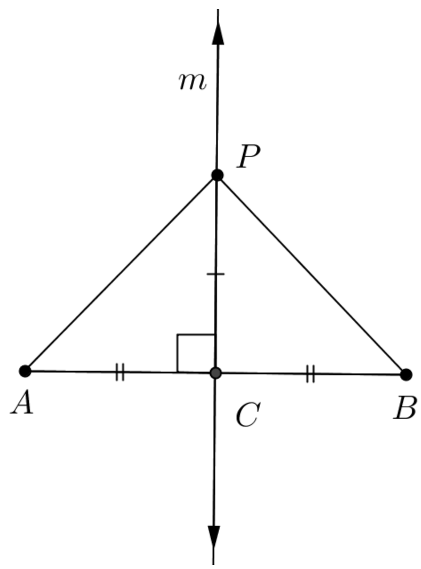


Figura 28: A mediatriz

Seja C o ponto médio de $\overline{AB}$, m a mediatriz de $\overline{AB}$, e seja $P \in m$. Se $P = C$, então teremos $PA = PB$. Suponha, então, que $P \neq C$, de modo que $P \notin \overline{AB}$. Temos que $PC = PC$ (lado em comum); $\angle PCA \cong \angle PCB = 90^o$ e $CA = CB$, pois C é ponto médio. Por LAL, temos $\triangle PCA \cong \triangle PCB$. Portanto, $PA = PB$. $\square$

2 O Teorema fundamental sobre proporcionalidade, Àreas e O Teorema de Pitágoras

2.1 O Teorema fundamental da proporcionalidade

Antes de demonstrarmos o teorema fundamental, demostraremos uma proposição onde mostra a razão entre áreas de dois triângulos de altura h (a proposição sobre área de triângulo será mostrada na próxima seção).

Proposição .47. *Se dois triângulos tem a mesma altura h, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.*

Demonstração. Sejam b_1 e b_2 as bases. Então $\dfrac{A(ABC)}{A(PQR)} = \dfrac{\frac{1}{2}b_1 h}{\frac{1}{2}b_2 h} = \dfrac{b_1}{b_2}$. $\square$

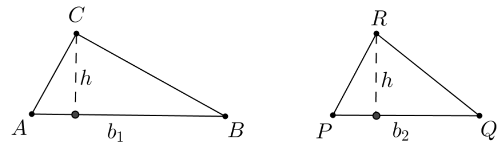


Figura 29: Razão entre áreas de triângulos

Teorema .48. *(O teorema fundamental sobre proporcionalidade) Se uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina segmentos que são proporcionais a esses lados*

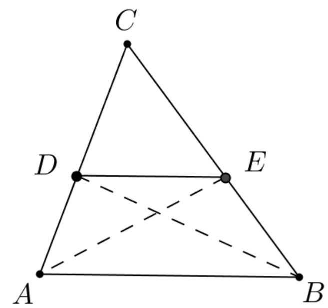


Figura 30: Segmentos proporcionais

Ou seja, no triângulo $\triangle ABC$ sejam os pontos D e E pontos de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ tais que $\overline{DE}||\overline{AB}$. Então $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CE}$.

Demonstração. Nos triângulos $\triangle CDE$ e $\triangle ADE$ consideremos $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ como bases (figura: 31). Então esses triângulos tem a mesma altura, pois as suas bases estão sob a mesma reta $\overleftrightarrow{AC}$. Portanto, pela proposição .47, a razão de suas áreas é igual a razão de suas bases, ou seja,

(1) $\dfrac{A(ADE)}{A(CDE)} = \dfrac{AD}{CD}$

Analogamente, nos triângulos $\triangle CDE$ e $\triangle BDE$ da figura 31 consideremos $\overline{CE}$ e $\overline{BE}$. Como esses triângulos possuem a mesma altura, teremos:

(2) $\dfrac{A(BDE)}{A(CDE)} = \dfrac{BE}{CE}$.

Mas $\triangle ADE$ e $\triangle BDE$ tem a mesma base $\overline{DE}$. Eles tem a mesma altura, pois $\overleftrightarrow{DE} \,||\, \overleftrightarrow{AB}$ (figura: 30). Logo, pelo corolário .61, temos que (3) $A(ADE) = A(BED)$. Combinando as equações (1), (2) e (3), obtemos:

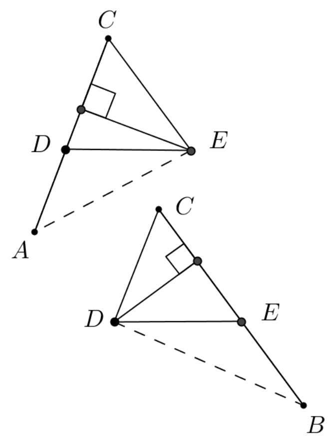


Figura 31: Triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BED$ tem áreas iguais

(4) $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BE}{CE}$.
Adicionando 1 a equação (4), em ambos os membro, obtemos:

$$\frac{AD + CD}{CD} = \frac{BE + CE}{CE}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE}.$$

□

Vamos agora enunciar a recíproca do Teorema anterior

Teorema .49. *Se uma reta intercepta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado*

É dado o triângulo $\triangle ABC$. Seja D um ponto entre A e C e seja E um ponto entre B e C. Se $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{BC}{CE}$, então $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Demonstração.

Seja $\overleftrightarrow{AB'}$ uma reta por A, paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, interceptando $\overline{CB}$ em B'. Pelo teorema anterior

$$\frac{CA}{CD} = \frac{CB'}{CE}.$$

Como, por hipotese: $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CB}{CE}$

temos $\dfrac{CB'}{CE} = \dfrac{CB}{CE}$

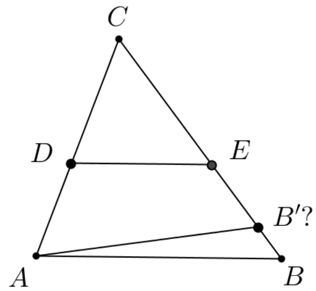


Figura 32: A recíproca do Teorema fundamental da proporcionalidade

e $CB' = CB$. Portanto, $B = B'$ e $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

$\square$

2.2 Semelhança entre triângulos

Em [5] página 22, temos um texto sobre Tales de Mileto:

> Não se sabe em quais situações Tales de Mileto interessou-se pela Geometria. Tradicionalmente, ele visitava o Egito em suas viagens comerciais e culturais. Em companhia do faraó Amasis e contemplando a pirâmide de Quéops, mediu as sombras da pirâmide e de um bastão que colocara verticalmente na areia, a metade da medida da base da pirâmide e a altura do bastão, calculando a altura do monumento a partir de semelhança de triângulos, sendo responsável por um dos acontecimentos mais interessantes da História da Geometria.

Definição .50. *Dois triângulos serão semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices, tal que os ângulos internos correspondentes sejam iguais e a razão entre as medidas dos lados correspondentes (homólogos) seja uma constante real $k > 0$, onde k é chamado a razão de semelhança.*

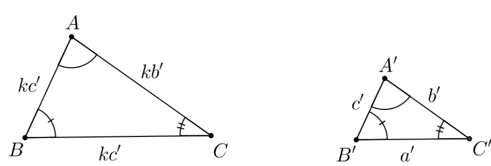


Figura 33: Definição de triângulos semelhantes

Pela definição, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$ (pela correspondência entre os vértices) e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$. Símbolo para triângulos semelhantes: $ABC \sim A'B'C'$. Observamos que quando $k = 1$, teremos um caso especial de semelhança entre triângulos, ou seja, os triângulos serão congruentes.

Teorema .51. *(LLL) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$. Então, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.*

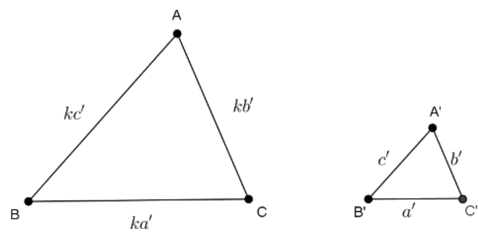


Figura 34: triângulos semelhantes: caso LLL

Demonstração. Considerando K a razão de semelhança conforme figura 34, temos: $AB = k.A'B'$, $BC = k.B'C'$ e $AC = k.A'C'$. Na figura 35, temos que $B'' \in AB$ e $C'' \in AC$, tal que $AB'' = A'B'$ e $AC'' = A'B'$.

Os pontos B'' e C'' foram marcados tal que $B''C''//BC$ e $C''D//AB$. Segue do Teorema fundamental sobre proporcionalidade que

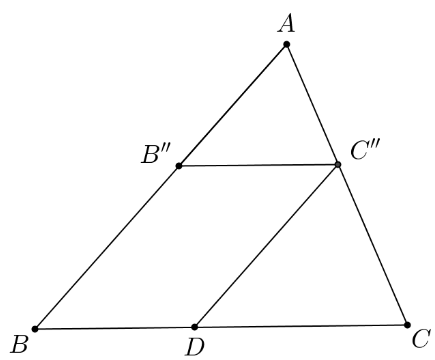


Figura 35: Demonstração do caso LLL

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AB}{AB''} = \frac{k.A'B'}{A'B'} = k \Longleftrightarrow AC = kAC'' = k.A'C'$$

e

$$\frac{BC}{B''C''} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AC''} = \frac{k.A'C'}{A'C'} = k \Longleftrightarrow BC = k.B''C'' = k.B'C'$$

Então, $AB'' = A'B', AC'' = A'C'$ e $B''C'' = B'C'$, isto é, os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL.
Portanto, temos $\hat{B} = A\hat{B}C = A\hat{B''}C'' = A'\hat{B'}C' = \hat{B'}$, e, analogamente, $\hat{A} = \hat{A'}$ e $\hat{C} = \hat{C'}$.

$\square$

Teorema .52. *(AA)*

Sejam ABC e DEF triângulos no plano, tais que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Então, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Demonstração.

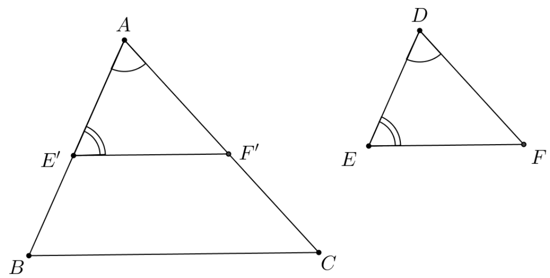


Figura 36: demonstração do caso AA

Vamos mostrar que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k$ Considere $E' \in \overline{AB}$ e $F' \in \overline{AC}$, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$, conforme figura 36. Por ALA, $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$. Como, por hipótese, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{E'} = \hat{E}$ (pela congruência anterior), então $\hat{E'} = \hat{B}$. Temos dois casos a considerar:
1.^{o} Os pontos $E' = B$: os triângulos $AE'F'$ e ABC são o mesmo triângulo ($\triangle AE'F' \cong \triangle ABC$)e, portanto $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = 1$;
2.^{o} Suponhamos $E' \neq B$. Pelo Teorema fundamental sobre proporcionalidade, temos: $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} \iff \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k$.
Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

□

Teorema .53. *(LAL) Sejam ABC e DEF, triângulos no plano tais que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = k$ e $\hat{A} = \hat{D}$. Então, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

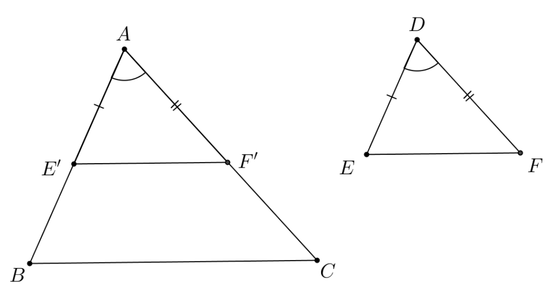


Figura 37: Demonstração do caso LAL

Demonstração.

Sejam $E' \in \overline{AB}$ e $F' \in \overline{AC}$, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$ (figura: 37).Como, por hipótese, $\hat{A} = \hat{D}$, então, por LAL, $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$. Logo, $\hat{E}' = \hat{E}, \hat{F}' = \hat{F}$ e $\hat{A} = \hat{D}$; $AE' = DE, AF' = DF$ e $E'F' = EF$. Pelo colorário .49, temos:
$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'} = k$, e como $E'F'||BC$, portanto $\hat{B} = \hat{E}' = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}' = \hat{F}$.
Por AA, temos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

□

2.3 Áreas

Definição .54. *Área é um número real positivo que está associado à uma superfície, que quantifica o espaço ocupado por esta superfície.*

Postulados

1. Polígonos congruentes tem áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono maior contêm outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1 cm é 1 cm^2 .

Proposição .55. *Um quadrado de lado l tem área l^2 .*

Demonstração. Discutiremos a área de um quadrado de lado l, $l \in \mathbb{N}$. De acordo com o Postulado 2 citado anteriormente, um quadrado de lado l é particionado em l^2 quadrados de lado unitário, ou seja, l^2 é a soma das áreas dos quadrados de lados unitários - $A_l = l^2$, onde A_l representa a área de um quadrado de lado l. Por exemplo, se $l = 3\ cm$, então $A_3 = 3^2 = 9\ cm^2$. Observe a figura 38.

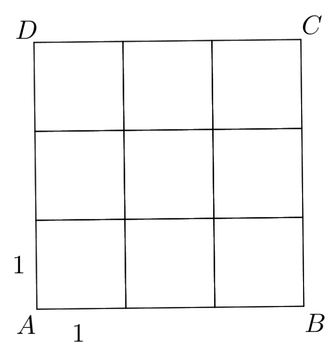


Figura 38: área de um quadrado de lado 3 cm

E se o lado do quadrado for um número racional do tipo $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$?

Considere um quadrado de lado $l = \frac{3}{4}\ cm$. Por conseguinte, construímos 4^2 cópias desse quadrado de área $A_{\frac{3}{4}}$ e, em seguida, o seguinte arranjo, de modo que tenhamos um quadrado maior de lado $\frac{3}{4}.4 = 3\ cm$, conforme figura 39.

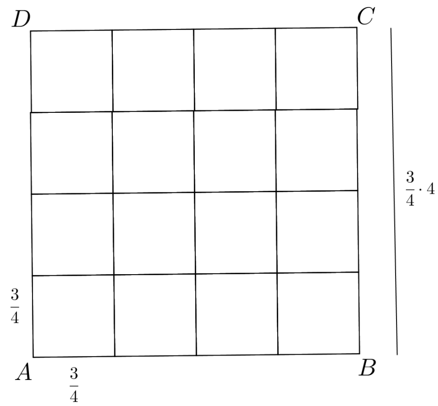


Figura 39: área de um quadrado de lado $\frac{3}{4}\ cm$.

Pelo Postulados 3, a área desse quadrado maior é $3^2 = 4^2.A_{\frac{3}{4}}$. Então, $A_{\frac{3}{4}} = \frac{3^2}{4^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2\ cm^2$.
Generalizando, considere um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Por conseguinte, construímos n^2 cópias desse quadrado de área $A_{\frac{m}{n}}$ e, em seguida, o seguinte arranjo, de modo que tenhamos um quadrado de lado maior $\frac{m}{n}.n = m$. Pelo Postulado 3, a área desse quadrado maior é $m^2 = n^2.A_{\frac{m}{n}}$. Então, $A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

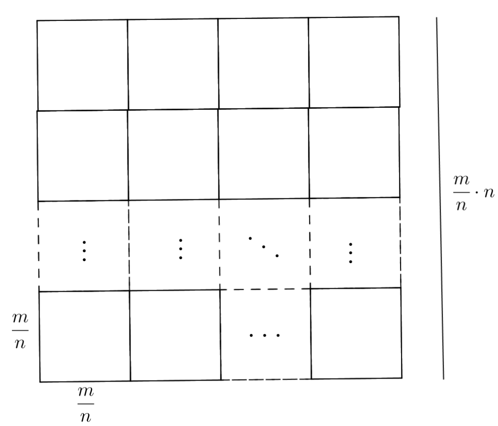


Figura 40: demonstração da área de quadrado de lado $\frac{m}{n}$

Vamos calcular a área de um quadrado de lado $l \in \mathbb{R}_+$ e mostraremos que $A_l = l^2$, onde A_l é a área desse quadrado.

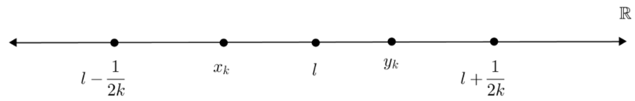


Figura 41: A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Para cada $K \in \mathbb{N}^*$, consideremos o seguinte intervalo $J = \left(l - \frac{1}{2k}, l + \frac{1}{2k}\right)$, conforme figura 41. Como $\mathbb{Q}$ é **denso** em $\mathbb{R}$, existem números racionais x_k e y_k tais que:

$$(i)\ l - \frac{1}{2k} < x_k < l$$

$$(ii)\ l < y_k < l + \frac{1}{2k}.$$

Subtraindo (ii) de (i), membro a membro, obtemos:

$$\frac{1}{2k} < y_k - x_k < \frac{1}{2k} \Longleftrightarrow y_k - x_k = \frac{1}{2k}$$

como $\frac{1}{2k} < \frac{1}{k}$, temos que

$$y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

Em seguida, construímos quadrados de medidas x_k e y_k, conforme segue.

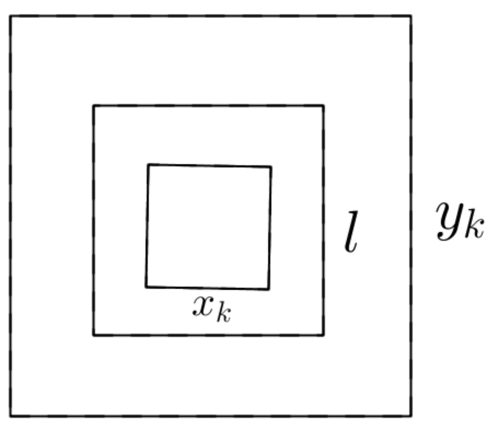


Figura 42: Quadrados de lados x_k, l e y_k

Da figura 42 podemos escrever $x_k < l < y_k$, cujas áreas são $x_k^2 < l^2 < y_k^2$. Pelo Postulado 3, então $x_k^2 < A_l < y_k^2$. Conclui-se que os números $l^2, A_l \in (x_k^2, y_k^2)$. Então,

$$\left|A_l - l^2\right| < y_k^2 - x_k^2$$

$$\left|A_l - l^2\right| < (y_k + x_k)(y_k - x_k)$$

como $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ e $x_k < l$:

$$\left|A_l - l^2\right| < (y_k + x_k)\frac{1}{k}$$

$$< (y_k - x_k + 2x_k)\frac{1}{k}$$

$$< (\frac{1}{k} + 2l)\frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} + \frac{2l}{k}.$$

Observamos que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{2l}{k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{R}_+$ fixo. Portanto,

$$\left|A_l - l^2\right| = 0 \iff A_l = l^2.$$

$\square$

Proposição .56. *Um retângulos de lados a e b tem área ab.*

Demonstração.

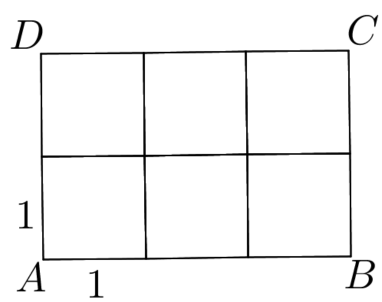


Figura 43: Retângulo de lados naturais

Discutiremos o caso do retângulo de lados naturais. Suponhamos um retângulo de lados $a = 3\ cm$ e $b = 2\ cm$. Do Postulado 2, particionamos esse retângulo em 6 quadrados de lado unitário (Postulado 4). Logo, a área é a soma das áreas desses quadrados. Então, Àrea $= 3.2 = 6\ cm^2$, conforme figura 43.

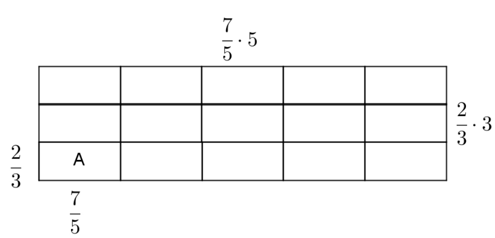


Figura 44: Retângulo de lados racionais

Agora, considere um retângulo de lados $a = \frac{2}{3}$ cm e $b = \frac{7}{5}$ cm. Construímos $3.5 = 15$ cópias desse retângulo, de tal modo que quando montarmos um retângulo maior tenhamos um lado medindo $\frac{2}{3}.3 = 2$ cm e outro $\frac{7}{5}.5 = 7$ cm (figura 44). Em seguida, podemos escrever $2.7 = 15.A$, onde A é a área do retângulo de lados $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{5}$. Então, $A = \frac{14}{15}$ cm^2 .

Generalizando, tomemos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, cuja área é A. Construímos $n_1.n_2$ cópias desse retângulo. Por conseguinte, montamos um retângulo maior de lados $\frac{m_1}{n_1}.n_1 = m_1$ e $\frac{m_2}{n_2}.n_2 = m_2$. Então, $m_1.m_2 = n_1.n_2.A \Longleftrightarrow A = \frac{m_1}{n_1}.\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1.m_2}{n_1.n_2}$.
Por conseguinte, tomemos um retângulo de lados $a, b \in \mathbb{R}_+$ e $\forall k \in \mathbb{N}$, números racionais x_k, y_k, w_k, z_k, tais que $x_k < a < y_k$, $w_k < b < z_k$, $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ e $z_k - w_k < \frac{1}{k}$. Sendo A a área de um retângulo de lados a e b, temos que, multiplicando membro a membro, as duas primeiras desigualdades:

$$x_k.w_k < ab < y_k.z_k$$

, ou seja,

$$x_k.w_k < A < y_k.z_k.$$

Conclui-se que $A, ab \in (x_k.w_k, y_k.z_k)$ Usando um argumento análogo feito para os quadrados, temos:

$$0 < |A - ab| < y_k.z_k - x_k.w_k = (z_k - w_k)y_k + w_k(y_k - x_k) = \frac{1}{k}y_k + \frac{1}{k}w_k,$$

pois $y_k - x_k < \dfrac{1}{k}$ e $z_k - w_k < \dfrac{1}{k}$

$$|A - ab| < \frac{1}{k}(y_k + w_k) < \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (z_k - w_k) + 2w_k)$$

$$< \frac{1}{k}(\frac{1}{k} + 2a + \frac{1}{k} + 2b),$$

pois $x_k < a$ e $w_k < b$

$$< (\frac{2}{k^2} + \frac{2a}{k} + \frac{2b}{k}).$$

Observamos que $\lim\limits_{k\to\infty}(\dfrac{2}{k^2} + \dfrac{2a}{k} + \dfrac{2b}{k}) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ e $a, b \in \mathbb{R}_+$ fixos. Portanto,

$$|A - ab| = 0 \Longleftrightarrow A = ab.$$

□

Proposição .57. *A área de um paralelogramo de base b e altura h é ah.*

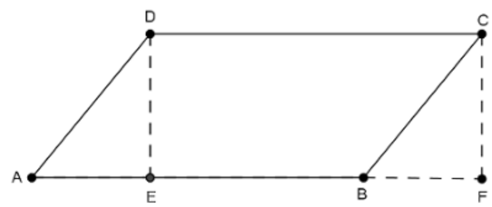


Figura 45: Área de um paralelogramo

Demonstração. Sejam, respectivamente, os pontos E e F, projeções ortogonais dos pontos D e C à reta $\overrightarrow{AB}$. Considere a notação para área, por exemplo, $A(ABCD)$, é a área de um quadrilátero de vértices A, B, C e D. Observando a figura 45, os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso hipotenusa cateto, de modo que

$AE = BF$ e $A(ADE) = A(BCF)$, então

$$A(ABCD) = A(ADE) + A(BCDE)$$

$$= A(BCF) + A(BCDE)$$
$$A(ABCD) = A(CDEF).$$

Mas, CDEF é um retângulo de altura h e base: $EF = EB + BF = EB + AE = AB = a$.
Portanto, $A(ABCD) = A(CDEF) = ah$ □

Proposição .58. *Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e alturas h_a, h_b e h_c, respectivamente, relativas aos lados a, b e c. Então,* $A(ABC) = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$

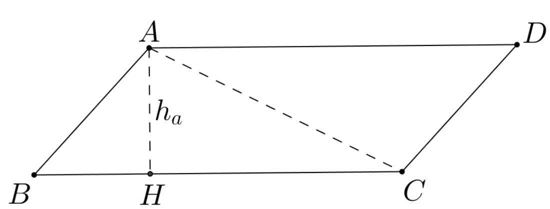


Figura 46: demonstração da área de um triângulo

Demonstração.

Seja $S = A(ABC)$ e D o ponto de intersecção das paralelas a $\overleftrightarrow{BC}$ por A e $\overleftrightarrow{AB}$ por C (figura: 46). Logo, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo de área $2S$ (uma vez que $A(ABC) = A(ACD)$, pois $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ pelo caso LLL). Portanto, $2A(ABC) = 2S = ah_a \longrightarrow S = \frac{ah_a}{2}$. Analogamente, temos que $2S = bh_b = ch_c$ □

Proposição .59. *A área de um losango de diagonais d_1 e d_2 é* $\dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

O losango é um paralelogramo de quatro lados congruentes. Podemos decompô-lo em quatro triângulos retângulos congruentes entre si, onde deduziremos uma relação.
Com essa decomposição, podemos montar um retângulo de base d_1 e altura $\frac{d_2}{2}$, conforme segue.

Demonstração.

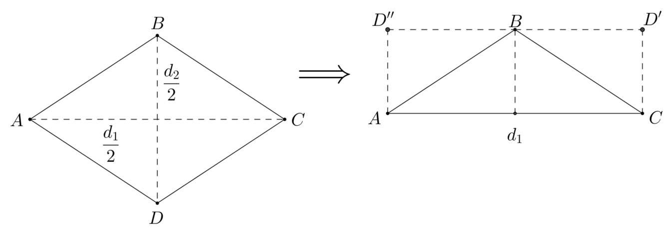


Figura 47: Área de um losango

Basta observar da figura 47 que a área do losango $ABCD$ é igual a área do retângulo $ACD'D''$, então $A(ABCD) = d_1 \cdot \dfrac{d_2}{2} = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

□

Proposição .60. *A área de um trapézio de altura h, base maior B e base menor b é* $\dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$.

O trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados paralelos e um par de lados não paralelos. Podemos decompô-lo em um paralelogramo e um triângulo, o que mostraremos a seguir.

Demonstração.

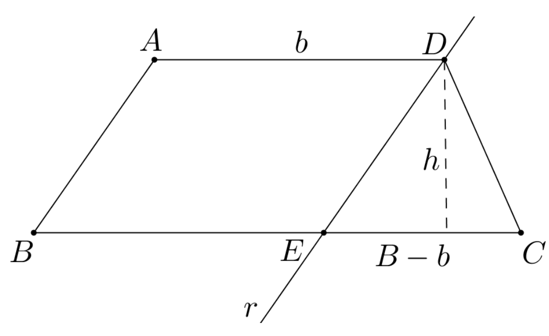


Figura 48: Área de um trapézio

Considere um trapézio $ABCD$ (figura: 48) de altura h e bases $BC = B$ e $AD = b$. Traçamos a reta r pelo ponto D, tal que $r || \overleftrightarrow{AB}$.

Então, $A(ABCD) = A(ABDE) + A(DEC)$

$$A(ABCD) = bh + \frac{(B-b)h}{2} = \frac{2bh + Bh - bh}{2} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

□

2.4 O Teorema de Pitágoras

Segundo historiadores , quando morreu Tales de Mileto, Pitágoras de Samos tinha cerca de 20 anos. Provavelmente, Pitágoras tenha sido atraído pela fama do sábio de Mileto e fortemente influenciado por suas ideias.
Posteriormente fundou a Escola Pitagórica em Crotona, agregando muitos discípulos que queriam estudar Geometria e Filosofia.
Filósofos gregos que viveram pós Pitágoras afirmaram que ele foi o primeiro grego a demonstrar a propriedade geral dos triângulos retângulos que já era conhecida e utilizada de forma empírica por babilônios e chineses havia séculos.
Um dos teoremas que leva o seu nome, sem dúvida é um dos mais célebres, possui diversas demonstrações.
Mostraremos uma que usará o corolário a seguir.

Corolário .61. *Sejam ABC e DBC triângulos tais que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Então, $A(ABC) = A(BCD)$.*

Demonstração.

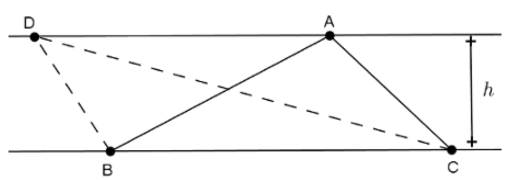


Figura 49: Equivalência entre áreas de triângulos

Sendo h a distância entre as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, temos

$$A(ABC) = \frac{\overline{BC}h}{2} = A(BCD)$$

□

Seja ABC um triângulo retângulo em A, onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$, $\overline{AH} = h$, provaremos as seguintes relações métricas: (a) $ah = bc$, (b) $b^2 = am$ e $c^2 = an$ e (c) $a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração.

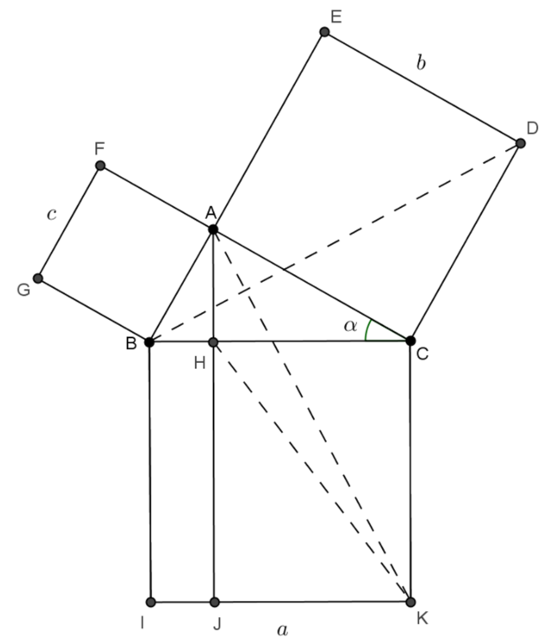


Figura 50: Teorema de Pitágoras via áreas

(a) Basta observar da figura 50 que

$$A(ABC) = \frac{\overline{BC}.\overline{AH}}{2} = \frac{a.h}{2} = \frac{\overline{AC}.\overline{AB}}{2} = \frac{b.c}{2} \Longleftrightarrow a.h = b.c.$$

(b) Seja conforme a figura 50. Considere os quadrados $ACDE$, $ABFG$ e $BCKI$, sobre os lados do triângulo e seja J o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{AH}$ com $\overline{IK}$.

Como $\overleftrightarrow{AJ} \parallel \overleftrightarrow{CK}$, pelo corolário .61, temos

$$A(ACK) = A(CHK) = \frac{\overline{CK}.\overline{CH}}{2} = \frac{a.m}{2}(i).$$

Mas, $\overline{CK} = \overline{CB}$, $B\hat{C}D = A\hat{C}K$ e $\overline{CD} = \overline{CA}$, os triângulos ACK e BCD são congruentes pelo caso LAL.

Por outro lado, $\overline{CD} || \overline{BE}$,

$$A(BCD) = A(ACD) = \frac{\overline{CD}.\overline{AC}}{2} = \frac{b^2}{2}(ii).$$

Como $A(ACK) = A(BCD)$, segue de (i) e (ii) que

$$\frac{b^2}{2} = \frac{a.m}{2} \Longleftrightarrow b^2 = am.$$

Analogamente, prova-se que $c^2 = an$.

(c) Somando, membro a membro, as relações de (b), temos:

$$+\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a.a = a^2$$

$\square$

3 Círculos associados e seus raios, relações para calcular a área de um triângulo

Considere um triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$ e o raio r do *círculo inscrito* .

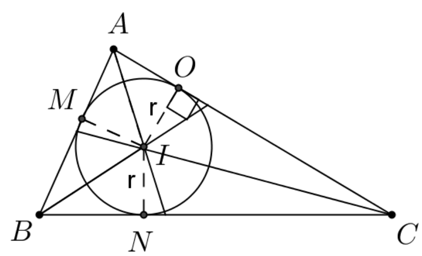


Figura 51: Círculo inscrito ao triângulo ABC

Construímos as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Observamos que que elas se intersectam no ponto I que é o centro do círculo inscrito, chamado de incentro **e esse ponto é equidistante dos lados do triângulo**, conforme proposição .44 .

Calculemos a área do triângulo ABC da figura 51:

$$A(ABC) = A(BIC) + A(CIA) + A(BIA)$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$= \frac{(a+b+c)}{2}.r$$

$$\boxed{A(ABC) = p \cdot r}$$

Definição .62. *Os pontos de cruzamentos dos pares de bissetrizes dos ânglos externos de um triângulo são chamados* ex-incentros *do triângulo.*

Garbi [4], pág.: 191 denomina os círculos tangentes exteriormente a um triângulo:

> Como cada ex-incentro é externo ao triângulo e equidistante das três retas que contêm seus lados, com centros neles podem ser traçadas três circunferências externas ao triângulo e tangentes à aquelas retas. Tais circunferências são ditas ex-inscritas ao triângulo.

Considere o raio do círculo ex-inscrito relativo ao vértice A, r_a, relativo ao vértice B, r_b e ao vértice C, r_c. Construímos as bissetrizes externas relativas ao ângulo $\hat{B}$, pelo prolongamento do lado $\overrightarrow{AB}$ e relativa ao ângulo C, pelo prolongamento do lado $\overrightarrow{AC}$.
Observamos que as bissetrizes externas relativas aos ângulos $C\hat{B}E$ e $B\hat{C}B$ se intersectan no ponto I_a, que é o centro do círculo ex-inscrito de raio r_a, **o qual é equidistante dos prolongamentos dos lados** $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e do lado BC (de acordo com a proposição .44). Analogamente para os prolongamentos dos outros lados, traçamos os círculo de raios r_b e r_c conforme figura 52:

Observação .63. *Temos que o ponto I_a pertence ao prolongamento da bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{A}$. Observe que os triângulos ADI_a e AEI_a são congruentes (proposição .44).*

Vamos calcular a área do triângulo ABC da figura 52:

$$A(ABC) = A(ABI_a) + A(ACI_a) - A(BCI_a)$$

$$= \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2}$$

$$= \frac{c+b-a}{2}.r_a$$

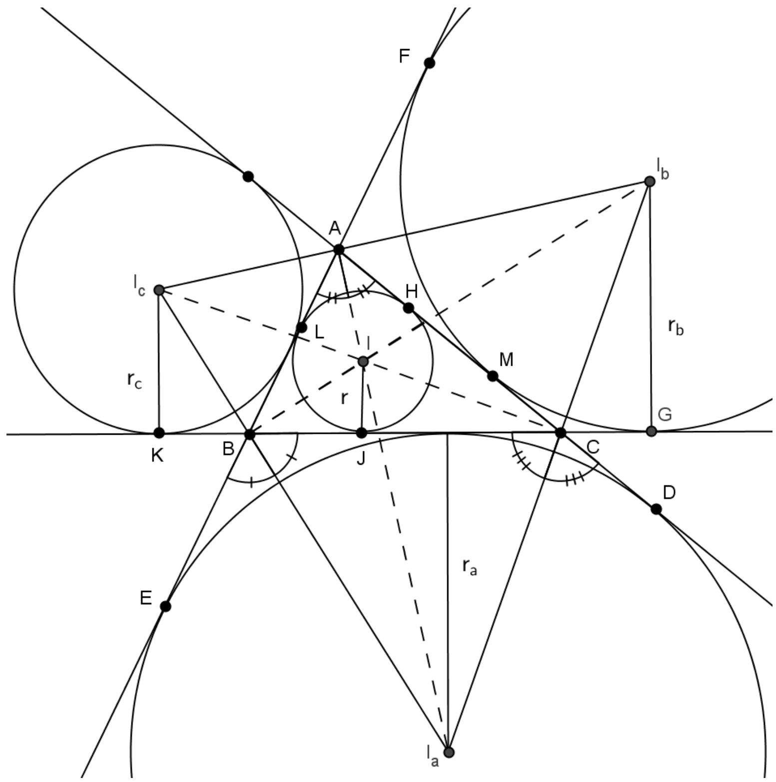


Figura 52: círculos ex-inscritos ao triângulo ABC de centros I_a, I_b e I_c

lembrando que $2p - a = b + c$:

$$A(ABC) = \frac{2p - a - a}{2}.r_a = 2\frac{p-a}{2}.r_a$$

$$\boxed{A(ABC) = (p - a)r_a}$$

Analogamente, temos que $\boxed{A(ABC) = (p - b)r_b = (p - c)r_c}$.

Para próxima fórmula, definiremos ângulo inscrito subentendido por um ângulo central.

Definição .64. *Ângulo inscrito é um ângulo cujo vértice pertence à circunferência e é subentendido por um ângulo central .*

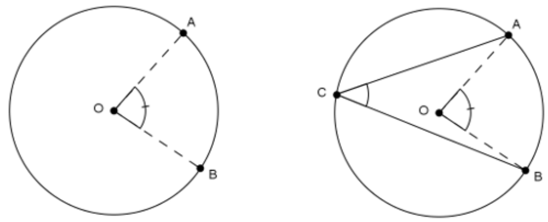


Figura 53: ângulo central $A\hat{O}B$ ou $\widehat{AB}$ e ângulo inscrito $A\hat{C}B$

Teorema .65. *A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central por ele subtendido.*

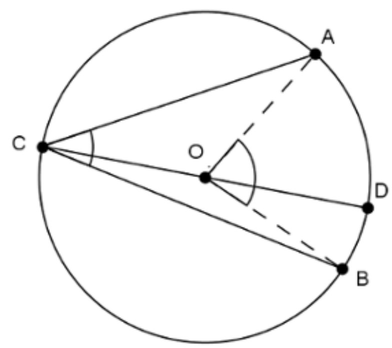


Figura 54: ângulo inscrito $A\hat{C}B$ - uma demonstração

Demonstração. Vamos considerar a figura 54 de ângulo inscrito $A\hat{C}B$ compreendido pelo ângulo central $A\hat{O}B$.

O diâmetro $\overline{CD}$ fora traçado de modo que o ângulo $A\hat{C}D = A\hat{C}O = \alpha$ e $B\hat{C}D = B\hat{C}O = \beta$ e $A\hat{C}B = \alpha + \beta$.
O triângulo ACO é isósceles e, pelo teorema do ângulo externo, o ângulo $A\hat{O}D = 2\alpha$. De igual modo, o ângulo externo $B\hat{O}D = 2\beta$. Então, temos que

$$A\hat{O}B = A\hat{O}D + B\hat{O}D = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2A\hat{C}B$$

□

Considere um triângulo ABC e construímos um círculo de raio R. Para isso, traçaremos mediatrizes nos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do triângulo que se intersectam no ponto D, que é o centro do círculo circunscrito. Observamos que **os vértices são equidistantes desse ponto**, conforme a proposição .46. Seja conforme a figura 55:

Traçamos a altura h_a. Em seguida, traçando o diâmetro AE. O ângulo inscrito $A\hat{C}E$ é reto, pois subentende um ângulo central $A\hat{D}E = 180^o$.Temos que

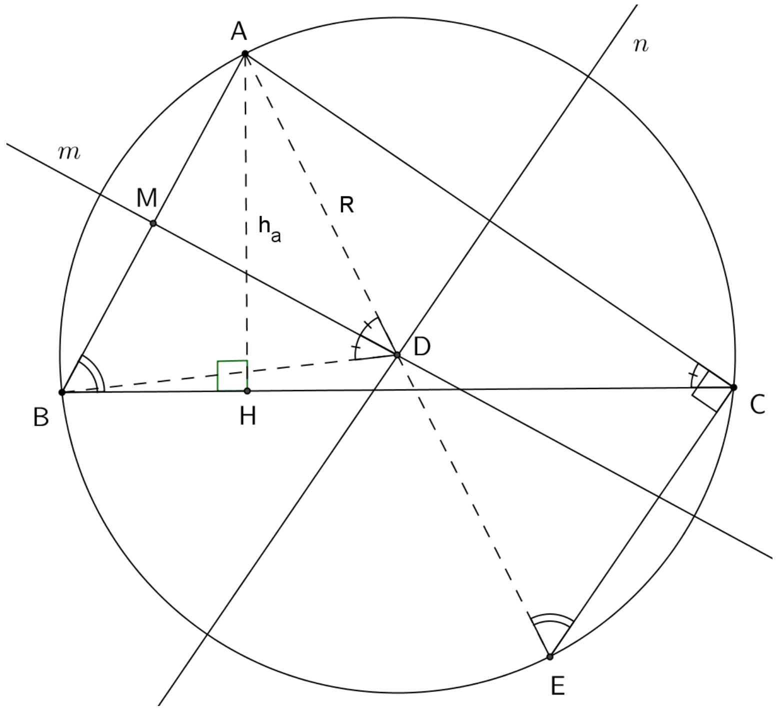


Figura 55: Círculo circunscrito ao triângulo ABC

$\hat{B} = \hat{E}$, pois subentendem o mesmo arco $\widehat{AC}$. Então, os triângulos ABH e AEC são semelhantes pelo caso AA:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AH}{AC}$$
$$\frac{c}{2R} = \frac{h_a}{b}$$
$$h_a = \frac{bc}{2R}.$$

Como

$$A(ABC) = \frac{ah_a}{2}$$

$$= \frac{a}{2} . \frac{bc}{2R}$$

$$\boxed{A(ABC) = \frac{abc}{4R}} \quad ,$$

que é a área de um triângulo em função dos lados e do raio do círculo circunscrito.

Proposição .66. *(altura de um triângulo em função dos lados) Sejam um triângulo*ABC *de semiperímetro* p*, altura* $\overline{AD} = h_a$*, lados* $\overline{BC} = a$*,* $\overline{AC} = b$ *e* $\overline{AB} = c$*. Então,*

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

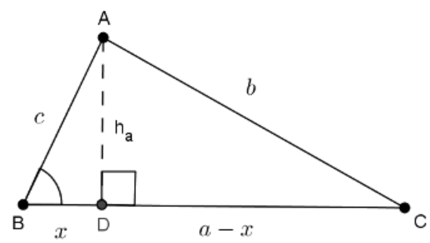


Figura 56: altura h_a em função dos lados

Demonstração.

Nos triângulos ABD e ADC, temos pelo Teorema de Pitágoras

$$c^2 = h_a^2 + x^2 \iff h_a^2 = c^2 - x^2 \quad (1)$$
$$b^2 = h_a^2 + (a-x)^2 \iff b^2 = h_a^2 + a^2 + x^2 - 2ax \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), teremos:

$$h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

fatorando (aqui nós utilizamos $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$)

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}[2ac - (a^2 + c^2 - b^2)][2ac + (a^2 + c^2 - b^2)]$$

$$= \frac{1}{4a^2}[b^2 - (a-c)^2][(a+c)^2 - b^2]$$

$$= \frac{1}{4a^2}[b - (a-c)][b + (a-c)][(a+c) - b][(a+c) + b] \quad ,$$

lembrando que $2p$ é o perímetro do triângulo, ou seja, $2p = a + b + c$, temos

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b)2p$$

$$= \frac{1}{4a^2}16p(p-a)(p-b)(p-c) \quad ,$$

concluímos que

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

□

Logo, podemos escrever a **fórmula de Herão** [1]: com

$$A(ABC) = \frac{a}{2}h_a$$

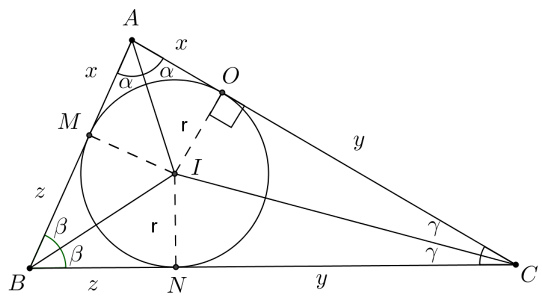
$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\boxed{A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

3.1 Outra demonstração para a Fórmula de Herão

Esta é uma adaptação da Fórmula divulgada na RPM de n.º 57.

[1] Para outra demonstração da referida fórmula consulte a RPM *n.º* 36.



Demonstração. Consideremos os seguintes itens:

(i) $A(ABC) = p \cdot r$, visto anteriormente;

(ii) $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^o \iff \alpha + \beta = 90^o - \gamma$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(90^o - \gamma)$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{cotg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1$

(iii) Dos triângulos retângulos $\triangle AIO$, $\triangle BIM$ e $\triangle CIO$, temos, respectivamente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{x},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{z} \text{ e } \operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{y}.$$

(iv) Observando os triângulos retângulos AIM e AIO, BIM e BIN e CIN e CIO são congruentes (conforme proposição .44) . Portanto, $\overline{AM} = \overline{AO} = x$, $\overline{CO} = \overline{CM} = y$ e $\overline{BM} = \overline{BN} = z$.

Então, podemos escrever: $x + y = b$, $x + z = c$ e $y + z = a$. Somando as equações anteriores, teremos:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c \iff x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = p, \text{ ou seja, } x = p - a,$$

$y = p - c$ e $z = p - b$.

(v) Das relações anteriores, temos:

$$\frac{r}{x} \cdot \frac{r}{z} + \frac{r}{x} \cdot \frac{r}{y} + \frac{r}{z} \cdot \frac{r}{y} = 1$$

$$\frac{r^2}{xz} + \frac{r^2}{xy} + \frac{r^2}{yz} = 1$$

$$\frac{r^2(x+y+z)}{xyz} = 1$$

$$r^2 p = xyz$$

Multiplicando por p: $r^2p^2 = pxyz$

$$[A(ABC)]^2 = p(p-a)(p-c)(p-b)$$

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$\square$

3.2 Calculando os raios

Nesta seção mostraremos como calcular os raios r, r_a, r_b, r_c e R dos círculos associados em função dos lados.

Considere Δ a área de um triângulo qualquer.

Raio do círculo inscrito r:

$$\Delta = p \cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}$$

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

Raio do círculo ex-inscrito r_a:

$$\Delta = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r_a = \frac{1}{(p-a)}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2}}$$

$$\boxed{r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}}} \quad .$$

De igual modo para os outros raios: $r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{(p-b)}}$ e $r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{(p-c)}}$.

Raio do círculo circunscrito R:

$$\Delta = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \iff \frac{1}{R} = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$$

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

3.3 Lei dos senos e Lei dos cossenos

Teorema .67. *Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$, lados de um triângulo ABC e os ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ e o raio R do círculo circunscrito. Então,* $\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R.$

Demonstração. Seja conforme a figura 55 e calculemos o seno do ângulo $\hat{E}$.

$$sen\ \hat{E} = \frac{AC}{AE} = \frac{b}{2R},$$

mas vimos que $\hat{E} = \hat{B}$, então

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{2R} \Longleftrightarrow 2R = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$$

Por outro lado, considere a mediatriz m que intersecta o lado AB no ponto M e o raio AD. Como o ângulo $A\hat{D}B$ é central do ângulo inscrito $\hat{C}$, logo $A\hat{D}B = 2\hat{C}$. Observamos que $M\hat{D}A = \hat{C}$, conforme proposição .46 . Considerando o triângulo retângulo MDA : $sen\ M\hat{D}A = sen\ \hat{C} = \frac{\overline{AM}}{R} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{R} = \frac{c}{2R}$.Então

$$sen\ \hat{C} = \frac{c}{2R} \Longleftrightarrow 2R = \frac{c}{sen\ \hat{C}}.$$

Analogamente

$$2R = \frac{a}{sen\ \hat{A}}.$$

Concluímos que

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R$$

□

Teorema .68. *Sejam $\overline{BC} = a, \overline{AB} = c$, lados de um triângulo ABC e o ângulo $\hat{B}$, entre esses lados. Então,*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\ \hat{B}.$$

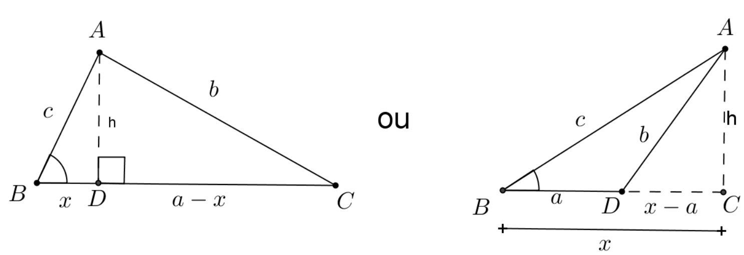


Figura 57: demonstração da Lei dos Cossenos: caso $B < 90^o$

Demonstração.

No triângulo ADC, pelo Teorema de Pitágoras, teremos

$$b^2 = |a - x|^2 + h^2 \Longleftrightarrow b^2 = h^2 + a^2 + x^2 - 2ax. \tag{4}$$

No triângulo ABD

$$c^2 = h^2 + x^2 \Longleftrightarrow h^2 = c^2 - x^2 \tag{5}$$

$$\frac{x}{c} = cos\hat{B} \Longleftrightarrow x = c.cos\hat{B} \tag{6}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos:

$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ax \tag{7}$$

Finalmente, substituindo (6) em (7):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\ \hat{B}.$$

Do mesmo modo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\hat{C}$

□

Faremos o caso $90^o < \hat{B} < 180^o$

Demonstração. Considere da figura 58: o ponto D, projeção do vértice B sobre a semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, $\overline{AD} = x$ e o ângulo $\theta = 180^o - \hat{A}$, externo do vértice A. Aplicando o Teorema de Pitágoras, respectivamente, nos triângulos BDC e BDA, teremos as relações:

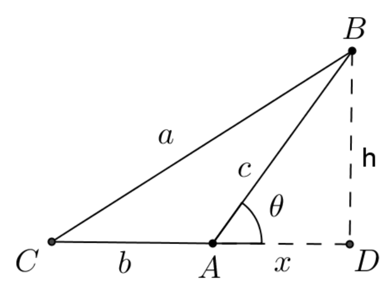


Figura 58: Demonstração do caso $90^o < A < 180^o$

(i) $a^2 = h^2 + (x+b)^2 \Longleftrightarrow a^2 = h^2 + x^2 + b^2 + 2bx$;

(ii) $c^2 = h^2 + x^2 \Longleftrightarrow h^2 = c^2 - x^2$.

Substituindo (ii) em (i), obtemos:

(iii) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$.

Mas, no triângulo retângulo BDA, temos:
$\frac{x}{c} = cos\theta = cos(180^o - \hat{A}) = -cos\hat{A} \longrightarrow x = -ccos\hat{A}$. Substituindo na relação (iii), teremos:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\hat{A}$ □

3.4 Relação entre os raios dos círculos associados

Existe uma relação entre raios dos círculos ex-inscritos com o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC, como nos mostra a seguinte proposição:

Proposição .69. *Sejam r_a, r_b e r_c os raios dos círculos ex-inscritos e r o raio do círculo inscrito a um triângulo ABC. Então,*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

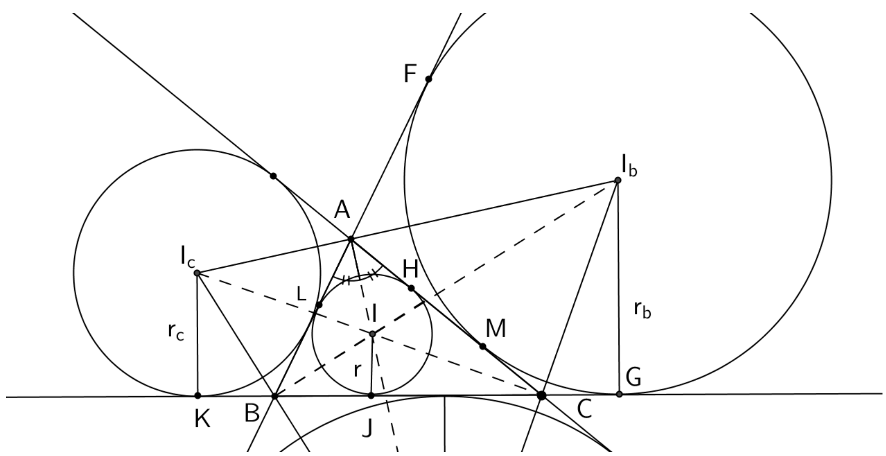


Figura 59: Demonstração da relação entre os raios r, r_a, r_b e r_c

Demonstração.
Observando a figura 59, mostraremos que $BJ = p-b$, $CH = p-c$ e $AL = p-a$, onde p é o semiperímetro do triângulo ABC. Podemos escrever, conforme proposição .44, que $BJ = BL = x$, $CH = CJ = y$ e $AH = AL = z$. Por conseguinte, escrevemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \text{BJ+CJ=a} \\ \text{CH+AH=b} \\ \text{AL+BL=c} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{x+y=a} \\ \text{y+z=b} \\ \text{x+z=c} \end{cases}.$$

Resolvendo, teremos: $x = p - b = BJ$, $y = p - c = CH$ e $z = p - a = AL$.

Agora, mostraremos que $BG = BF = p$. Devido à proposição .44, temos que $MC = CG = k$ e $AM = AF = w$. Em seguida, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} \text{AM+MC=b} \\ \text{BC+CG=AB+AF} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{w+k=b} \\ \text{a+k=c+w} \end{cases}.$$

Então, teremos $k = p - a = CG$ e $w = p - c = AF$ Conclui-se que $BG = BC + CG = a + p - a = p$ e

$BF = AB + AF = c + p - c = p$.

Analogamente, $CK = p$. Observando os triângulos $\triangle BJI$ e $\triangle BGI_b$, temos que são semelhantes pelo caso AA, então

$$(I)\ \frac{IJ}{I_bG} = \frac{BJ}{BG} \iff \frac{r}{r_b} = \frac{p-b}{p}$$

De igual modo, $\triangle CJI \sim \triangle CKI_c$, então

$$(II)\ \frac{IJ}{I_cK} = \frac{CJ}{CK} \iff \frac{r}{r_c} = \frac{p-c}{p}$$

Também temos que

$$(III)\ \frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$$

Somando (I), (II) e (III), teremos

$$r\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) = \frac{p-a+p-b+p-c}{p} = 1$$

□

Teorema .70. *Sejam um triângulo ABC de área* Δ, *lados* $BC = a$, $AC = b$ *e* $AB = c$, R *- raio do círculo circunscrito,* r *- raio do círculo inscrito,* r_a, r_b *e* r_c *- raios dos círculos ex-inscritos referentes aos vértices A, B e C, respectivamente. Então,*

$$4R = r_a + r_b + r_c - r.$$

Demonstração. Utilizaremos as fórmulas para calcular a área de um triângulo, vistas anteriormente:

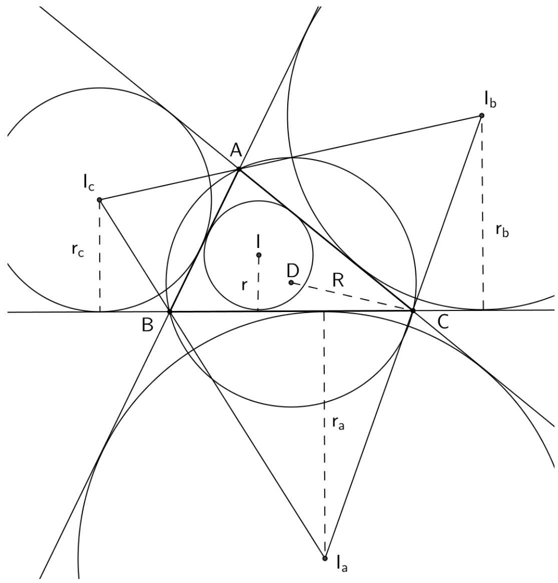


Figura 60: Relação entre os raios

$$\Delta = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Começaremos com a fórmula de Herão, de modo a obter o produto abc.

$$\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\frac{\Delta^2}{p} = p^3 - p^2a - p^2b - p^2c + pab + pac + pbc - abc$$

$$abc = p^3 - p^2a - p^2b - p^2c + pab + pac + pbc - \frac{\Delta^2}{p}.$$

Observamos então que:

$$abc = 3p^3 - 2p^3 - 2p^2a - 2p^2b - 2p^2c + p^2a + p^2b + p^2c + pab + pac + pbc - \frac{\Delta^2}{p}$$

Fazendo agrupamentos para fatoração:

$$abc = p^3 - p^2b - p^2c + pbc + p^3 - p^2a - p^2c + pac + p^3 - p^2a - p^2b + pab -$$
$$2p^3 + p^2a + p^2b + p^2c - \frac{\Delta^2}{p}.$$

Da relação da linha anterior, temos que

$$p^3 - p^2b - p^2c + pbc = p[p^2 - (b+c)p + bc] = p(p-b)(p-c)$$

e

$$-2p^3 + p^2a + p^2b + p^2c = 0.$$

Então, podemos escrever:

$$abc = p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - \frac{\Delta^2}{p}.$$

Lembrando que $4\Delta R = abc$ e como $p(p-b)(p-c) = \dfrac{\Delta^2}{p-a}$, escrevemos:

$$4\Delta R = \frac{\Delta^2}{p-a} + \frac{\Delta^2}{p-b} + \frac{\Delta^2}{p-c} - \frac{\Delta^2}{p}.$$

Dividindo por Δ, teremos

$$4R = \frac{\Delta}{p-a} + \frac{\Delta}{p-b} + \frac{\Delta}{p-c} - \frac{\Delta}{p}.$$

Observando que $\dfrac{\Delta}{p-a} = r_a$, $\dfrac{\Delta}{p-b} = r_b$, $\dfrac{\Delta}{p-c} = r_c$ e $\dfrac{\Delta}{p} = r$ concluímos que:

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

□

O corolário a seguir é a relação entre o raio R e os raios r_a, r_b e r_c.

Corolário .71. *Sejam r_a, r_b, r_c e R, raios associados a um triângulo ABC. Então,*

$$R = \frac{\alpha\beta - \gamma}{4\beta},$$

onde $\alpha = r_a + r_b + r_c$, $\beta = r_ar_b + r_ar_c + r_br_c$ e $\gamma = r_ar_br_c$.

Demonstração. Da proposição .69, temos que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Longleftrightarrow r = \frac{r_ar_br_c}{r_ar_b + r_ar_c + r_br_c}$$

e

do teorema .70, temos que

$$4R = r_a + r_b + r_c - r \Longleftrightarrow R = \frac{r_a + r_b + r_c}{4} - \frac{r}{4}.$$

Então,

$$R = \frac{r_a + r_b + r_c}{4} - \frac{r_a r_b r_c}{4(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)}.$$

Fazendo $\alpha = r_a + r_b + r_c$, $\beta = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c$ e $\gamma = r_a r_b r_c$, concluímos que

$$R = \frac{\alpha\beta - \gamma}{4\beta}$$

$\square$

3.5 Uma atividade

Construiremos um triângulo ABC e seus círculos associados com o auxílio do Geogebra. A ideia aqui não é dar uma aula de Geogebra , mas indicar alguns procedimentos básicos para a execução da atividade proposta. A versão que utilizamos foi a **4.2**.
Na seguinte janela do Geogebra (figura: 61) destacamos a barra de menu e a barra de ferramentas com doze botões, o qual enumeramos de 1 até 12, da esquerda para a direita. Então, quando fizermos referência a um dos botões, escreveremos o número do botão e a opção desejada. Por exemplo, o botão número 1 possui 3 opções que são: *Mover*, *Rotação em Torno de um Ponto* e *Gravar para a planilha de Cálculos*.
O triângulo terá medidas $\overline{BC} = a = 6\ cm$, $\overline{AC} = b = 5\ cm$ e $\overline{AB} = c = 7\ cm$. Inicialmente, construiremos o lado AB clicando no botão 3 e escolhendo a opção *Segmento com Comprimento Fixo* e na janela de diálogo digitamos 7. Em seguida, construímos um círculo com centro no ponto A de raio $b = 5\ cm$ escolhendo o botão 6 opção *Círculo dados Centro e Raio*. Analogamente, um círculo centrado no ponto B de raio $a = 6\ cm$.

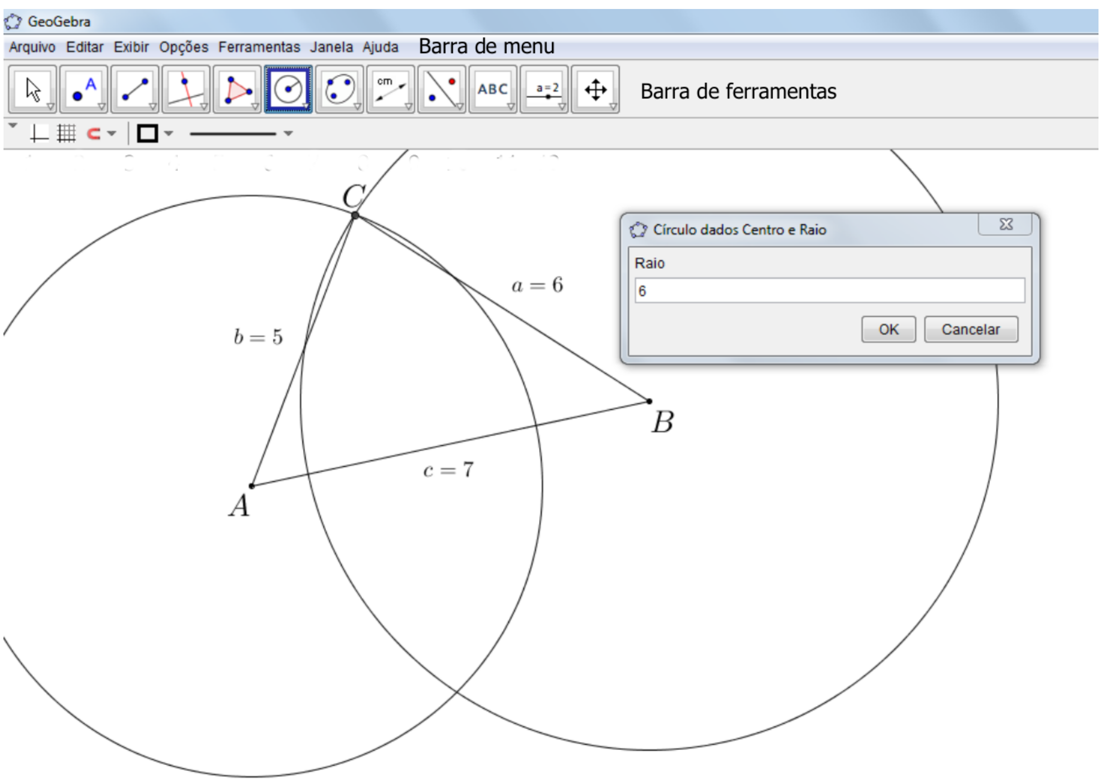


Figura 61: Janela do Geogebra: construção do triângulo ABC

Na sequência, traçaremos as bissetrizes internas relativas aos vértices A e B

clicando no botão 4 opção *Bissetriz*. As bissetrizes se intersectarão no ponto I. Em seguida, calculamos o raio do círculo inscrito $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, onde $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{6+5+7}{2} = 9\ cm$. Então, $r = \sqrt{\dfrac{(9-6)(9-5)(9-7)}{9}} = \dfrac{\sqrt{3.4.2}}{3} =$ $= \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\ cm$ para então traçarmos o círculo com centro em I e o raio considerado, clicando no botão 6 opção *Círculo dados Centro e Raio* e na janela de diálogo digitamos "2/3*sqrt(6)", observe a figura 62.

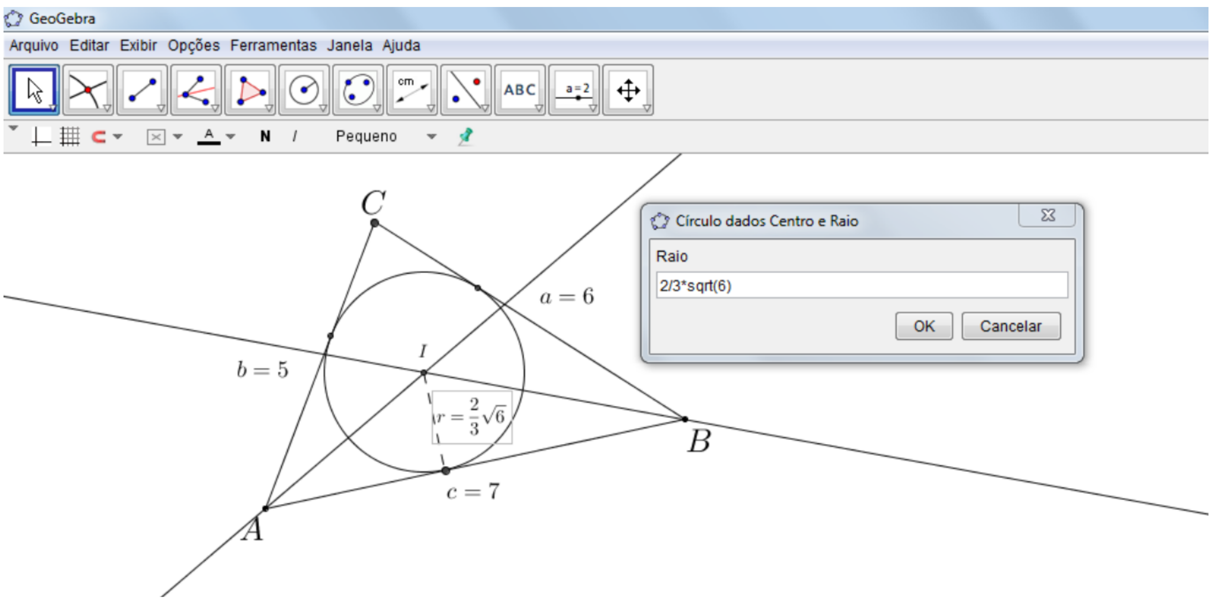


Figura 62: traçado do círculo inscrito

Em seguida, construíremos retas sobre os lados do triângulo, utilizando para isso o botão 3 opção *Reta definida por Dois Pontos* conforme figura 63. Incluiremos os pontos D, F sobre $\overleftrightarrow{AB}$ e E, G sobre $\overleftrightarrow{AC}$ utilizando o botão 2 opção *Novo Ponto*.

Traçaremos as bissetrizes externas referentes aos ângulos $D\hat{B}C$ e $E\hat{C}B$ com o botão 4 opção *Bissetriz* que se intersectarão no ponto I_a. Calculamos o raio $r_a = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{(p-a)}} = \sqrt{\dfrac{9(9-5)(9-7)}{(9-6)}} = 6\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ para então traçarmos o círculo com centro em I_a e o raio considerado, clicando no botão 6 opção *Círculo dados Centro e Raio* e na janela de diálogo digitamos "6*sqrt(2/3)".

Analogamente, traçamos a bissetriz externa do ângulo $F\hat{A}C$, que se intersectará com a bissetriz externa do ângulo $E\hat{C}B$ no ponto I_b . Calculamos o raio $r_b = \sqrt{\dfrac{p(p-a)(p-c)}{(p-b)}} \Longleftrightarrow$

$r_b = \sqrt{\dfrac{9(9-6)(9-7)}{(9-5)}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{6}\ cm$. E traçamos a bissetriz externa do ângulo $G\hat{A}B$, que se intersectará com a bisstriz externa do ângulo $D\hat{B}C$ no ponto I_c. Calculamos o raio $r_c = 3\sqrt{6}$. Concluímos o exercício com a figura 64.

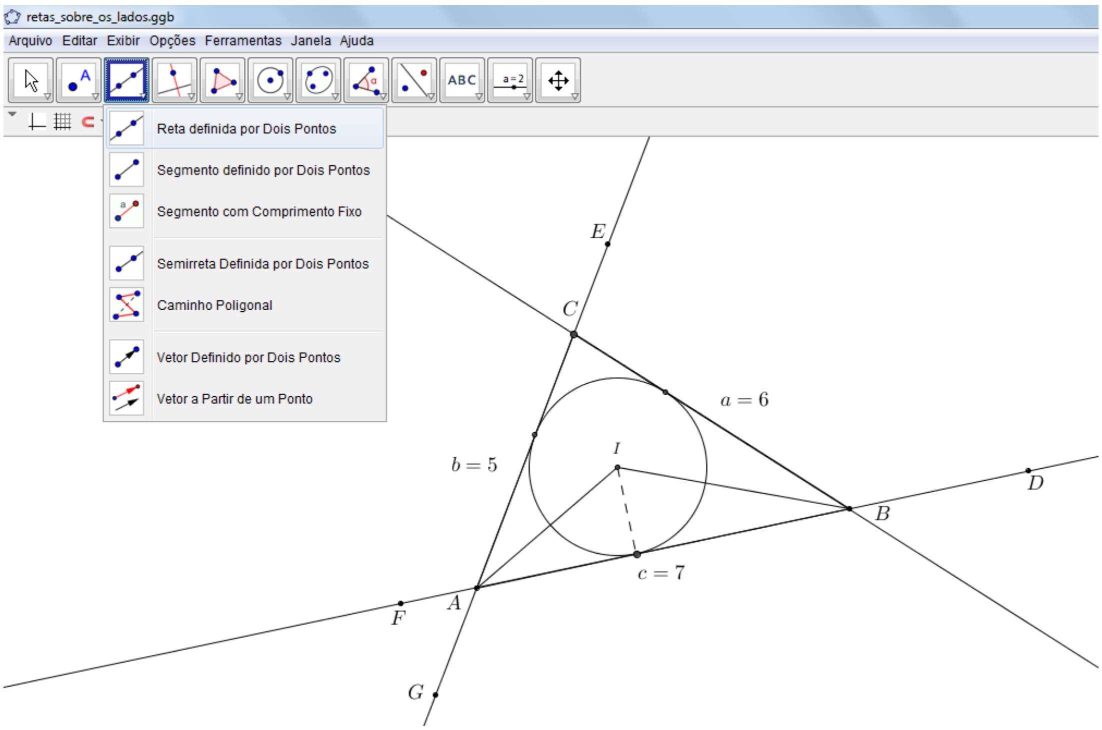


Figura 63: Traçado das retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$

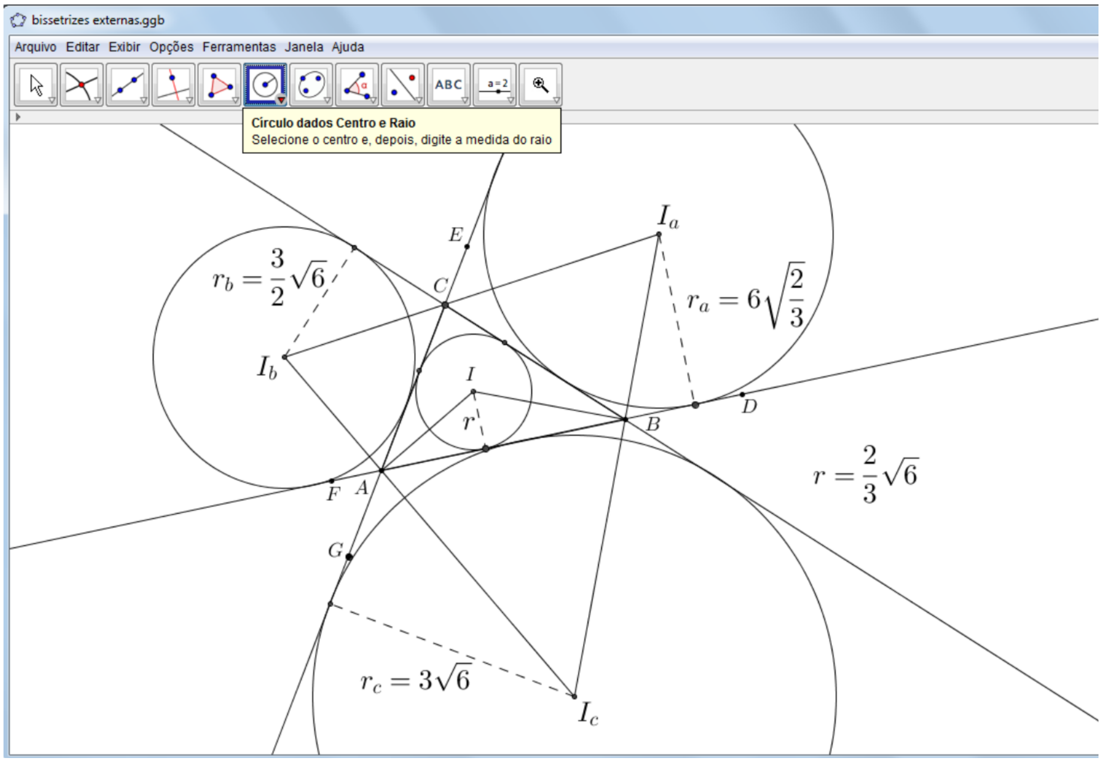


Figura 64: Círculos associados ao triângulo ABC

Referências

[1] Barbosa, J.L.M.: *Geometria Euclidiana Plana*, SBM. Rio de Janeiro, 2012.

[2] Boyer,C.B., Merzbach, U.C.: *A História da Matemática*, Blücher, São Paulo, 1996.

[3] Coxeter, H.S.M. : *Introdution To Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., 1961, pp. 11-13.

[4] Garbi, G.G.: *CQD*, Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[5] Garbi, G.G.: *A Rainha das Ciências*, Livraria da Física, São Paulo, 2007.

[6] Moise, E.E., Downs, F.L.: *Geometria Moderna*, Blücher, São Paulo, 1971.

[7] Muniz Neto, A.C.: Geometria I, SBM, Rio de Janeiro, 2012.