



**UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL
DE PERNAMBUCO**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROFMAT

**Resultantes e Configurações Centrais
Simétricas com 4 Corpos de Massas Iguais**

Cleibson José da Silva

Dissertação de Mestrado
RECIFE

12/08/2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cleibson José da Silva

**Resultantes e Configurações Centrais Simétricas com 4
Corpos de Massas Iguais**

*Trabalho apresentado ao Programa de PROFMAT do DE-
PARTAMENTO DE MATEMÁTICA da UNIVERSIDADE
FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO como requisito
parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva*

RECIFE
12/08/2014

Dedico esta dissertação à minha família e amigos que me ajudaram, incentivaram e acreditaram que este sonho se tornasse realidade. E a todos os professores que encontrei pela vida.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre ter me abençoado em tudo que faço, abrindo meus caminhos, me dando força e sabedoria para superar os obstáculos.

Aos meus Pais, José Cosmo e Mariluce, pelo amor incondicional, dedicação e todos os valores ensinados.

Às minhas irmãs, Clécia e Cristiane, pelo carinho, apoio, amizade e por sempre acreditarem em mim.

À minha esposa, Geisyanne, por sua compreensão, paciência e apoio nas muitas horas ausentes que tive.

À minha amada filha, Yasmin, que é a maior motivadora desse trabalho.

Ao meu orientador Thiago Dias, pelo qual eu tenho uma profunda admiração não pelo profissional dedicado que é mas também pela excelente pessoa. Obrigado por sua motivação, dedicação e prestreza durante a realização desse trabalho.

Aos colegas de Mestrado pelo convívio e pelas discussões que muito contribuíram para enriquecer meu conhecimento. Especialmente a Sidmar Prazeres pelo companheirismo nas nossas longas viagens.

Aos meus amigos, pelo companheirismo, incentivo e credibilidade durante todos esses anos de convívio.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."

—CARL FRIEDRICH GAUSS

Resumo

A presente dissertação aborda uma técnica de resolução de sistemas de equações polinomiais chamada de resultante. Aqui, usaremos a resultante para analisarmos os discriminantes algébricos de alguns polinômios e depois aplicaremos na solução de um caso específico do problema de n corpos, da Mecânica Celeste. Nesta última aplicação, usaremos a resultante para encontrar as configurações centrais planares de 4 corpos de massas iguais e analisar sua surpreendente geometria.

Esta técnica é puramente algébrica e envolve vários tópicos da matemática como Geometria Algébrica e Álgebra Computacional. Pelas aplicações que serão apresentadas nesta dissertação, nos submeteremos apenas às resultantes de dois polinômios a uma variável, desenvolvendo conceitos, definições e propriedades para se tornar possível a análise de discriminantes algébricos e a solução de um caso específico do problema de 4 corpos.

Palavras-chave: Resultantes, discriminantes algébricos, problema de 4 corpos, configurações centrais planares.

Abstract

This present dissertation discusses a technique for solving polynomial equations systems, calling by resultant . Here, we use the result to analyze the algebraic discriminant of some polynomials and then we apply the solution of a particular case of the problem of n bodies in celestial mechanics. In this last application, we will use the resultant to find planar central configurations of four bodies of equal masses and analyze their amazing geometry.

This technique is purely algebraic and involves various topics of mathematics as Algebraic Geometry and Computer Algebra. For applications that are presented in this dissertation, we will submit only those resultants in two polynomials to a variable, developing concepts, definitions and properties to become the algebraic discriminant analysis and the solution of the problem to the case of 4 bodies possible.

Keywords: Resultants, Algebraic Discriminant, problem of four bodies, planar central configurations.

Sumário

1	Introdução	1
2	A Resultante	3
2.1	Resultante a uma variável	3
2.2	Algumas propriedades das resultantes	9
3	Discriminantes Algébricos	19
3.1	Exemplos de Discriminantes	25
3.2	Discriminantes para polinômios reais	27
4	Configurações Centrais simétricas com 4 corpos de massas iguais	31
4.1	Formulação matemática do problema de n corpos	31
4.2	Configurações Centrais	34
4.2.1	Equações das configurações centrais	36
4.3	Configurações centrais simétricas com 4 corpos de massas iguais	41
5	Conclusão	53

Lista de Figuras

4.1	Forças que atuam em m_1	33
4.2	Eixo de simetria passando por m_1 e m_2	42
4.3	Configuração formada com $z = 1$	49
4.4	Configuração formada com $z = \sqrt{3}$	50
4.5	Configuração formada com $z = 1,7140032$	52

CAPÍTULO 1

Introdução

Este trabalho apresenta, como uma primeira leitura, uma técnica puramente algébrica para a resolução de sistemas de equações polinomiais. Tal técnica é conhecida como resultante. Esta é uma teoria que foi tema de muitos trabalhos de matemáticos como Cayley, Sylvester, Euler e Bézout, que tem como principal motivação encontrar raízes comuns de n polinômios a n incógnitas. Em nossa pesquisa, estamos interessados em estudar resultantes de dois polinômios a uma variável, que se torna um método conhecido e fácil de visualizar. Para um caso mais geral quando temos n polinômios e n incógnitas, precisamos de mais ferramentas matemáticas, tornando um problema difícil de resolver. O leitor interessado em conhecer essas generalizações da resultante poderá consultar [18], [6].

O objetivo principal deste trabalho é mostrar o poder de aplicação desta ferramenta matemática. Nesta dissertação, estamos interessados em mostrar duas das várias aplicações possíveis. Mostraremos a resultante como ferramenta para a análise do discriminante algébrico de alguns polinômios e por fim usaremos uma resultante para encontrarmos as configurações centrais de quatro corpos de massas iguais.

Esta dissertação está dividida em três capítulos.

No capítulo 2, abordamos o estudo das resultantes de dois polinômios a uma variável, que é o tema central do nosso trabalho. Inicialmente mostramos a matriz de Sylvester dos coeficientes de dois polinômios f e g , seguido da principal definição, onde mostramos que dados dois polinômios f e g podemos calcular a resultante entre f

e g , como

$$R(f, g) = \det(\text{Syl}(f, g)).$$

A partir disso, mostramos a relação entre este determinante e a solução de sistemas de equações. A partir daí, desenvolvemos algumas propriedades importantes que facilitaram os cálculos das resultantes de dois polinômios.

No capítulo 3, tratamos de mostrar a análise de discriminantes algébricos com o auxílio da resultante. Portanto, calcularemos discriminantes conhecidos, como os das fórmulas de Bhaskara e Cardano, e também calcularemos o discriminante de um polinômio quártico. Por fim, usamos os discriminantes algébricos para analisar a existência de raízes reais dos polinômios citados anteriormente.

No último capítulo, pela beleza da aplicação, destinamos um capítulo inteiro para aplicação da resultante de dois polinômios ao problema de encontrarmos as configurações centrais simétricas planar com 4 corpos de massas iguais. Inicialmente definimos matematicamente o problema de n corpos e em seguida abordamos os conceitos necessários para o entendimento do problema. Após todo o desenrolar teórico, usamos as equações da configuração central de Dziobek para massas iguais e assim encontramos um sistema de duas equações envolvendo as distâncias mútuas dos corpos. Em seguida, embasado na teoria desenvolvida pelo capítulo 2, usamos o software MAPLE para resolvermos esta resultante. Por fim, concluimos nosso trabalho encontrando 3 soluções para o nosso sistema, das quais mostramos que existem três classes de configurações centrais simétricas planar de 4 corpos de massas iguais: um quadrado, um triângulo equilátero com uma massa em seu baricentro e um quadrilátero côncavo.

CAPÍTULO 2

A Resultante

Neste capítulo vamos mostrar a teoria das resultantes para dois polinômios $f, g \in \mathbb{C}[x]$. Mostraremos inicialmente que a resultante é uma ferramenta eficiente para encontrar as soluções de um sistema com dois polinômios e finalizaremos o capítulo com uma surpreendente aplicação à análise de discriminantes algébricos. Depois, no próximo capítulo, usaremos novamente a resultante para resolver um clássico problema de Mecânica Celeste. Para o leitor interessado no estudo das resultantes, poderá consultar [19],[17] e [18].

2.1 Resultante a uma variável

A resultante é uma ferramenta eficiente para decidir, de forma precisa, se dois polinômios f e g têm fatores comuns em sua decomposição. Esta técnica foi desenvolvida por Euler e Bézout e sua definição se baseia numa matriz conhecida como *matriz de Sylvester*. O objetivo desta técnica é calcular o determinante da *matriz de Sylvester* e a partir do seu valor decidir se f e g têm ou não raízes comuns e como consequência encontrá-las. Para isto, nos concentraremos na condição para que dois polinômios f, g tenha fatores comuns. Assim, seja f, g polinômios em $\mathbb{C}[X]$, tais que $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ e $g = \sum_{i=0}^m b_i X^i$, onde n e m são graus respectivos a f e g . Queremos determinar se existe solução comum nas equações

$$\begin{aligned} a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 X^0 &= 0 \\ b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_0 X^0 &= 0 \end{aligned} ,$$

desprezando o conhecimento prévio de alguma solução para f ou g .

Definição 2.1. *Sejam os polinômios $f, g \in \mathbb{C}[X]$ de graus positivos, tais que*

$$\begin{aligned} f &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 X^0, a_n \neq 0 \\ g &= b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0 X^0, b_m \neq 0. \end{aligned}$$

A matriz Sylvester de f e g , denotada por

$$\text{Syl}(f, g) = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & \vdots & & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz $(n+m) \times (n+m)$ formada pelos coeficientes dos polinômios f, g , com m colunas de a_i 's e n colunas de b_i 's. Os espaços em branco são preenchidos com zeros.

Definição 2.2. *Definimos resultante de f, g , denotado por $R_{f,g}$, como o determinante da matriz de Sylvester entre f e g , i.e., $R_{f,g} = \det(\text{Syl}(f, g))$.*

Neste trabalho estamos interessados nos casos de polinômios de duas variáveis, neste caso, os coeficientes a_i e b_i serão polinômios em outras variáveis x_1, \dots, x_n . Assim, a resultante terá uma equação nestas variáveis, que indicaremos por $R(x_1, \dots, x_n)$.

Teorema 2.1. *Sejam $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ e $g = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ dois polinômios em $\mathbb{C}[X]$ tais que $a_n, b_m \neq 0$. Os polinômios f e g têm fatores irredutíveis em comum, ou seja, $\text{mdc}(f, g) \neq 1$, se, e somente se, $R_{f,g} = 0$.*

Demonstração 2.1. *Vamos dividir a demonstração em duas partes. Na primeira parte faremos um exemplo concreto, em seguida, na segunda parte, generalizaremos. Tome os polinômios $f(x) = x^2 - 3x - 4$ e $g(x) = x^2 - 4x$ ambos em $\mathbb{C}[X]$. Observa-se que*

$h(x) = x - 4$ é fator comum de f e g , logo, $\text{mdc}(f, g) \neq 1$. Assim, existem polinômios $f_1(x) = ax + b$ e $g_1(x) = mx + n$, tais que $(x^2 - 3x - 4) = (x - 4)(ax + b)$ e $(x^2 - 4x) = (x - 4)(mx + n)$. Segue que temos a igualdade $\frac{x^2 - 3x - 4}{ax + b} = \frac{x^2 - 4x}{mx + n} \implies (x^2 - 3x - 4)(mx + n) = (x^2 - 4x)(ax + b)$. Efetuando cada produto temos $mx^3 + (-3m + n)x^2 + (-4m - 3n)x - 4n = ax^3 + (-4a + b)x^2 - 4bx$. Igualando a equação a zero, segue que $(m - a)x^3 + (-3m + n + 4a - b)x^2 + (-4m - 3n + 4b)x - 4n = 0$. Assim, esta equação nula se cada coeficiente for nulo, ou seja,

$$\begin{cases} m - a = 0 \\ -3m + n + 4a - b = 0 \\ -4m - 3n + 4b = 0 \\ -4n = 0 \end{cases} .$$

Escrevendo o sistema acima na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Observe que o vetor não-nulo $\vec{v} = (m, n, -a, -b)$ é solução do sistema acima se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Mas, a matriz acima é a matriz de Sylvester de f e g . Portanto, $\text{Det}(\text{Syl}(f, g)) = R_{f, g} = 0$.

Reciprocamente, se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

existe um vetor não-nulo $\vec{v} = (m, n, -a, -b)$ que é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ n \\ -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Efetuada a multiplicação das matrizes do primeiro membro da equação, temos

$$\begin{cases} m - a = 0 \\ -3m + n + 4a - b = 0 \\ -4m - 3n + 4b = 0 \\ -4n = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} m = a \\ -3m + n = -4a + b \\ -4m - 3n = -4b \\ -4n = 0 \end{cases}.$$

Como temos um sistema linear com quatro equações, podemos associar cada membro de cada equação aos coeficientes de um polinômio do terceiro grau, ou seja, $mx^3 + (-3m + n)x^2 + (-4m - 3n)x - 4n = ax^3 + (-4a + b)x^2 - 4bx$. Fatorando $mx + n$ no primeiro polinômio e $ax + b$ no segundo polinômio, temos $(x^2 - 3x - 4)(mx + n) = (x^2 - 4x)(ax + b) \implies \frac{x^2 - 3x - 4}{ax + b} = \frac{x^2 - 4x}{mx + n} = h(x)$, logo, $f(x) = x^2 - 3x - 4 = h(x).(ax + b)$ e $g(x) = x^2 - 4x = h(x).(mx + n)$. Portanto, $h(x)$ é comum a f e g . Segue que $\text{mdc}(f, g) \neq 1$.

Apartir de agora vamos generalizar a prova para dois polinômios $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$ tais que $\partial f = n$ e $\partial g = m$ respectivamente.

Se $\text{mdc}(f, g) \neq 1$, então, existe um polinômio h , de grau positivo, tal que $f = f_1 h$ e $g = g_1 h$, donde $\partial f_1 \leq n - 1$ e $\partial g_1 \leq m - 1$. Logo, $\frac{f}{f_1} = \frac{g}{g_1} \implies f g_1 = g f_1$. Como estamos num domínio fatorial e $\partial g_1 < \partial g$, então realmente f tem algum fator de g . Tome $g_1 = u_1 x^{m-1} + \dots + u_m$ e $f_1 = v_1 x^{n-1} + \dots + v_n$ e substituindo na equação $f g_1 = g f_1$ tem-se $(a_n x^n + \dots + a_0).(u_1 x^{m-1} + \dots + u_m) = (b_m x^m + \dots + b_0).(v_1 x^{n-1} + \dots + v_n)$ um polinômio de grau $n + m - 1$. Fazendo a identidade termo a termo do polinômio acima, temos

$$\begin{cases} a_n u_1 - b_m v_1 = 0 \\ a_n u_2 + a_{n-1} u_1 - b_m v_2 - b_{m-1} v_1 = 0 \\ \vdots \\ a_0 u_m - b_0 v_n = 0. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever o sistema acima como

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & \vdots & & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim o vetor não nulo $(u_1, \dots, u_m, -v_1, \dots, -v_n)$ é solução do sistema. Portanto, este sistema tem solução se, e somente se

$$\begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & \vdots & & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, $R_{f,g} = 0$.

$$\text{Recíprocamente se } \begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & \vdots & & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{vmatrix} = 0, \text{ existe}$$

um vetor $(u_1, \dots, u_m, -v_1, \dots, -v_n)$ tal que

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 & \vdots & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & \vdots & & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & b_0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Efetuada a multiplicação das matrizes temos

$$\begin{cases} a_n u_1 - b_m v_1 = 0 \\ a_n u_2 + a_{n-1} u_1 - b_m v_2 - b_{m-1} v_1 = 0 \\ \vdots \\ a_0 u_m - b_0 v_n = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} a_n u_1 = b_m v_1 \\ a_n u_2 + a_{n-1} u_1 = b_m v_2 + b_{m-1} v_1 \\ \vdots \\ a_0 u_m = b_0 v_n. \end{cases}$$

Como temos $n + m$ equações, podemos associar cada equação a cada coeficiente de um polinômio de grau $n + m - 1$, logo

$$a_n u_1 x^{n+m-1} + \cdots + a_0 u_m = b_m v_1 x^{n+m-1} + \cdots + b_0 v_n,$$

portanto, $(a_n x^n + \cdots + a_0)(u_1 x^{m-1} + \cdots + u_m) = (b_m x^m + \cdots + b_0)(v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n)$.

Assim, temos $f \cdot g_1 = g \cdot f_1 \implies \frac{f}{f_1} = \frac{g}{g_1} = h$. Portanto, f e g têm componentes em comum, ou seja, $\text{mdc}(f, g) \neq 1$. \square

Exemplo 2.1. Sejam $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$ e $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$, então

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

comprovando que $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 = x^2 \cdot (x-3) \cdot (x+2)$ e $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x+2) \cdot (x^2 + 3)$ têm fator comum, que no caso é $x+2$.

Exemplo 2.2. Sejam $f = x^3y^2 - 6xy + 8y$ e $g = x^2y^2 + 2x$ polinômios em y . Fazendo a resultante entre f e g , temos

$$R_{f,g}(X) = \begin{vmatrix} x^3 & -6x+8 & 0 & 0 \\ 0 & x^3 & -6x+8 & 0 \\ x^2 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 4x^3(x^5 + 18x^2 - 48x + 32).$$

Logo, os polinômios f e g têm raízes comuns nas abscissas que são soluções da equação $4x^3(x^5 + 18x^2 - 48x + 32) = 0$.

Se considerarmos f e g polinômios em x , temos

$$R_{f,g}(y) = \begin{vmatrix} y^2 & 0 & -6y & 8y & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & -6y & 8y \\ y^2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32y^3(-2 + 3y^3 + 2y^5).$$

Logo, as soluções da equação $32y^3(-2 + 3y^3 + 2y^5) = 0$ são raízes comuns de f e g .

2.2 Algumas propriedades das resultantes

Nesta seção mostraremos algumas propriedades das resultantes, que serão muito úteis no desenvolvendo das seções posteriores. Estas propriedades são encontradas em [17] ou [18].

Nas propriedades a seguir, considere os polinômios $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ e $g = \sum_{i=0}^m b_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, onde n e m são graus respectivos a f e g

Propriedade 2.1. A resultante $R_{f,g}$ pode ser denotada por

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

Demonstração 2.2. Se chamarmos a matriz acima de A , temos $A^t = \text{Syl}(f, g)$. Sabemos que $R_{f,g} = \det(\text{Syl}(f, g)) = \det A^t$. Como $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^t)$, segue que $R_{f,g} = \det(A)$ \square .

Propriedade 2.2. Se $h = c$ é um polinômio constante não nulo, então $R_{f,h} = c^n$

Demonstração 2.3. Como h tem grau zero, então os coeficientes de f não aparecem na matriz de Sylvester. Analogamente, os coeficientes de h aparecem n vezes, formando uma matriz diagonal. Portanto,

$$R_{f,h} = \begin{vmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{vmatrix} = c^n. \quad \square$$

Propriedade 2.3. Se $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$, onde a_i e b_j são os coeficientes de f e g , então $R_{f,g}$ é um polinômio em $\mathbb{C}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$ de coeficientes inteiros.

Demonstração 2.4. Por definição, a resultante é um determinante de uma matriz. Como os coeficientes que compoem esta matriz são inteiros, logo, seu determinante é inteiro.

\square

Propriedade 2.4. *Sejam f e g polinômios, de graus $n, m \geq 1$, com seus coeficientes no corpo \mathbb{C} . Assim, temos que*

$$R(f, g) = (-1)^{nm} R(g, f)$$

Demonstração 2.5. *Este resultado decorre diretamente da Propriedade (2.1). Se permutarmos as linhas da matriz Sylvester de f e g o determinante será multiplicado por $(-1)^l$, onde l é o número de permutações. Como o número de permutações necessárias é $m(m+n-1)$, segue que o determinante da matriz Sylvester de f e g será multiplicado por $(-1)^{m^2+nm-m} = (-1)^{m(m-1)} \cdot (-1)^{nm} = (-1)^{nm}$. \square*

Lema 2.1. *Sejam $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ polinômios em $\mathbb{C}[x]$. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e β_1, \dots, β_m são raízes dos polinômios f e g de graus n e m respectivamente, então*

$$a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Demonstração 2.6. *Vamos mostrar inicialmente que*

$$(-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são raízes de f , então $f = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$. Se tomarmos $x = \beta_j$, tem-se

$$f(\beta_j) = a_n \prod_{i=1}^n (\beta_j - \alpha_i). \text{ Fazendo } b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = b_m^n \prod_{j=1}^m \left[a_n \prod_{i=1}^n (\beta_j - \alpha_i) \right] \implies$$

$$b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = b_m^n a_n^m \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\beta_j - \alpha_i) \quad (2.1)$$

Multiplicando a equação acima por $(-1)^{nm}$, temos

$$(-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = b_m^n a_n^m \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_j). \quad (2.2)$$

Vamos agora mostrar que $a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = a_n^m b_m^n \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_j)$. Se β_1, \dots, β_m são raízes de g , então, $g = b_m \prod_{j=1}^m (x - \beta_j)$. Tomando $x = \alpha_i$, temos $g(\alpha_i) = b_m \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$. Fazendo $\prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = \prod_{i=1}^n \left[b_m \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) \right]$, temos $\prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = b_m^n \left[\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) \right]$.

Multiplicando a equação anterior por a_n^m . Assim,

$$a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) \quad (2.3)$$

Portanto, mostramos que

$$a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j). \quad \square \quad (2.4)$$

Propriedade 2.5. Sejam os polinômios $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ ambos em $\mathbb{C}[x]$ de graus n e m respectivamente. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e β_1, \dots, β_m são as raízes de f e g respectivamente, então

$$R_{f,g} = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$$

Demonstração 2.7. Considere $a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, b_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ como incógnitas. Consideraremos $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_0$ como polinômios nas incógnitas acima. Graças a relação de Girard, podemos expressar os polinômios

$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_0$ nas raízes de f e g em forma de polinômios simétricos, por exemplo

$$a_{n-1} = a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$$

$$a_{n-2} = a_n(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots),$$

onde a_{n-k} é um polinômio onde cada parcela é um produto de k α_i 's diferentes e analogamente, cada b_{m-k} é um polinômio onde cada parcela é um produto de k β_i 's diferentes.

Seja R o polinômio

$$R = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$$

e D o polinômio da resultante dado pelo determinante da matriz de Sylvester de f e g expressos nas incógnitas $a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, b_m, \beta_1, \dots, \beta_m$. Assim, precisamos mostrar que $R = D$. Logo,

$$D = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix},$$

usando os polinômios simétricos $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_0$, segue que

$$D = \begin{vmatrix} a_n & a_n(\alpha_1 + \cdots) & \cdots & a_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_n(\alpha_1 + \cdots) & \cdots & a_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_n(\alpha_1 + \cdots) & \cdots & a_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \\ b_m & b_m(\beta_1 + \cdots) & \cdots & b_m(\beta_1 \cdots \beta_m) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_m(\beta_1 + \cdots) & \cdots & b_m(\beta_1 \cdots \beta_m) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & b_m(\beta_1 + \cdots) & \cdots & b_m(\beta_1 \cdots \beta_m) \end{vmatrix}.$$

Note que podemos simplificar todas as m primeiras linhas da matriz por a_n e analogamente, simplificar as n últimas linhas por b_m usando uma propriedade dos determinantes. Assim, temos que

$$D = a_n^m b_m^n D',$$

onde

$$D' = \det \begin{bmatrix} 1 & (\alpha_1 + \dots) & \dots & (\alpha_1 \dots \alpha_n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & (\alpha_1 + \dots) & \dots & (\alpha_1 \dots \alpha_n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & (\alpha_1 + \dots) & \dots & (\alpha_1 \dots \alpha_n) \\ 1 & (\beta_1 + \dots) & \dots & (\beta_1 \dots \beta_m) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & (\beta_1 + \dots) & \dots & (\beta_1 \dots \beta_m) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & (\beta_1 + \dots) & \dots & (\beta_1 \dots \beta_m) \end{bmatrix}.$$

Para finalizarmos, precisamos apenas mostrar que $D' = R'$, onde

$$R' = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Veja que R' é um polinômio de grau nm . Examinando D' , note que todos a_{n-k} e b_{m-k} ambos tem grau k , com isso o grau de D' não ultrapassa nm . Então vamos mostrar que R' divide D' . Pelo Teorema (2.1), sabemos que se $\alpha_i = \beta_j$, temos que $D = 0$ e consequentemente $D' = 0$. Assim, a única maneira de um polinômio não nulo se anular com $\alpha_i = \beta_j$ é $\alpha_i - \beta_j$ sendo fator deste polinômio. Por outro lado, é fácil ver que D' não é um polinômio nulo, logo, $\alpha_i - \beta_j$ é fator de D' . Com isso, temos que todo fator de R' é fator de D' . Assim, todo fator de R' tendo multiplicidade um, temos D' sendo múltiplo de R' , isto é, existe uma constante de proporcionalidade C , tal que $D' = C.R'$. Para acharmos esta constante de proporcionalidade, basta atribuir valores às incógnitas nos dois polinômios, tal que, esses valores não os anulem. Assim, a fim de simplificarmos, usaremos $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ e $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$. Assim, pelo fato de $R' = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$ e que todo fator de R' é fator de D' , temos que R' e D' , ambos são iguais a 1, portanto, a constante de proporcionalidade é $k = 1$, concluindo que $D' = R'$. \square

Propriedade 2.6. Sejam os polinômios $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ ambos em $\mathbb{C}[x]$ de graus n e m respectivamente. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e β_1, \dots, β_m são as raízes

de f e g respectivamente, então

$$R_{f,g} = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$$

Demonstração 2.8. Basta aplicar o lema (2.1) na proposição (2.5). \square

Exemplo 2.3. Seja A um anel comutativo com unidade. A resultante dos polinômios $f = Y - a$ e $g = b_n Y^n + \dots + b_0 \in A[Y]$ é igual a $g(a)$. De fato, pois, temos $f = Y - a$, logo a é raiz de f . Assim podemos escrever $f = 1 \cdot (Y - a)$. Usando a propriedade acima, tem-se $R_{f,g} = a_n^m \prod_{i=1}^1 g(\alpha_i)$, segue que $R_{f,g} = 1^1 \cdot g(a) = g(a)$.

Propriedade 2.7. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e β_1, \dots, β_m raízes dos polinômios f e g respectivamente. Se f e g podem ser escritos como $f = q \cdot g + r$, com $\partial(r) = v$, então $R_{g,f} = b_m^{n-v} R_{g,r}$.

Demonstração 2.9. Da proposição (2.6) temos que $R_{g,f} = b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j)$. Analogamente,

$R_{g,r} = b_m^v \prod_{j=1}^m r(\beta_j)$. Sabemos que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, logo, $r(x) = f(x) - q(x)g(x)$. Assim, $r(\beta_j) = f(\beta_j) - q(\beta_j)g(\beta_j)$, segue que $r(\beta_j) = f(\beta_j)$, pois $g(\beta_j) = 0$. Portanto, $R_{g,r} = b_m^v \prod_{j=1}^m f(\beta_j) \implies \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = \frac{R_{g,r}}{b_m^v}$. Substituindo esta última equação em $R_{g,f} = b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j)$, temos $R_{g,f} = b_m^n \frac{R_{g,r}}{b_m^v} = b_m^{n-v} R_{g,r}$. \square

Exemplo 2.4. Seja $f(x,y) = x^5 y^3 + x^2 y^2 + 3x^3 y^2 + xy + 3y + 1$ e $g(x,y) = x^3 y^2 + y$. Ao tentarmos calcular $R_{f,g}$ observamos que a matriz de Sylvester é de ordem 5 se tomarmos $f, g \in \mathbb{C}[x][Y]$. Ao tomar posse da propriedade acima, podemos simplificar os cálculos. Após efetuar alguns cálculos, podemos escrever $f(x,y) = x^5 y^3 + x^2 y^2 + 3x^3 y^2 + xy + 3y + 1 = (x^2 y + 3) \cdot (x^3 y^2 + y) + (xy + 1)$. Assim, temos $r(x,y) = xy + 1$. De acordo com a proposição acima, temos $R_{g,f} = b_m^{n-v} R_{g,r}$. Calcularemos, assim, apenas $R_{g,r}$ que é um determinante de uma matriz de ordem 3. Portanto, tem-se $g(x,y) = x^3 y^2 + y$ e $r(x,y) = xy + 1$, logo

$$R_{g,r} = \begin{vmatrix} x^3 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x$$

Como $\partial(r) = 1, \partial(f) = 3$ e $\partial(g) = 2$, logo $R_{g,f} = (x^3)^{3-1} \cdot (x^3 - x) = x^6(x^3 - x) = x^7(x^2 - 1)$.

Propriedade 2.8. *Sejam os polinômios f e g . Existem polinômios $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[x]$, tal que $\partial(A) < m$ e $\partial(B) < n$, de modo que $A(x)f(x) + B(x)g(x) = R_{f,g}$.*

Demonstração 2.10. *Primeiramente vamos fazer um caso particular. Tome $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = b_1x + b_0$. Assim, temos*

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

Chamaremos de M a matriz do determinante acima e multiplicaremos a i -ésima coluna de M por x^{n+m-i} e somaremos a última coluna. Assim, formaremos uma nova matriz M' cujo determinante é igual ao da matriz M . Assim, para $i = 1$ temos $x^{2+1-1} = x^2$ como multiplicador da coluna 1, para $i = 2$ e $i = 3$ tem-se x e 1 como multiplicadores das duas últimas colunas respectivamente. Portanto, temos

$$M = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_2x^2 + a_0 \\ b_1 & b_0 & b_1x^2 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ b_1 & b_0 & b_1x^2 + b_0x \\ 0 & b_1 & b_1x + b_0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $M' = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & f(x) \\ b_1 & b_0 & xg(x) \\ 0 & b_1 & g(x) \end{bmatrix}$. Para calcularmos o determinante de M' usaremos a sua

última coluna. Segue que $\det(M') = f(x) \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} - xg(x) \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} + g(x) \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}$.

Assim, $R_{f,g} = \det(M) = \det(M') = f(x) \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} + g(x) \cdot \left(-x \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} \right)$.

Tomando $A(x) = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix}$ e $B(x) = -x \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}$, tem-se $R_{f,g} = A(x)f(x) + B(x)g(x)$.

$$\text{Generalizando, considere } R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}.$$

Denotando por M esta matriz, e para $1 \leq i < n+m$, multiplicaremos a i -ésima coluna da matriz M por x^{n+m-i} e somaremos a última coluna, formando uma nova matriz M' cujo o determinante é igual ao de M . Assim, a última coluna é formada pelos polinômios $x^{m-1}f(x), x^{m-2}f(x), \dots, f(x), x^{n-1}g(x), x^{n-2}g(x), \dots, g(x)$. Logo, usando a última coluna para calcularmos o de terminante, tem-se

$$\det(M') = A(x)f(x) + B(x)g(x) = R_{f,g},$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são polinômios em x , com $\partial(A(x)) < m$ e $\partial(B(x)) < n$, e seus respectivos coeficientes são os cofatores relativos a última coluna da matriz M' . \square

Propriedade 2.9. Sejam $f_1(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $f_2(x) = c_p x^p + \cdots + c_0$ e $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ polinômios com coeficientes no corpo \mathbb{R} e $\partial f_1 = n$, $\partial f_2 = p$ e $\partial g = m$, todos maiores ou iguais a 1. Assim, temos

$$R(f_1 f_2, g) = R(f_1, g)R(f_2, g) \quad (2.5)$$

e

$$R(g, f_1 f_2) = R(g, f_1)R(g, f_2) \quad (2.6)$$

Demonstração 2.11. Vamos provar primeiramente a equação (2.5). Assim, como $\partial g = m$, então g tem m raízes em \mathbb{C} . Assumindo que essas m raízes são β_1, \dots, β_m e usando a propriedade (2.6), temos que

$$R(f_1 f_2, g) = (-1)^{(n+p)m} (b_m)^{n+p} \prod_{i=1}^m f_1(\beta_i) f_2(\beta_i),$$

segue que

$$R(f_1 f_2, g) = (-1)^{nm} (-1)^{pm} (b_m)^n (b_m)^p \prod_{i=1}^m f_1(\beta_i) \prod_{i=1}^m f_2(\beta_i),$$

organizando os fatores, temos

$$R(f_1 f_2, g) = \left[(-1)^{nm} (b_m)^n \prod_{i=1}^m f_1(\beta_i) \right] \cdot \left[(-1)^{pm} (b_m)^p \prod_{i=1}^m f_2(\beta_i) \right].$$

Usando novamente a propriedade (2.6), temos

$$R(f_1 f_2, g) = R(f_1, g) R(f_2, g).$$

Analogamente, (2.6) segue da propriedade (2.6). \square

Discriminantes Algébricos

Nas seções anteriores vimos a formulação dos conceitos de resultante e em seguida algumas propriedades. Agora, neste capítulo, usaremos as resultantes no cálculo do discriminante de alguns polinômios na intenção de mostrar alguns resultados já conhecidos, como por exemplo, os discriminantes da fórmula de Bhaskara e da fórmula de Tartaglia-Cardano, e finalizaremos com o uso dos discriminantes para analisar a quantidade de raízes reais e complexas de polinômios quadráticos, cúbicos e quárticos.

Definição 3.1. *Seja $f = a_n x^n + \dots + a_0$, onde $f \in \mathbb{R}[x]$ é um polinômio de grau $n \geq 1$ com seus coeficientes em \mathbb{R} . Sendo \mathbb{C} a extensão de \mathbb{R} , e sejam r_1, \dots, r_n as raízes de f em \mathbb{C} . Assim, o discriminante de f é*

$$\Delta_0(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2 \quad (3.1)$$

Esta definição mostra que Δ_0 depende apenas das raízes de f , mas em geral, é mais conveniente usar o discriminante na versão da definição (3.2), chamada de padrão por Svante Janson, em [17]. Mostraremos no teorema (3.6) que o discriminante é um polinômio nos coeficientes de f .

Definição 3.2. *Seja $f = a_n x^n + \dots + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes no corpo \mathbb{R} e r_1, \dots, r_n suas raízes em \mathbb{C} . O discriminante de f é*

$$\Delta(f) := a_n^{2n-2} \Delta_0(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2 \quad (3.2)$$

Agora, vamos mostrar que o discriminante pode ser escrito como a resultante de f com sua derivada f' . Assim, mostrando que $\Delta(f)$ é um polinômio nos coeficientes de f .

Definição 3.3. A derivada de uma função f é a função denotada por f' , tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se este limite existir.

Teorema 3.1. Seja f uma função derivável em $x \in [a, b]$. Se n for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demonstração 3.1. Pela definição anterior temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$ teremos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \right] - x^n}{\Delta x},$$

segue que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx , obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right].$$

Todos os termos, exceto o primeiro, tem Δx como fator, logo, todos os termos, exceto o primeiro, tendem a zero. Assim,

$$f'(x) = nx^{n-1}. \quad \square$$

Teorema 3.2. Se as funções f e g são deriváveis em $x \in [a, b]$. Se h for a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração 3.2. Pela definição (3.3), temos que $h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$. Segue que,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x},$$

logo,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

segue que

$$h'(x) = f'(x) + g'(x). \quad \square$$

Vimos que a derivada da soma de duas funções é igual a soma de suas derivadas se elas existirem. O resultado encontrado nos dois últimos teoremas pode ser aplicado em um número finito de funções. Enunciaremos isto como um novo teorema.

Teorema 3.3. Sejam f_1, f_2, \dots, f_n funções deriváveis em um $x \in [a, b]$. Se $h(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$, então,

$$h'(x) = f_1'(x) + \dots + f_n'(x).$$

Demonstração 3.3. A prova desse teorema é dado por indução sobre o teorema (3.2).

Teorema 3.4. Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ uma função polinômial $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, de grau $n \geq 1$. A derivada de f é denotada por f' e é dada por

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Demonstração 3.4. A demonstração desse teorema segue do teorema (3.1) seguido do teorema (3.3). \square

Teorema 3.5. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas no intervalo $[a, b]$ e diferenciáveis num ponto $x \in [a, b]$. Logo, $f.g$ é diferenciável em x , com

$$(f.g)(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Demonstração 3.5. Seja $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, logo,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

Somando e subtraindo $f(x + \Delta x) \cdot g(x)$ no denominador, então

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x},$$

logo,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right],$$

segue que

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Sendo f e g definidas e deriváveis em $x \in [a, b]$, então, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) = g(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$ e $\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$. Portanto, $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. \square

Lema 3.1. Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 1$ em $\mathbb{C}[x]$. Se r_1, \dots, r_n são raízes de f , temos que

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i) \quad e \quad f'(r_i) = a_n \prod_{i \neq j} (r_i - r_j).$$

Demonstração 3.6. A demonstração de $f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i)$ é trivial e pode ser vista em [10], ou com mais rigor matemático em [7]. Vamos então provar apenas $f'(r_i) = a_n \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$.

Tome $f_i = (x - r_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, podemos escrever

$$f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_n(x).$$

Pelo Teorema (3.5), temos $f' = f'_1 \cdot f_2 \cdots f_n + f_1 f'_2 \cdots f_n + f_1 f_2 f'_3 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f'_n$. Veja que pelo Teorema (3.4), tem-se $f'_i = 1$, para $i = 1, \dots, n$, logo, $f' = f_2 f_3 \cdots f_n + f_1 f_3 \cdots f_n + f_1 f_2 f_4 \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1}$. Como $f_i(r_i) = 0$, para $i = 1, \dots, n$, então teremos $n - 1$ parcelas nulas, logo,

$$f'(r_i) = a_n \prod_{i \neq j} (r_i - r_j). \quad \square$$

Teorema 3.6. Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 1$ em $\mathbb{C}[x]$. O discriminante de f é dado por

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f') \quad (3.3)$$

e

$$\Delta_0(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-(2n-1)} R(f, f'). \quad (3.4)$$

Demonstração 3.7. Pela propriedade (2.6), temos que

$$R(f, f') = a_n^{n-1} \prod_{i=1}^n f'(r_i),$$

usando o lema (3.1), segue que

$$R(f, f') = a_n^{n-1} \prod_{i=1}^n \left[a_n \prod_{i \neq j} (r_i - r_j) \right],$$

tirando os a_n 's de cada fator, tem-se

$$R(f, f') = a_n^{n-1} a_n^n \prod_{i=1}^n \prod_{i \neq j} (r_i - r_j) = a_n^{2n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)(r_j - r_i),$$

organizando os $\frac{n^2-n}{2}$ fatores $(r_j - r_i)$ para forma $-(r_i - r_j)$, temos

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_i - r_j)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-1} \Delta_0(f),$$

isolando Δ_0 temos

$$\Delta_0(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-(2n-1)} R(f, f'),$$

e pela definição (3.2), temos que

$$\Delta(f) = a_n^{2n-2} \Delta_0(f) = a_n^{2n-2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-(2n-1)} R(f, f'),$$

logo,

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f'). \quad \square$$

Teorema 3.7. Se $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ são polinômios de graus $n \geq 1$ e $m \geq 1$, respectivamente, então

$$\Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g)R(f, g)^2.$$

Demonstração 3.8. Pelo teorema (3.6) temos

$$\Delta(fg) = (-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}} (a_n b_m)^{-1} R(fg, (fg)'). \quad (3.5)$$

Por outro lado, $R(fg, (fg)') = R(fg, fg' + f'g)$. Usando a propriedade (2.9), temos

$$R(fg, (fg)') = R(f, fg' + f'g)R(g, fg' + f'g).$$

Pela propriedade (2.7), segue que

$$R(fg, (fg)') = R(f, f'g)R(g, fg').$$

Usando, novamente a propriedade (2.9) seguida da propriedade (2.4), temos

$$R(f, (fg)') = (-1)^{nm} R(f, f')R(f, g)R(f, g)R(g, g') \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) na equação (3.5), temos

$$\Delta(fg) = (-1)^{\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}} (-1)^{nm} (a_n)^{-1} (b_m)^{-1} R(f, f') [R(f, g)]^2 R(g, g'),$$

segue que

$$\Delta(fg) = (-1)^{\frac{(n^2 2nm + m^2 + 4nm - n - m)}{2}} (a_n)^{-1} (b_m)^{-1} R(f, f') [R(f, g)]^2 R(g, g'),$$

logo,

$$\Delta(fg) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} (-1)^{\frac{4nm}{2}} (a_n)^{-1} (b_m)^{-1} R(f, f') [R(f, g)]^2 R(g, g').$$

Pelo fato de $(-1)^{2nm} = 1$ e pelo Teorema (3.6) tem-se $\Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g)R(f, g)^2$.

□

3.1 Exemplos de Discriminantes

Nesta parte do trabalho mostraremos os exemplos de discriminantes mais conhecidos, que são os discriminantes dos polinômios de segundo, terceiro e quarto graus.

Exemplo 3.1. No polinômio de segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, pelo teorema (3.6), temos

$$\Delta(f) = -a^{-1}R(f, f') = -a^{-1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix},$$

segue que

$$\Delta(f) = -a^{-1}(4a^2c - ab^2) = b^2 - 4ac$$

e que

$$\Delta_0(f) = a^{-2}\Delta(f) = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}.$$

Observe que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser encontrada fatorando a equação, segue que

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-4\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right),$$

logo

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_0(f)} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta(f)}}{2a}.$$

Exemplo 3.2. Dado o polinômio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Pelo teorema (3.6), tem-se

$$\Delta(f) = -a^{-1}R(f, f') = -a^{-1} \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix},$$

logo,

$$\Delta(f) = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2. \quad (3.7)$$

Exemplo 3.3. Dado o polinômio mônico $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, pelo teorema (3.6), temos

$$\Delta(f) = \Delta_0(f) = -R(f, f') = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d + 18bcd - 27d^2.$$

Veja que este discriminante é uma simplificação de (3.7).

Exemplo 3.4. No caso do polinômio $f(x) = x^3 + px + q$, sem o termo do segundo grau, (3.7) fica simplificada na forma

$$\Delta(f) = \Delta_0(f) = -4p^3 - 27q^2.$$

Exemplo 3.5. Ainda no caso $n=3$, temos o polinômio $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$, que é visto na teoria das funções elípticas de Weierstrass. De acordo com (3.7) seu discriminante é

$$\Delta(f) = 16(g_2^3 - 27g_3^2)$$

e

$$\Delta_0(f) = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2).$$

Exemplo 3.6. No caso do polinômio $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, pelo teorema (3.6), temos

$$\Delta(f) = a^{-1}R(f, f') = a^{-1} \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d & e \\ 4a & 3b & 2c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & d \end{vmatrix},$$

logo,

$$\begin{aligned} \Delta(f) = & b^2c^2d^2 - 4b^2c^3e - 4b^3d^3 + 18b^3cde - 27b^4e^2 - 4ac^3d^2 + 16ac^4e + 18abcd^3 - \\ & 80abc^2de - 6ab^2d^2e + 144ab^2ce^2 - 27a^2d^4 + 144a^2cd^2e - 128a^2c^2e^2 - 192a^2bde^2 + \\ & 256a^3e^3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Exemplo 3.7. Sendo mônico o polinômio $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, seu discriminante é uma simplificação de (3.8). Logo, $\Delta(f) = \Delta_0(f) = b^2c^2d^2 - 4b^2c^3e - 4b^3d^3 + 18b^3cde - 27b^4e^2 - 4c^3d^2 + 16c^4e + 18bcd^3 - 80bc^2de - 6b^2d^2e + 144b^2ce^2 - 27d^4 + 144cd^2e - 128c^2e^2 - 192bde^2 + 256e^3$.

Exemplo 3.8. No caso do polinômio $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$, um polinômio mônico sem o termo de terceiro grau, temos por (3.8) que seu discriminante é

$$\Delta(f) = \Delta_0(f) = -4p^3q^2 - 27q^4 + 16p^4r + 144pq^2r - 128p^2r^2 + 256r^3.$$

Exemplo 3.9. Neste exemplo faremos o discriminante da quártica $f(x) = x^5 + px + q$, chamada de quártica de Brings. Pelo teorema (3.6), temos

$$\Delta(f) = R(f, f') = 4^4p^5 + 5^5q^4.$$

3.2 Discriminantes para polinômios reais

Agora, vamos analisar a quantidade de raízes reais de um polinômio através do estudo do sinal do seu respectivo discriminante. Se f é um polinômio real de grau n , suas n raízes em \mathbb{C} é composta de $n - 2v$ raízes reais e v pares raízes complexas conjugadas, para algum $0 \leq v \leq \frac{v}{2}$.

Teorema 3.8. Seja f um polinômio de grau $n \geq 1$ com $n - 2v$ raízes reais e v pares de complexos conjugados, e todas suas raízes distintas, ou seja, $\Delta(f) \neq 0$, então

$$\text{sign}(\Delta(f)) = \text{sign}(\Delta_0(f)) = (-1)^v.$$

Demonstração 3.9. Sabemos que f tem $n - 2v$ raízes reais e v pares de complexos conjugados como raízes. Então podemos escrever f como produto de fatores irredutíveis $f = f_1 \cdots f_{n-2v} \cdot g_1 \cdots g_v$, onde cada $\partial f_i = 1$ e $\partial g_j = 2$. Nomeando $h = \prod_{i=1}^{n-2v} f_i$, com $\partial f_i = 1$, e $g = \prod_{j=1}^v g_j$, com $\partial g_j = 2$, segue que $f = h \cdot g$. Pelo teorema (3.7), temos

$$\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g)R(h, g)^2.$$

Como $R(h, g)^2 > 0$, temos que

$$\text{sign}(\Delta(f)) = \text{sign}(\Delta(hg)) = \text{sign}(\Delta(h))\text{sign}(\Delta(g)).$$

Por outro lado, sabemos que $\Delta(f_i) = 1$ e pela definição (3.2) tem-se $\Delta(g_j) < 0$. Assim,

$$\text{sign}(\Delta(f)) = \text{sign}(\Delta(g)) = \text{sign}\left(\prod_{j=1}^v \Delta(g_j)\right) = (-1)^v. \quad \square$$

Exemplo 3.10. Vamos analisar as raízes do polinômio quadrático. Pelo teorema (3.8), temos

1. $\Delta(f) > 0 \iff \Delta_0(f) > 0 \iff v = 0$, ou seja, f tem duas raízes reais distintas;
2. $\Delta(f) < 0 \iff \Delta_0(f) < 0 \iff v = 1$, i.e., f não tem raiz real, as duas raízes são complexas conjugadas;
3. $\Delta(f) = 0 \iff \Delta_0 = 0$ f tem uma raiz real dupla.

Exemplo 3.11. Analisando o polinômio real cúbico f , temos

1. $\Delta(f) > 0 \iff \Delta_0(f) > 0 \iff v = 0$, i.e., f tem 3 raízes reais distintas;
2. $\Delta(f) < 0 \iff \Delta_0(f) < 0 \iff v = 1$, i.e., f tem 1 raiz real e duas raízes complexas conjugadas;

3. $\Delta(f) = 0 \iff \Delta_0(f) = 0$, f tem uma raiz real tripla, ou uma combinação de uma raiz simples e uma dupla, todas reais.

Exemplo 3.12. No caso de um polinômio real quártico f , tem-se

1. $\Delta(f) > 0 \iff \Delta_0(f) > 0 \iff v = 0$ ou $v = 2$, assim, para $v = 0$, f possui 4 raízes reais distintas, ou para $v = 2$, f tem 4 raízes complexas, sendo 2 pares conjugados;
2. $\Delta(f) < 0 \iff \Delta_0(f) < 0 \iff v = 1$, assim, f tem duas raízes reais e 2 raízes complexas conjugadas.
3. $\Delta(f) = 0 \iff \Delta_0(f) = 0$, assim, f tem
 - (a) uma raiz real quádrupla;
 - (b) duas reais, sendo raiz tripla e uma simples;
 - (c) 2 raízes reais duplas;
 - (d) 3 reais, sendo uma dupla e duas simples;
 - (e) 1 raiz real dupla e duas complexas conjugadas;
 - (f) 2 raízes complexas conjugadas duplas.

Configurações Centrais simétricas com 4 corpos de massas iguais

No problema de n corpos, as únicas soluções explícitas são obtidas através das configurações centrais. Neste capítulo mostraremos que as equações para configurações centrais planares simétricas de 4 massas iguais possuem exatamente três soluções. Para mostrar este fato, usaremos a resultante de dois polinômios para resolver um sistema de duas equações polinomiais relativas às tais configurações centrais simétricas de 4 massas iguais, mostrando com isso, a importância dos estudos da resultante de dois polinômios na geometria das configurações centrais planares. O leitor interessado em pesquisar sobre configurações centrais, poderá consultar [1],[2], [3],[4], [11],[15] e em especial o artigo de Moeckel [12].

4.1 Formulação matemática do problema de n corpos

Considere n partículas de massas m_i , com $i = 1, 2, \dots, n$. O clássico problema de n corpos consiste no estudo da dinâmica dessas n massas interagindo de acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, que nos diz que toda partícula atrai outra partícula com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre estes corpos. Então, para dois corpos de massas m_a e m_b separadas por uma distância d , a intensidade da força existente entre m_a e m_b é dada por $F = G \cdot \frac{m_a m_b}{r^2}$, onde $G = 6,67260 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{Kg}^{-2}$ é a constante de gravitação. Assim, as componentes do vetor da força de atração gravitacional que a

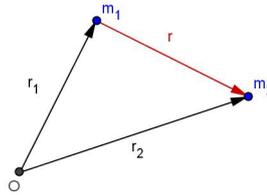
CAPÍTULO 4 CONFIGURAÇÕES CENTRAIS SIMÉTRICAS COM 4 CORPOS DE MASSAS IGUAIS

k -ésima partícula exerce sobre a j -ésima, onde, $k \neq j$ é

$$\vec{F}_{jk} = G.m_j.m_k \cdot \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_k - \vec{r}_j\|^3},$$

onde \vec{r}_k e \vec{r}_j são os vetores posição de m_k e m_j respectivamente.

Para o problema de dois corpos, inicialmente solucionado por Newton, temos uma equação que descreve o movimento de corpos celestes. Assim, vamos desenvolver a equação movimento para dois corpos. Considere dois corpos de massas m_1 , m_2 com coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) suas respectivas coordenadas num sistema inercial de origem $O = (0, 0, 0)$.



Assim, os vetores $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são os vetores das posições de m_1 e m_2 relativos à origem O. Logo, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, portanto, a distância entre m_1 e m_2 será dada por $r_{12} = \|\vec{r}\|$. De acordo a Lei da Gravitação universal, as forças que a massa m_2 exerce sobre m_1 e que m_1 exerce sobre m_2 são dadas por

$$\vec{F}_{12} = G.m_1.m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{12}^3}$$

e

$$\vec{F}_{21} = G.m_2.m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3}.$$

Pela 2ª lei de Newton, temos que $F = m.\ddot{\vec{r}}$, onde $\ddot{\vec{r}}$ é a segunda derivada de \vec{r} em relação ao tempo, ou seja, $\ddot{\vec{r}}$ é a aceleração da massa m. Portanto,

$$m_1.\ddot{\vec{r}}_1 = G.m_1.m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{12}^3} \implies \ddot{\vec{r}}_1 = G.m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r_{12}^3} = G.m_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r_{12}^3}$$

e

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = G.m_1.m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3} \implies \ddot{\vec{r}}_2 = G.m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_{12}^3} = -G.m_1 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3}.$$

Logo, temos o sistema $\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = G.m_2 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -G.m_1 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3} \end{cases}$ cuja solução é dado pela integração do

sistema formado por seis equações diferenciais de 2ª ordem, pelo fato de $\ddot{\vec{r}}_1$ e $\ddot{\vec{r}}_2$ terem três componentes. Podemos, ainda, subtrair a primeira equação da segunda, logo, $\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = G.m_1 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3} + G.m_2 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3}$. Segue que

$$\ddot{\vec{r}} = -\left(G.m_1 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3} + G.m_2 \frac{\vec{r}}{r_{12}^3}\right),$$

onde $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ denota a posição relativa de m_2 em relação a m_1 .

Portanto, a solução do problema de dois corpos depende da solução da equação diferencial de 2ª ordem acima.

Tome agora três corpos de massas m_1 , m_2 e m_3 . Vamos analisar a força resultante que atua em cada um dos três corpos. Para o corpo de massa m_1 , a força resultante que atua sobre ele, é dada por $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$.

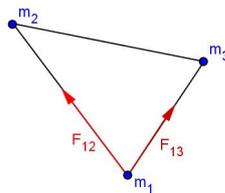


Figura 4.1 Forças que atuam em m_1

Analogamente, as resultantes em m_2 e m_3 são respectivamente $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$ e $\vec{F}_3 = \vec{F}_{32} + \vec{F}_{31}$. Portanto, temos um sistema com as três forças

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{cases}$$

Da Lei da Gravitação universal, sabemos que $\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3}$ e pela 2ª Lei de Newton, tem-se $\vec{F}_i = m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i$. Usando-as no sistema anterior, temos

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + Gm_1 m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \\ m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = Gm_2 m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} + Gm_2 m_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \\ m_3 \cdot \ddot{\vec{r}}_3 = Gm_3 m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} + Gm_3 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|^3} \end{cases},$$

ou simplesmente

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \cdot \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3} \implies \ddot{\vec{r}}_i = G \cdot \sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3},$$

onde $\ddot{\vec{r}}_i$ é denotado pela aceleração do i -ésimo corpo e $r_{ij} = \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ é a distância entre o i -ésimo e o j -ésimo corpo.

Observe que a solução do sistema acima, depende da integração de nove equações diferenciais de 2ª ordem, ou seja, um sistema de ordem dezoito.

Generalizando, quando tivermos n corpos, a força resultante que os demais corpos exercem sobre o i -ésimo corpo é denotado por

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|r_{ij}\|^3}, \implies \ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{i \neq j} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|r_{ij}\|^3}$$

onde $\ddot{\vec{r}}_i$ é denotado pela aceleração do i -ésimo corpo e $r_{ij} = \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ é a distância entre o i -ésimo e o j -ésimo corpo. Pelo fato de termos n corpos cujo seus respectivos \vec{r}_i terem três componentes, temos um total de $3N$ equações diferenciais de 2ª ordem, dando assim, um sistema de ordem $6N$.

4.2 Configurações Centrais

Considere n partículas de massas m_1, \dots, m_n e os vetores $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^d$, suas respectivas posições. Uma *configuração* de um sistema formado pelos n corpos é o vetor $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \in \mathbb{R}^{nd}$.

Definição 4.1. A dimensão de uma configuração r , denotada por $\delta(r)$, é o menor subespaço afim de \mathbb{R}^d que contém os vetores \vec{r}_i 's.

Configurações com dimensões 1,2 e 3 são respectivamente chamadas de colinear, planar e espacial.

Definição 4.2. Sejam $c = \frac{m_1 r_1 + \dots + m_n r_n}{M}$, onde $M = \sum_{j=1}^n m_j$, o centro de massa do sistema composto por n corpos e $\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|r_{ij}\|^3}$, com m_j numa escala que torna $G = 1$, é a aceleração do i -ésimo corpo. Dizemos que os n corpos formam uma configuração central se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo, tal que o vetor aceleração de cada corpo satisfaz a equação

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|r_{ij}\|^3} + \lambda (\vec{r}_i - c) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Em outras palavras, podemos dizer que o vetor aceleração de cada corpo é proporcional ao seu vetor posição relativo ao centro de massa do sistema, ou seja, existe λ tal que

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|r_{ij}\|^3} = \lambda (\vec{r}_i - c) \quad (4.1)$$

Podemos ainda tomar $\lambda = \frac{M}{r_0^3}$ e substituir na equação (4.1). Assim, temos que

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j}{r_0^3} (\vec{r}_i - c),$$

segue que

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3} - \frac{\sum_{i=1}^n m_j \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_j \vec{r}_j}{r_0^3} = 0 \quad (4.2)$$

pondo os m_j 's em evidência na segunda parcela da equação 4.2, temos que

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3} - \sum_{i=1}^n m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_0^3} = 0 \quad (4.3)$$

Fazendo $S_{ij} = r_{ij}^{-3} - r_0^{-3}$ e colocando-o em evidência, tem-se

$$\sum_{i \neq j} m_j (r_j - r_i) S_{ij} = 0 \quad (4.4)$$

Em um sistema composto por n corpos, as configurações centrais são as condições iniciais no espaço das configurações que dão origem às únicas soluções explícitas conhecidas até hoje. Tais soluções são chamadas de soluções *homográficas*, isto é, as configurações em cada instante são semelhantes à configuração inicial. De um modo geral, as configurações centrais são invariantes módulo homotetias, rotações e translações.

4.2.1 Equações das configurações centrais

Considere a configuração $r = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ com $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^d$. Em \mathbb{R}^d temos no máximo d vetores linearmente independente. A configuração r é composta pelos vetores $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^d$, logo, podemos formar a configuração r com no máximo $n - 1$ vetores $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ linearmente independentes. Portanto, a dimensão da configuração r satisfaz $0 \leq \delta(r) \leq n - 1$. Assim, supondo, sem perda de generalidade, que $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, podemos associar a configuração r a uma matriz $n \times n$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vec{r}_1 & \cdots & \vec{r}_n \end{pmatrix},$$

onde a coluna i de X é formada pelo vetor \vec{r}_i acrescido do número 1. Como o posto de X nos dá o número máximo de colunas linearmente independentes, assim, $\text{posto}(X) = n$. Por outro lado, k vetores linearmente independentes geram um espaço afim de dimensão $k - 1$, portanto,

$$\delta(r) = \text{posto}(X) - 1$$

Se $\delta(r) \leq n - 2$, então $\text{posto}(X) - 1 \leq n - 2 \implies \text{posto}(X) \leq n - 1$, ou seja, os

vetores das colunas de X são linearmente dependentes. Logo, existe um vetor não nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \vec{0},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \Delta_1 + \cdots + \Delta_n = 0 \\ r_1 \cdot \Delta_1 + \cdots + r_n \cdot \Delta_n = 0 \end{cases}$$

, isto é,

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^n \Delta_k r_k = 0$$

Se tomarmos exatamente $\delta(r) = n - 2$, podemos, sem perda de generalidade, assumir que $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^{n-2}$, neste caso, consideraremos a matriz X do tipo $(n - 1) \times n$ e construiremos a matriz Z do tipo $n \times n$, acrescentando uma linha de zeros abaixo da última linha de X . Assim, temos

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vec{r}_1 & \cdots & \vec{r}_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde consideraremos os $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ com a última coordenada nula.

Seja $\widehat{r}_k = (\vec{r}_1, \dots, \widehat{\vec{r}_k}, \dots, \vec{r}_n)$ uma configuração dos $n - 1$ corpos obtida da configuração r desconsiderando o vetor \vec{r}_k . Neste caso, montaremos a matriz do tipo $(n - 1) \times (n - 1)$ associada à configuração \widehat{r}_k :

$$\widehat{X}_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \cdots & \vec{r}_{k-1} & \vec{r}_{k+1} & \cdots & \vec{r}_n \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz \widehat{X}_k é obtida retirando-se a k -ésima coluna da matriz X . Portanto, a menos da mudança de sinal, as quantidades $\Delta_k = (-1)^{k+1} |\widehat{X}_k|$, onde $|\widehat{X}|$ é o determinante da matriz \widehat{X} , são os cofatores das entradas nulas da última linha da matriz Z .

Tome agora a matriz Y_0 , onde será obtida acrescentando uma linha de lementos unitários abaixo da última linha da matriz X .

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{(n-2)1} & \cdots & r_{(n-2)n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $|Y_0| = 0$, pois possui duas linhas iguais. Considere a matriz Y_k , tal que,

$$Y_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{(n-2)1} & \cdots & r_{(n-2)n} \\ r_{k1} & \cdots & r_{kn} \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots, n-2.$$

Observe que $|Y_k| = 0, k = 0, 1, \dots, n-2$, pois, Y_k possui duas linhas iguais. Usando os cofatores em relação a última linha da matriz Y_k afim de calcular cada determinante para $k = 0, 1, \dots, n-2$, temos que

$$\begin{cases} 1.\Delta_1 + 1.\Delta_2 + \cdots + 1.\Delta_n = 0 \\ r_{11}\Delta_1 + r_{12}\Delta_2 + \cdots + r_{1n}\Delta_n = 0 \\ \vdots \\ r_{(n-2)1}\Delta_1 + r_{(n-2)2}\Delta_2 + \cdots + r_{(n-2)n}\Delta_n = 0 \end{cases}.$$

Sendo assim, obtemos que $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ pertence ao núcleo de X . Ainda, podemos observar geometricamente que $|\widehat{X}_k|$ nos dá o volume orientado do paralelepípedo varrido pelos \widehat{r}_k , logo, $\Delta_k = (-1)^{k+1}|\widehat{X}_k|$ será, a menos de uma mudança de sinal, os volumes destes paralelepípedos.

Para o caso planar, isto é, em que temos $\delta(r) = 2$ e conseqüentemente $n = 4$, temos que $r_i \in \mathbb{R}^2$, logo, as matrizes X são do tipo 3×4 :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \end{pmatrix}.$$

Observe que ao montarmos a matriz Z a partir de X , com as entradas da última linha todas nulas, temos

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, a matriz \widehat{X}_k será uma matriz do tipo 3×3 , onde as todas as entradas da primeira linha são 1. Por exemplo,

$$\widehat{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_{11} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{23} & r_{24} \end{pmatrix}.$$

Observe que geometricamente, $|\widehat{X}_2|$ corresponde ao dobro da área de um triângulo formado pelos pontos $r_1 = (r_{11}, r_{21})$, $r_3 = (r_{13}, r_{23})$ e $r_4 = (r_{14}, r_{24})$. Portanto, para o caso planar, temos que os $\Delta_k = (-1)^{k+1} |\widehat{X}_k|$ são, a menos de uma constante, as áreas dos triângulos formados pelos pontos $r_i, i \neq k$.

Definição 4.3. Seja $s_{ij} = \|r_j - r_i\|^2$. Uma configuração de Dziobek é uma configuração (r_1, \dots, r_n) tal que existe um vetor não nulo $\Delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo as equações

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k = 0 \quad e \quad \sum_{k=1}^n \Delta_k r_k = 0 \quad (4.5)$$

e para algum $v \in \mathbb{R}$ e para algum $\gamma \in \mathbb{R}$

$$s_{ij}^{-3/2} = \gamma + v \Delta_i \Delta_j \quad (4.6)$$

Teorema 4.1. Seja $s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$ e Δ_i variáveis das configurações centrais, então a relação entre s_{ij} e Δ_i é

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ik} = \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{il}, \quad \text{para qualquer } k \text{ e } l \quad (4.7)$$

Demonstração 4.1. Temos que $s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$, logo

$$s_{ij} = \langle r_i - r_j, r_i - r_j \rangle = \|r_i\|^2 - 2\langle r_i, r_j \rangle + \|r_j\|^2 = \|r_i\|^2 - 2r_i r_j + \|r_j\|^2. \quad (4.8)$$

$$\text{Portanto, } \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ij} = \sum_{i=1}^n (\|r_i\|^2 - 2r_i r_j + \|r_j\|^2) \Delta_i \implies \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ij} = \sum_{i=1}^n \|r_i\|^2 \Delta_i - 2r_j \sum_{i=1}^n r_i \Delta_i + \|r_j\|^2 \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

Pelas equações (4.5), tem-se $\sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ij} = \sum_{i=1}^n \|r_i\|^2 \Delta_i$, logo, não depende do particular valor j . ■

Lema 4.1. *Se a configuração tiver dimensão $n - 2$ então, a menos de múltiplos, existe um único vetor $\Delta \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo as equações (4.5).*

Demonstração 4.2. *De fato, seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum \xi_j = 0$ e $\sum \xi_j r_j = 0$. A dimensão da configuração é $n - 2$ se, e somente se para cada $1 \leq i \leq n$ existe um k tal que os vetores $n - 2$ vetores $\{r_j - r_i\}_{j \neq i, k}$ são linearmente independentes. Assim, pelas equações (4.5) temos que $\Delta_1(r_1 - r_i) + \dots + \Delta_k(r_k - r_i) + \dots + \Delta_n(r_n - r_i) = 0 \implies$*

$$\Delta_k(r_k - r_i) = - \sum_{j \neq k} \Delta_j(r_j - r_i). \quad (4.9)$$

Analogamente,

$$\xi_k(r_k - r_i) = - \sum_{j \neq k} \xi_j(r_j - r_i). \quad (4.10)$$

Multiplicando (4.9) por ξ_k e (4.10) por Δ_k e considerando a independência linear entre os vetores, temos que $\xi_k \Delta_j = \Delta_k \xi_j \quad \forall j \neq k, i$. Chamando $\mu = \frac{\Delta_k}{\xi_k}$, temos que $\Delta_j = \mu \xi_j \quad \forall 1 \leq j \leq n$. ■

Proposição 4.2.1. *Sejam n corpos de massas $m_i \neq 0$ e $M = m_1 + \dots + m_n \neq 0$. Então, toda configuração central de dimensão exatamente $n - 2$ é uma configuração de Dziobek.*

Demonstração 4.3. *Pelo lema (4.1), a menos de múltiplos, existe um único $\Delta \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz as equações (4.5). Para qualquer i , a única relação linear com coeficientes não todos nulos entre $r_k - r_i$, com $1 \leq k \leq n$ é*

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k(r_k - r_i) = 0.$$

Mas, pela equação (4.4) temos $\sum_{k \neq i} m_k S_{ik} (r_k - r_i) = 0$, onde $S_{ik} = r_{ik}^{-3} - \frac{\lambda}{M}$. Assim, para algum $\mu_i \in \mathbb{R}$, $m_k S_{ik} = \mu_i \Delta_k$. Por simetria, $m_i S_{ik} = \mu_k \Delta_i$. Logo, $\frac{\mu_i \Delta_k}{m_k} = \frac{\mu_k \Delta_i}{m_i}$, fazendo $d_k = \frac{\Delta_k}{m_k}$, temos $\mu_i d_k = \mu_k d_i$ para todo i . Portanto, a matriz $2 \times n$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ d_1 & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

tem o determinante de qualquer uma de suas submatrizes 2×2 nulo. Segue que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_i = \mu d_i$. Assim, substituindo o valor de μ_i em $m_k S_{ik} = \mu_i \Delta_k$, tem-se $m_k S_{ik} = \mu d_i \Delta_k \implies S_{ik} = \mu d_i \frac{\Delta_k}{m_k} = \mu d_i d_k$ ■

4.3 Configurações centrais simétricas com 4 corpos de massas iguais

Um dos problemas matemáticos do século XXI é uma questão levantada por Wintner para as configurações centrais planares que diz: para um dado conjunto de n massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito?

Para o caso de $n = 3$, há somente 5 classes de equivalência de configurações centrais planares, sendo 3 de Euler e 2 de Lagrange. Mais recentemente, Hampton e Moeckel mostraram afirmativamente no artigo [8] que para $n = 4$ temos que o número de configurações centrais planares não equivalentes está entre 32 e 8472. A questão para $n > 4$ ainda está aberta.

Nesta seção, estamos interessados em mostrar as configurações centrais simétricas planar não equivalentes para $n = 4$ quando todas as massas destes corpos são iguais. Neste caso específico do problema para quatro corpos, vamos encontrar as distâncias mútuas dos corpos e mostrar a partir destas distâncias fixadas, que existem três famílias de configurações. Para o êxito dessa pesquisa, aplicaremos as equações (4.5),

(4.6) e (4.7) para 4 corpos quando as massas são iguais. Por fim, encontraremos um sistema de equações cujas incógnitas são provenientes das distâncias mútuas entre esses corpos. Então, com o auxílio do software MAPLE, usaremos a resultante desses polinômios para resolver o sistema, encontrando assim, as três famílias das configurações centrais para o problema de 4 corpos com massas iguais.

Albouy provou em [1], que uma configuração central planar de quatro corpos de massas iguais possui um eixo de simetria que passa por dois destes corpos. Exemplificamos, na figura a seguir, um eixo de simetria nas massas m_1 e m_2 , que implicará na igualdade $\Delta_3 = \Delta_4$, onde Δ_3 e Δ_4 são as áreas orientadas do triângulos (124) e (123) respectivamente. Denotaremos

$$a = s_{12}, \quad f = s_{34}, \quad b = s_{13} = s_{14}, \quad d = s_{23} = s_{24}.$$

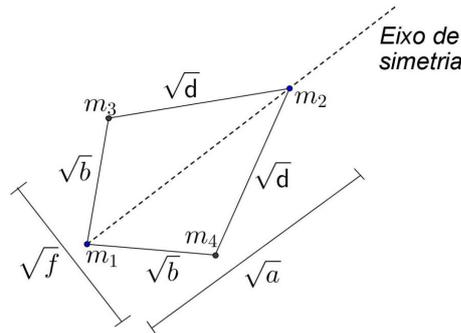


Figura 4.2 Eixo de simetria passando por m_1 e m_2

Assim, usando o fato que $\sum_{k=1}^n \Delta_k = 0$, temos $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0$, mas, pela simetria da configuração temos $\Delta_3 = \Delta_4$, logo,

$$\Delta_1 + \Delta_2 + 2\Delta_3 = 0.$$

Fazendo $\Delta_1 = 1$ e tome $t = \Delta_2 + \Delta_3$, segue que $\Delta_2 = t - 1$, $\Delta_1 = -t - 1$ e $\Delta_3 = 1$.

Trocando os Δ_i pelo parâmetro t , segue que $\Delta_1 = -t - 1$, $\Delta_2 = t - 1$ e $\Delta_3 = 1$. Na equação (4.7), tomando $k = 1$ e $l = 2$ temos

$$\Delta_1 s_{11} + \Delta_2 s_{21} + \Delta_3 s_{31} + \Delta_4 s_{41} = \Delta_1 s_{12} + \Delta_2 s_{22} + \Delta_3 s_{32} + \Delta_4 s_{42}.$$

Usando os valores fixados para os s_{ij} e o parâmetro t dos Δ_i , tem-se

$$(t-1)a + b + b = (-t-1)a + d + d \implies ta - a + 2b = -ta - a + 2d,$$

log,

$$\begin{aligned} 2b &= -ta - ta - a + a + 2d \implies \\ b &= -ta + d \end{aligned} \tag{4.11}$$

Analogamente, para $k = 1$ e $l = 3$ temos

$$\Delta_1 s_{11} + \Delta_2 s_{21} + \Delta_3 s_{31} + \Delta_4 s_{41} = \Delta_1 s_{13} + \Delta_2 s_{23} + \Delta_3 s_{33} + \Delta_4 s_{43},$$

$$\begin{aligned} \text{assim, } (t-1)a + b + b &= (-t-1)b + (t-1)d + f \implies ta - a + 2b = -tb - b + td - d + \\ f &\implies 3b + tb = a - ta + td - d + f \implies \end{aligned}$$

$$b(t+3) = a(1-t) + d(t-1) + f,$$

segue que

$$b(t+3) = (a-d)(t-1) + f. \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \text{Substituindo a equação (4.11) na equação (4.12) tem-se } (-ta + d)(t+3) &= a(1-t) + \\ d(t-1) + f &\implies -t^2a - 3ta + td + 3d = a - ta + td - d + f \implies 4d = t^2a + 2ta + a + \\ f &\implies \end{aligned}$$

$$4d = f + (1+t)^2a. \tag{4.13}$$

Veja que na equação (4.11) podemos identificar que $d = b + ta$ e o substituindo em (4.12), tem-se

$$\begin{aligned} b(t+3) &= a(1-t) + (b+ta)(t-1) + f \implies \\ bt + 3b &= a - at + tb - b + t^2a - ta + f \implies 4b = a(1 - 2t + t^2) + f, \end{aligned}$$

portanto,

$$4b = f + (1-t)^2a. \tag{4.14}$$

Vamos agora substituir os valores fixados para os s_{ij} e os Δ_i na equação (4.6).

Assim, temos

$$\begin{cases} a^{-3/2} = \gamma + v(1-t^2) \\ b^{-3/2} = \gamma - v(1+t) \\ d^{-3/2} = \gamma - v(1-t) \\ f^{-3/2} = \gamma + v \end{cases} .$$

Escolhendo uma homotetia adequada podemos tomar $a = 1$. Fazendo a mudança de variável $f = z^2$, vamos expressar γ e v usando a primeira e a última equação do sistema acima. Logo,

$$\begin{cases} 1 = \gamma + v(1-t^2) \\ z^{-3} = \gamma + v \end{cases} ,$$

subtraindo a primeira equação da segunda equação temos $z^{-3} - 1 = v - v(1-t^2) \implies z^{-3} - 1 = vt^2 \implies v = \frac{z^{-3}-1}{t^2}$. Substituindo o valor encontrado para v na segunda equação do sistema acima, tem-se $z^{-3} = \gamma + \frac{z^{-3}-1}{t^2} \implies \gamma = z^{-3} - \frac{z^{-3}-1}{t^2} \implies \gamma = z^{-3}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t^2}$.

Assim, temos

$$v = \frac{z^{-3}-1}{t^2} \quad e \quad \gamma = z^{-3}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t^2} \quad (4.15)$$

Lema 4.2. *Sejam os polinômios $P(z,t) = z^3t^2b^{-3/2}$ e $Q(z,t) = 4b$. Então, tem-se $[P(z,t)]^2[Q(z,t)]^3 = 64z^6t^4$.*

Demonstração 4.4. *De fato, pois $P^2Q^3 = [z^3t^2b^{-3/2}]^2.(4b)^3 \implies P^2Q^3 = z^6t^4b^{-3}64b^3 \implies P^2Q^3 = 64z^6t^4$. ■*

Os polinômios $P(z,t) = z^3t^2b^{-3/2}$ e $Q(z,t) = 4b$ ainda podem ser escritos de forma expandida, para isso usaremos as equações $b^{-3/2} = \gamma - v(1+t)$ e $4b = f + (1-t)^2$ juntamente com as equações (4.15).

Como $P(z,t) = z^3t^2b^{-3/2}$, segue que

$$P(z,t) = z^3t^2 \left[z^{-3} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{t^2} - \frac{z^{-3}-1}{t^2}(1+t) \right],$$

logo,

$$P(z, t) = (t - 2)(t + 1) + (2 + t)z^3 \quad (4.16)$$

e usando a equação (4.14), temos

$$Q(z, t) = 4b = z^2 + (1 - t)^2. \quad (4.17)$$

Proposição 4.3.1. *Seja o polinômio $R(z, t) = [P(z, t)]^2[Q(z, t)]^3 - 64z^6t^4$. Se z e t são provenientes de uma configuração central simétrica com quatro massas iguais, então $R(z, t) = 0$ e $R(z, -t) = 0$.*

Demonstração 4.5. *O fato de $R(z, t) = 0$ se dá pelo lema 4.2.. Para mostrar que $R(z, -t) = 0$, observe que P^2Q^3 é par em t , portanto o polinômio $R(z, t)$ é par em t , logo, $R(z, -t) = 0$. \square*

Proposição 4.3.2. *Se $t \neq 0$ proveniente de uma configuração central simétrica com quatro massas iguais, toda solução (z, t) do sistema*

$$(S_1) \begin{cases} R(z, t) - R(z, -t) = 0 \\ R(z, t) + R(z, -t) = 0 \end{cases},$$

é também solução do sistema

$$(S_2) \begin{cases} R_i(z, t) = \frac{1}{2t}[R(z, t) - R(z, -t)] = 0 \\ R_p(z, t) = \frac{1}{2}[R(z, t) + R(z, -t)] = 0 \end{cases}.$$

Demonstração 4.6. *Tome o par (z_1, t_1) , com $t_1 \neq 0$, proveniente de uma configuração central. Sendo (z_1, t_1) solução do sistema S_1 , temos as duas equações sendo satisfeitas por (z_1, t_1) . Logo, temos $R(z_1, t_1) = R(z_1, -t_1)$ na primeira equação e $R(z_1, t_1) = -R(z_1, -t_1)$ na segunda equação de S_1 . Portanto, $R(z_1, t_1) = 0$ e $R(z_1, -t_1) = 0$. Substituindo (z_1, t_1) no sistema S_2 , temos*

$$(S_2) \begin{cases} R_i(z_1, t_1) = \frac{1}{2t_1}[R(z_1, t_1) - R(z_1, -t_1)] = 0 \\ R_p(z_1, t_1) = \frac{1}{2}[R(z_1, t_1) + R(z_1, -t_1)] = 0 \end{cases}.$$

Usando o resultado encontrado em S_1 , segue que

$$(S_2) \begin{cases} R_i(z_1, t_1) = \frac{1}{2t_1}(0-0) \\ R_p(z_1, t_1) = \frac{1}{2}(0+0) \end{cases} \implies \begin{cases} R_i(z_1, t_1) = 0 \\ R_p(z_1, t_1) = 0 \end{cases},$$

satisfazendo as equações de S_2 .

Portanto, (z_1, t_1) também satisfaz o sistema S_2 . ■

Vamos agora calcular explicitamente os polinômios R_i e R_p . Para isso, vamos substituir os polinômios (4.16) e (4.17) no sistema (S_2) e usando $u = t^2$, escreveremos R_i e R_p nas incógnitas u e z . Então, com o auxílio do MAPLE, obtemos

$$R_i = 4z^{12} + 6uz^{10} - 12z^{10} + 2uz^9 - 8z^9 + 12uz^8 - 36z^8 + 6u^2z^7 - 30uz^7 + 24z^7 - 2u^3z^6 + 16u^2z^6 - 28uz^6 - 16z^6 + 6u^3z^5 - 12u^2z^5 - 66uz^5 + 72z^5 - 12u^2z^4 + 24uz^4 - 12z^4 + 2u^4z^3 + 10u^3z^3 - 82u^2z^3 + 30uz^3 + 40z^3 - 18u^3z^2 + 54uz^2 - 36z^2 - 8u^4 - 28u^3 + 60u^2 - 4u - 20$$

e

$$R_p = uz^{12} + 4z^{12} + 3u^2z^{10} - 9uz^{10} + 12z^{10} + 2uz^9 - 8z^9 + 3u^3z^8 - 18u^2z^8 + 27uz^8 + 12z^8 - 6u^2z^7 + 30uz^7 - 24z^7 + u^4z^6 - 5u^3z^6 - 68u^2z^6 + 34uz^6 + 8z^6 - 18u^3z^5 + 84u^2z^5 - 42uz^5 - 24z^5 + 3u^3z^4 + 6u^2z^4 - 21uz^4 + 12z^4 - 10u^4z^3 + 30u^3z^3 + 58u^2z^3 - 70uz^3 - 8z^3 + 3u^4z^2 + 33u^3z^2 - 63u^2z^2 + 15uz^2 + 12z^2 + u^5 + 24u^4 - 10u^3 - 52u^2 + 33u + 4.$$

Reescrevendo R_i e R_p como polinômio de $R[z][u]$, tem-se

$$R_i(z, u) = 2(z^3 - 4)u^4 - 2(z^6 - 3z^5 - 5z^3 + 9z^2 + 14)u^3 + 2(3z^7 + 8z^6 - 6z^5 - 6z^4 - 41z^3 + 30)u^2 + 2(z^3 - 1)(3z^7 + z^6 + 6z^5 - 12z^4 - 13z^3 - 27z^2 + 2)u + 4(z^2 - 5)(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^2$$

e

$$R_p(z, u) = u^5 + (z^6 - 10z^3 + 3z^2 + 24)u^4 + (3z^8 - 5z^6 - 18z^5 + 3z^4 + 30z^3 + 33z^2 - 10)u^3 + (3z^{10} - 18z^8 - 6z^7 - 68z^6 + 84z^5 + 6z^4 + 58z^3 - 63z^2 - 52)u^2 + (z^3 - 1)(z^2 + 1)(z^7 - 10z^5 + 3z^4 + 37z^3 + 18z^2 - 33)u + 4(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^3.$$

O sistema S_2 , formado pelas equações $R_i = 0$ e $R_p = 0$, tem solução se existirem fatores irredutíveis em comum, ou seja, $mdc(R_i, R_p) \neq 1$. Pelo teorema (2.1),

isso é possível se a resultante $R(z)$ em u entre os dois polinômios for nula. Assim, usando a resultante através do MAPLE, obtemos $R(z) = -262144z^{69} + 17039360z^{66} - 86507520z^{65} + 62914560z^{64} - 601358336z^{63} + 3427270656z^{62} - 1924399104z^{61} + 9718726656z^{60} - 54816669696z^{59} + 10666377216z^{58} - 99918558265344z^{44} + 9523795853312z^{45} - 110710377676800z^{46} - 78600470528z^{57} + 470880092160z^{56} + 181113716736z^{55} + 299619319808z^{54} - 2284076924928z^{53} - 3318813818880z^{52} - 18373148672z^{51} + 4915283361792z^{50} + 25253206818816z^{49} - 4354187722752z^{48} + 9560789876736z^{47} - 7080798455857152z^{31} + 3432348744941568z^{32} - 3554265579651072z^{33} + 3622825283026944z^{34} + 277242727366656z^{43} + 65796447928320z^{42} + 291317686468608z^{41} - 240939950407680z^{40} - 505508763009024z^{39} - 265795803807744z^{38} - 834458401112064z^{37} + 1693408326320128z^{36} - 811242429087744z^{35} - 842153550151680z^{17} + 5159932262350848z^{30} - 6389343375851520z^{29} + 8625828787126272z^{28} - 5387570335973376z^{27} + 7383841309458432z^{26} - 6947779566108672z^{25} + 4098364037922816z^{24} - 5645280902381568z^{23} + 3640357472698368z^{22} - 2267402411704320z^{21} + 2818681370836992z^{20} - 1133438630363136z^{19} + 895263169314816z^{18} + 159746799697920z^{16} - 234744207114240z^{15} + 114934107340800z^{14} + 31345665638400z^{12} = 0$

Agora, escrevendo $R(z)$ na forma fatorada, obtemos

$$R(z) = -262144z^{12} (z^3 - 1)^4 (z^2 - 3) (z^2 + 1)^3 (z^{37} - 61z^{34} + 336z^{33} - 240z^{32} + 2052z^{31} - 12120z^{30} + 8400z^{29} - 30456z^{28} + 175113z^{27} - 88548z^{26} + 241040z^{25} - 1364385z^{24} + 338994z^{23} - 1081984z^{22} + 6241506z^{21} + 642162z^{20} + 2319507z^{19} - 15790278z^{18} - 12287376z^{17} + 1386909z^{16} + 11212992z^{15} + 55894536z^{14} - 19889496z^{13} + 53738964z^{12} - 128353329z^{11} + 44215308z^{10} - 172452240z^9 + 160917273z^8 - 42764598z^7 + 217615248z^6 - 115440795z^5 + 17124210z^4 - 139060395z^3 + 39858075z^2$$

$$+ 39858075) = 0.$$

Analisaremos as raízes reais de cada fator de $R(z)$. Descartaremos o fator com $z^2 + 1$, pois se $z^2 + 1 = 0 \implies z = \pm i$. Como chamamos $f = z^2$, teríamos que $\sqrt{f} = \pm i$, mas as distâncias são números reais positivos, logo estes caso não é possível para o nosso problema. Vamos verificar as raízes de cada fator nos seguintes casos:

1. Em $-262144Z^{12}$, tem-se $z = 0$ como solução de $R(z)$. Vamos, agora substituir $z = 0$ em $R_i(z, u) = 2(z^3 - 4)u^4 - 2(z^6 - 3z^5 - 5z^3 + 9z^2 + 14)u^3 + 2(3z^7 + 8z^6 - 6z^5 - 6z^4 - 41z^3 + 30)u^2 + 2(z^3 - 1)(3z^7 + z^6 + 6z^5 - 12z^4 - 13z^3 - 27z^2 + 2)u + 4(z^2 - 5)(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^2 = 0$

e

$$R_p(z, u) = u^5 + (z^6 - 10z^3 + 3z^2 + 24)u^4 + (3z^8 - 5z^6 - 18z^5 + 3z^4 + 30z^3 + 33z^2 - 10)u^3 + (3z^{10} - 18z^8 - 6z^7 - 68z^6 + 84z^5 + 6z^4 + 58z^3 - 63z^2 - 52)u^2 + (z^3 - 1)(z^2 + 1)(z^7 - 10z^5 + 3z^4 + 37z^3 + 18z^2 - 33)u + 4(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^3 = 0.$$

Usando o MAPLE, ao substituirmos $z = 0$ nos polinômios acima, encontramos sistema em u

$$\begin{cases} -20 - 4u + 60u^2 - 28u^3 - 8u^4 = 0 \\ 4 + 33u - 52u^2 - 10u^3 + 24u^4 + u^5 = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Vemos que $u = 1$ é solução do sistema anterior. Por outro lado, tomamos $u = t^2$, segue que $t = 1$. Vamos agora encontrar as distâncias \sqrt{f} , \sqrt{b} e \sqrt{d} . Nas equações (4.14) e (4.13) temos que $4b = f + (1 - t)^2 a$ e $4d = f + (1 + t)^2 a$, como $f = z^2$ e tomamos $a = 1$, segue que $4b = 0^2 + (1 - 1)^2 \cdot 1$ e $4d = 0^2 + (1 + 1)^2 \cdot 1$, logo, $\sqrt{f} = \sqrt{b} = 0$, $\sqrt{d} = 1$, $\sqrt{a} = 1$, impossibilitando a formação da configuração com as quatro massas com um eixo de simetria em m_1 e m_2 .

2. No fator que tem $z^3 - 1$, a solução é um quadrado. De fato, pois temos $z = 1$ como solução de $R(z)$, assim, vamos substituir $z = 1$ em $R_i(z, u) = 2(z^3 - 4)u^4 - 2(z^6 - 3z^5 - 5z^3 + 9z^2 + 14)u^3 + 2(3z^7 + 8z^6 - 6z^5 - 6z^4 - 41z^3 + 30)u^2 + 2(z^3 -$

$$1)(3z^7 + z^6 + 6z^5 - 12z^4 - 13z^3 - 27z^2 + 2)u + 4(z^2 - 5)(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^2 = 0$$

e

$$R_p(z, u) = u^5 + (z^6 - 10z^3 + 3z^2 + 24)u^4 + (3z^8 - 5z^6 - 18z^5 + 3z^4 + 30z^3 + 33z^2 - 10)u^3 + (3z^{10} - 18z^8 - 6z^7 - 68z^6 + 84z^5 + 6z^4 + 58z^3 - 63z^2 - 52)u^2 + (z^3 - 1)(z^2 + 1)(z^7 - 10z^5 + 3z^4 + 37z^3 + 18z^2 - 33)u + 4(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^3 = 0.$$

Com o auxílio do MAPLE, chegamos aos sistema a seguir. Portanto, temos agora que resolver o sistema em u

$$\begin{cases} -24u^2 - 32u^3 - 6u^4 = 0 \\ -56u^2 + 36u^3 + 18u^4 + u^5 = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Portanto, vemos que $u = 0$ é solução do sistema acima. Como $u = t^2$, temos que $t = 0$. Analogamente ao caso anterior, as equações (4.14) e (4.13) nos mostram que $4b = f + (1 - t)^2a$ e $4d = f + (1 + t)^2a$. Como $f = z^2$ e tomamos $a = 1$, segue que $4b = 1^2 + (1 - 0)^2 \cdot 1$ e $4d = 1^2 + (1 + 0)^2 \cdot 1$, logo, $\sqrt{b} = \sqrt{d} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{f} = \sqrt{a} = 1$.

Assim, usamos o GeoGebra para mostrar que a única forma de preservar as distâncias citadas, é um quadrado de diagonais iguais a 1.

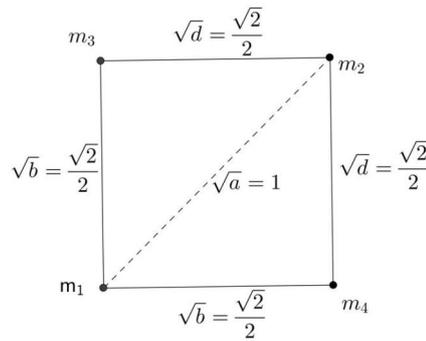


Figura 4.3 Configuração formada com $z = 1$

3. No fator $z^2 - 3$, temos um triângulo equilátero como solução. De fato, pois $z = \pm\sqrt{3}$ é solução de $R(z)$ e pelo fato de z ser uma distância entre as massas, vamos

admitir apenas a solução positivas para z . Portanto, vamos substituir $z = \sqrt{3}$ no sistema envolvendo $R_i(z, u)$ e $R_p(z, u)$ a fim de calcularmos o valor de u , logo, o sistema formado por $R_i(z, u) = 0$ e $R_p(z, u) = 0$, ao substituir $z = \sqrt{3}$, com o auxílio de MAPLE, formamos o novo sistema

$$\begin{cases} -24u^2 - 32u^3 - 6u^4 = 0 \\ -56u^2 + 36u^3 + 18u^4 + u^5 = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Portanto, vemos que $u = 4$ é solução do sistema acima. Por outro lado, tomamos $u = t^2$, logo, $t = 2$.

As equações (4.14) e (4.13) nos mostram que $4b = f + (1 - t)^2a$ e $4d = f + (1 + t)^2a$. Como $f = z^2$ e tomamos $a = 1$, segue que $4b = \sqrt{3}^2 + (1 - 2)^2 \cdot 1$ e $4d = \sqrt{3}^2 + (1 + 2)^2 \cdot 1$, logo, $\sqrt{b} = \sqrt{a} = 1$ e $\sqrt{d} = \sqrt{f} = \sqrt{3}$, formando um triângulo equilátero de lado $\sqrt{3}$ com m_1 localizado no seu baricentro.

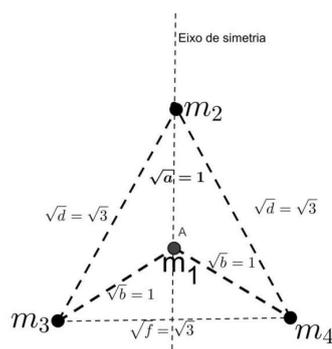


Figura 4.4 Configuração formada com $z = \sqrt{3}$

4. No último fator, de grau 37, usando o Maple, encontramos três raízes reais, que seus valores aproximados são

$$z_1 = -1,414231784, \quad z_2 = 1,046899386 \quad e \quad z_3 = 1,714000326.$$

Excluimos z_1 , por ser negativo, e vamos substituir $z_2 = 1,046899386$ e $z_3 = 1,714000326$ no sistema formado pelas equações $R_i(z, u) = 2(z^3 - 4)u^4 - 2(z^6 -$

$$3z^5 - 5z^3 + 9z^2 + 14)u^3 + 2(3z^7 + 8z^6 - 6z^5 - 6z^4 - 41z^3 + 30)u^2 + 2(z^3 - 1)(3z^7 + z^6 + 6z^5 - 12z^4 - 13z^3 - 27z^2 + 2)u + 4(z^2 - 5)(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^2 = 0$$

e

$R_p(z, u) = u^5 + (z^6 - 10z^3 + 3z^2 + 24)u^4 + (3z^8 - 5z^6 - 18z^5 + 3z^4 + 30z^3 + 33z^2 - 10)u^3 + (3z^{10} - 18z^8 - 6z^7 - 68z^6 + 84z^5 + 6z^4 + 58z^3 - 63z^2 - 52)u^2 + (z^3 - 1)(z^2 + 1)(z^7 - 10z^5 + 3z^4 + 37z^3 + 18z^2 - 33)u + 4(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^3 = 0$. Assim, usando o MAPLE, ao substituírmos $Z_2 = 1,046899386$ no sistema acima, encontramos

$$\begin{cases} -1,49055 - 12,949403u - 5,7052000u^4 - 31,341732u^3 - 34,257873u^2 = 0 \\ 0,80025 + 6,669674u - 60,67890u^2 + 39,303808u^3 + 17,130521u^4 + u^5 = 0 \end{cases} .$$

Porém, verificamos que $u = -4,1846643$ satisfaz o sistema acima, mas, como tomamos $u = t^2$, tem-se que $t = \sqrt{-4,1846643}$ não é um número real. Por este motivo, descartamos z_2 . Nos resta apenas verificar a existência de soluções para $z_3 = 1,714000326$. Substituindo, $z_3 = 1,714000326$ no sistema que tem $R_i(z, u) = 0$ e $R_p(z, u) = 0$, encontramos um novo sistema em u

$$\begin{cases} -2082,8982 - 15,00869u + 2,07077u^4 + 7,52093u^3 + 32,44891u^2 = 0 \\ 3977,3150 + 2027,8032u - 1319,8305u^2 + 94,31682u^3 + 7,8146u^4 + u^5 = 0 \end{cases} .$$

Também verificamos no MAPLE que $u = 4,4721629$ é solução do sistema acima. Como tomamos $u = t^2$, então $t = \sqrt{4,47216296} \implies t = 2,11474891$.

As equações (4.14) e (4.13) nos mostram que $4b = f + (1 - t)^2a$ e $4d = f + (1 + t)^2a$. Como $f = z^2$ e tomamos $a = 1$, segue que $4b = 1,714000326^2 + (1 - 2,11474891)^2 \cdot 1$ e $4d = 1,714000326^2 + (1 + 2,11474891)^2 \cdot 1$, logo, $b = 1,04511556$ e $d = 3,15986447$. Portanto, as distâncias entre os corpos são aproximadamente

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= 1 & \sqrt{b} &= 1,02230893 \\ \sqrt{f} &= 1,71400032 & \sqrt{d} &= 1,777600764 \end{aligned} .$$

52 CAPÍTULO 4 CONFIGURAÇÕES CENTRAIS SIMÉTRICAS COM 4 CORPOS DE MASSAS IGUAIS

Assim, tendo as distâncias entre os corpos fixadas, usamos o Geogebra para construir a única figura que preserva as distâncias fixadas anteriormente.

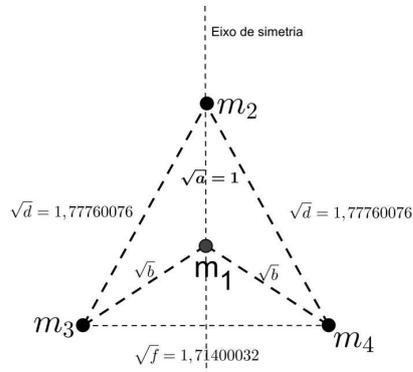


Figura 4.5 Configuração formada com $z = 1,7140032$

Observe que este fator nos dá uma solução não-trivial, onde se tem uma configuração central planar com um único eixo de simetria.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Na presente dissertação, retratamos uma técnica para resolução de sistemas polinomiais, chamada de resultante. A elegância matemática e a grandeza de sua aplicabilidade foram os grandes motivadores desta pesquisa. Pelas aplicações atribuídas aqui às resultantes, neste trabalho abordamos apenas a resultante de dois polinômios a uma variável.

O que propomos como objetivo principal nesta dissertação era inicialmente verificar quais as condições para que dois polinômios a uma variável tenham componentes irredutíveis em comum. Mas, com o aprofundar do tema, fomos percebendo quão grande é o poder desta ferramenta matemática chamada de resultante. Assim, percebemos que tão importante como mostrar a resultante na solução de um sistema de duas equações polinomiais, seria também mostrar seu poder de aplicação. Assim, nossos objetivos foram ampliados e saímos da abstração da solução de sistemas polinomiais.

De fato, nossos objetivos foram alcançados, pois inicialmente desenvolvemos as ferramentas necessárias para um entendimento satisfatório das resultantes de dois polinômios a uma variável e em seguida mostramos a importância da resultante no cálculo dos discriminantes algébricos e por fim, no último capítulo, usamos a resultante na resolução de um sistema polinomial do qual nos possibilitou encontrar as configurações centrais de quatro corpos de massas iguais, um caso específico do problema de n corpos da Mecânica Celeste.

A realização deste trabalho foi de grande importância, pois além de ter proporcionado um contato maior com segmentos da matemática muito interessantes como

Geometria Algébrica e Mecânica Celeste, mostramos, com o auxílio da resultante, que existem exatamente três classes de configurações centrais simétricas planar para 4 corpos de massas iguais: um quadrado, um triângulo equilátero com uma massa no seu baricentro, e um quadrilátero convexo. Assim, deixando-nos estimulados a fazer futuras pesquisas sobre configurações centrais para 5 e 6 corpos de massas iguais.

Referências Bibliográficas

- [1] ALBOUY, A. Symétrie des configurations centrales de quatre corps. *CR Acad. Sci. Paris* 320, 217–220.
- [2] ALBOUY, A. The symmetric central configurations of four equal masses. *Contemporary Mathematics* 198 (1996), 131–136.
- [3] ALBOUY, A. On a paper of moeckel on central configurations. *Regular and chaotic dynamics* 8, 2 (2003), 133–142.
- [4] FAUGÈRE, JEAN-CHARLES, K. I. Symmetry theorems for the newtonian 4-and 5-body problems with equal masses. In *Computer Algebra in Scientific Computing CASC'99*. Springer, 1999, pp. 81–92.
- [5] FIGUERÊDO, E., AND CASTRO, A. S. D. Um problema de três corpos analiticamente solúvel. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 23, 3 (2001), 289–293.
- [6] GELFAND, I. M., KAPRANOV, M. M., AND ZELEVINSKY, A. V. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [7] GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
- [8] HAMPTON, M., AND MOECKEL, R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Inventiones mathematicae* 163, 2 (2006), 289–312.

- [9] JANSON, S. Resultant and discriminant of polynomials. *Notes, September 22* (2007).
- [10] LIMA, ELON L., E. A. *A matemática do Ensino Médio*, 9 ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [11] MELLO, L. F., CHAVES, F. E., AND FERNANDES, A. C. Configurações centrais planares do tipo pipa. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 31, 1 (2009), 1302.
- [12] MOECKEL, R. On central configurations. *Mathematische Zeitschrift* 205, 1 (1990), 499–517.
- [13] MUNEM, MUSTAFA A., D. J. F. *Cálculo*, vol. 1. LTC, Rio de Janeiro, 1982.
- [14] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*, 3 ed. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [15] SANTOS, A. A. Dziobek's configurations in restricted problems and bifurcation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 90 (2004), 213–238.
- [16] SILVA, T. D. O. Aplicação da geometria algébrica à finitude das configurações centrais de dziobek. Master's thesis, UFPE, 2009.
- [17] SVANTE, J. Resultant and discriminant of polynomials. *Department of Mathematics, Uppsala University* (2007).
- [18] TURA, F. C. Resultantes, equações polinomiais e o teorema de bézout. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRS, Porto Alegre-RS, Abril 2006.
- [19] VAINSENER, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.