Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Permutações Caóticas e Aplicações

Edson Praxedes dos Santos Júnior

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Edson Praxedes dos Santos Junior
E-mail:	edprasjr@yahoo.com.br
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[X]Sim [ ] Não
Vínculo empregatício do autor	Professor
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior — Sigla: CAPES
País:	Brasil — UF: DF — CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	Permutações Caóticas e Aplicações
Palavras-chave:	Princípio da inclusão e exclusão, permutações caóticas
Título em outra língua:	chaotic permutation and applications
Palavras-chave em outra língua:	Principle of inclusion and exclusion, Chaotic Permutations.
Área de concentração:	Análise Combinatória
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	07/03/2014
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Orientador (a):	Prof Dr Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
E-mail:	fabianoftds@yahoo.com.br
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Edson P. dos Santos Junior

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 10 / 03 / 2014

1 Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Edson Praxedes dos Santos Júnior

Permutações Caóticas e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Análise Combinatória
Orientador: Prof. Dr. Fabiano F. T. dos Santos

Goiânia

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos Júnior, Edson Praxedes dos

Permutações Caóticas e Aplicações [manuscrito] / Edson Praxedes dos Santos Júnior. - 2014.

42 f. : il., tabs.

Orientador: Profª. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Edson Praxedes dos Santos Júnior

Permutações Caóticas e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 07 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Matemática campus Arraias-UFT

Prof. Dr. Ronaldo Antonio dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Edson Praxedes dos Santos Júnior graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás no ano de 2006, cursou pós-graduação em Docência Universitária pela Faculdade Brasileira de Educação e Cultura e atualmente é professor efetivo de Educação Básica da Secretaria de Educação do Estado - GO.

Dedico este trabalho a meus pais e minha irmã, que sempre celebram comigo minhas conquistas e vitórias.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado força e esperança nos momentos de dificuldades e aflição durante esses dois últimos anos.

A meus pais, que sempre me incentivaram nos estudos e também em minha vida profissional enquanto educador.

A minha irmã, por todo o incetivo e por celebrar cada conquista minha como se fosse dela.

A minha prima, Professora Michele, e a minha grande companheira de trabalho, Professora Lúcia, que tanto me apoiaram nessa nova empreitada de minha vida.

Aos meus amigos, que sempre tiveram compreensão quando não pude dar-lhes a devida atenção, devido os longos dias de estudos.

A subsecretária regional de educação de Inhumas, Nanci M. Arataque, por todo suporte fornecido.

Ao meu orientador Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos, pelo seu profissionalismo e sua paciência que me fizeram crescer ainda mais. Aos professores do Programa do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da UFG.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho teve como objetivo principal, sistematizar uma fórmula que fornece o número de permutações caóticas de n objetos por meio do princípio da inclusão e exclusão. Para isso, são desenvolvidas e validadas, ao longo do texto, ferramentas básicas e avançadas da análise combinatória. Há também uma seção destinada a problemas, que podem ser solucionados por meio da fórmula obtida e outra na qual aborda a fórmula da obtenção do número de permutações caóticas por meio de recorrência.

Palavras-chave

Princípio da inclusão e exclusão, Permutações Caóticas.

Abstract

This study aimed to systematize a formula that gives the number of chaotic permutations of n objects by means of the principle of inclusion and exclusion. To do so, are developed and validated, throughout the text, basic and advanced tools of combinatorics. There is also a section devoted to problems which can be solved by the formula outa obtained and in which approaches the formula for obtaining the number of chaotic permutations by means of recurrence.

Keywords

Principle of inclusion and exclusion, Chaotic Permutations.

Sumário

1 Introdução

Grandes matemáticos se destacaram na ciência e tiveram seus nomes marcados na Histótia da Matemática devido à resolução de problemas considerados difíceis, ou até mesmo sem solução, pela sociedade. São muitos os casos, alguns com mais, outros com menos repercução, dependendo da sua importância no campo da pesquisa científica ou acadêmica.

O conhecido como *O último Teorema de Fermat* é um bom exemplo de grande destaque para a matemática, pois a sua solução foi vital para o desenvolvimento da própria matemática. Segundo Simon Singh [1] , Fermat foi um grande resolvedor de problemas e é considerado até hoje como um gênio de sua época. Diz a história que, ao resolver os problemas da tradução do livro *Arithmetica de Diofanto*, Fermat escreveu às margens do livro que ele havia encontrado uma maneira maravilhosa de resolver o problema, mas que a margem do livro era muito estreita para contê-la.

Durante mais de 300 anos este problema intrigou os matemáticos, pois o problema só foi solucionado em 1994 por Andrew Wiles. No entanto, as ferramentas utilizadas por Andrew no final do século passado não estavam disponíveis a Fermat em sua epóca (século XVII) o que coloca em dúvida hoje se o celebre matemático realmente havia encontrado uma solução correta para o último teorema de Fermat.

O que pode ser retirado de interessante desse exemplo para este trabalho, não é o fato do último teorema ter sido resolvido, e sim como ele foi resolvido. Ainda de acordo com Simon Singh [1], não é conhecida nenhuma aplicação deste teorema, no entanto ele toma um valor importante devido às ideias e às ferramentas matemáticas que foram inventadas e desenvolvidas para prová-lo.

É neste sentido que este trabalho foi elaborado, dando importância não apenas a validez de uma proposição, mas, principalmente, na forma com que são justificadas. Na primeira seção, serão apresentadas algumas notações, definições e ferramentas básicas de análise combinatória, tais como: operações entre conjuntos, princípio multiplicativo, permutações, combinação e binômio de Newton.

Na segunda seção são desenvolvidas duas ferramentas avançadas. Inicialmente, o Princípio de inclusão e exclusão, que é demonstrado usando as ferramentas expostas na seção anterior e, logo em seguida, é proposto o estudo das permutações caóticas. Nesta seção, é determinada a fórmula que fornece o número de permutações caóticas de n objetos utilizando as ferramentas básicas da primeira seção e o princípio de indução e exclusão. Na terceira seção são apresentados alguns problemas que possuem suas soluções simplificadas utilizando as ferramentas desenvolvidadas no trabalho.

A quarta seção é destinada a uma outra forma de abordar as permutações caóticas. Nesse caso, serão utilizadas funções de recorrências para explicitar o número de permutações caóticas de n objetos em função de n, sendo essa fórmula demonstrada utilizando o princípio da indução finita.

2 Ferramentas Básicas

Nesta seção serão apresentadas notações de alguns operadores matemáticos e definições básicas da análise combinatória. Estas ferramentas básicas serão necessárias para o desenvolvimento do princípio da inclusão e exclusão, juntamente com a fórmula que fornece o número de permutações caóticas de n objetos, classificados neste trabalho como ferramentas avançadas.

2.1 Operações entre conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *união* de A e B (denotada por $A \cup B$) é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B, isto é, que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos.

Usando notação matemática:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Para o caso geral onde se tem n conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, a união é representada por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } x \in A_n\}$$

Assim como a operação de *união* entre conjuntos, a operação de *intersecção* vale ser destacada.

Dados dois conjuntos A e B, a *intersecção* de A e B (denotada por $A \cap B$) é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B, isto é, que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

Usando notação matemática:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Para o caso geral onde se tem n conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, a intersecção é representada por:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x|x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e ... e } x \in A_n\}$$

Seja A um subconjunto de Ω (conjunto finito). Chama-se de complementar de A o conjunto de elementos que pertencem a Ω e não ao conjunto A e denotaremos por $A^{\complement}$

Usando notação matemática:

$$A^{\complement} = \{x|x \in \Omega \text{ e } x \notin A\}$$

No nosso contexto, cardinalidade significa a quantidade de elementos que o conjunto possui. Assim o conjunto vazio possui cardinalidade zero, o conjunto unitário possui cardinalidade 1, o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, por exemplo, possui cardinalidade 5, já que possui 5 elementos. A cardinalidade de um conjunto A será representada por $n(A)$.

Se dois conjuntos A_1 e A_2 são disjuntos, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Algo que, em breve, nos será muito útil neste trabalho é cardinalidade de um certo conjunto. Veja a seguir, alguns exemplos.

Exemplo 2.1: *Seja A um subconjunto de Ω, então a cardinalidade de $A^{\complement}$ é dada por:*

$$n(A^{\complement}) = n(\Omega) - n(A)$$

De fato, como A é um subconjunto de Ω, temos que os elementos de Ω pertencem a A ou não. Assim, $n(A) + n(A^{\complement}) = n(\Omega)$. Subtraindo $n(A^{\complement})$ dos dois lados da equação obtemos $n(A^{\complement}) = n(\Omega) - n(A)$.

Exemplo 2.2: *Seja A um subconjunto de B e sabendo que suas respectivas cardinalidades são 5 e 13, determinar a cardinalidade de A com relação a B.*

Como $n(A^{\complement}) = n(\Omega) - n(A)$, temos que $n(A^{\complement}) = 13 - 5 = 8$.

2.2 Princípio de Indução Finita

O princípio de indução finita é uma poderosa ferramenta de demonstração formal de propriedades (fórmulas) matemáticas referentes aos números naturais. O princípio de indução diz o seguinte:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa aos números naturais. Suponha que:

- *$P(1)$ é válida;*
- *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.*

Então P(n) é válida para qualquer que seja o número natural n.

Segue abaixo, um exemplo com baixo nível de dificuldade. No entanto, à medida que forem apresentadas outras ferramentas e outros conceitos, veremos o poder desse princípio.

Exemplo 2.3: *Verifique que a soma dos n primeiros números naturais é dada por* $\dfrac{(n+1)n}{2}$.

Devemos mostrar a validez da identidade

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

1º) Para $n = 1$ temos que a identidade é válida, já que

$$P(1) = 1 = \frac{(1+1)1}{2}$$

2º) Suponhamos que $P(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \dfrac{(k+1)k}{2}$ seja verdadeiro e demostremos que a propriedade é válida para $n = k+1$. Somando $k+1$ dos dois lados da hipótese de indução, temos:

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{(1+k)\cdot k}{2}+(k+1)\\
&= \frac{(1+k)\cdot k}{2}+\frac{2\cdot(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}\\
&= \frac{[(1+(k+1)](k+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Assim, a validez de $P(k)$ implica a validez de $P(k+1)$. Logo, fica provado por indução matemática que a identidade é verdadeira.

2.3 Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo, também conhecido como princípio fundamental da contagem, é um princípio combinatório que possibilita contar quantas vezes diferentes um acontecimento (evento) pode ocorrer. O princípio diz o seguinte:

Quando um evento é composto por 2 *decisões sucessivas, de tal forma que as possibilidades da primeira decisão são de* k_1 *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* k_1 *as possibilidades da segunda etapa são de* k_2*, consideramos então que o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto* $k_1 \cdot k_2$.

Exemplo 2.4: *Em um grupo de 5 alunos tem-se que escolher um líder e um vice-líder para um debate. De quantas maneiras diferentes pode ser feita essa escolha?*

Uma maneira de se resolver o problema é enumerar todos os casos e, em seguida, contá-los. No entanto, esse processo é bastante trabalhoso. Usando o princípio multiplicativo, basta analisar quandas possibilidades de decisões temos em cada caso.

Para escolhermos o líder do grupo temos 5 possibilidades diferentes. Após a escolha do líder devemos escolher o vice-líder. Essa segunda escolha pode ser feita de 4 maneiras. Então, pelo princípio multiplicativo temos que há $5 \cdot 4 = 20$ maneiras de fazer tal escolha.

2.4 Permutações Simples

Fatorial é um operador matemático que simplifica o modo de escrever produtos cujos fatores são todos os números interios positivos menores ou igual a n. Assim, a notação $n!$ representa o produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Por exemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Definimos $1!$ e $0!$ sendo igual a 1.

Essa notação nos será muito útil, pois simplifica as fórmulas dos números de permutações e combinação simples.

Exemplo 2.5: *Calcule o valor da expressão* $\frac{30!}{4!26!}$.

Sabemos que $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!$. Sendo assim, podemos simplificar a expressão antes de calcular seu valor:

$$\frac{30!}{4!26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{4!26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4.3.2.1} = 27.405.$$

Permutações simples é uma ordenação de n objetos distintos e P_n representa o número de permutações simples. Assim, dados n objetos distintos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, de quantos modos podemos ordená-los?

Usando o princípio multiplicativo temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar; $n-1$ modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, $n-2$ modos de escolher o objeto que ocupará o terceiro lugar,..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará o útlimo lugar.

Desse modo, podemos concluir que o número de modos de ordenar n objetos distintos é dado por:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = n! = P_n$$

Exemplo 2.6: *De quantas maneiras podemos ordenar as letras da palavra BRASIL?*

Calcular o número de maneiras de ordenar as letras da palavra *BRASIL* é o mesmo que calcular o número de maneiras de permutar as letras *B,R,A,S,I,L*. Assim o problema pode ser resolvido calculando P_n, com $n = 6$, ou seja, $6! = 720$ maneiras distintas.

Exemplo 2.7: *Como seria a resposta do problema anterior caso existisse a exigência de que a letra que ocupe o primeiro lugar seja a letra B?*

Nesse caso, não deveriamos permutar 6 objetos (letras) e sim cinco. A resposta seria, $P_5 = 120$ maneiras distintas.

Exemplo 2.8: *Quantas permutações da palavra BRASIL existem, nas quais a letra B nunca seja a primeira?*

Vimos no exemplo anterior que existem 120 maneiras permutações da palavra *BRASIL* de modo que a letra B ocupe a primeira posição. O que queremos nesse problema são todos as permutações onde a letra B não ocupe o primeira posição. Assim, se considerarmos Ω como sendo o conjunto de todas as possíveis permutações da palavra *BRASIL* e A como sendo o conjunto formado pelas permutações nas quais a letra B ocupa o primeiro lugar, o que queremos é a cardinalidade do complementar de A.

Como $n(A^{\complement}) = n(\Omega) - n(A)$,$n(\Omega) = 6!$ e $n(A) = 5!$, temos que $n(A^{\complement}) = 6! - 5! = 600$.

Portanto, podemos afirmar, que existem 60 permutações possíveis da palavra *BRASIL* que não possuem a letra B ocupando o primeiro lugar.

Outra maneira de resolver o problema seria usar diretamente o princípio multiplicativo. Desse modo, temos que escolher, primeiramente, o lugar para colocarmos a letra

B. Temos ao todo seis lugares, já que a palavra *BRASIL* possui seis letras. Como a letra B não pode ocupar a primeira posição, há 5 lugares que a mesma pode ocupar. Fixada a letra B podemos colocar as outras 5 letras em qualquer uma dos cinco lugares que restaram, o que pode ser feito de P_5 modos. Assim, temos que a resposta esperada é dada por $5 \cdot P_5$, ou seja, 600 maneiras.

As duas maneiras estão corretas, mas a primeira solução utiliza uma combinação de ferramentas que nos poupará esforços com trabalhosos cálculos que vamos nos deparar mais adiante.

Vejamos, agora, um último exemplo desta subseção que servirá como porta de entrada para o estudo das *Permutações Caóticas*.

Exemplo 2.9: *Uma turma de 10 amigos decide brincar de amigo oculto no final de certo ano. Então cada um escreveu o seu nome em um pedaço de papel e colocou-os em uma caixa, misturando-os. Em seguida, cada um dos amigos retirou aleatoriamente um nome da caixinha. Pergunta-se: De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido o sorteio?*

Se o amigo oculto não seguir nenhuma regra o sorteio pode ocorrer de $P_{10} = 10!$ maneiras diferentes, ou seja, há 3.628.800 maneiras.

No entanto, sabemos que nessa dinâmica de trocas de presentes, uma pessoa não pode retirar o seu próprio nome. Como ficaria a solução caso o problema não tivesse omitido essa regra?

Retornaremos à questão mais adiante.

2.5 Combinações Simples

Ainda na seção de ferramentas básicas iremos definir o que é uma combinação simples. Essa ferramenta nos será muito útil.

Combinações simples são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados, com $p \leq n$, e C_n^p nos fornece o número de tais combinações.

Dado um conjunto de n elementos quantos subconjuntos de p elementos, com $p \leq n$, podemos formar?

Pensemos, inicialmente, no caso em que vamos contar quantos subconjuntos de 2 elementos podemos formar à partir de um conjunto de n elementos, com $n \geq 2$.

Tome $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tal conjunto com n elementos. Assim os possíveis subconjuntos dos quais o elemento a_1 pertence são $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, ... , $\{a_1, a_n\}$. O processo pode ser seguido do mesmo modo para os subconjuntos dos quais a_2, a_3 , ... , a_n pertença. Devemos apenas tomar o cuidado de não contar um conjunto mais de uma vez, já que $\{a_1, a_2\}$ é o mesmo que $\{a_2, a_1\}$.

Pensando desse modo, temos pelo Princípio Multiplicativo da Contagem que há n maneiras de se escolher o primeiro elemento e $n-1$ maneiras de se escolher o segundo elemento. Assim teríamos $n \cdot (n-1)$ maneiras possíveis de se fazer tal combinação. No entanto, como já ressaltado acima, devemos nos atentar ao fato de que o que distingue um subconjunto de outro não é a ordem de seus elementos e sim a natureza dos mesmos. Devemos então retirar essas contagens que foram feitas a mais. Para isso, basta dividir $n \cdot (n-1)$ por 2!, já que 2! é o número de ordens diferentes que os *dois* elementos de cada subconjunto podem ser escritos.

No caso geral temos,

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1)}{p!}\ ,\ 0 \leq p \leq n$$

Multiplicando o numerador e o denominador dessa expressão por $(n-p)!$, obtemos uma expressão alternativa e mais prática:

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1) \cdot (n-p)!}{p!(n-p)!}$$

ou ainda,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!},\ 0 \leq p \leq n.$$

Neste trabalho, não será utilizado diretamente o *Triângulo de Pascal* [2], no entanto, existe uma propriedade, conhecida como *Relação de Stifel*, que convém ser explorada, pois pode proporcionar consideráveis simplificações adiante.

Segundo a *Relação de Stifel* [2]

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Sabemos que $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, então trabalhando algebricamente, obtemos

$$\begin{aligned}
C_n^p + C_n^{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1!)} \\
&= \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)![(n+1)-(p+1)]!} \\
&= C_{n+1}^{p+1}.
\end{aligned}$$

2.6 Binômio de Newton

Usando combinações simples, Newton desenvolveu uma fórmula para calcular as potências de binômios [3]. Assim, o desenvolvimento de $(a+b)^n$ é dado por:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } a \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p + \cdots + C_n^n \cdot b^n$$

Provaremos a validade do desenvolvimento atravéz do Princípio de Indução .

1º) Para $n = 1$, temos $(a+b)^1 = a+b$, e consequentemente a fórmula é válida nesse caso.

2º) Suponhamos que a proposição seja válida para n, vamos mostrar que a mesma é válida para $n+1$.

Temos por Hipótese de Indução que:

$$P(n) : (a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p + \cdots + C_n^n \cdot b^n.$$

Observe que

$P(n+1) : (a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$, o que por hipótese de indução implica que $(a+b)^n \cdot (a+b) = (C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots + C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p + \cdots + C_n^n \cdot b^n) \cdot (a+b)$.

Pela propriedade distributiva da multiplicação, temos

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1)a^n b + \cdots + (C_n^p + C_n^{p+1})a^{n-p}b^{s+1} + \cdots + b^{k+1}.$$

Levando em consideração que $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$, obtemos

$$P(n+1) : (a+b)^{n+1} = a^{n+1} + C_{n+1}^1 \cdot a^n \cdot b + \cdots + C_{n+1}^{p+1} \cdot a^{n-p} \cdot b^{p+1} + \cdots + b^{n+1}.$$

3 Ferramentas Avançadas

Na seção anterior foram introduzidos alguns conceitos importantes, tais como: união e intersecção de conjuntos, combinação simples e binômio de Newton. Nessa seção, utilizaremos esses conceitos para estabelecer o número de elementos da união de conjuntos não necessariamente disjuntos. Em seguida, chegaremos ao estudo e análise das Permutações caóticas.

3.1 Princípio da inclusão e exclusão

Considere dois conjuntos A_1 e A_2, não disjuntos; então, a cardinalidade de $A_1 \cup A_2$ é dada por:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) \tag{1}$$

De fato, vimos anteriormente que $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2)$, se A_1 e A_2 forem conjuntos disjuntos; no entanto, se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, teríamos contado, nessa fórmula, os elementos de $n(A_1 \cap A_2)$ duas vezes, por isso devemos retirar essa dupla contagem. Para isso, basta subtrairmos $n(A_1 \cap A_2)$ de $n(A_1) + n(A_2)$.

Exemplo 3.10: *Quantas são as permutações da palavra GOIAS em que G ocupa o primeiro lugar ou a letra O no segundo lugar?*

Primeiro vamos definir os conjuntos:

A_1: conjunto das permutações das letras que começam com G.

A_2: conjunto das permutações das letras nas quais O ocupa o segundo lugar.

Nosso objetivo é encontrar a cardinalidade de $n(A_1 \cup A_2)$. Sabemos que exitem 4! maneiras de permutar a palavra GOIAS, de modo que a letra G ocupe a primeira posição. Assim, temos que a cardinalidade de A_1 é dada por 4!. Para fixar a letra O no segundo lugar há também 4! maneiras. Por último, fixando a letra G em primeiro lugar e a letra O em segundo lugar, resta permutarmos as outras 3 letras, o que pode ser feita de 3! maneiras. Logo, temos que $n(A_1) = 4!$, $n(A_2) = 4!$ e $n(A_1 \cap A_2) = 3!$.

Assim, substituindo em $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$, obtemos

$$n(A_1 \cup A_2) = 4! + 4! - 3!$$

Portanto, há 42 maneiras diferentes de permutar as letras da palavra GOIAS, tendo a letra G em primeiro e a letra O em segundo lugar.

Mas, o que faríamos se tívessemos que permutar as letras da palavra GOIAS e devessemos fixar três letras?

Bem, seguindo a estratégia utilizada no exemplo anterior teríamos que calcular a cardinalidade da união de três conjuntos A_1, A_2 e A_3.

Caso os conjuntos sejam disjutos, temos:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3).$$

No entanto, observe que estamos somando duas vezes os elementos das intersecções dos conjuntos dois a dois. Assim devemos remover essas dupla contagem, ficando assim:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3).$$

Precisamos, agora, acrescentar $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, pois estes números foram contados 3 vezes em $n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)$ e em $-n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3)$ foram removidos 3 vezes, ou seja, eles não foram contados.

Logo, dados três conjuntos A_1, A_2 e A_3, o número de elementos da sua união, denotado por $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ é dado por:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$
$$n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cup A_3)$$

Vamos agora generalizar para o caso em que buscamos a quantidade de elementos da união de n conjuntos. O Teorema 1 a seguir é conhecido como Princípio da inclusão e exclusão.

Teorema 1. *Dados n conjuntos finitos A_1,A_2,A_3, ... ,A_n, a cardinalidade da sua união, denotada por $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n)$ é dado por:*

$$n\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1\leq i<j}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$
$$\sum_{1\leq i<j<k<p}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \qquad (2)$$

Demonstração: Devemos mostrar que um elemento x qualquer na união $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ é contado uma única vez.

Se x pertence a m dos conjuntos A_1,A_2,$A_3, \ldots, A_n$, temos que x é contado

- C_m^1 vezes em $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n(A_i)$;
- C_m^2 vezes em $\displaystyle\sum_{1\leq i<j}^{n} n(A_i \cap A_j)$;
- C_m^3 vezes em $\displaystyle\sum_{1\leq i<j<k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$;

e assim sucessivamente até o último termo que fornece a intersecção dos n conjuntos, onde x é contado C_m^m. Assim, temos que o número de vezes que x é contado do lado direito da fórmula (2) é dado por

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - C_m^4 + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m = \sum_{p=1}^{m} (-1)^p C_m^p.$$

O valor dessa expressão fica simples de ser calculado se usarmos como ferramenta o desenvolvimento do Binômio de Newton, $(a+b)^m = \displaystyle\sum_{p=0}^{m} C_m^p \cdot a^p \cdot b^{m-p}$, para $a = -1$ e $b = 1$:

$$(-1+1)^m = C_m^0 \cdot (-1)^0 \cdot 1^m + C_m^1 \cdot (-1)^1 \cdot 1^{m-1} + C_m^2 \cdot (-1)^2 \cdot 1^{m-2} + \cdots + C_m^m \cdot (-1)^0 \cdot 1^m$$

de onde concluímos que

$$0 = C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \cdots + (-1)^m C_m^m.$$

Multiplicando os dois lados da última igualdade por (-1) temos que

$$-C_m^0 + C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m = 0;$$

que pode ser escrito da forma

$$-C_m^0 + \sum_{p=1}^{m} (-1)^p C_m^p = 0,$$

ou seja,

$$-1 + \sum_{p=1}^{m} (-1)^p C_m^p = 0.$$

Logo, fica provado que:

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^p C_m^p = 1.$$

Isto significa que o elemento x foi contado uma única vez na união dos conjuntos A_1,A_2,$A_3, \ldots, A_n$.

Antes de passarmos para a próxima seção, vejamos mais alguns exemplos nos quais o princípio da inclusão e exclusão é bastante útil.

Exemplo 3.11: *Qual o número de permutações dos elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, nas quais a_1 está em primeiro lugar, ou a_2 está em segundo lugar ou a_3 está em terceiro lugar?*

Consideremos os seguintes conjuntos

A_1: conjunto das permutações em que a_1 está em primeiro lugar;

A_2: conjunto das permutações em que a_2 está em segundo lugar;

A_3: conjunto das permutações em que a_3 está em terceiro lugar;

Para solucionar o problema devemos determinar $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Pelo Princípio da inclusão e exclusão sabemos que

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$
$$n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cup A_3).$$

Além disso, $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = (n-1)!$, já que em cada um dos casos fixamos um elemento e permutamos os outros $n-1$.

Podemos afirmar que $n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = (n-2)!$, já que fixamos em cada caso dois elementos e permutamos os outros $n-2$.

Por último, resta calcularmos $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, ou seja, queremos o número de permutações nas quais fixamos 3 elementos e permutamos os outros $n-3$, que resulta em $(n-3)!$. Logo, o número que procurávamos é igual a:

$$\begin{aligned}
n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + \\
&+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= (n-1)! + (n-1)! + (n-1)! - (n-2)! - (n-2)! - (n-2)! + \\
&+ (n-3)! \\
&= 3 \cdot (n-1)! - 3 \cdot (n-2)! + (n-3)!
\end{aligned}$$

Vamos modificar um pouco o problema que acabou de ser solucionado. Este exemplo dará suporte para compreender o que são permutações caóticas, que serão definidas na próxima subseção.

Exemplo 3.12: *Qual o número de permutações simples dos elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, nas quais a_1 não está em primeiro lugar, ou a_2 não está em segundo lugar ou a_3 não está em terceiro lugar?*

Considerando os conjuntos:

A_1: conjunto das permutações em que a_1 está em primeiro lugar;

A_2: conjunto das permutações em que a_2 está em segundo lugar;

A_3: conjunto das permutações em que a_3 está em terceiro lugar;

temos que a solução do problema é o número de elementos do complementar da união de A_1, A_2 e A_3, ou seja, $n\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^{\complement}\big)$.

Seja Ω o conjunto formado por todas as permutações possíves de n elementos. Como $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ é um subconjunto de Ω podemos afirmar que:

$$n\Big((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^{\complement}\Big) = n(\Omega) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3).$$

Como $n(\Omega) = P_n = n!$ e pelo princípio da inclusão e exclusão sabemos que $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot (n-1)! - 3 \cdot (n-2)! + (n-3)!$, concluímos que

$$\begin{aligned} n\Big((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^{\complement}\Big) &= n(\Omega) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= n! - (3 \cdot (n-1)! - 3 \cdot (n-2)! + (n-3)!). \end{aligned}$$

3.2 Permutações Caóticas

Uma permutação é dita caótica quando permutamos n objetos e nenhum deles ocupa a posição primitiva. Assim, se representarmos por $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto de n elementos, temos uma permutação caótica quando nenhum dos a_i*'s* se encontram na posição original, isto é, na i-ésima posição. Denotaremos por D_n o número de permutações caóticas de n elementos.

Se considerarmos Ω : conjunto de todas as permutações possíveis e A_i : conjunto das permutação de $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ em que o número i ocupa o i-ésimo lugar, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, temos que o número de permutações caóticas é dado por

$$D_n = n(\Omega) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n).$$

Como $n(\Omega) = n!$ e $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n)$ pode ser determinado usando o princípio da inclusão e exclusão, o número de permutações caóticas de n elementos fica simples de ser calculado.

O princípio de inclusão e exclusão nos diz que

$$n\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1\leq i<j}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$$
$$- \sum_{1\leq i<j<k<p}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n).$$

Calculando cada parcela da soma acima, temos

- $S_1 = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-1)!$ e como existem C_n^1 termos nessa soma,

$$S_1 = n \cdot (n-1)! = n!$$

- $S_2 = \sum_{1 \leq i<j}^{n} n(A_i \cap A_j) = \sum_{1 \leq i<j}^{n} (n-2)!$ e como existem C_n^2 termos nessa soma,

$$S_2 = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

- $S_3 = \sum_{1 \leq i<j<k}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) = \sum_{1 \leq i<j<k}^{n} (n-3)!$ e como existem C_n^3 termos nessa soma,

$$S_3 = C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}$$

$\dots$

$$S_n = C_n^n \cdot (n-n)! = \frac{n!}{n!}$$

Assim, $n\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = S_1 - S_2 + S_3 + \cdots + (-1)^{(n-1)} S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-1} S_n$.

Substituindo os valores de S_n determinados, temos que

$$n\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \;=\; \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 1$$

Portanto, o número de permutações caóticas é dado por:

$$\begin{aligned}
D_n &= n(\Omega) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\right) \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \\
&= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Assim, se temos um único elemento a_1 é claro que não há nenhuma permutação. Por (3), temos

$$D_1 = 1!\left(1 - \frac{1}{1!}\right) = 0.$$

Caso tenhamos dois objetos a_1 e a_2, há apenas uma maneira de permutá-los de modo que nenhum deles ocupe a posição inical, que é a_2a_1. Usando a fórmula (3) temos

$$D_2 = 2!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = 2! \cdot \frac{1}{2!} = 1.$$

Para três objetos a_1, a_2 e a_3 ainda é fácil de enumerar sua permutações caóticas. Elas são: $a_2a_3a_1$ e $a_3a_1a_2$, ou seja, há 2 modos de fazer tais permutações, como podemos também verificar pelos cálculos a seguir.

$$D_3 = 3!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\Big) = 3!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\Big) = \frac{3!}{2!} - \frac{3!}{3!} = 2$$

Quanto maior o número de objetos a serem permutados a enumeração de cada uma das permutações vai se tornando mais complexa e trabalhosa. Por isso, quando for necessário apenas a quantidade de permutações caóticas de um conjunto de objetos, e isso é o que mais ocorre, usamos a fórmula de D_n.

4 Aplicações

Nesta seção, utilizaremos as ferramentas anteriormente expostas para resolver com facilidade problemas que envolvem a teoria de permutações caóticas. Alguns dos problemas que serão apresentados são considerados clássicos e bastantes conhecidos. Claro que os problemas que serão propostos podem ser todos resolvidos sem o uso da fórmula de D_n, mas caso essa opção seja escolhida a solução dos mesmos pode se tornar não apenas trabalhosa, como também exaustiva.

Problema 4.14: *Quantas são as permutações dos inteiros* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *que possuem exatamente 3 dos números no seu lugar primitivo?*

Se não usassemos a fórmula de D_n o processo de resolução desse problema seria, sem dúvida, bastante extenso, já que deveriam ser enumerados todos os casos e em seguida contá-los. No entanto, associando o princípio mutiplicativo com a fórmula de D_n o resultado torna-se consideravelmente mais simples.

Como 3 dos oito números devem ser fixados em suas posições iniciais, somente os outros cinco números devem ser permutados. Usando a fórmula (3), temos que $D_5 = 5!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$, ou seja, 5 números podem ser permutados de 44 maneiras. Mas, ainda não terminamos. Quais foram os três números fixados? Devemos ainda escolher entre os oito números três que serão fixados. Isso pode ser feito de C_8^3 maneiras. Então, pelo princípio multiplicativo temos que há $C_8^3 \cdot 44 = 2.464$ maneiras distintas de fazer tal permutação.

Problema 4.15: *Qual o número de permutações caóticas das letras abcdefghij nas quais as letras a,b,c,d,e ocupam, em alguma ordem, os cinco primeiros lugares?*

Se as letras a, b, c, d, e, devem estar entre as cinco primeiros lugares, mas não podem ocupar a posição original, isto significa que as outras 5 letras f, g, h, i, j, devem estar entre as cinco últimos lugares.

Sabendo que 5 objetos podem ser permutados de $D_5 = 44$ maneiras, temos pelo princípio multiplicativo, que para cada permutação caótica formada pelas cinco primeiras letras há 44 formas distintas de permutar as outras 5 letras, o que é equivalente a $44 \cdot 44$, totalizando 1.936 formas distintas de permutar essas letras.

Problema 4.16: *Quantos são os anagramas da palavra BRASIL nas quais nenhumas das letras ocupem a posição original?*

O problema é bem simples de se resolver utilizando a fórmula de D_n que temos como ferramenta. Basta calcular D_6, que é igual a 265 permutações caóticas.

Vejamos agora o último problema deste trabalho.

Problema 4.17: *De quantas maneiras distintas pode-se colocar n cartas,em n envelopes, endereçados a destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto?*

Segundo Garbi [6], esse problema é considerado uma pérola da combinatória. Ele foi inicialmente proposto Niclaus Bernoulli (1687-1759) e ficou conhecido como *o problema das cartas mal endereçadas.* Mais tarde, Leonard Euler (1707-1783), como sendo o grande resolvedor de problemas que era, se interessou pelo problema e propôs uma solução engenhosa e surpreendente.

Esse problema abriu portas para o estudo de novos campos de pesquisa matemática. Hoje, o problema se apresenta com um contextualização diferente, mas com a mesma essência, sendo conhecido como *O problema do amigo oculto*:

De quantas maneiras pode ocorrer um sorteio da brincadeira conhecida como amigo oculto de modo que nenhuma pessoa retire o seu póprio nome?

Independente da forma na qual essa pequena pérola da combinatória aparece, ela é apenas uma das diversas formas na qual pode ser contextualizada, como pode ser observado em [4] e [5]. Trata-se de um problema de *permutações caóticas* que pode ser resolvido até mesmo por alunos de Ensino Médio, após o estudo do princípio da inclusão e exclusão, como foi feito nesse trabalho.

A resposta para este problema é dada por (3):

$$D_n = n!\Big(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big)$$

Isso nos permite responder uma pergunta adicional: *Qual a probabilidade de que ninguém retire o seu próprio nome?*

Considerando, P_n a probabilidade de que ninguém retire seu nome na brincadeira do amigo oculto, temos que

$$P_n = \frac{D_n}{n!},$$

ou seja,

$$P_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Assim, fazendo n variar, encontramos suas respectivas probabilidades, que podem ser observadas à seguir.

n		P_n	
1	0	$=$	$0,000000$
2	$1/2$	$=$	$0,500000$
3	$1/3$	$\approx$	$0,3333333$
4	$3/8$	$=$	$0,3750000$
5	$11/30$	$\approx$	$0,3666667$
6	$53/144$	$\approx$	$0,3680556$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
9	$133.496/9!$	$\approx$	$0,3678919$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
12	$176.214.708/12!$		$0,36787944$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

e assim, por diante.

Um fato muito curioso que pode ser observado é que para valores relativamente baixos de n as probabilidades são aproximadamente iguais. Por exemplo, $P_{12} = 0,36787944$ enquanto que $P_{24} = 0,367879441$. Isso nos induz a dizer que P_n se estabiliza com poucas dezenas, ou seja, P_{12} é aproximadamente igual a $P_{12000000}$. Além disso, assim como pode ser observado em [6], esse número no qual P_n se aproxima é o inverso do conhecido número de *Euler*. Logo, $P_n = e^{-1}$ o que nos permite afirmar que a probabilidade que o sorteio do amigo oculto ocorra com sucesso é de 37%, estando já bem perto desse valor a partir de 5 pessoas.

5 Outra Forma de Abordar as Permutações Caóticas

Uma característica muito interessante e valiosa da matemática é a possibilidade de chegar a um mesmo resultado, usando diferentes caminhos. Nesta seção será aboradada uma outra maneira de obter D_n em função de n. O processo que será desenvolvido é similar ao utilizado pelo matemático *Leonard Euler*, por meio dos Princípios Multiplicativo e Aditivo.

Relembremos que nosso objetivo é encontrar o número de permutações de n objetos de modo que nenhum deles ocupe sua posição primitiva. Desse modo, o que queremos é permutar n objetos ordenados, $a_1a_2a_3 \cdots a_n$ de modo que nenhum deles ocupe sua posição inicial.

Quando $n = 1$, temos que não é possível fazer tal permutação, pois não existe forma de permutá-lo. Assim, usando notação matemática, $D_1 = 0$. Para $n = 2$, temos que a única maneira de fazer a permutação de modo que nenhuma dos objetos ocupe a posição inicial é a_2a_1. Assim, $D_2 = 1$. Continuando o processo podemos calcular casos particulares tais como: $D_3 = 2$, $D_4 = 9$ e $D_5 = 44$.

No entanto, para $n > 5$ o processo de contagem das permutações torna-se trabalhoso, sendo preciso deduzir matematicamente qual a lei de formação de D_n. Pelo princípio multiplicativo, temos que há $n - 1$ objetos possíveis para ocupar o primeiro lugar de uma permutação favorável, pois a_1 não pode ocupar sua posição inicial. Suponhamos que o primeiro objeto seja a_2. Assim, há duas alternativas para continuar a resolução do problema. Se o objeto que ocupar a segunda posição for a_1 então é preciso rearranjar os outros $n - 2$ objetos. E retornamos ao problema inicial reduzido de dois objetos, sendo possível fazê-lo de D_{n-2} maneiras.

A outra alternativa é que o objeto que ocupe a segunda posição não seja a_1. Nesse caso, devemos permutar $n - 1$ objetos à direita de a_2, sendo que a_3 não pode ocupar a terceira posição, a_4 não pode ocupar a quarta posição e assim por diante até o objeto a_n. Temos ainda que a_1, nessa alternativa, não pode ocupar a segunda posição. Logo, o que devemos fazer é desarranjar $n-1$ objetos, sendo possível fazê-lo de D_{n-1} maneiras.

Como as permutações formadas pelas regras das duas alternativas acima não possuem todos os elementos comuns, concluímos que são permutações distintas. Assim, pelo princípio aditivo, existem $D_{n-1} + D_{n-2}$ maneiras de permutar os n objetos com a_2 ocupando a primeira posição. De fato, temos que o há $n-1$ objetos que podem ocupar a primeira posição, o que nos leva a concluir, pelo princípio multiplicativo, que

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}].$$

Chegamos então, a uma fórmula de recorrência que possibilita encontrar o número de permutações caóticas de n objetos; no entanto, ela não fornece D_n em função só de n.

Desenvolvendo essa fórmula de recorrência encontramos

$$D_n = nD_{n-1} + nD_{n-2} - D_{n-1} - D_{n-2},$$

o que implica em

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}].$$

Assim, para qualquer $n > 2$, inteiro, tem-se

$$\begin{aligned}
D_3 - 3D_2 &= -(D_2 - 2D_1) \\
D_4 - 4D_3 &= -(D_3 - 3D_2) \\
D_5 - 5D_4 &= -(D_4 - 3D_3) \\
&\cdots \\
D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}].
\end{aligned}$$

Multiplicando-se, membro a membro, essas $n-2$ igualdades, obtemos

$$(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)(D_5 - 5D_4)\cdots(D_n - nD_{n-1}) =$$

$$(-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)(D_3 - 3D_2)(D_4 - 3D_3)\cdots[D_{n-1} + (n-1)D_{n-2}].$$

Observe que, cancelando os fatores comuns, temos

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

Sabendo que $D_2 = 1$, $D_1 = 0$ e que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, obtemos uma forma mais simples da equação acima:

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n;$$

ou ainda,

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
D_3 &= 3D_2 + (-1)^3 = 3 - 1 = 3!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\Big) \\
D_4 &= 4D_3 + (-1)^4 = 4\Big[3!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\Big)\Big] + 1 = 4!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\Big) \\
D_5 &= 5D_4 + (-1)^5 = 5\Big[4!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\Big)\Big] - 1 = 5!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\Big) \\
D_6 &= 6D_5 + (-1)^6 = 6\Big[5!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\Big)\Big] + 1 = 6!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\Big)
\end{aligned}$$

Esses cálculos nos induzem a afirmar que

$$D_n = n!\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big).$$

Utilizando o Princípio de indução finita, vamos demonstrar que essa fórmula é válida, não só para $n \geq 3$, mas para $n \geq 2$.

De fato, temos que para $n = 2$, $D_2 = 2!\Big(\dfrac{1}{2!}\Big) = 1$. Assim, a base de indução é verdadeira.

Seja $D_n = n!\Big(\frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big)$ nossa Hipótese de Indução; vamos demontrar a validez de D_{n+1}. De fato, como

$$D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1},$$

então, substituindo a Hipótese de Indução nessa identidade, temos

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= (n+1).\left[n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\right] + (-1)^{n+1} \\ &= (n+1)!\left(+ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right). \end{aligned}$$

Agora, não nos resta dúvida sobre a validez da fórmula de D_n, para $n \geq 2$. Mas, para termos uma fórmula mais geral, vamos somar e também subtrair 1 unidade dentro dos parênteses. Assim, ficaremos com a forma mais prática da fórmula que fornece o número de permutações caóticas de n objetos, para $n \geq 1$:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

6 Considerações finais

Com esse trabalho foi possível perceber que, na construção do conhecimento matemático, o importante não está restrito apenas ao resultado final que se obtêm, e sim em todo o decorrer desse processo, pois é durante esse processo que ocorre a produção do conhecimento matemático.

Por isso, considero que este trabalho serve de suporte para estudantes, desde o ensino médio, que estejam interessados em aprimorar e aprofundar seus conhecimentos em análise combinatória. Além disso, as idéias aqui propostas, servem também como estímulo para novos estudos relacionados ao tema, sendo possível, por exemplo, serem realizadas pesquisas sobre probabilidade e a relação do problema do amigo oculto com o conhecido número de Euler [4], ou até mesmo desenvolver outras formas de abordar as permutações caóticas [5].

Do ponto de vista didático, afirmo com propriedade, que é muito comum que alunos do ensino médio resolvam problemas mecanicamente, utilizando ora a fórmula de permutação, ora arranjos e ora combinações. Não vejo erro em utilizar fórmulas, pelo contrário devemos buscar padrões e instigar conjecturas, no entanto, se os problemas propostos aos alunos for demasiadamente prendido ao simples cálculo envolvido em cada um dos casos, o processo de aprendizagem pode ser comprometido. Os problemas que foram resolvidos neste trabalho, em sua maioria, são uma composição de todos os casos possíveis, sendo necessário dividí-los em subproblemas.

Desse modo, enquanto professor e pesquisador, termino este trabalho acreditando que é preciso estimular a descoberta, pois dessa forma é possível resgatar o prazer pelo pensar matemático que está além do conceito matemático.

Referências

[1] SINGH, S. **O último Teorema de Fermat**. Tradução: Jorge Luiz Calife. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

[2] SANTOS, J. P. de O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C., **Introdução à análise combinatória**. 3 ed. São Paulo: Unicamp, 2002.

[3] MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 5 reimpressão, 1991.

[4] MOREIRA, C. G. T. de A. Amigo Oculto. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, SP: USP. v. 15, p. 37-39, 1992.

[5] CARNEIRO, J. P. Q. Uma pequena pérola de Euler. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, SP: USP, v. 28, p. 21-26, 1995.

[6] GARBI, G. O problema do amigo oculto. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, SP: USP, v. 50, p. 15-19, 2002.