Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Uma Introdução ao Estudo das Funções Matriciais

Rogério Sullyvan e Silva

Goiânia

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Rogério Sullyvan e Silva					
E-mail:	rogeriosullyvan@gmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor		Secretaria Estadual de Educação do Estado de Goiás				
Agência de fomento:		Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	**00.889.834/0001-08**	
Título:	Uma Introdução ao Estudo das Funções Matriciais					
Palavras-chave:	Matrizes, funções, polinômio					
Título em outra língua:	An Introduction to the Study of Matrix Functions					
Palavras-chave em outra língua:	Matrices, functions, polynomial					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	07/03/2014					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional					
Orientador (a):	Mário José de Souza					
E-mail:	mario_jose_souza@ufg.br					
Co-orientador (a):*	--					
E-mail:	--					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Rogério Sullyvan e Silva

Uma Introdução ao Estudo das Funções Matriciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

Silva, Rogério Sullyvan.
S586i Uma Introdução ao Estudo das Funções Matriciais [manuscrito] / Rogério Sullyvan e Silva. - 2014.
46 f.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
Bibliografia.
1. Funções (matemática) 2. Matrizes (matemática) 3. Polinômio I. Título.

CDU: 517.5

Rogério Sullyvan e Silva

Uma Introdução ao Estudo das Funções Matriciais

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 07 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Rui Seimetz

Prof. Dr. Rui Seimetz
Departamento de Matemática-UnB

Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Rogério Sullyvan e Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG. Atualmente é professor da Rede Pública Estadual de Goiás.

Dedico esse trabalho a minha família e em especial a minha amada esposa Mirian Marques dos Anjos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a Universidade Federal de Goiás, ao professor Jesus Mota e a todos que contribuíram no decorrer deste curso, em especial ao professor Mário José pela orientação, aos meus amigos Neydiwan e Ronaldo pelo apoio nos momentos tensos do curso, aos meus familiares e a minha esposa Mirian pelo apoio e por acreditarem no sucesso deste trabalho. Agradeço ainda a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Em algumas áreas da matemática é de grande importância definir funções matriciais e as funções mais utilizadas são os polinômios de matrizes quadradas. Avaliar um polinômio em matrizes quadradas é só uma questão de substituir as potências da matriz considerando a constante do polinômio como um múltiplo da matriz identidade. Neste trabalho serão estudadas as seguintes funções matriciais: exponencial, seno e cosseno.

Palavras-chave

matrizes, funções, polinômio.

Abstract

In some areas of mathematics is of great importance to define matrix functions and frequently used functions are polynomials of square matrices. Evaluate a polynomial in square matrices is just a matter of replacing the powers of the matrix considering the constant of the polynomial as a multiple of the identity matrix. In this work the following matrix functions will be studied: exponential, sine and cosine.

Keywords

matrices, functions, polynomial.

Sumário

1 Introdução

Os conteúdos de matemática do ensino médio são a base para o estudo da mesma no ensino superior. Esse estudo é importante, uma vez que a matemática é utilizada nas mais diversas áreas da ciência. As aplicações da matemática, embora tão amplas e importantes, muitas vezes são ignoradas por parte dos alunos. Isso se dá, pelo pouco interesse em conhecer a disciplina e também pela maneira que os conteúdos são apresentados, sem mostrar suas possíveis aplicações. Diante disso, temos as matrizes que são fundamentais para o estudo de Álgebra Linear e por isso, são utilizadas em várias áreas do conhecimento como a economia, engenharias e na informática, visto que as matrizes podem ser utilizadas para representar transformações lineares.

No ensino médio aprendemos calcular o seno, cosseno e a exponencial de um número real, mas será que é possível calcular o seno, cosseno e a exponencial de uma matriz quadrada?

Neste trabalho mostraremos que sim. Apresentaremos um método para calcular seno, cosseno e exponencial de matrizes quadradas de ordem 2. Ainda iremos responder a seguinte pergunta: Se existe seno e cosseno de uma matriz quadrada A, a relação fundamental é válida, isto é, $sen^2 A + \cos^2 A = I$?

O presente trabalho se destina a mostrar que o estudo de matrizes é bem mais amplo do que é abordado no ensino médio, ou seja, além de somar, multiplicar e calcular determinantes de matrizes, existem várias funções de matrizes, tais como: exponencial, seno e cosseno.

Apresentaremos no Capítulo 2 um breve resumo sobre matrizes, através da definição de matriz, suas classificações, operações e suas propriedades e ainda determinantes. No Capítulo 3 mostraremos todo o processo de diagonalização de uma matriz. Já no Capítulo 4 serão apresentados os conceitos básicos de derivada, polinômio de Taylor e polinômio de Maclaurin que serão de grande importância para o desenvolvimento desse trabalho. Nos Capítulos 5 e 6 mostraremos um método de cálculo de exponencial, seno e cosseno de matrizes quadradas e por fim responderemos a pergunta se a relação fundamental e válida para matrizes quadradas.

2 Matrizes

Neste Capítulo faremos um breve resumo sobre matrizes, com a definição de matriz, suas classificações, operações e suas propriedades.

Definição 1: *Denominamos matriz do tipo* m x n *(*$m \in \mathbb{N}^*$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$ *) a toda tabela composta por* $m.n$ *elementos dispostos em* m *linhas e* n *colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Lê-se : Matriz A dos elementos a_{ij} de ordem m x n.

Observações:

· Podemos também escrever $A = (a_{ij})_{mxn,}$ como $A = [a_{ij}]_{mxn,}$ e $A = \|a_{ij}\|_{mxn}$.

· Sendo $A = (a_{ij})$, onde a_{ij} é um elemento genérico de A, devemos ter $1 \leq \ i \leq m$ e $1 \leq \ j \leq n$.

2.1 Elementos de uma Matriz

Os elementos de uma matriz genérica A são localizados de acordo com a linha e coluna que compõem esta referida matriz . Desta forma foi adotada a letra minúscula a para designar o elemento e i, j para localizar a linha e coluna, respectivamente, sendo i e j números naturais diferentes de zero. Logo, dada a matriz A, temos:

$$A = (a_{ij})_{mxn}$$

onde: · A = Matriz A

· a_{ij} = elemento situado na linha i e coluna j, com $i, j \in \mathbb{N}^*$.

· m x n = ordem da matriz.

2.2 Classificação de Matrizes

a) Matriz Unitária: São todas as matrizes que possui apenas um elemento, isto é, $m = n = 1$, $[a_{11}]$

b) Matriz Linha: São todas as matrizes $A_{1\text{x}n}$.

c) Matriz Coluna: São todas as matrizes $A_{m\text{x}1}$.

d) Matriz Nula ($O_{m\text{x}n,}$): São todas as matrizes $A_{m\text{x}n}$, onde qualquer a_{ij} é sempre igual a zero.

e) Matriz Retangular: São todas as matrizes $A_{m\text{x}n}$, onde $m \neq n$.

f) Matriz Quadrada: São todas as matrizes $A_{m\text{x}n}$, onde $m = n$. Neste caso dizemos que a matriz é de ordem n.

Observação: Toda matriz quadrada possui duas diagonais (principal e secundária).

A diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n é o conjunto dos elementos que tem os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij}|i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}.$$

A diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n é o conjunto dos elementos que tem soma dos índices igual a $n+1$, isto é:

$$\{a_{ij}|i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}\}.$$

2.2.1 Matrizes Especiais

Existem matrizes que apresentam maior utilidade, por esse motivo, recebem um nome especial. São elas:

a) Matriz Diagonal: A matriz $A = (a_{ij})_{m\text{x}n}$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, ou seja, é aquela que tem todos os elementos nulos fora da diagonal principal.

Exemplo 1. *Matriz Diagonal*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) Matriz Unidade ou Identidade: É toda matriz quadrada de orden n, indicada por $I_n = (a_{ij})_{n\text{x}n}$, de modo que os elementos da diagonal principal ($i = j$) são iguais a 1 (unidade) e todos os demais são nulos, ou seja:

$$I_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

c) Matriz Triangular: É toda matriz quadrada de orden n, em que os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos (zero), isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ou $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplo 2. *Matriz triangular inferior*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3. *Matriz triangular superior*

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Operações com Matrizes

Adição de Matrizes: Sejam duas matrizes, $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$. A soma destas matrizes resulta em uma matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ de modo que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Assim, temos:

$$A + B = C.$$

Exemplo 4. *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 6+(-2) \\ 3+7 & -9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da Adição de Matrizes:

Sendo A, B e C matrizes mxn, teremos as seguintes propriedades da soma de matrizes.

a) Comutatividade:

$$A + B = B + A.$$

b) Associatividade:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

c) Elemento Neutro:

$$O + A = A + O = A.$$

d) Elemento Oposto:

$$A + (-A) = (-A) + A = O.$$

Multiplicação de um número real por uma Matriz:

Dado um número real k e uma matriz A do tipo mxn, o produto de k por A é uma matriz B, do tipo mxn, obtida pela multiplicação de cada elemento de A por k, ou seja, $b_{ij} = ka_{ij.}$

$$B = k \cdot A$$

Exemplo 5. *A matriz B, obtida pela multiplicação de 2 por A é*

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de Matrizes:

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jk})_{nxp}$ o produto de A por B, resulta na matriz $C = (c_{ik})_{mxp}$ de modo que cada elemento

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Exemplo 6. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. *A matriz* $C = A \cdot B$ *é*

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes:

a) Associativa:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

b) Distributiva com relação à adição:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

c) Elemento Neutro:

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

d) Matriz Inversa: Dada uma matriz A quadrada, de ordem n, se existir uma matriz B, de mesma ordem, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Dizemos que B é a matriz inversa de A e escrevemos $B = A^{-1}$

2.3 Determinantes

A seguir é apresentado o conceito de determinante de uma matriz quadrada A necessário para o desenvolvimento do trabalho e para mais detalhes sobre o assunto, as referências [1], [6], e [8] são indicadas.

2.4 Classe de uma permutação

De acordo com [3] e [7], uma permutação das letras a, b e c do nosso alfabeto é a própria ordem

$$a \quad b \quad c$$

e outras permutações das letras a, b e c são: acb, cab, bac, cba e bca.

Definição 2: *Seja $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de inteiros de 1 a n, ordenados de maneira ascendente. A reordenação $j_1 j_2 \ldots j_n$ dos elementos de S é chamada de permutação de S. Podemos considerar uma permutação de S como sendo uma função bijetora de S em si mesmo.*

Para obtermos permutações, podemos colocar qualquer um dos n elementos de S na primeira posição, qualquer um dos $n-1$ elementos remanescentes na segunda posição, qualquer um dos $n-2$ elementos remanescentes na terceira posição, e assim até a $n-ésima$ posição, que pode ser preenchida pelo último elemento. Dessa maneira, há $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ permutações de S.

Representamos o conjunto de todas as permutações de S por S_n. Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma inversão se estão em ordem inversa à da permutação principal. Assim, na permutação dada acb, os elementos c e b formam uma inversão. Daí, uma permutação é de classe par ou de classe ímpar, conforme apresente um número par ou ímpar de inversões. Portanto, acb é de classe ímpar, pois possui apenas uma inversão. Se uma permutação é de classe par atribuiremos a ela o sinal de $+$ e se ela for de classe ímpar o sinal de $-$.

Exemplo 7. *S_1 tem apenas uma permutação, logo é par pois não há inversões.*

Exemplo 8. *Na permutação de 4321 em S_4, 4 precede 3, 4 precede 1, 4 precede 2, 3 precede 1 e 3 precede 2 e 2 precede 1. Dessa maneira, o número de inversões nessa permutação é 6, que é par.*

2.5 Tabelas de permutações

2.5.1 Tabela referente às permutações dos números 1 e 2

O total de permutações dos números 1 e 2 é $P_2 = 2! = 2$. Logo, podemos formar a Tabela 1.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
12	12	0	par	$+$
12	21	1	ímpar	$-$

Tabela 1: Permutações dos números 1 e 2.

2.5.2 Tabela referente às permutações dos números 1, 2 e 3

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é $P_3 = 3! = 6$. Logo, podemos formar a Tabela 2.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
123	123	0	par	$+$
123	132	1	ímpar	$-$
123	312	2	par	$+$
123	213	1	ímpar	$-$
123	231	2	par	$+$
123	321	3	ímpar	$-$

Tabela 2: Permutações dos números 1, 2 e 3.

2.5.3 Determinante de uma matriz

Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices dos elementos da diagonal principal da matriz, fixados os primeiros, e fazendo-se preceder os produtos do sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar. De maneira formal, temos.

Definição 3: *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Define-se o determinante de A, indicado por* $\det(A)$*, por*

$$\det(A) = \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

em que o somatório envolve todas as permutações $j_1 j_2 \dots j_n$ do conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. O sinal de $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ é + ou − conforme a permutação $j_1 j_2 \dots j_n$ é par ou ímpar.

Exemplo 9. *Se A é a matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, teremos somente a permutação principal. Assim,* $\det(A) = a_{11}$.

Exemplo 10. *Se A é a matriz de ordem 2,* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, *temos duas permutações em $S_2 : j_1$ e j_2, sendo que a primeira é par e a segunda é ímpar, conforme a Tabela 1. Assim, vamos proceder da seguinte forma:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1 e 2 conforme Tabela 1.

$$a_1 \;\; a_2 \qquad\qquad a_1 \;\; a_2$$

2º) Colocar nas duas expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 12 e 21, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$a_{11} \;\; a_{22} \qquad\qquad a_{12} \;\; a_{21}$$

3º) Fazer preceder cada um dos dois produtos assim formados dos sinais + ou −, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 1.

$$+a_{11} \;\; a_{22} \qquad\qquad -a_{12} \;\; a_{21}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo 11. *Se A é a matriz de ordem 3,* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, *temos seis permutações em $S_3 : j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$, com seus respectivos sinais, conforme a Tabela 2. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, temos:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1, 2 e 3 conforme Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 \\ a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 \end{array}$$

2º) Colocar, nas seis expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 123, 132, 312, 213, 231 e 321, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \; a_{22} \; a_{33} & a_{11} \; a_{23} \; a_{32} & a_{13} \; a_{21} \; a_{32} \\ a_{12} \; a_{21} \; a_{33} & a_{12} \; a_{23} \; a_{31} & a_{13} \; a_{22} \; a_{31} \end{array}$$

3º) Fazer preceder cada um dos seis produtos assim formados dos sinais $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} +a_{11} \; a_{22} \; a_{33} & -\, a_{11} \; a_{23} \; a_{32} & +\, a_{13} \; a_{21} \; a_{32} \\ -a_{12} \; a_{21} \; a_{33} & +\, a_{12} \; a_{23} \; a_{31} & -\, a_{13} \; a_{22} \; a_{31} \end{array}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

que pode ser escrita como

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3 Diagonalização de Matrizes

Começaremos definindo vetores linearmente independentes (LI), transformação linear e operador linear. Para maiores detalhes sugerimos [1] e [8] .

Definição 4: Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são LI, se a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Definição 5: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma aplicação de V em W, $f : V \to W$ que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam u e v em V,

$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$f(kv) = kf(v)$$

Observação: Um operador linear sobre V é uma transformação linear $f : V \to V$ (é o caso particular de $W = V$).

Uma relação entre matrizes que é muito importante no estudo de operadores lineares e que também se torna importante no estudo de autovalores é a relação de semelhança de matrizes.

Definição 6: *Sejam A e B matrizes n x n. Dizemos que B é semelhante a A, se existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.*

Definição 7: *Uma matriz A_{nxn} é dita diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.*

Em outras palavras, uma matriz A_{nxn} é diagonalizável se existem matrizes P_{nxn} (invertível) e D_{nxn} (diagonal) tal que $A = PDP^{-1}$.

Assim, sendo

$$P = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

como

$$A = PDP^{-1}$$

multiplicando P em ambos os lados, teremos

$$AP = PDP^{-1}P$$

como

$$P^{-1}P = I$$

e I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, então

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ A \cdot [v_1\ v_2 \cdots v_n] &= [v_1\ v_2 \cdots v_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ [Av_1\ \ Av_2\ \ \cdots\ \ Av_n] &= [\lambda_1 v_1\ \ \lambda_2 v_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n v_n] \end{aligned}$$

igualando,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

Por definição, dada uma matriz A_{nxn}, um escalar λ é chamado autovalor e um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ é chamado autovetor de A se $Av = \lambda v$.

Logo, mostramos que se uma matriz A_{nxn} é diagonalizável, ou seja, se existem matrizes P e D tais que $A = PDP^{-1}$ então as colunas de P são autovetores linearmente independentes (LI), pois P é invertível, associados aos autovalores λ_n, que são os elementos da diagonal de D.

Portanto, para determinar se uma matriz A é diagonalizável, precisamos determinar primeiramente seus autovalores e isso pode ser feito da seguinte maneira:

Resolver a equação

$$Av = \lambda v,$$

que é equivalente a

$$Av = \lambda I v$$

ou ainda,

$$Av - \lambda I v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Assim, λ será um autovalor de A, se e somente se, o sistema homogêneo $(A-\lambda I)X = 0$ possuir soluções não triviais. Mas isso acontecerá, se e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. Cuja equação é um polinômio de grau n em λ.

Os autovalores de A são as raízes deste polinômio. Este polinômio é conhecido como polinômio característico de A e denotaremos por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Observação: Para mais informações sugerimos [1].

Exemplo 12. *Vamos determinar os autovalores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Para essa matriz o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(\lambda)$, teremos $p(\lambda) = 0$ assim,

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Logo os autovalores de A são:

$$\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Uma vez encontrados os autovalores da matriz, para encontrar os autovetores basta resolver o sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)X = 0.$$

Assim, para $\lambda_1 = 3$ *temos*

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -2x - y \\ -4x - 2y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Cuja solução geral é

$$v_1 \in \{(\alpha, -2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$*. Analogamente, fazendo o mesmo para* $\lambda_2 = -1$*, encontramos*

$$v_2 \in \{(\alpha, 2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$*.*

Teorema 1: *Sejam* A *e* B *matrizes semelhantes. Então* A *e* B *têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmos autovalores.*

Demonstração: Sendo A e B matrizes semelhantes, existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I)\\
&= \det\left(PAP^{-1}-\lambda PIP^{-1}\right)\\
&= \det(P(A-\lambda I)(P^{-1}))\\
&= \det(P)\det(A-\lambda I)\det(P^{-1})\\
&= \det(A-\lambda I)\\
&= P_A(\lambda).
\end{aligned}
$$

Onde $P_A(\lambda)$ e $P_B(\lambda)$ indicam respectivamente os polinômios característicos das matrizes A e B.

Sendo os polinômios característicos iguais e como os autovalores são as raízes desse polinômio, segue que A e B têm os mesmos autovalores. Assim, podemos ver o conceito de diagonalização de matrizes, que dentre suas aplicações, temos: se uma matriz A é diagonalizável, suas potências são mais fáceis de serem calculadas.

De fato, da equação $A = PDP^{-1}$, temos

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \left(PDP^{-1}\right)^2\\
&= \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\\
&= PD\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}\\
&= PD^2P^{-1};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^3 &= A^2A\\
&= \left(PD^2P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\\
&= PD^2\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}\\
&= PD^3P^{-1}.
\end{aligned}
$$

De um modo geral temos, $A^k = PD^kP^{-1}$, para qualquer inteiro positivo k. E sendo a matriz diagonal D dada por

$$
D = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \lambda_n
\end{bmatrix},
$$

temos que

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Agora que já sabemos encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz, podemos enunciar a seguinte propriedade.

Propriedade 1: *Se uma matriz A_{nxn} tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.*

Para maiores detalhes desta propriedade sugerimos [8]. E vale lembrar que a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é formada pelos autovalores λ_n de A em sua diagonal principal e a matriz

$$P = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

é formada pelos autovetores associados aos autovalores λ_n.

Exemplo 13. *Mostraremos que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável.*

Vamos verificar se a matriz A tem três autovalores distintos, o que garante, pela Propriedade 1, que A e diagonalizável.

Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

assim,

$$det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

resolvendo a equação, teremos

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = 3.$$

Portanto, todos os autovalores de A são distintos. Logo pela Propriedade 1 a matriz A é diagonalizável e a matriz diagonal é dada por

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para obtermos uma matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, precisamos encontrar os autovetores.

Para $\lambda_1 = -1$, teremos:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos a solução geral $v \in \{(\alpha, 3\alpha, -4\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $v_1 = (1, 3, -4)$.

Analogamente, para $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ encontramos respectivamente os autovetores $u \in \{(\alpha, \alpha, -2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ e $w \in \left\{\left(\alpha, -\alpha, \frac{-4\alpha}{3}\right);\ \alpha \in \mathbb{R}^*\right\}$ e assim um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ será $u_1 = (1, 1, -2)$ e um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ será $w_1 = (3, -3, -4)$.

Assim teremos, que a matriz invertível é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz A é diagonalizável.

A Propriedade 1, nos garante que se uma matriz A_{nxn} tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável. E se esses autovalores não forem distintos? A resposta está no seguinte teorema:

Teorema 2: *Uma matriz A_{nxn} é diagonalizável, se e somente se, a matriz A tem n autovetores linearmente independentes (LI).*

Demonstração: $\Rightarrow$) Suponha que A é diagonalizável, isto é, que exista uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$.

Daí,

$$AP = DP$$

escrevendo P segundo suas colunas:

$$P = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$$

então

$$AP = [Av_1, Av_2, \cdots, Av_n]$$

e

$$DP = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \cdots, \lambda_n v_n].$$

Comparando, concluímos que

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda_n v_n, \end{aligned}$$

isto é, as colunas de P são os autovetores de A. Como P é invertível, suas colunas são LI, logo encontramos n autovetores LI para A.

$\Leftarrow$) Sejam $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ vetores linearmente independentes (LI). Então,

$$\begin{aligned}
A(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n \\
A(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \cdots + 0v_n \\
A(v_3) &= \lambda_3 v_3 = 0v_1 + 0v_2 + \lambda_3 v_3 + \cdots + 0v_n \\
&\vdots \\
A(v_n) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \cdots + \lambda_n v_n,
\end{aligned}$$

matricialmente, obtemos

$$A(v_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 14. *Vamos verificar que a matriz* $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável.*

Vamos determinar os autovalores de A*. Seu polinômio característico e dado por*

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Assim,

$$det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ *(com multiplicidade 2) e* $\lambda_3 = 1$*. Agora, vamos encontrar os autovetores, para isso basta resolver* $(A - \lambda I)X = 0$*.*

Para $\lambda_1 = -1$*, teremos:*

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daí,

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -4x + 4z = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, encontramos a solução geral

$$v \in \{(\beta, \alpha, \beta) = \alpha\,(0,1,0) + \beta\,(1,0,1)\,;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

onde α *e* β *não são nulos simultaneamente.*

Logo $v_1 = (1,0,1)$ *e* $v_2 = (0,1,0)$ *são vetores linearmente independentes (LI) associados ao autovalor* $\lambda_1 = -1$.

Analogamente, para $\lambda_3 = 1$*, encontraremos a solução geral*

$w \in \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha\,(1,1,2)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Assim, $w_1 = (1,1,2)$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda_3 = 1$.

Portanto a matriz A *é diagonalizável e as matrizes*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \ \ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PDP^{-1}$.

4 Tópicos de Cálculo

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos relativos ao cálculo diferencial e integral, tais como: derivada, polinômio de Taylor e polinômio de Maclaurin necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Ressaltamos que alguns resultados não serão demonstrados, para mais detalhes sugerimos [7].

4.1 Derivada de uma função

Definição 8: *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se derivada de f no ponto x_0 o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este existir e for finito. A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada *acréscimo ou incremento da variável* x relativamente ao ponto x_0. A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamda *acréscimo ou incremento da função* f relativamente ao ponto x_0.

O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ recebe o nome de *razão incremental de* f relativamente ao ponto x_0.

Indicaremos a derivada de f no ponto x_0 por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

quando o limite existir e for finito.

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f *é derivável* no ponto x_0. Dizemos também que f *é derivável* no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

De modo geral, teremos

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},$$

desde que existam derivadas de ordem inferiores a n, isto é, se existir $f^{(n-1)}(x_0)$.

4.2 Polinômio de Taylor

Muitas funções podem ser aproximadas por polinômios, facilitando assim alguns cálculos. Existem vários métodos para realizar essas aproximações, um dos mais usados vamos utilizar neste trabalho é o que envolve a Fórmula de Taylor, assim chamada em homenagem ao matemático inglês Brook Taylor (1685 - 1731) e apresentaremos a seguir definições e exemplos.

Definição 9: *Seja f uma função que possui derivadas $f^{(n)}$ de ordem $n \geq 1$ num intervalo aberto I e seja a um número fixo em I. Então o polinômio de Taylor de n-ésimo grau da função f em a é uma função polinomial P_n definida por:*

$$P_n(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Onde n é um número inteiro positivo e $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

Escrevendo com a notação de somatório, temos que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

O caso especial do polinômio de Taylor, obtido quando tomamos $a = 0$ é o chamado polinômio de Maclaurin, em homenagem ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698 - 1746). O polinômio de Maclaurin de enésimo grau para uma função f de acordo com a Definição 9 com $a = 0$, é dado por:

$$P_n(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Assim, podemos aproximar uma função usando o polinômio de Taylor ou o polinômio de Maclaurin. Nos três exemplos a seguir, vamos fazer a aproximação das funções exponencial, seno e cosseno através do polinômio de Maclaurin.

Exemplo 15. *Seja $f(x) = e^x$, assim:*

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 = 1; \qquad f'(0) = e^0 = 1; \qquad f''(0) = e^0 = 1; \\ f'''(0) &= e^0 = 1; \qquad f^{(4)}(0) = e^0 = 1; \qquad f^{(5)}(0) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Exemplo 16. *Seja $f(x) = sen(x)$, assim:*

$$\begin{aligned} f(0) &= sen(0) = 0; \qquad f'(0) = \cos(0) = 1; \qquad f''(0) = -sen(0) = 0; \\ f'''(0) &= -\cos(0) = -1; \qquad f^{(4)}(0) = sen(0) = 0; \qquad f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Exemplo 17. *Seja $g(x) = \cos(x)$, assim:*

$$\begin{aligned} g(0) &= \cos(0) = 1; \qquad g'(0) = -sen(0) = 0; \qquad g''(0) = -\cos(0) = -1; \\ g'''(0) &= sen(0) = 0; \qquad g^{(4)}(0) = \cos(0) = 1; \qquad g^{(5)}(0) = -sen(0) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

5 Exponencial de uma Matriz

Sabemos calcular a exponencial de um número real, mas será que é possível calcular a exponencial de uma matriz? Neste capítulo, vamos mostrar que é possível determinar a exponencial de uma matriz quadrada.

No Capítulo 4, vimos que para todo número real x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

A exponencial de uma matriz quadrada A de ordem n, denotada por e^A ou $\exp(A)$, é definida por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

onde I denota a matriz identidade de ordem n.

Exemplo 18. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *vamos calcular* e^A.

Primeiramente, vamos encontrar os autovalores de A. Seu polinômio cara-cterístico é dado por

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-\lambda).$$

Assim,

$$det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\cdot(-\lambda) = 0$$

daí,

$$\lambda_1 = 0 \ e \ \lambda_2 = 2,$$

os quais são os autovalores distintos da matriz A. Logo pela Propriedade 1 a matriz A é diagonalizável e a matriz diagonal é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos encontrar os autovetores, para $\lambda_1 = 0$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daí,

$$2x + y = 0$$

portanto a solução geral é $v \in \{(\alpha, -2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ *é* $v_1 = (1, -2)$. *Analogamente, para* $\lambda_2 = 2$ *encontramos os autovetores* $u \in \{(\alpha, 0)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ *e assim um autovetor associado ao autovalor* $\lambda_2 = 2$ *será* $u_1 = (1, 0)$.

Então teremos, que a matriz invertível é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ A^n &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \begin{bmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ e^A &= \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $e^A = \begin{bmatrix} e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6 Seno e Cosseno de uma Matriz

Neste capítulo, vamos mostrar um método para calcular o seno e cosseno de uma matriz quadrada.

Como vimos nos Exemplos 16 e 17, para todo número real x temos que:

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ ,$$

e

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ .$$

Logo, dada uma matriz quadrada A de ordem n, o seno e o cosseno de A são definidos por:

$$sen\,(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot A^{2n+1}}{(2n+1)!} = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \cdots \ ,$$

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot A^{2n}}{(2n)!} = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \cdots$$

onde I denota a matriz identidade de ordem n.

Neste trabalho vamos calcular o seno e cosseno de uma matriz quadrada de ordem 2.

Exemplo 19. *Para a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *calcular* $sen\,(A)$ *e* $\cos(A)$.

Primeiramente, encontrar os autovalores de A. Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação teremos,

$$\lambda_1 = 1 \ e \ \lambda_2 = 3$$

que são os autovalores distintos da matriz A. Logo pela Propriedade 1 a matriz A é diagonalizável e a matriz diagonal é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos encontrar os autovetores, para $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daí,

$$x + y = 0$$

então a solução geral é $v \in \{(\alpha, -\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ *é* $v_1 = (1, -1)$. *Analogamente, para* $\lambda_2 = 3$ *encontramos os autovetores* $u \in \{(\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ *e assim um autovetor associado ao autovalor* $\lambda_2 = 3$ *será* $u_1 = (1, 1)$.

Então a matriz invertível é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{-1+3^n}{2} \\ \frac{-1+3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{bmatrix}$$

daí,

$$A^{2n} = A^n \cdot A^n = \begin{bmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{-1+3^n}{2} \\ \frac{-1+3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{-1+3^n}{2} \\ \frac{-1+3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3^{2n}+1}{2} & \frac{3^{2n}-1}{2} \\ \frac{3^{2n}-1}{2} & \frac{3^{2n}+1}{2} \end{bmatrix}$$

e ainda,

$$A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{3^{2n}+1}{2} & \frac{3^{2n}-1}{2} \\ \frac{3^{2n}-1}{2} & \frac{3^{2n}+1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3^{2n+1}+1}{2} & \frac{3^{2n+1}-1}{2} \\ \frac{3^{2n+1}-1}{2} & \frac{3^{2n+1}+1}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
sen\,(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot A^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3^{2n+1}+1}{2} & \frac{3^{2n+1}-1}{2} \\ \frac{3^{2n+1}-1}{2} & \frac{3^{2n+1}+1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n+1}+1\right)}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n+1}-1\right)}{(2n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n+1}-1\right)}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n+1}+1\right)}{(2n+1)!} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} sen\,(3) + sen\,(1) & sen\,(3) - sen\,(1) \\ sen\,(3) - sen\,(1) & sen\,(3) + sen\,(1) \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\cos(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot A^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3^{2n}+1}{2} & \frac{3^{2n}-1}{2} \\ \frac{3^{2n}-1}{2} & \frac{3^{2n}+1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n}+1\right)}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n}-1\right)}{(2n)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n}-1\right)}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(3^{2n}+1\right)}{(2n)!} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos(3) + \cos(1) & \cos(3) - \cos(1) \\ \cos(3) - \cos(1) & \cos(3) + \cos(1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$sen\,(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} sen\,(3) + sen\,(1) & sen\,(3) - sen\,(1) \\ sen\,(3) - sen\,(1) & sen\,(3) + sen\,(1) \end{bmatrix}$$

e

$$\cos(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos(3) + \cos(1) & \cos(3) - \cos(1) \\ \cos(3) - \cos(1) & \cos(3) + \cos(1) \end{bmatrix}.$$

Agora que calculamos o seno e cosseno da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, nada mais natural que a pergunta: Será que vale a relação fundamental, isto é, $sen^2 A + \cos^2 A = I$?

Vamos verificar se é válida para a matriz A, temos:

$$\begin{aligned}
sen^2 A &= senA \cdot senA \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} sen(3) + sen(1) & sen(3) - sen(1) \\ sen(3) - sen(1) & sen(3) + sen(1) \end{bmatrix} \cdot \\
& \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} sen(3) + sen(1) & sen(3) - sen(1) \\ sen(3) - sen(1) & sen(3) + sen(1) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} [sen(3) + sen(1)]^2 \\ + [sen(3) - sen(1)]^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} sen^2(3) - sen^2(1) \\ + sen^2(3) - sen^2(1) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} sen^2(3) - sen^2(1) \\ + sen^2(3) - sen^2(1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} [sen(3) - sen(1)]^2 \\ + [sen(3) + sen(1)]^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} sen^2(3) + 2sen(3)\,sen(1) \\ + sen^2(1) + sen^2(3) \\ -2sen(3)\,sen(1) + sen^2(1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} sen^2(3) - sen^2(1) \\ + sen^2(3) - sen^2(1) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} sen^2(3) - sen^2(1) \\ + sen^2(3) - sen^2(1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} sen^2(3) + 2sen(3)\,sen(1) \\ + sen^2(1) + sen^2(3) \\ -2sen(3)\,sen(1) + sen^2(1) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2sen^2(3) + 2sen^2(1) & 2sen^2(3) - 2sen^2(1) \\ 2sen^2(3) - 2sen^2(1) & 2sen^2(3) + 2sen^2(1) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} sen^2(3) + sen^2(1) & sen^2(3) - sen^2(1) \\ sen^2(3) - sen^2(1) & sen^2(3) + sen^2(1) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

de modo análogo,

$$\begin{aligned}
\cos^2 A &= \cos A \cdot \cos A \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(3) + \cos^2(1) & \cos^2(3) - \cos^2(1) \\ \cos^2(3) - \cos^2(1) & \cos^2(3) + \cos^2(1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
sen^2 A + \cos^2 A &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} sen^2(3) + sen^2(1) & sen^2(3) - sen^2(1) \\ sen^2(3) - sen^2(1) & sen^2(3) + sen^2(1) \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2(3) + \cos^2(1) & \cos^2(3) - \cos^2(1) \\ \cos^2(3) - \cos^2(1) & \cos^2(3) + \cos^2(1) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} sen^2(3) + \cos^2(3) \\ +sen^2(1) + \cos^2(1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} sen^2(3) + \cos^2(3) \\ -\left[sen^2(1) + \cos^2(1)\right] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} sen^2(3) + \cos^2(3) \\ -\left[sen^2(1) + \cos^2(1)\right] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} sen^2(3) + \cos^2(3) \\ +sen^2(1) + \cos^2(1) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 1-1 & 1+1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

Portanto, para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ vale a relação fundamental, isto é,

$$sen^2 A + \cos^2 A = I.$$

Agora mostraremos que:

Proposição 1: *Se A é uma matriz quadrada diagonalizável, então $sen^2 A + \cos^2 A = I$.*

Vamos fazer isso em duas etapas:

1ª etapa: A é uma matriz diagonal.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

para todo número inteiro não-negativo k. Assim,

$$\begin{aligned} senA &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^k \cdot \lambda_1^{2k+1}}{(2k+1)!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{(-1)^k \cdot \lambda_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \lambda_1^{2k+1}}{(2k+1)!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \lambda_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & sen\lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow senA = \begin{bmatrix} sen\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & sen\lambda_n \end{bmatrix}.$$

De modo análogo teremos:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow \cos A = \begin{bmatrix} \cos\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
sen^2A + \cos^2 A &= \begin{bmatrix} sen^2\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & sen^2\lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos^2\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos^2\lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} sen^2\lambda_1 + \cos^2\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & sen^2\lambda_n + \cos^2\lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}$$

2ª etapa: A é uma matriz diagonalizável.

Sendo A uma matriz diagonalizável, existe uma matriz invertível P tal que PAP^{-1} é uma matriz diagonal D, isto é:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A = P^{-1}DP \Rightarrow A^m = P^{-1}D^mP$$

para todo número natural m. Logo:

$$\begin{aligned}
senA &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot P^{-1} \cdot D^{2k+1} \cdot P}{(2k+1)!} \\
&= P^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot D^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] P = P^{-1} \cdot senD \cdot P
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\cos(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot A^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot P^{-1} \cdot D^{2k} \cdot P}{(2k)!} \\
&= P^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot D^{2k}}{(2k)!} \right] P = P^{-1} \cdot \cos D \cdot P.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
sen^2 A + \cos^2 A = \left(P^{-1} \cdot sen^2 D \cdot P\right) + \left(P^{-1} \cdot \cos^2 D \cdot P\right) = P^{-1} \cdot \left(sen^2 D + \cos^2 D\right) \cdot P
$$

como D é uma matriz diagonal e na 1ª etapa já provamos que vale a relação fundamental para matrizes diagonais, segue que

$$
sen^2 D + \cos^2 D = I
$$

e assim,

$$
sen^2 A + \cos^2 A = P^{-1} \cdot I \cdot P = I
$$

7 Considerações Finais

Os estudos realizados para o desenvolvimento deste trabalho nos garantiram a obtenção de ganhos significativos relacionados ao cálculo da exponencial, seno e cosseno de uma matriz quadrada.de ordem 2 Apresentam-nos a importância do desenvolvimento de métodos que possibilitem a um professor de matemática trabalhar com a exponencial, seno e cosseno de uma matriz, com o auxílio da Álgebra Linear, oportunizando melhor entendimento por parte dos alunos do ensino médio e superior (primeiros anos), uma vez que os mesmos encontram-se habituados com cálculos algébricos.

Acreditamos que se conseguirmos levar os alunos a construir melhor os conceitos, podemos doar um tempo maior para o planejamento de situações em que a aprendizagem seja efetiva. E por fim, esperamos que este trabalho possa ser uma ferramenta para futuros estudos sobre matrizes.

Referências

[1] Boldrini, José Luis. *Álgebra Linear.* Editora Harbra, 1980.

[2] Dante, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicaçõe, volume 2.* Editora Ática, 2010.

[3] Figueiredo, L. M.; da Silva, M. O. M. *Notas da MA22 - Fundamentos de Cálculo.* Profmat, 2013.

[4] Gordon, Crystal Monterz. *The Square Root Function of a Matrix.* Georgia State University, 2007.

[5] Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar 4.* Atual Editora, 1977.

[6] Kolman, Bernard; Hill, David R. *Álgebra Linear com Aplicações.* 9º edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[7] Leithold, Louis, *O Cálculo com Geometria Analítica.Volume 1.* Editora Harbra, 1994.

[8] Steinbruch, Alfredo; Winterle, Paulo, *Introdução a Álgebra Linear.* Pearson Education do Brasil, 1997.