-INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
E
SBM - SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

# ENSINO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E UMA APLICAÇÃO EM MÚSICA.

Flávio Brito Prado

TRABALHO DE CONCLUSÃO DO
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Rio de Janeiro, RJ – Março de 2013

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
E SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Flávio Brito Prado

# UMA PROPOSTA DE ENSINO DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE COMPOSIÇÕES DA FUNÇÃO AFIM COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E UMA APLICAÇÃO EM MÚSICA.

**Trabalho de Curso de Mestrado apresentado ao corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática.**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**
**E SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**
**CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

Flávio Brito Prado

**COMISSÃO EXAMINADORA**

**Orientador – Professor Eduardo Wagner, D.Sc.**

**Professor Paulo Cezar Pinto Carvalho, Ph.D.**

**Professor Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva, Ph.D.**

**Professor Roberto Imbuzeiro Felinto de Oliveira, Ph.D.**

*Dedico*

*À minha família que é a fonte de inspiração para que eu obtenha forças para crescer e seguir a diante e especialmente ao meu pai Orlando Amaro Prado (in memoriam) que sempre apreciou uma boa formação e me influenciou a valorizar o conhecimento e a cultura.*

## AGRADECIMENTOS

*Gostaria de agradecer à minha mãe, esposa e filhos, por terem sido pacientes e compreenderem a minha grande variação de humor e necessária ausência no seio familiar durante este curso e depois ao professor Eduardo Wagner por sua orientação e brilhante ideia para a complentação deste trabalho.*

# RESUMO

Este trabalho pretende ensinar a construir gráficos de composições de funções trigonométricas $y = sen(x)$ e $z = cos(x)$, com a função afim $w = a \cdot x + b$ onde $a\, e\, b \in \mathbb{R}$; portanto construir gráficos para $c \cdot sen(ax+b)+d$ ou $c \cdot cos(ax+b)+d$, identificando a ideia de movimentos dos gráficos a partir das alterações de cada um dos quatro parâmetros e para isso contará com o apoio de uma mídia digital ou um hipertexto. O trabalho se propõe a durante a construção do conhecimento sobre as variações de cada parâmetro, fazer o aluno experimentar, no hipertexto, simulações em Geogebra que confirmem os conceitos abordados no capítulo. A construção de gráficos mais complexos se dará com o auxílio de rascunhos de gráficos parciais, para cada parâmetro, sempre utilizando a ordem “a”, “b”, “c” e “d” dos parâmetros.

Esta abordagem pretende estabelecer um texto objetivo para a compreensão e construção do conceito de variações de parâmetros nestes tipos de gráficos, auxiliada pela experimentação feita pelo aluno durante a leitura e estudo. O texto tem uma proposta didática de promover reflexões do conteúdo, de uma forma menos usual, mas com uma linguagem adequada à leitura do adolescente, com menos formalismo mas sem abrir mão dos corretos e necessários conceitos físicos e matemáticos, além de estabelecer uma relação entre a música e a Matemática, utilizando alguns recursos tecnológicos. Esta proposta pretende fazer o aluno estabelecer uma conexão de um assunto presumidamente abstrato, que é a realidade na qual a variação de parâmetros de uma função trigonométrica produza mais que uma alteração gráfica e visual, para a realidade na qual ela produza alteração de intensidade e altura de notas musicais.

Em partes específicas deste texto aparecerá, juntamente com um número, o símbolo “₪”, ele estará indicado o número constante do menu da página do HTML – TCC de Ensino de Gráficos Trigonométricos – Flávio B. Prado, na qual existirá um conteúdo interativo que auxilie a compreensão.

Palavras-chave:
Gráficos Trigonométricos; Senóides; Matemática e Música.

## SUMÁRIO

# CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

## I-1 UM BREVE HISTÓRICO

Sou músico amador e iniciei o estudo de música em 1981, objetivamente praticando violão popular. No universo escolar fui incentivado por colegas de classe que queriam formar um grupo de música para disputar um festival e tive a primeira experiência com a dialética musical devido à quantidade de elementos do grupo. Em 1983 formei, junto com alguns amigos, uma banda de música pop, que me mantinha sempre atualizado e me fazia enveredar na prática de outros instrumentos; como por exemplo: o cavaquinho e o teclado (na época um órgão eletrônico). Como na maioria das formações de conjuntos, a rotatividade de alguns elementos era quase natural e a cada vez que isto acontecia alterava um pouco a característica musical do grupo. A constância dos ensaios fortaleceu bastante nossa qualidade musical, mas com a saída do guitarrista solo e o fato de chegar à época do pré-vestibular, basicamente o grupo foi desfeito e minha disponibilidade para a música ficou bastante reduzida. Dois anos após aventurei-me ao estudo do violão clássico, mas como havia iniciado o trabalho como bancário e precisava dispor do devido tempo para meu curso universitário não pude dar o devido prosseguimento à erudição. No entanto a convivência com a música sempre foi marcante, sejam por pequenas apresentações com o violão na faculdade, no trabalho ou discutindo harmonia e arranjo com os amigos. Diante deste real afastamento, até hoje me considero um estudante de música e apesar de minha rotina não permitir que haja uma regularidade neste envolvimento, estou sempre aprendendo algo de novo em composição, arranjo e execução de melodias, além de estar atento acompanhando as tendências atuais. Nos últimos onze anos, eu estive praticamente afastado da atividade musical e devido ao pouco tempo que me era disponível, só conseguia, ainda que raramente, breves contatos com o violão. Este trabalho permitiu-me estudar alguns fundamentos musicais que desconhecia e rediscutir o entendimento e percepção de música pelo ser humano.

Exerço a docência em matemática há pouco mais de vinte anos e mesmo antes de me formar em professor, ministrava aulas particulares de matemática, física e química. Iniciei o magistério, ainda estudante, como professor substituto em colégios particulares que trabalhavam com supletivo e na CEPUERJ, mesmo com licença provisória, a fim de trabalhar em alguns Ginásios Públicos. Trabalhei na rede municipal do Rio de Janeiro por mais de cinco anos, sou Professor Estadual há quinze anos e estou agora vinculado à Secretaria de Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, atuando na FAETEC, assim como também acumulo o cargo de Professor do Ensino Básico Técnico e Tecnológico do MEC, atuando no CMRJ - Colégio Militar do Rio de Janeiro há pouco mais de quinze anos.

## *I-2 FUNDAMENTAÇÃO DA PROPOSTA*

Tenho atuado nos últimos dez anos como coordenador, inicialmente, de 9º ano do Ensino Fundamental e posteriormente de 2º ano do Ensino Médio, no Colégio Militar. Com o bombardeamento de novas mídias e tecnologias, grande parte dos professores tem a percepção de que o aluno de hoje, criança ou adolescente, tem se tornado menos atento, mais disperso e pouco disposto a estudar alguns conteúdos. Lamentavelmente esta observação vem sendo ratificada anualmente, aparentemente constata-se uma falta de motivação; ou mesmo, de disposição para que os alunos lidem de forma mais tradicional com o estudo e isto nos leva a imaginar que o nível escolar e a capacidade cognitiva deles, mesmo em colégios de excelência, vêm diminuindo nos últimos anos. Apesar deste fato não ser necessariamente verdade, vários professores têm a impressão de que alguns conteúdos matemáticos já não são assimilados como antes. Na coordenação do 2º ano do Ensino Médio deparei-me com um grande fracasso, durante dois anos seguidos, ao tentar fazer com que os alunos construíssem ou respondessem perguntas sobre gráficos de funções trigonométricas elementares, é óbvio que dependendo do que seja cobrado pode-se perceber mais ou quase nada desta deficiência.

Analisei uma boa quantidade de livros e percebi que mesmo os melhores livros não detalham o ensino de construção de gráficos, eles mostram os gráficos das funções elementares e cobram como exercícios funções com parâmetros diversos. Entendo que diante de um conteúdo extenso de uma série o autor abra mão de falar de aspectos particulares da construção de gráficos; até por que, ele mesmo pode não achar o item tão importante para demandar mais algumas páginas do livro, mas em nenhum livro que analisei, encontrei um que explicasse os quatro parâmetros enunciados no resumo deste trabalho. A falta de alguma literatura mais detalhada para que o aluno possa ler em casa, ou mesmo estudar sozinho, o obriga a entender tudo na aula (uma utopia) ou mais tarde lembrar de cada palavra do professor (como se houvesse gravado). Este assunto pode ser dado em dois dias de aulas de dois blocos de quarenta e cinco minutos (quatro tempos) e assim ele era planejado e ministrado pela equipe de professores, porém as anotações dos alunos nunca eram suficientes para apoiar o estudo de casa. Era notória a falta de uma literatura mais detalhada e eu comecei a produzir um material auxiliar que visava esclarecer os pontos principais, estabelecer uma forma adequada para a percepção dos movimentos dos gráficos, além de propor exercícios objetivos com níveis de dificuldades gradativos para amadurecer o entendimento e a construção. Acredito, que devido ao empenho da equipe de professores junto à utilização deste material, pôde-se perceber um aumento de 40% na média da série, o que aparentemente denota um aumento das notas.

Naquele momento meu o objetivo era de efetivar o ensino e não me coube aplicar pré-testes. Diante da ideia de melhorar o entendimento da série sobre o tópico supracitado, não se poderia fazer grupos de controle para se aplicar pós-testes e consequentemente fazer testes de hipótese para avaliar matematicamente se o crescimento das notas foi por conta do método ou ainda se o resultado foi ou não significativo. Numa análise quantitativa simples ficamos com a impressão de que este resultado não tenha sido tão bom, por tratar-se de um percentual baixo de aumento, mas uma análise qualitativa nos leva a perceber que as ações tomadas promoveram a inclusão de um grupo maior de alunos na faixa de notas aceitáveis e neste contexto entendemos que alcançamos nosso objetivo. Poderíamos passar a discutir para os próximos anos os ideais deste resultado, mas a priori já havíamos conseguido algum sucesso sem implementar a utilização da geometria dinâmica, fazendo uso do software Geogebra.

Desde o início do século passado a forma de ensino em matemática mudou inúmeras vezes, ainda que de forma menos significativa que algumas disciplinas que demandam na sua essência uma dinâmica periódica dos textos, sejam por novas descobertas, atualização de entendimentos históricos ou alterações geográficas. A tecnologia de ensino de matemática evoluiu e fez intervenções relevantes no ensino e hoje há uma gama de recursos computacionais que podem e devem ser levados à sala de aula para enfatizar e agilizar a compreensão de fatos mais abstratos. Em junho de 2012 saí da coordenação do 2º ano e não tive a oportunidade de implementar a utilização do Geogebra na prática em sala de aula. Mesmo tendo professores que já conheciam e manejavam o programa, em um sistema tradicional de ensino, é preciso que haja registro prévio do planejamento de uso de material complementar e indicação de parâmetros e objetivos apontados pelo coordenador para que todos os professores trabalhem igualmente na série para que a prática possa ser implementada como integrante da rotina; afinal anualmente existe uma equipe de cinco ou quatro professores para onze ou doze turmas. Diante da experiência na produção de um material mais objetivo para o ensino, resolvi descrever as ações que foram tomadas e conectá-las aos diversos textos produzidos para criar neste Trabalho de Conclusão de Curso um método de ensino mais lúdico e objetivo. Diante deste desafio optei por trabalhar com Trigonometria e a partir da sugestão do meu orientador, comecei a pesquisar algumas ligações com a música, uma vez que “o estudo de Trigonometria está ligado à correlação entre o desenvolvimento de diferentes habilidades e o aprendizado de matemática, sendo o estudo das funções trigonométricas e de seus gráficos um dos aspectos de maior importância” (PCN-BRASIL, 2004).

## *I-3 OBJETIVOS*

Proponho esta tarefa sob a ótica de uma linguagem mais simples, sem fugir do rigor dos conceitos matemáticos e com o apoio de gráficos coloridos; onde as cores têm a função de ajudar a perceber, mais rápido, alguns aspectos relevantes, sem a necessidade de textos mais extensos – aliás, as construções são feitas para que o aluno se convença de que elas são sempre similares e repetitivas, o aluno deve entender que há uma infinidade de gráficos a serem feitos, mas o procedimento básico é único; ou seja, o processo de construção identifica-se com uma mesma rotina.

No **CAPÍTULO II** apresento um resumo da matéria do 9º ano do Ensino Fundamental e do primeiro bimestre do 1º ano do Ensino Médio, lembrando e provando as fundamentações necessárias à obtenção de valores para a construção da tabela de seno dos arcos com valores básicos, mostrando para isto a comprovação de algumas identidades trigonométricas para arcos dos quatro quadrantes. A grande maioria dos alunos chega ao Ensino Médio com a prática de construir gráficos, apoiada na leitura de tabelas; diante disto acho importante aproveitar este procedimento para também auxiliar as construções iniciais.

Nos **CAPÍTULOS III** e **IV** evidencio a construção efetiva do gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ através da marcação de pontos obtidos na tabela de arcos básicos da primeira volta, caracterizo função periódica e simetria axial, observo os intervalos de crescimento, os zeros e os intervalos de variações de sinais além de conceituar os parâmetros da função $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$, identificando $f(x) = \text{sen}(x)$ como função com parâmetros básicos, para efetivamente iniciar a proposição do aprendizado de qual mudança o gráfico de $f(x) = c \cdot \text{sen}(ax + b) + d$ sofre, pela alteração de cada um dos parâmetros “a”, “b”, “c” e “d”. Finalizo o capítulo por exibir construções onde há variações de parâmetros dois a dois, três a três e quatro a quatro. Paralelamente a isso, proponho ao aluno testar no HTML indicado, as consequências das alterações de parâmetros.

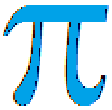
No **CAPÍTULO V** evidencio a construção do gráfico de $f(x) = \cos(x)$ e utilizo a identidade trigonométrica $\cos(x) = \text{sen}\left(\pi/2 - x\right)$ para concluir as mudanças que o gráfico $f(x) = c \cdot \cos(ax + b) + d$ sofre, com as alterações de parâmetros já estudadas na Função Seno. Como nos dois capítulos anteriores, proponho ao aluno testar no HTML indicado, as consequências das alterações de parâmetros.

Finalmente no **CAPÍTULO VI** inicio um estudo preliminar de caracterização e percepção do som para abordar o fenômeno do entendimento das notas musicais e porque elas são representadas por ondas, fazendo o aluno experimentar o que as alterações de parâmetros de uma senóide produzem nos sons.

# *CAPÍTULO II – VALORES REAIS DE SENOS, COSSENOS E TANGENTES PELAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO*

Ao iniciarmos este estudo devemos lembrar que apesar de estarmos levando em consideração os conceitos de ensino fundamental, vamos fundamentar e relembrar todos os pré-requisitos diretos e termos igualmente dependentes.

FIGURA 1

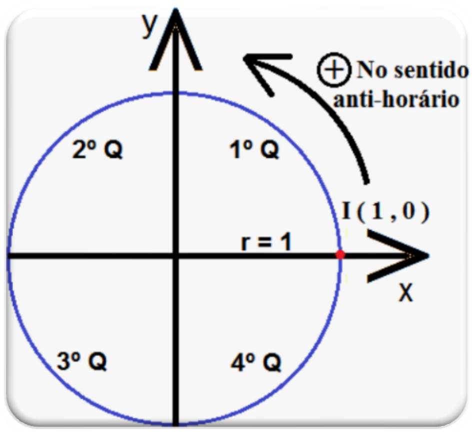


O número $\pi$ ou (Pi) é, em qualquer círculo, o valor da razão entre o comprimento da circunferência e o comprimento do diâmetro, é a mais antiga constante matemática que se conhece e é um número irracional aproximadamente igual a 3,141.

## *II-1 O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO*

- Tomemos sobre um plano o sistema cartesiano ortogonal.
- Consideremos um círculo ou uma circunferência orientada de centro na origem **O** do sistema cartesiano, de raio unitário (r = 1) e cujo sentido positivo é o anti-horário. Tal circunferência ou círculo são denominados por CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA ou CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.
- Consideremos também apenas arcos orientados e com origem no ponto **I**=(1, 0), que são chamados ARCOS TRIGONOMÉTRICOS. O ponto **I**=(1, 0) é chamado ORIGEM DOS ARCOS.

FIGURA 2



Os eixos X e Y do sistema cartesiano dividem o círculo ou a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais que são chamadas de QUADRANTES.

Assim, na figura acima, 1º Q representa o primeiro quadrante, portanto 2º Q o segundo quadrante e assim por diante. O percurso sobre um arco desde sua origem até sua extremidade poderá ser feito em dois sentidos: horário ou anti-horário.

Arco AB orientado no sentido horário na **FIGURA 3** e no sentido anti-horário na **FIGURA 4**.

FIGURA 3

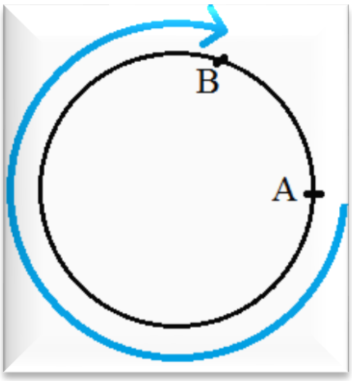
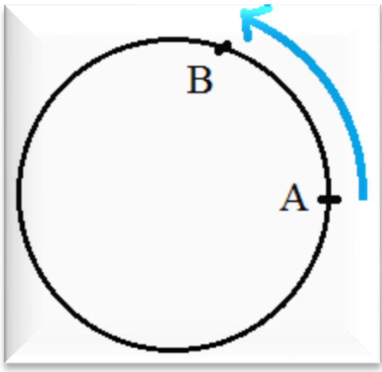



FIGURA 4




## *II-2 MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS*

Medir um arco (ou ângulo) é compará-lo com outro, unitário.

- **GRAU**

Um GRAU é definido como a medida do ângulo central subtendido por um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco. (Indica-se $1^o$). Então podemos dizer que uma circunferência (ou arco de uma volta) mede $360^o$.

## RADIANO

O **Radiano** (notação: rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco. A circunferência toda contém $2\pi$ raios, o que significa que seu comprimento é igual a $2\pi$ r, que é o comprimento dela (correspondente ao arco de uma volta) e a medida deste arco é de $2\pi$ rad.

Quando nos referimos a uma medida de arco em **RADIANO**, entendemos que estamos nos referindo à medida do ângulo central compreendido pelo o arco.

Sabendo-se que a circunferência (ou arco de uma volta) mede $360^o$ ou $2\pi$ rad, estabelecemos quaisquer relações entre graus e radianos por proporcionalidade utilizando uma simples regra de três: $180^o \leftrightarrow \pi$ com x (em graus)

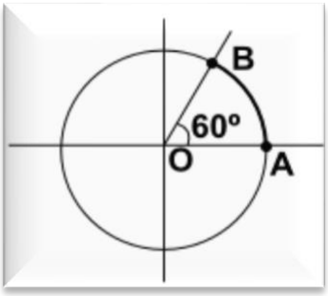
$x \leftrightarrow y$ e y (em radianos).

A escolha do número 360 para representar a quantidade de graus de uma volta, provavelmente foi tal qual a escolha da Civilização Suméria para criar e trabalhar com o **Sistema de Numeração Sexagesimal** (base sessenta), o elevado número de divisores de sessenta. Neste caso temos que 360 é um número relativamente pequeno, que tem uma quantidade de divisores, cinquenta por cento maior que a quantidade de divisores do número 1.000, por exemplo.

Em alguns momentos na história da matemática o homem teve que fazer escolhas como esta devido à ausência de um modelo melhor e mais tarde a natureza veio a se impor de alguma forma, propondo um modelo mais adequado através de pequenas ou grandes descobertas e assim o homem vem aprendendo com a natureza como medir e contar. No caso de medida de ângulo e arco o homem percebeu que o mais adequado era fazer uso do radiano devido à facilidade de identificação direta com os números reais, deixando a proporcionalidade dos “graus” de lado. Não se pode negar a ferramenta didática que se tem ao usar “graus”, o recurso proporciona, por exemplo, uma maneira de falarmos de fração usando somente uma linguagem de números naturais, pois $30^o$ corresponde a $^1/_{12}$ da volta completa.

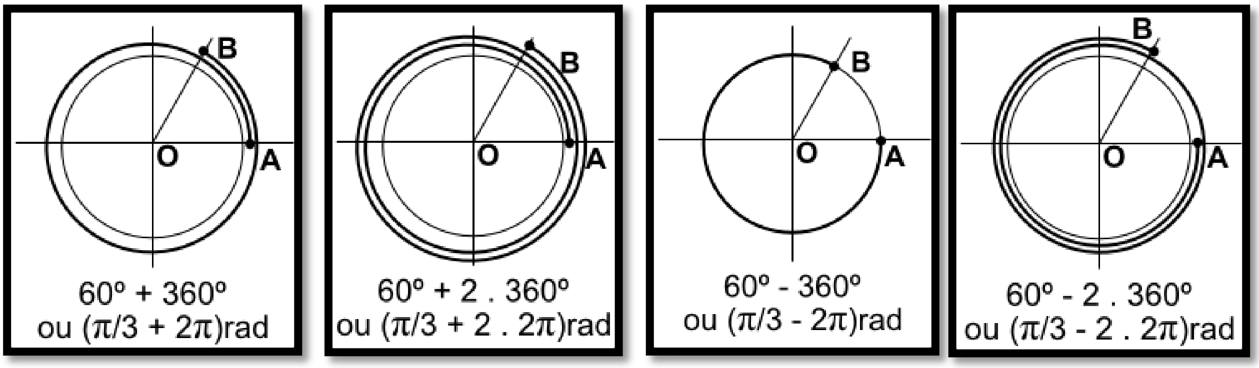
*Def* : congruência - dois arcos são **CÔNGRUOS** ou (**CONGRUENTES**) quando têm as mesmas extremidades.

FIGURA 5




Assim, se um arco mede x$^o$, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por ( x + 360 K ) "em graus", qualquer que seja o valor inteiro de K; ou seja, se um arco mede $\alpha$ rad, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha + 2K\pi$, para todo "K" inteiro. Na **FIGURA 6** abaixo, exibimos arcos côngruos ao arco de 60º ( $1/6$ de 360$^o$) ou de $\pi/3$ rad ( $1/6$ de $2\pi$ rad), como na **FIGURA 5**.

FIGURA 6




Temos que saber que convencionalmente está estabelecido que a cada arco tomado temos um corresponde **ÂNGULO CENTRAL** e a medida do arco equivale à medida a que este ângulo central correspondente.

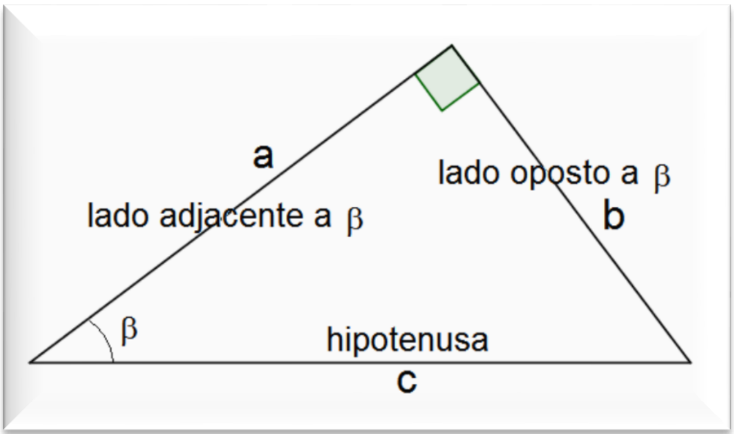
Desta forma, se **X** for a medida do ângulo central $A\hat{O}B$; temos que m(AB) = **X** (a medida do arco AB é **X**). Analogamente se **Y** for a medida de outro ângulo central $A'\hat{O}'B'$ escrevemos m($A'B'$) = **Y** (a medida do arco $A'B'$ é **Y**).

**ATENÇÃO:** não confunda **MEDIDA DE ARCO** com **COMPRIMENTO DE ARCO**. Estes são conceitos bem diferentes. Se por exemplo você puder "cortar" as circunferências mostradas na **FIGURA 6** acima, nos pontos **A** e **B** e em seguida "desenrolar e esticar" a linha que os une; ou seja, "alinhar" cada um dos arcos segundo um segmento de reta e medir (com uma régua, por exemplo) o comprimento desses segmentos, você obterá como resultados os comprimentos dos dois arcos.

## *II-3 SENO, COSSENO E TANGENTE.*

Antes de definirmos SENO, COSSENO e TANGENTE consideremos abaixo os elementos de um triângulo retângulo com catetos de medida “a” e “b”, hipotenusa de medida “c” e um ângulo agudo identificado como “β”, oposto ao lado de medida “b”.

FIGURA 7




Inicialmente apresentaremos SENO, COSSENO e TANGENTE como razões trigonométricas; ou seja, relações entre os lados do triângulo.

*Def*: **SENO DE UM ÂNGULO** – é a razão entre a medida do cateto oposto a este ângulo e a medida da hipotenusa.

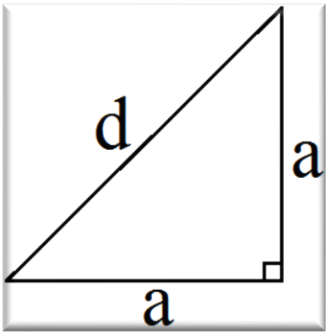
*Def*: **COSSENO DE UM ÂNGULO** – é a razão entre a medida do cateto adjacente a este ângulo e a medida da hipotenusa.

*Def*: **TANGENTE DE UM ÂNGULO** – é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a este ângulo.

## II-4 OBTENDO VALORES REAIS PELAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

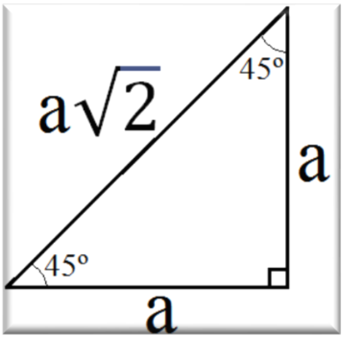
Consideremos primeiramente um triângulo retângulo isósceles com catetos de medida “ $a$ ”.

FIGURA 8




Devido a sua definição podemos facilmente determinar os seus ângulos (pois a soma de ângulos internos de triângulo é 180º) e com o simples auxílio do Teorema de Pitágoras calcular sua hipotenusa.

FIGURA 9

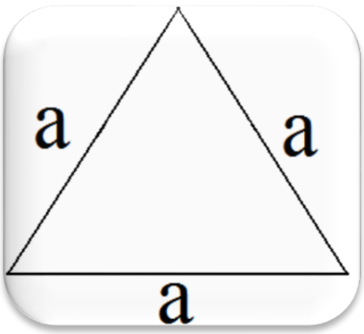



$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

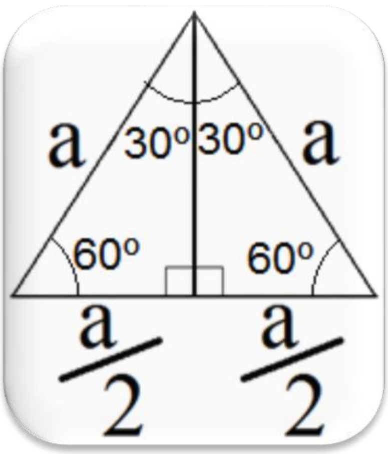
Consideremos agora um triângulo equilátero com lado de medida “ $a$ ”.

FIGURA 10




Quando traçamos uma altura neste triângulo, podemos facilmente identificar dois triângulos retângulos congruentes: pela congruência de seus correspondentes ângulos da base e pela altura como lado comum.

FIGURA 11



Conforme podemos observar nos dois triângulos, os ângulos da base são: $60^o$ (pois partimos um triângulo equilátero) e $90^o$ (por construção da altura), concluímos que o outro ângulo é de $30^o$ e como a altura é lado comum, temos pelo caso **ALA** (ângulo lado ângulo), que os triângulos são congruentes; portanto a base mede $a/2$ e podemos facilmente calcular a medida da altura "h" pelo Teorema de Pitágoras.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

e desta forma podemos concluir: $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Pela análise feita nos modelos da **FIGURA 10** e **FIGURA 11** e pelas justificativas acima podemos concluir que **TODA ALTURA NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO É TAMBÉM MEDIANA E BISSETRIZ.**

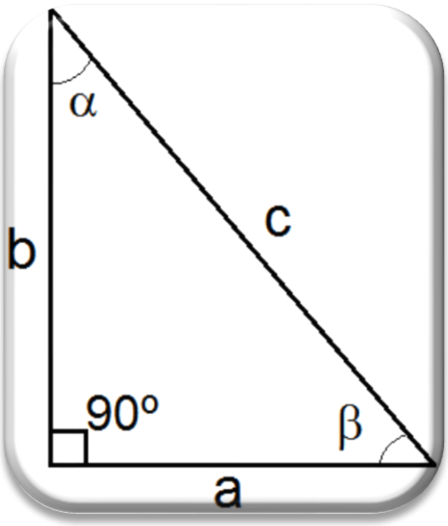
Sendo assim, pelas definições da **PÁGINA 10**, calculamos seno, cosseno e tangente para $30^o$, $45^o$ e $60^o$.

| | |
|---|---|
| $sen(30^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ | $sen(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $cos(30^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $cos(60^o) = \frac{a/2}{a} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ |
| $tan(30^o) = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $tan(60^o) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{a} = \sqrt{3}$ |
| $sen(45^o) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos(45^o)$ | $tg(45^o) = \frac{a}{a} = 1$ |

Vale lembrar que nós nos utilizamos da definição usual de seno, cosseno e tangente para ângulos agudos no triângulo retângulo e este conceito leva em consideração a definição de hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente a ângulos agudos. Como estes ângulos agudos estão num triângulo retângulo verificamos facilmente que eles são complementares.

Portanto se $\alpha$ E $\beta$ SÃO ÂNGULOS AGUDOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO, ENTÃO $\alpha+\beta=90^{o}$ E NATURALMENTE $sen(\alpha)=cos(\beta)$, pois o cateto adjacente de $\alpha$ é oposto de $\beta$ e vice-versa. Desta forma podemos observar que O SENO DE UM ÂNGULO É IGUAL AO COSSENO DO ÂNGULO COMPLEMENTAR A ELE. Além disso, A TANGENTE DE UM ÂNGULO É IGUAL AO INVERSO DA TANGENTE DO ÂNGULO COMPLEMENTAR A ELE.

FIGURA 12



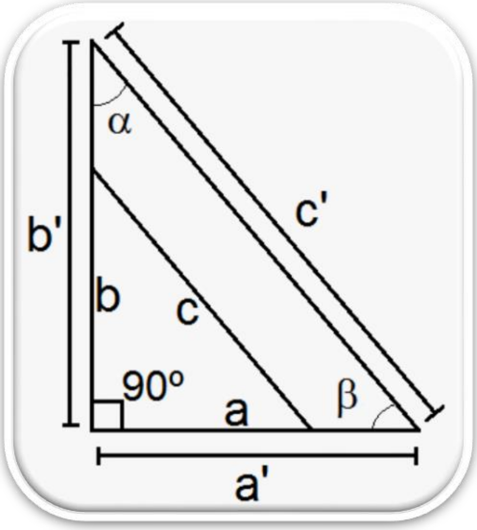

Exprimimos essas relações da seguinte forma:

| | |
|---|---|
| $sen(x)=cos\left(90^{o}-x\right)$ | $tg(x)=\frac{C.Adj.}{C.Op.}=\frac{C.Adj./Hip.}{C.Op./Hip}=\frac{sen(x)}{cos(x)}$ |
| $cos(x)=sen\left(90^{o}-x\right)$ | $tg(x)=\frac{1}{tg\left(90^{o}-x\right)}$ |

Vamos verificar posteriormente se estes conceitos são válidos para ângulos não agudos.

As relações seno, cosseno e tangente são associadas unicamente ao ângulo, independentemente do triângulo em que eles se encontram. Se considerarmos como exemplo dois triângulos retângulos semelhantes sobrepostos, como mostra a **FIGURA 13** ao lado e chamarmos a razão de semelhança de "k", teremos:

FIGURA 13



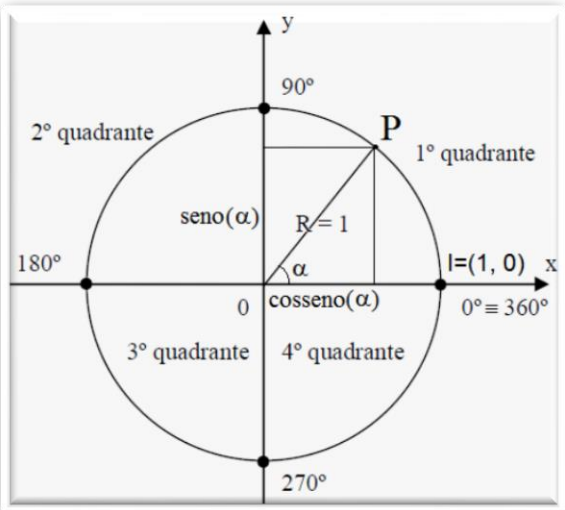

$$a' = k.a \qquad b' = k.b \qquad e \qquad c' = k.c$$

Nos dois triângulos temos: $sen(\alpha) = \frac{a}{b}$ assim como $sen(\alpha) = \frac{a'}{b'} = \frac{k.a}{k.b} = \frac{a}{b}$ e de forma análoga, podemos mostrar o mesmo para as relações cosseno e tangente.

Com os métodos dos quais dispomos até agora, não nos é possível calcular o valor de qualquer uma das três relações trigonométricas principais para ângulos maiores que $90^o$. Para isso, precisamos de um método mais genérico, capaz de englobar mais casos.

Desta forma vamos utilizar o círculo trigonométrico, tal qual como foi definido e conforme apresentado na **FIGURA 14** ao lado. Usando o círculo para calcular o seno e o cosseno de ângulos do primeiro quadrante, construímos uma medida de ângulo $\alpha$ a partir do ponto **I**=(1, 0) definido como $0^o$.

FIGURA 14



Desta forma estendemos nossas definições.

*Def*: **SENO DE UM ARCO IP** – é a ordenada do ponto P.

*Def*: **COSSENO DE UM ARCO IP** – é a abscissa do ponto P.

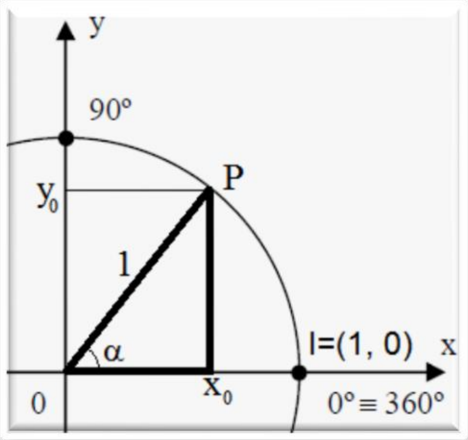
Naturalmente estas definições englobam as anteriores, pois construímos um triângulo retângulo em que um dos ângulos agudos tem exatamente a medida $\alpha$ e onde o raio é a hipotenusa de medida 1.

Repare na **FIGURA 15**, que o ponto P do círculo que evidencia o arco IP de medida $\alpha$, tem coordenadas $x_0$ e $y_0$ tais que:

$x_0$ equivale à medida do cateto adjacente a $\alpha$.

$y_0$ equivale à medida do cateto oposto a $\alpha$.

FIGURA 15



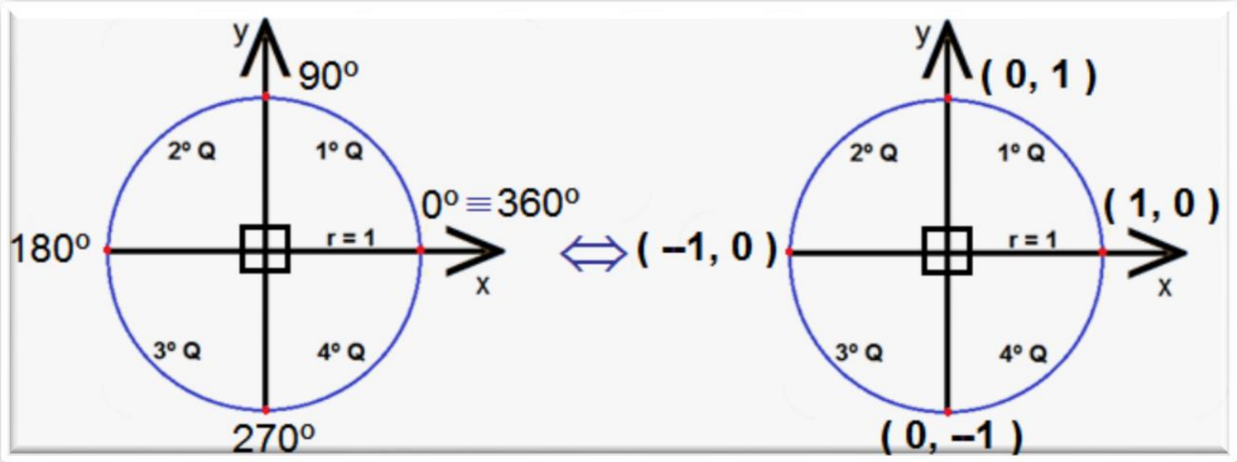

Podemos observar assim que as projeções no eixo vertical tem a medida do seno e as projeções no eixo horizontal tem a medida do cosseno do ângulo central, pois $\text{sen}(\alpha) = \frac{y_0}{1} = y_0$ e que $\cos(\alpha) = \frac{x_0}{1} = x_0$, assim a posição de cada ponto na circunferência é dada por: $P = (x_0,\ y_0) = (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$

Entretanto, não nos interessa a limitação dessas relações a ângulos só do 1º ou mesmo 2º quadrante, nem tampouco o uso da unidade grau para a medida dos ângulos, pois como já dissemos é de uma praticidade menor além disso a unidade radiano foi concebida com base em medida de comprimento e com nós queremos definir SENO e COSSENO como funções cujos domínios sejam os maiores possíveis dentro do conjunto de números reais torna-se mais adequada. Sabemos então que:

- arcos distintos com mesmas extremidades, diferem por um número de voltas;
- arcos que possuem uma extremidade no ponto **I**=(1, 0) e outra extremidade abaixo da origem dos eixos, têm seno com sinal negativo e aqueles que tiverem a outra extremidade acima da origem dos eixos terão seno com sinal positivo.

## *II-4.1 Concluindo o Cálculo de Seno para Ângulos de 0° e 90°.*

Figura 16




Pelas definições da página anterior temos que a posição de cada ponto na circunferência é dada por $P=(x_0,\ y_0)=(\cos(\alpha), \mathrm{sen}(\alpha))$, desta forma a posição de $0^o$ é dada por $(\cos(0^o), \mathrm{sen}(0^o))=(1,0)$ e desta forma $\mathrm{sen}\left(0^o\right)=0$ e $\cos\left(0^o\right)=1$.

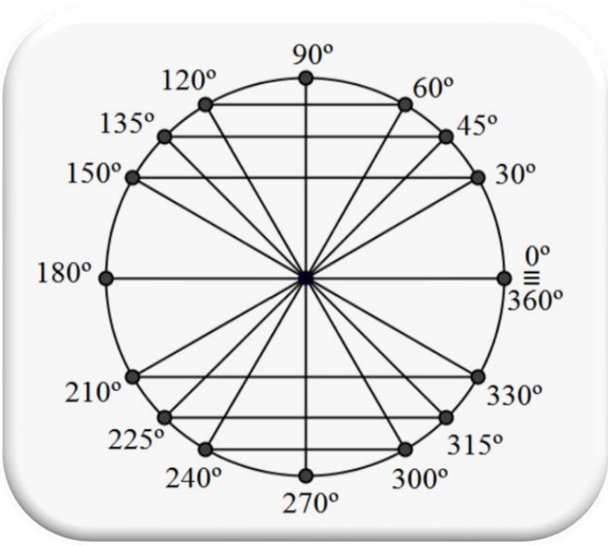
A posição de $90^o$ é dada por $(\cos(90^o), \mathrm{sen}(90^o))=(0,1)$ e desta forma $\mathrm{sen}\left(90^o\right)=1$ e $\cos\left(90^o\right)=0$, assim como a posição de $180^o$ é dada por $(\cos(180^o), \mathrm{sen}(180^o))=(-1,0)$ e desta forma $\mathrm{sen}\left(180^o\right)=-1$ e $\cos\left(180^o\right)=0$ além da posição de $270^o$ ser dada por $(\cos(90^o), \mathrm{sen}(90^o))=(0,-1)$ e desta forma $\mathrm{sen}\left(270^o\right)=-1$ e $\cos\left(270^o\right)=0$

Devido às relações expostas na **PÁGINA 13**, podemos obter também tangente destes arcos do 1º quadrante, compondo assim uma tabela para os ARCOS ou ÂNGULOS NOTÁVEIS do 1º quadrante:

| TABELA DE ARCOS NOTÁVEIS DO 1º QUADRANTE | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ângulos | $0^o$ ou 0 rad | $30^o$ ou $\pi/6$ rad | $45^o$ ou $\pi/4$ rad | $60^o$ ou $\pi/3$ rad | $90^o$ ou $\pi/2$ rad |
| seno | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| cosseno | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| tangente | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | x—x—x—x |

Devido à simetria e a facilidade de identificarmos congruência de triângulos no círculo trigonométrico podemos obter os senos, cossenos e possíveis tangentes dos **ÂNGULOS NOTÁVEIS** da primeira volta, estendendo nossa tabela a todos os **ARCOS** ou **ÂNGULOS NOTÁVEIS DA 1ª VOLTA.**

**FIGURA 17**

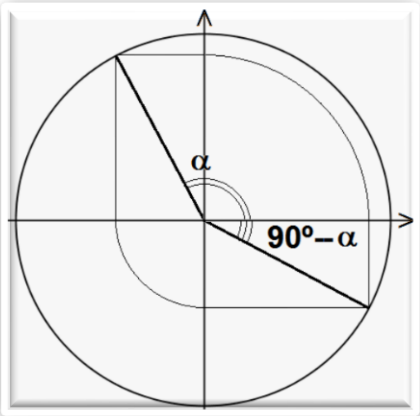



**LEGENDA IMPORTANTE:**

A partir de agora, quando no texto aparecer, juntamente com um número, este símbolo “₪”, ele estará indicando o número constante do menu da página do HTML – TCC de Ensino de Gráficos Trigonométricos – Flávio B. Prado, na qual existirá um conteúdo interativo que auxilie a compreensão.

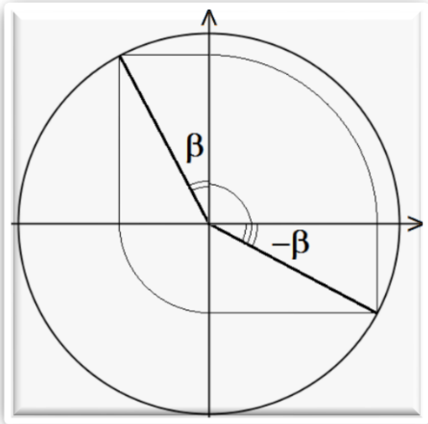
### *II-4.2 Verificando se* $\mathbf{sen(x) = cos\left(90^o - x\right)}$ *e* $\mathbf{cos(x) = sen\left(90^o - x\right)}$ *são Válidos para Ângulos não Agudos.*

FIGURA 18




Seja $0 < \beta < 90^o$ e $\alpha = \beta + 90^o$ podemos verificar facilmente que $-\beta = 90^o - \alpha$ e desta forma concluímos:

FIGURA 19




$sen(\alpha) = sen\left(\beta + 90^o\right) = cos(-\beta) = cos\left(90^o - \alpha\right)$, uma conclusão imediata de congruência de triângulo pelo caso **ALA** [90º, hipotenusa (raio), β], assim como podemos calcular $sen\left(90^o - \alpha\right) = cos\left(90^o - \left(90^o - \alpha\right)\right) = cos(\alpha)$. As mesmas considerações feitas para ângulos do terceiro e quarto quadrantes terão comprovações igualmente simples pela congruência de triângulos.

FIGURA 20

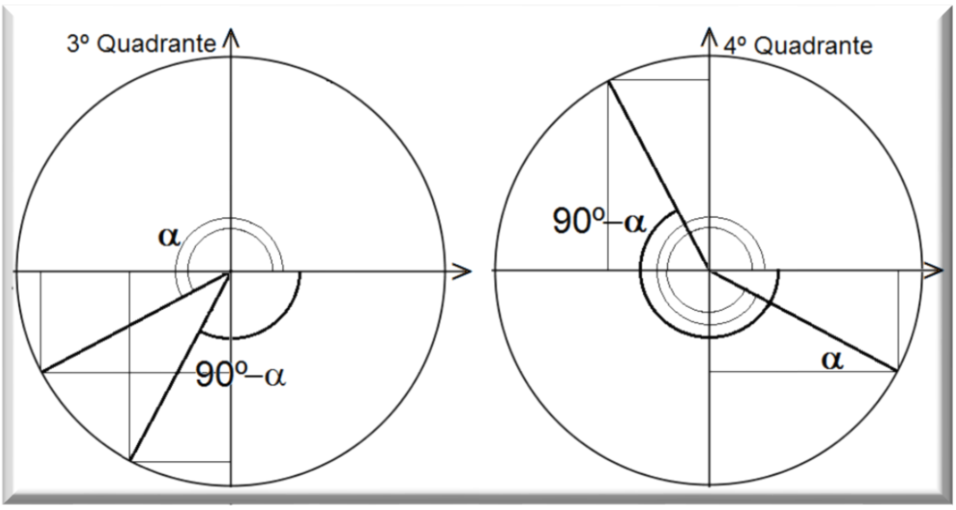
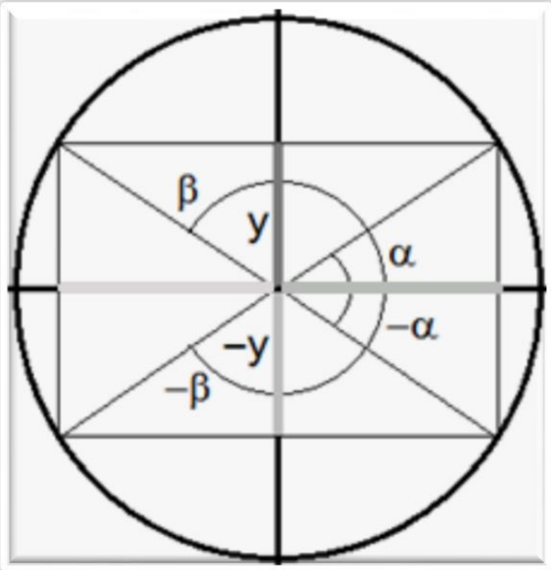


FIGURA 21




Neste modelo de apresentação aproveitamos para verificar que como obtemos seno e cosseno pelas projeções ortogonais e orientação dos eixos, percebemos uma fácil conclusão para uma relação entre senos e cossenos de ângulos simétricos.

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

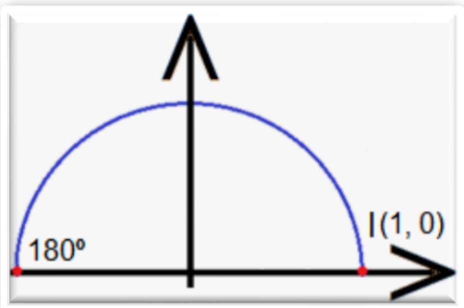
além de

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Nos referimos a **ARGUMENTO DE UMA FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA**, quando falamos de um ângulo, um arco ou ainda uma outra função que gere valores reais que estão no domínio da **FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA**. O argumento é a expressão entre parênteses nas funções trigonométricas, no caso da função seno temos: $\text{sen}(\text{"argumento"})$. Sabemos que existe um sistema mais adequado para medida de ângulos do que “graus”. Como já dissemos, a medida em graus leva em consideração a proporcionalidade entre o ângulo e a volta completa de $360^o$.

## *II-5 O DOMÍNIO DA FUNÇÃO SENO.*

FIGURA 22




No **CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO**, cujo raio é igual a 1, o comprimento do arco de $180^o$ é $\pi$; neste caso sabemos também que:

Comprimento de Arco = Medida em Radiano.

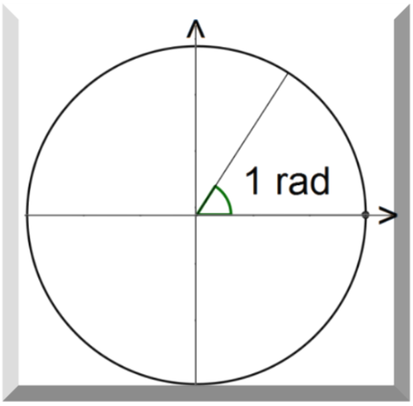
Sendo assim, se x $\in \mathbb{R}$, definimos o seno de um número real “x” como o seno do arco de “x” radianos.

Tomando por referência o CÍRCULO ou a CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA, apresentada no início do capítulo, consideremos a relação direta entre ângulo em grau e radiano, a partir do ponto **I**=(1, 0) podemos relacionar qualquer ângulo a números reais identificando ângulos com sua medida em radiano.

**EXEMPLO 2.01**

sen(1) é o seno do arco de 1 rad **FIGURA 23** que tem valor aproximado de 0,841.

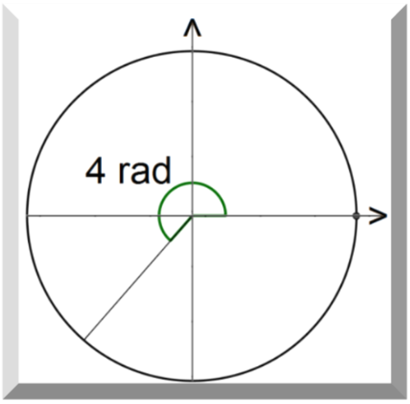
FIGURA 23




**EXEMPLO 2.02**

sen(4) é o seno do arco de 4 rad **FIGURA 24** que tem valor aproximado de –0,756.

FIGURA 24




Sendo assim entendemos sen(x) como uma função real de variável real e verificamos que o conceito adequado para valores de argumento de funções trigonométricas é o que entende ângulo por sua medida em radiano, pois como já dissemos, a construção do conceito de radiano foi a partir da ideia de comprimento de arco e todo comprimento é um valor real positivo. No CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO temos estabelecidas todas as medidas reais.

## CAPÍTULO III – FUNÇÃO SENO.

### III-1 DESCRIÇÃO

Definimos a função seno como a relação que associa a cada x real, o seno de (x), denotado por: $f(x) = \text{sen}(x)$

I. A função está definida para todos os valores reais de x.

II. Faz corresponder a cada número real "x" o seno de "x" conforme definido no capítulo anterior.

### III-1.1 CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO.

Utilizando a tabela completa para seno dos arcos notáveis da 1ª volta:

| x | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $3\pi/4$ | $5\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| seno de (x) | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ |

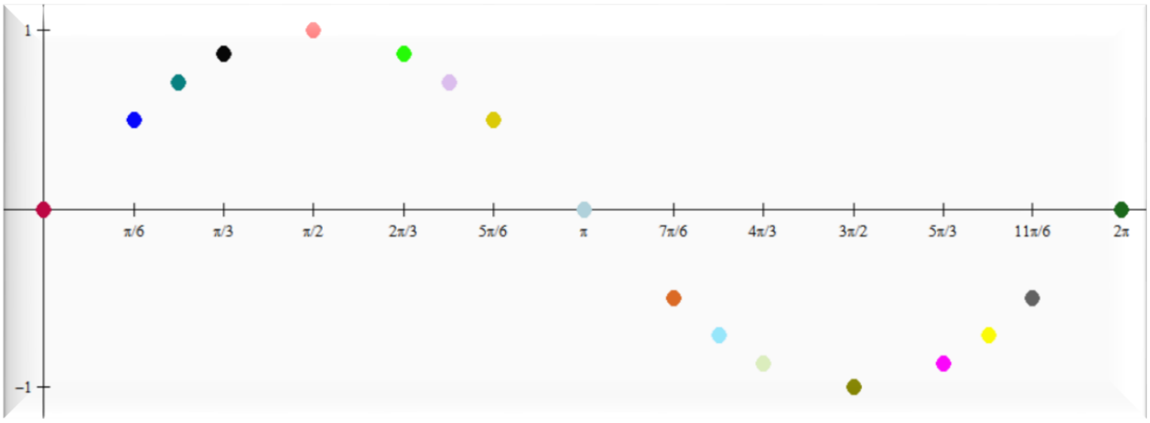
| x | $\pi$ | $7\pi/6$ | $5\pi/4$ | $4\pi/3$ | $3\pi/2$ | $5\pi/3$ | $7\pi/4$ | $11\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| seno de (x) | 0 | $-1/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-1$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-1/2$ |

Para podermos trabalhar melhor no sistema cartesiano vamos considerar o valor aproximado com três casas decimais para:

$\sqrt{2} = 1{,}414$, $\sqrt{2}/2 = 0{,}707$, $\sqrt{3} = 1{,}732$ e $\sqrt{3}/2 = 0{,}866$.

Assim podemos marcar os pontos e ter uma ideia do traçado da função seno.

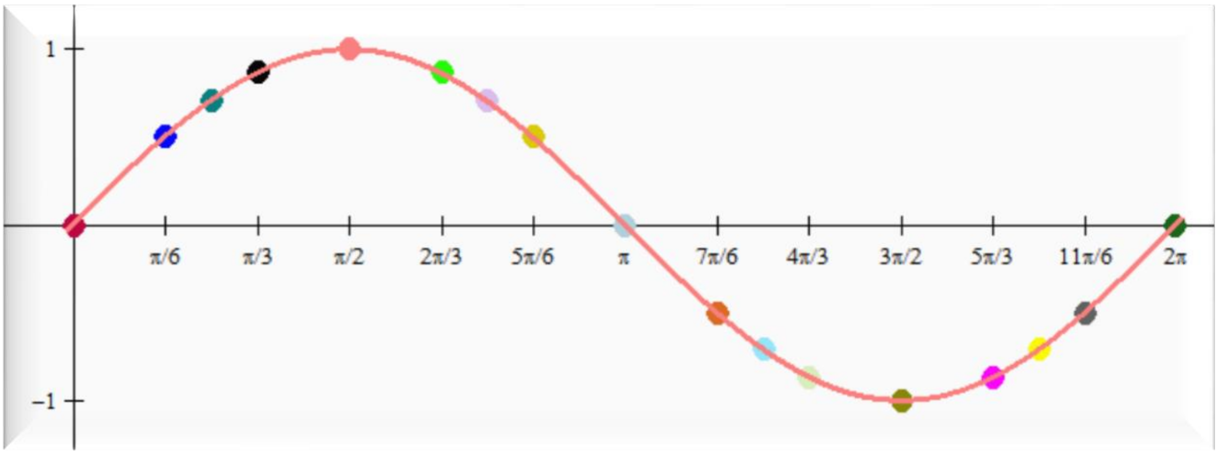
FIGURA 25




Como $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função e associa a cada "x" real um único $y = f(x)$ também real, está definida para todo número real, além de ser uma curva suave, podemos traçar seu gráfico.

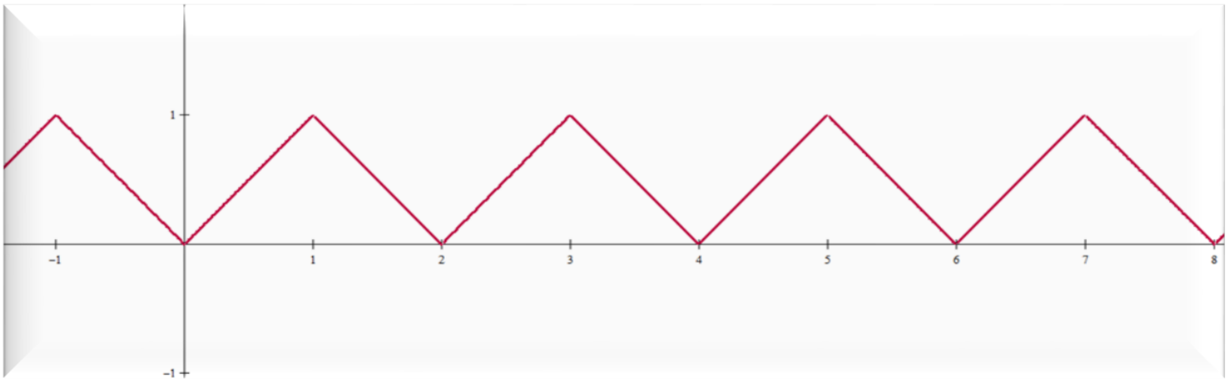
### ESBOÇO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO EM UM PERÍODO.

FIGURA 26



***Def*:** **Função Periódica** – $f(x)$ é dita uma função periódica com período $\rho$ quando $f(x+\rho)=f(x)$ para todo "x" de seu domínio.

**Figura 27**




Pela definição de **Função Periódica** acima, a função Zig-zag exibida na **Figura 27** é periódica de período 2, mas também podemos dizer que é periódica de período 4, 6, 8,... ; enfim é periódica de período "2p", para todo "p" natural não nulo. Desta forma convenciona-se que o período $\rho$ da função é o menor valor positivo para o qual isto aconteça.

## ***III-1.2 Características Fundamentais.***

- O gráfico da função Seno é uma curva chamada Senóide. Os valores da imagem da função variam de –1 a 1; ou seja, tem valor mínimo –1 e máximo 1.
- A Função Seno é uma função ímpar, $f(-x)=-f(x)$; ou seja $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}(x)$, como podemos identificar na comprovação da **Página 19**, devido à projeção ortogonal no eixo vertical do **Círculo Trigonométrico**.
- No estudo do **Círculo Trigonométrico**, no **Capítulo II**, verificamos que arcos, ou ângulos congruentes; tem as mesmas extremidades, o que implica mesmas projeções. Sendo assim constatamos que senos de arcos "$\alpha$ + 2k $\pi$", onde k é inteiro e $\alpha$ é um real qualquer, tem exatamente o mesmo valor e Isto é

característica de **PERIODICIDADE**; portanto $f(x) = \text{sen}(x)$ é dita uma função periódica de período $2\pi$ e para todo valor real $\alpha$, temos que:

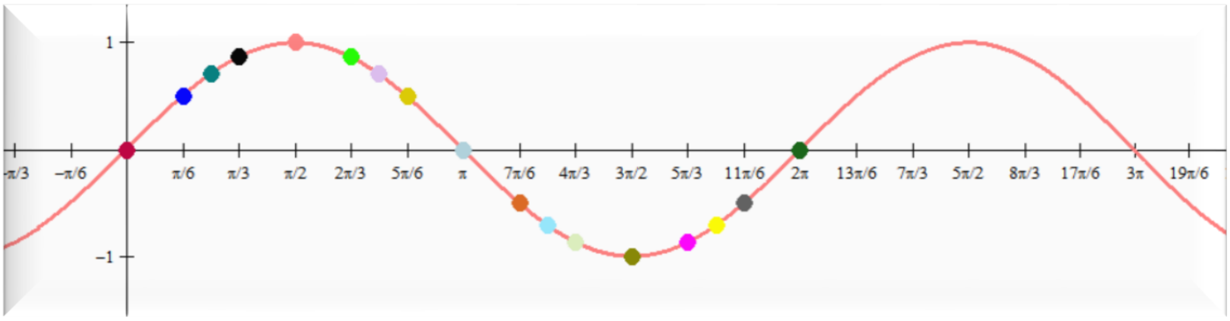
$$\ldots = \text{sen}(\alpha - 4\pi) = \text{sen}(\alpha - 2\pi) = \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha + 2\pi) = \ldots = \text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \ldots$$

O significado de **PERIODICIDADE** é que parte do gráfico se repete após determinada distância (**PERÍODO**), que neste caso é $2\pi$ e a cada $\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\beta = \alpha + 2\kappa\pi$, para qualquer valor inteiro de $\kappa$, temos que $\text{sen}(\beta) = \text{sen}(\alpha)$.

Com este entendimento podemos estender nosso gráfico para todos os reais.

**GRÁFICO DE $f(x)$=SEN(X).**

**FIGURA 28**




- Observamos que $f(x) = \text{sen}(x)$ é crescente no primeiro e no último um quarto do seu período e é decrescente no segundo e terceiro quarto do período.
- Observamos ainda que $f(x) = \text{sen}(x)$ é positiva na primeira metade do período, sendo portanto negativa na segunda metade. A função é nula para os valores 0, $\pi$ e $2\pi$ no período $[0, 2\pi]$.
- Podemos resumir que para o traçado do gráfico em um período da função $\text{sen}(x)$ temos que:

Iniciar o período em 0 e terminar em $2\pi$, facilita a identificação do período;

a imagem de “0” é “0”; ou seja, zero é “um zero” da função, portanto o ponto $(0, 0)$ está no gráfico;

o ponto de máximo em $[0,\ 2\pi]$ é $\left(\pi/2\,,1\right)$ $1/4$ do período;

o ponto central do período é “um zero” da função, portanto o ponto $(\pi,0)$ está no gráfico;

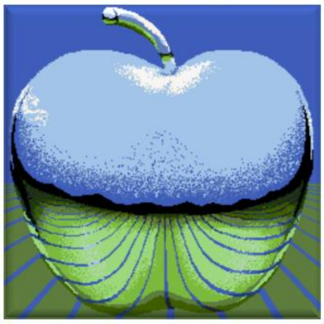
o ponto de mínimo em $[0,\ 2\pi]$ é $\left(3\pi/2\,,-1\right)$ $3/4$ do período;

a imagem de “$2\pi$” é “0”; ou seja, $2\pi$ é “um zero” da função, portanto o ponto $(2\pi,0)$ está no gráfico no fim do período.

₪ - 1

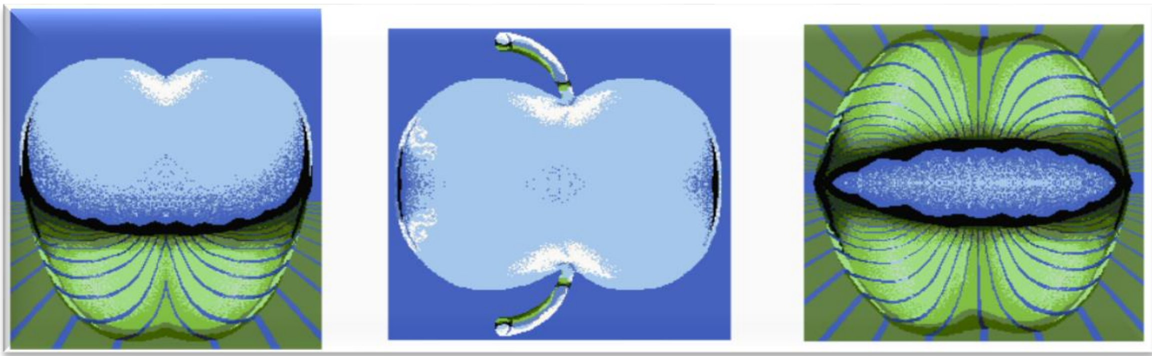
*Def*: **SIMETRIA AXIAL** - É a simetria relativa a uma reta, também chamada de reflexão.

FIGURA 29



**EXEMPLO 3.01** – Podemos exibir, abaixo, três tipos de simetrias axiais feitas com recortes da **FIGURA 29**. Sejam simetrias relativas ao eixo horizontal ou vertical.

FIGURA 30



**EXEMPLO 3.02 –** Simetrias relativas aos eixos “X” e “Y”.

FIGURA 31

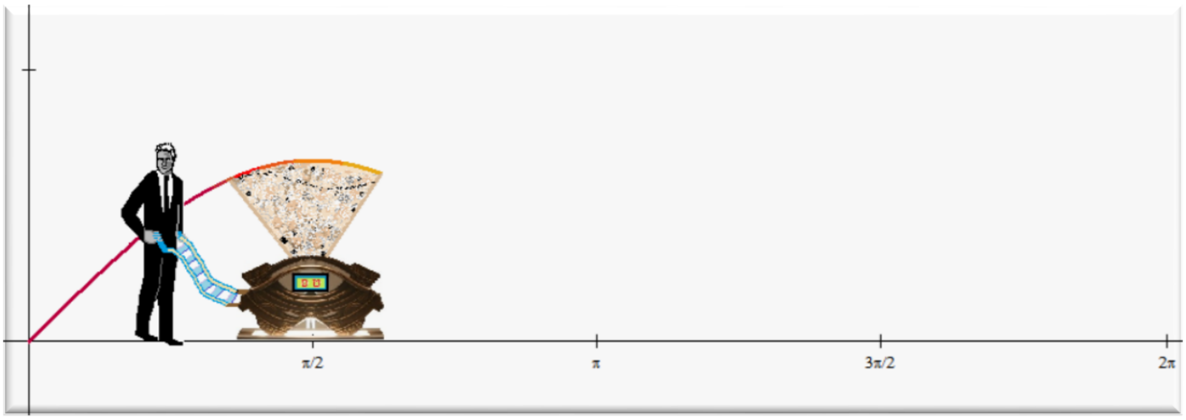
Dizemos que **PARÂMETRO** é um elemento importante que devemos levar em conta, para avaliar uma situação ou compreender um fenômeno em detalhe. É uma denominação, característica, opção ou valor que alguém acrescenta ou altera, ao executar um cálculo, a fim de modificá-lo ou ajustá-lo. Em uma expressão, equação ou função é letra distinta da variável, cujo valor numérico pode ser fixado arbitrariamente.

## *III-2 ALTERAÇÃO DE PARÂMETRO.*

Para pensarmos em qual tipo de modificação o gráfico sofre com a alteração de algum parâmetro, devemos nos fazer a seguinte pergunta: se nós tivéssemos que ensinar ou programar uma máquina de fazer gráficos, a qual nós deveríamos passá-la sobre cada elemento do domínio, para que ela calculasse e marcasse os pontos num sistema cartesiano, como nós ensinaríamos ou faríamos a programação desta máquina?

Vem-nos a cabeça que: o que a máquina está lendo é o argumento da função e pelo que já estudamos da função seno, se a máquina fizer a leitura de um período completo desde o “0” (zero) até “$2\pi$”, ela deverá exibir uma curva sinuosa como a da **FIGURA 26**. Se existe algo que pode modificar o cálculo dos senos na leitura dos argumentos, são os parâmetros dentro do argumento, assim como os parâmetros fora do argumento podem modificar os valores dos senos esperados para argumentos conhecidos.

FIGURA 32




Como perceberíamos ter passado a máquina por um período da função?

FIGURA 33

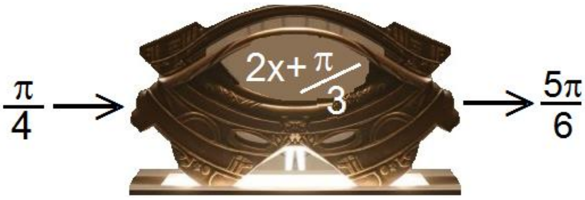
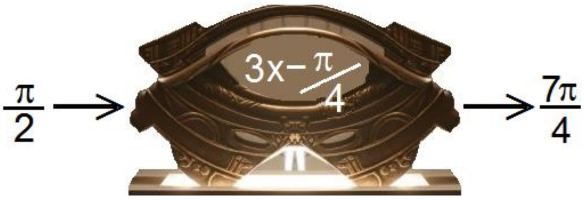



FIGURA 34




Observamos que os valores calculados no argumento, não são os mesmos lidos por “x”.

As expressões que estão no argumento e fora dele, são caracterizadas pela Função Afim $g(x) = ax + b$, desta forma podemos dizer que estamos estudando uma composição da Função Seno, com a Função Afim:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \text{sen}(g(x)) = \text{sen}(ax+b).$$

Assim como temos $h(x) = cx + d$ para: $h \circ f(x) = h(f(x)) = c\, f(x) + d = c\,\text{sen}(x) + d$.

Na forma mais geral estudaremos a composições como:

$$h \circ f \circ g(x) = h\big(f\big(g(x)\big)\big) = c\, f\big(g(x)\big) + d = c\,\text{sen}(g(x)) + d = c\,\text{sen}(ax+b) + d.$$

Devemos estudar então quais transformações o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, sofre, pela alteração dos parâmetros nestas composições .

## III-2.1 ALTERAÇÃO DE PARÂMETRO NO ARGUMENTO.

### O parâmetro "a" de $f_1(x)=sen(ax)$.

É necessário ressaltar que a análise a seguir, é feita para a $\neq$ 0, pois do contrário a função seria uma função constante $f_1(x) = \text{sen}(0x) = \text{sen}(0) = 0$.

A primeira coisa que devemos calcular numa função seno com alteração de parâmetros é o seu período, pois sabemos exatamente qual o comportamento da função $f(x) = \text{sen}(x)$, em um período, de acordo com a variação de seu argumento. Quando o valor do argumento for:

"0" (valor inicial no período), a imagem será "0";

"$\pi/2$" ($1/4$ do período), a imagem será "1";

"$\pi$" ($1/2$ do período), a imagem será "0";

"$3\pi/2$" ($3/4$ do período), a imagem será "–1";

"$2\pi$" (valor final no período), a imagem será "0".

Na função $f_1(x) = \text{sen}(ax)$, vemos que para o argumento "ax" variar de 0 a $2\pi$, basta que "x" varie de 0 a $2\pi/a$ (se a>0) ou que "x" varie de $2\pi/a$ a 0 (se a<0), desta forma podemos concluir que no argumento da função terá passado, calculado, percorrido ou contado todos os números de um período completo.

Devemos lembrar também que quando o sinal do parâmetro "a" for negativo, basta pensarmos que estamos construindo o gráfico, fazendo uma leitura do argumento no sentido negativo (simetria relativa ao eixo Y), como o sinal não altera a velocidade com que a função completa o período, vemos que o período $\rho$ da função $f_1(x) = \text{sen}(ax)$ é calculado como $\rho = \frac{2\pi}{|a|}$ , até porque período é uma distância e portanto deve ser um valor positivo.

Desta forma identificamos que quanto maior o valor do módulo de "a" mais rápido a função completará seu período, o que implica diretamente no fato de que a função tenha um período menor; portanto quanto menor for o valor do módulo de "a" maior será o período. Como "a" é um **PARÂMETRO MULTIPLICADOR**, observamos que as variações da função se darão de forma proporcional as variações da função $f(x) = \text{sen}(x)$ que tem período $2\pi$; ou seja, as variações no período da função de argumento "ax" são as mesmas da função original levando em conta as frações: 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1 do período. Desta forma se o valor do argumento "ax" for:

"0", a imagem será "0";

" $\frac{1}{4}$ " do período = " $\frac{\pi}{2|a|}$ ", a imagem será "1";

" $\frac{1}{2}$ " do período = " $\frac{\pi}{|a|}$ ", a imagem será "0";

" $\frac{3}{4}$ " do período = " $\frac{3\pi}{2|a|}$ ", a imagem será "–1";

O valor do fim do período = " $\frac{2\pi}{|a|}$ ", a imagem será "0".

**EXEMPLO 3.03**

$f(x) = \text{sen}(5x)$. Temos que $\rho = \frac{2\pi}{5}$ , portanto construímos a tabela dos dados de um período usando os valores das frações utilizadas na construção quando o período era $2\pi$, além das imagens já conhecidas dos arcos notáveis da 1ª volta:

| (x) | 0 | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{2\pi}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (5x) | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

Marcando os pontos. Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}(5x)$.

FIGURA 35

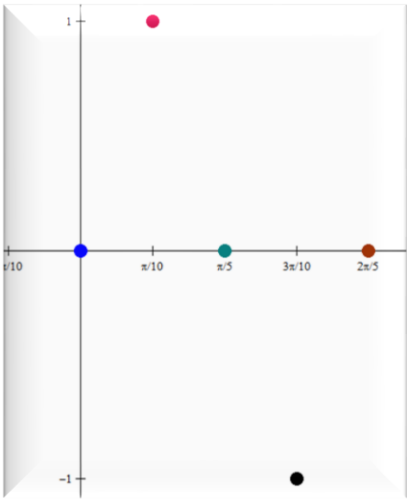
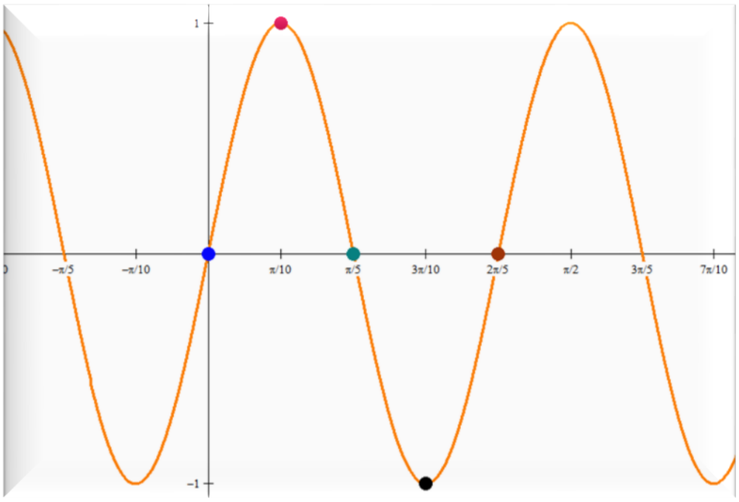
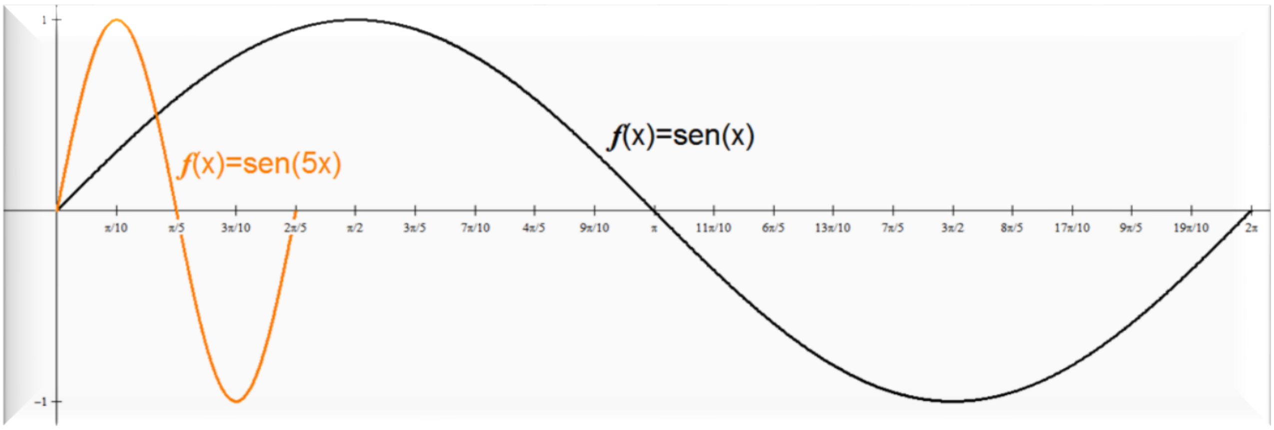


FIGURA 36



Em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ tivemos uma contração do período, que era $2\pi$ e passou a ser $2\pi/5$ .

FIGURA 37



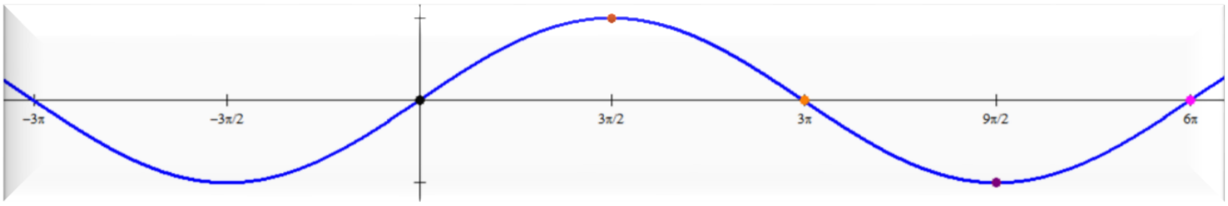

**EXEMPLO 3.04**

$f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$. Temos que $\rho = 6\pi$, assim também construímos a tabela dos dados de um período utilizando os valores proporcionais correspondentes ao período $2\pi$ e as imagens da tabela de senos dos arcos notáveis da 1ª volta:

| (x) | 0 | $3\pi/2$ | $3\pi$ | $9\pi/2$ | $6\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x/3\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(x/3\right)$.

FIGURA 38

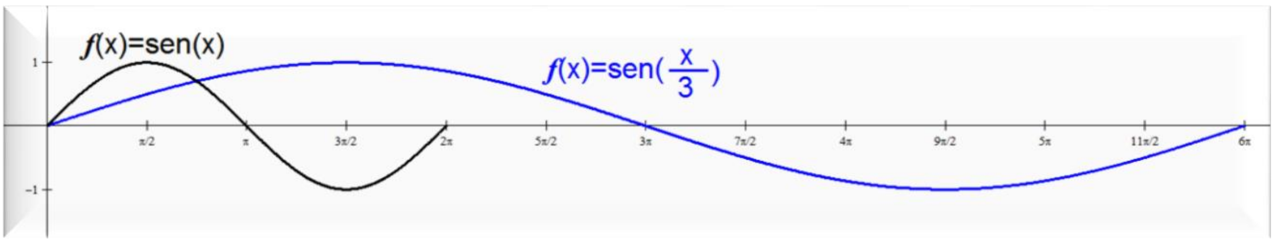



De acordo com o módulo do parâmetro "a" a função $f_1(x) = \text{sen}(ax)$ exibe um período maior ou menor, observamos que o traçado da função alonga ou encolhe o formato que delineia o gráfico da função em seu período.

A alteração provocada pela mudança deste parâmetro, portanto, é uma **DEFORMAÇÃO**, ajustando o desenho da curva em um período mais curto ou mais longo. Este movimento de estender ou retrair o período é causado pela alteração de um **PARÂMETRO MULTIPLICADOR** no argumento.

Em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ tivemos uma expansão do período, que era $2\pi$ e passou a ser $6\pi$.

FIGURA 39




₪ - 2

***O parâmetro "b" de $f_2(x) = sen(x+b)$.***

Para pensarmos no que ocorre quando alteramos o parâmetro “b”, basta refletirmos sobre o que sabemos a respeito do traçado do gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$. Conhecemos valores chaves no domínio e suas respectivas imagens, como por exemplo a tabela apresentada na **PÁGINA 21**.

Ao iniciarmos nossa análise devemos constatar primeiramente que o valor do parâmetro “a” é 1 o que implica que o gráfico tem o período 2π, mas por outro lado quando variamos sequencialmente “x” de acordo com a tabela, não obtemos no argumento os valores sequenciais da tabela. Não teríamos dificuldade alguma em traçar o gráfico se os valores sequenciais do argumento fossem os mesmos da tabela, neste caso devemos evidenciar no eixo “X” os valores do domínio que façam com que os valores do argumento coincidam com os da tabela. Portanto queremos:

$$x_1 + b = 0 \Rightarrow x_1 = -b, \quad x_2 + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} - b, \quad x_3 + b = \pi \Rightarrow x_3 = \pi - b,$$

$$x_4 + b = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{3\pi}{2} - b \quad \text{e} \quad x_5 + b = 2\pi \Rightarrow x_5 = 2\pi - b.$$

Estabelecendo assim um novo grupo de valores do domínio, dos quais conhecemos a sequência de imagens.

**EXEMPLO 3.05**

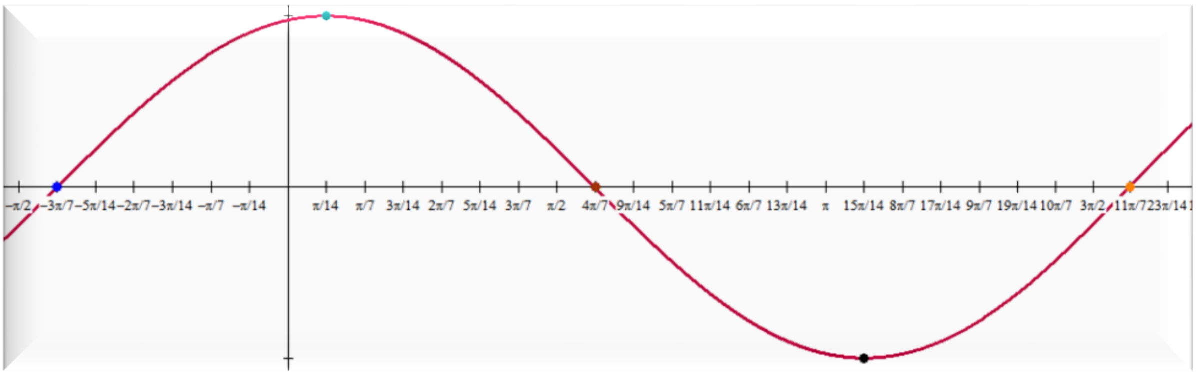
$f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{7}\right)$. Temos que $\rho = 2\pi$, observe que nas tabelas e no texto até agora apresentado, não há indicação do cálculo de $\text{sen}\left(3\pi/7\right)$, nós não conhecemos este valor e tão pouco necessitamos dele. A facilidade deste método está no fato de podermos escolher os elementos do domínio, dos quais conheçamos as imagens. Assim para construímos facilmente a tabela dos dados de um período utilizando as imagens da tabela de senos dos arcos notáveis da 1ª volta, devemos recalcular os valores de “x” que produzam no argumento os valores dos arcos notáveis.

Façamos $x+\frac{3\pi}{7}=0 \Rightarrow x=-\frac{3\pi}{7}$ e como o período é $2\pi$, calculamos mais quatro elementos da P.A. cujo primeiro termo é $-\frac{3\pi}{7}$ e a razão $\frac{\pi}{2}$ ($1/4$ do período).

| (x) | $-3\pi/7$ | $\pi/14$ | $4\pi/7$ | $15\pi/14$ | $11\pi/7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x+3\pi/7\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

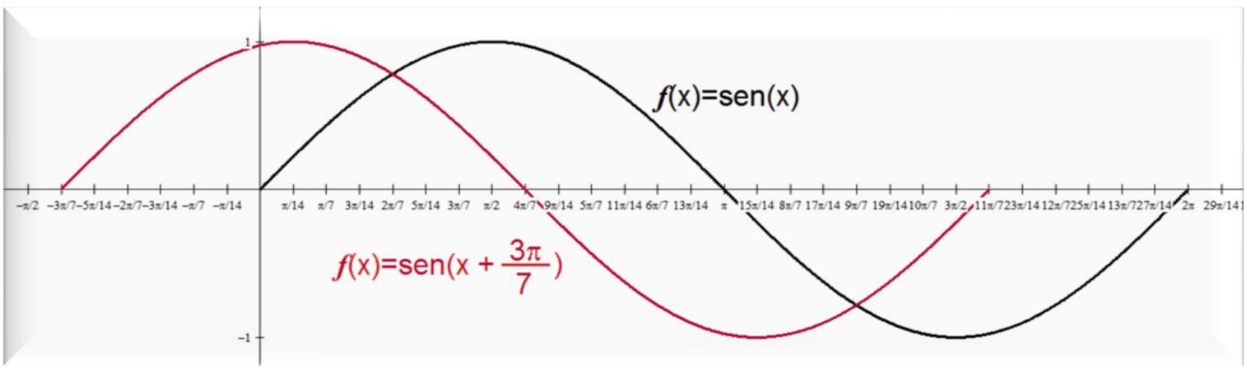
Esboçando o Gráfico de $f(x)=\text{sen}\left(x+3\pi/7\right)$.

FIGURA 40



Observe que continuamos a fazer o mesmo traçado para a função seno, apenas agora iniciando pelo ponto $\left(-3\pi/7\,,0\right)$, no lugar de iniciar em $(0,0)$, mas com o mesmo período $2\pi$ distribuído a partir de $-3\pi/7$ .

FIGURA 41



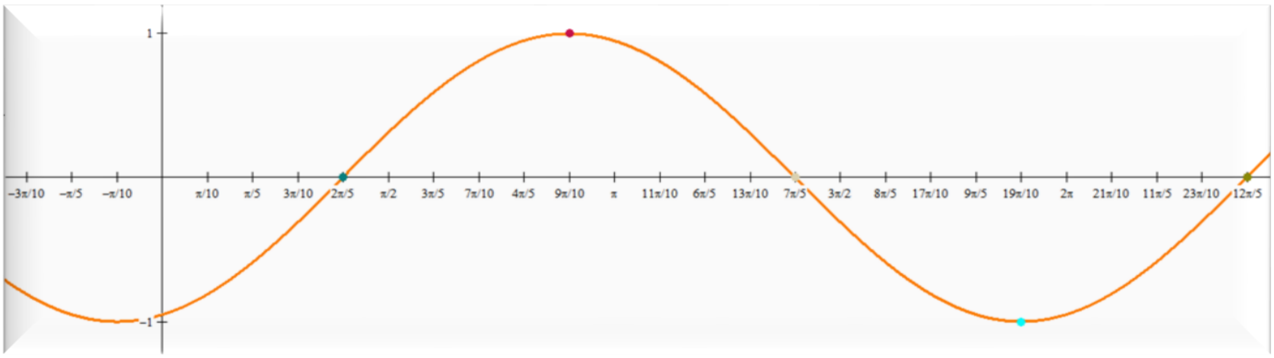
**EXEMPLO 3.06**

$f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)$. Temos que $\rho = 2\pi$, então vamos construir a tabela dos dados de um período utilizando a técnica do exemplo anterior além de recalcular os valores de "x" que produzam no argumento os valores dos arcos notáveis. Façamos $x - \frac{2\pi}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5}$ e como o período é $2\pi$, calculamos mais quatro elementos da P.A. cujo primeiro termo é $\frac{2\pi}{5}$ e a razão $\frac{\pi}{2}$.

| (x) | $2\pi/5$ | $9\pi/10$ | $7\pi/5$ | $19\pi/10$ | $12\pi/5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x - 2\pi/5\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

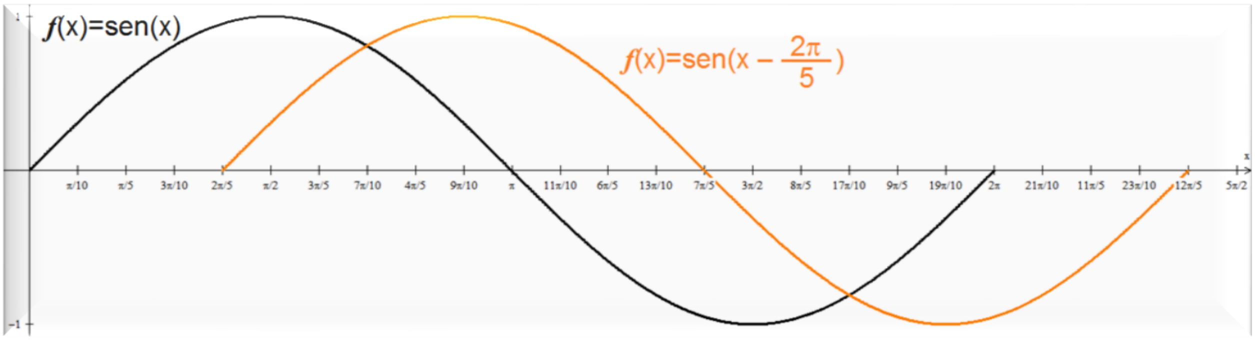
Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(x - 2\pi/5\right)$.

**FIGURA 42**




Assim como no gráfico do **EXEMPLO 3.05**, anterior a este, podemos verificar que estamos fazendo o mesmo traçado para a função seno, mas desta vez iniciando pelo ponto $\left(2\pi/5, 0\right)$, no lugar de iniciar em $(0, 0)$, ainda que com o mesmo período $2\pi$, só que agora, distribuído a partir de $2\pi/5$.

FIGURA 43



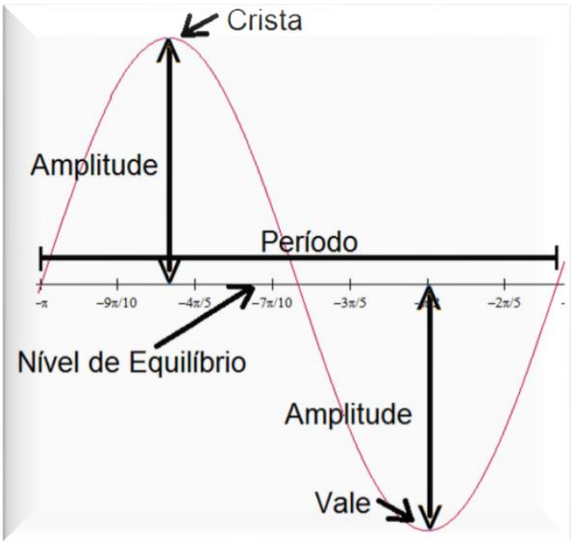

Observamos que a alteração do parâmetro “b” em $f_2(x) = \text{sen}(x+b)$, arrasta o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, de forma que no lugar de iniciar o traçado padrão de um período no ponto $(0,0)$, inicia no ponto $(-b,0)$; ou seja, produz um movimento se **TRANSLAÇÃO HORIZONTAL** no gráfico, este movimento é referente à alteração de um **PARÂMETRO ADITIVO** no argumento.

₪ - 3

### III-2.2 ALTERAÇÃO DE PARÂMETRO FORA DO ARGUMENTO.

*Def*: **ONDA** - É qualquer perturbação (pulso) que se propaga em um meio. É caracterizada por uma curva de formato sinuoso. A Ondulatória, que é a parte da Física que estuda as ondas, classifica-as como: mecânicas (que são todas as ondas que precisam de um meio material para se propagar) e eletromagnéticas (que são as que não precisam de um meio material para se propagar).

FIGURA 44




Os principais elementos de uma onda estão na **FIGURA 44** acima, posteriormente abordaremos melhor este assunto aprendendo sobre o **SOM**.

*Def.* **AMPLITUDE DE ONDA** – É a distância do nível de equilíbrio a crista ou ao vale de uma onda, quanto maior a amplitude maior é a quantidade de energia transportada.

### *O parâmetro “c” de $f_3(x) = c\ sen(x)$.*

As análises estão feitas para valores de c ≠ 0, pois do contrário estaríamos com gráficos de uma função constante $f_3(x) = 0\,\mathrm{sen}(x) = 0$.

Para raciocinarmos sobre qual o tipo de modificação, uma alteração no parâmetro “c”, causa em $f_3(x) = c\,\mathrm{sen}(x)$, basta verificarmos que como os pontos dos gráficos são do tipo $(\,x,\ f_3(x)\,)$ e que como “c” é um **PARÂMETRO MULTIPLICADOR** e multiplicará os valores das ordenadas, a alteração será na amplitude alcançada pelas ondas.

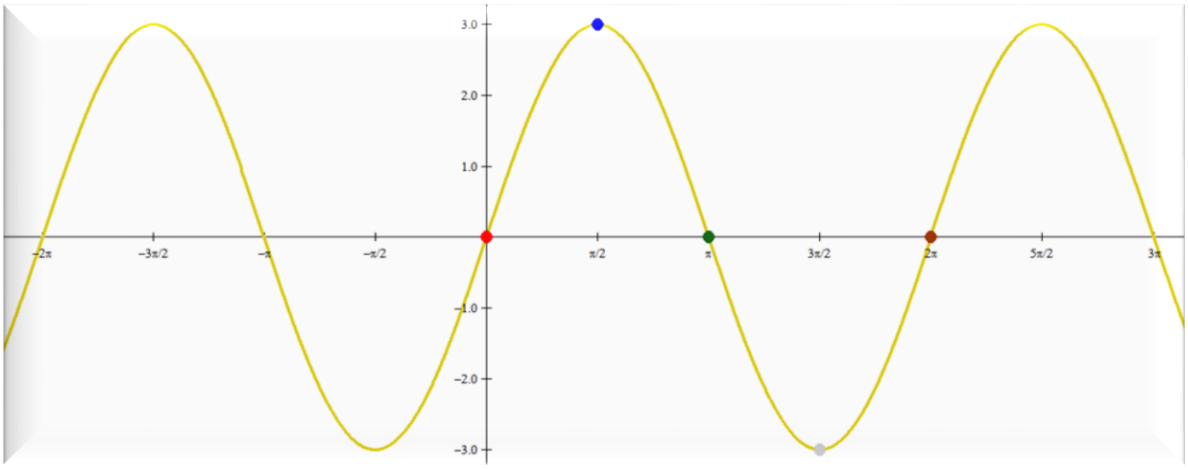
Sabemos que as imagens de $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ variam de “–1” a “1”; ou seja, $-1 \le \mathrm{sen}(x) \le 1$, então podemos concluir que as imagens de $f_3(x) = c\,\mathrm{sen}(x)$ variam de “–c” a “c”; pois $-c \le c\,\mathrm{sen}(x) \le c$, portanto a amplitude da onda, será alterada da medida “1” para a medida de “$|c|$”.

**EXEMPLO 3.07**

$f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x)$. Temos que $\rho = 2\pi$, portanto construímos facilmente a tabela dos dados de um período, utilizando os valores da função de período 2π e dos triplos dos valores das imagens da tabela de senos dos arcos notáveis da 1ª volta:

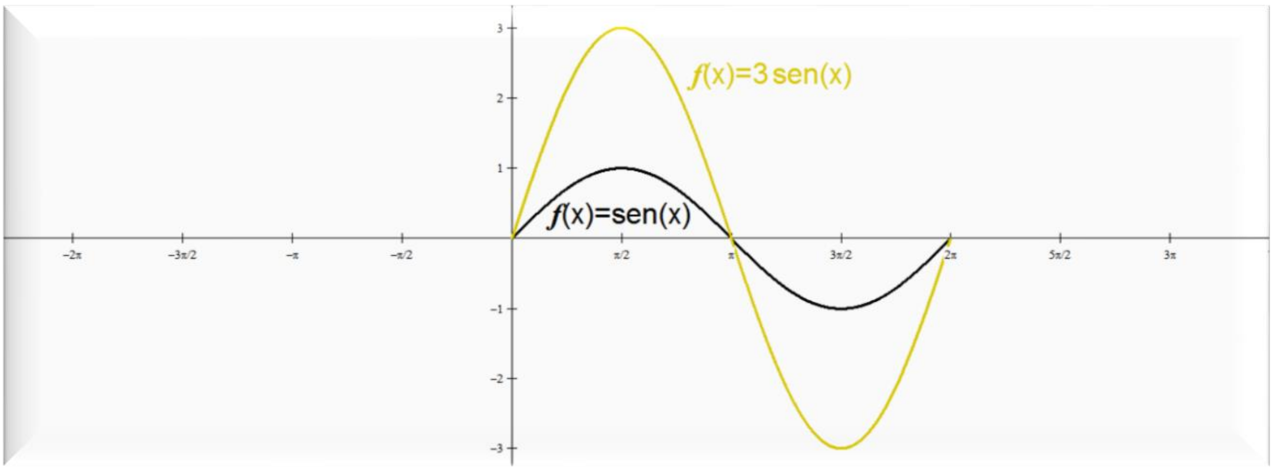
| (x) | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 seno de (x) | 0 | 3 | 0 | –3 | 0 |

**FIGURA 45**




A mudança provocada pela alteração deste parâmetro é uma **DEFORMAÇÃO**: alongamento ou encolhimento da amplitude da curva no seu período. Este movimento de estender ou retrair a amplitude da curva é causado pela alteração de um **PARÂMETRO MULTIPLICADOR** fora do argumento.

**FIGURA 46**



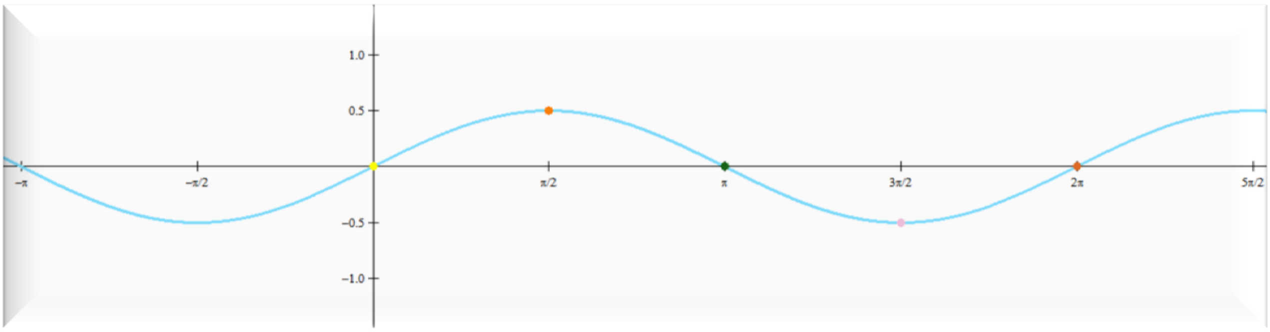

**EXEMPLO 3.08**

$f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{2}$. Temos que $\rho = 2\pi$, então construímos a tabela dos dados de um período, utilizando os valores da função de período $2\pi$ e das metades dos valores das imagens da tabela de senos dos arcos notáveis da 1ª volta:

| $(x)$ | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1/2$ seno de $(x)$ | 0 | $1/2$ | 0 | $-1/2$ | 0 |

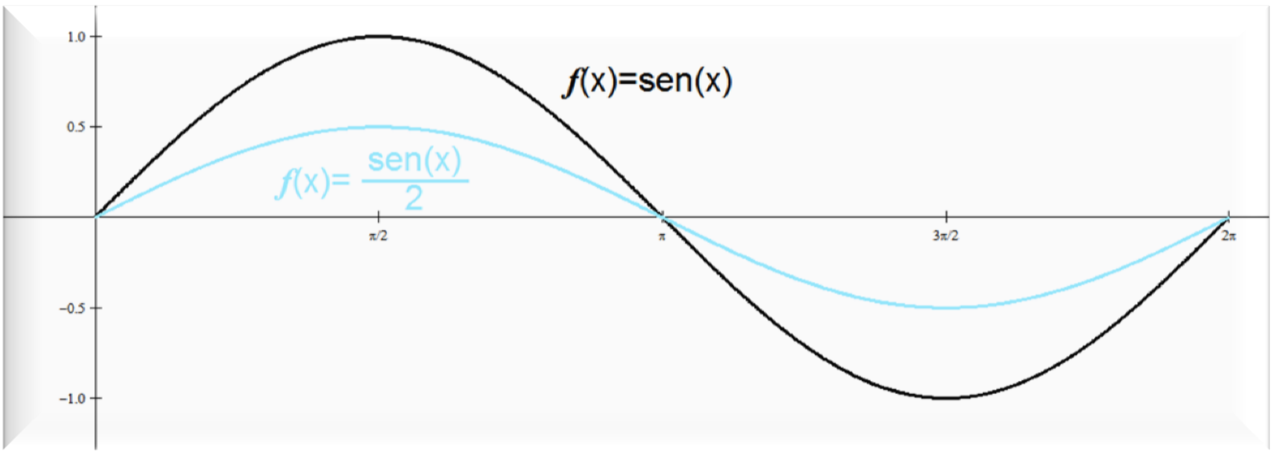
Esboçando o Gráfico de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2}$.

FIGURA 47




O movimento ou alteração sofrida foi a de contração da AMPLITUDE pois $c < 1$.

FIGURA 48




₪ - 4

## ***O parâmetro "d" de $f_4(x) = sen(x)+d$.***

Para raciocinarmos sobre qual o tipo de mudança a alteração de parâmetro "d", causa em $f_4(x) = \text{sen}(x) + d$, iniciaremos pensando exatamente como fizemos com o parâmetro "c". Nós nos utilizaremos do fato de que os pontos dos gráficos são do tipo $(\, x,\ f_4(x)\,)$ e como "d" é um **PARÂMETRO ADITIVO** a alteração se dará no deslocamento que os pontos $(\, x,\ f(x)\,)$ de $f(x) = \text{sen}(x)$, sofrerão pela mudança de coordenadas, pois $(\, x,\ f_4(x)\,) = (\, x,\ f(x) + d\,)$, que é uma **TRANSLAÇÃO VERTICAL**.

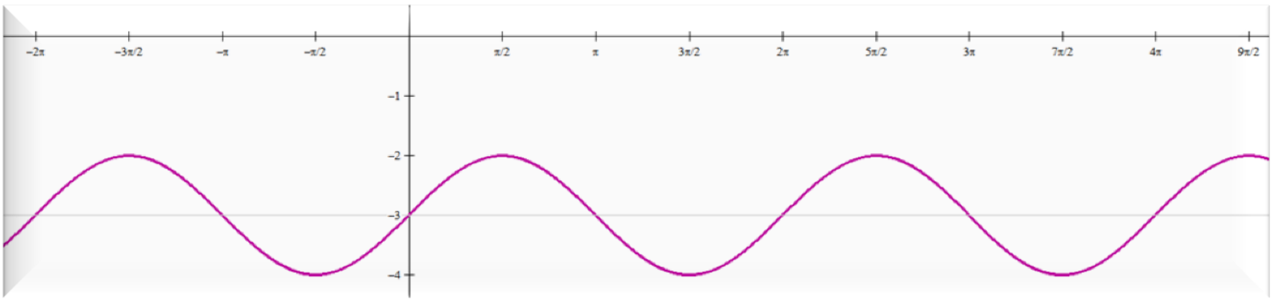
**EXEMPLO 3.09**

$f(x) = \text{sen}(x) - 3$. Temos que $\rho = 2\pi$, então construímos a tabela dos dados de um período, utilizando os mesmos valores do domínio da função $f(x) = \text{sen}(x)$ que tem período $2\pi$ e a subtração de três unidades dos valores das imagens da tabela de senos dos arcos notáveis da 1ª volta, caracterizando uma **TRANSLAÇÃO VERTICAL** de "–3" no gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$.

| (x) | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (x) – 3 | –3 | –2 | –3 | –4 | –3 |

Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x) - 3$.

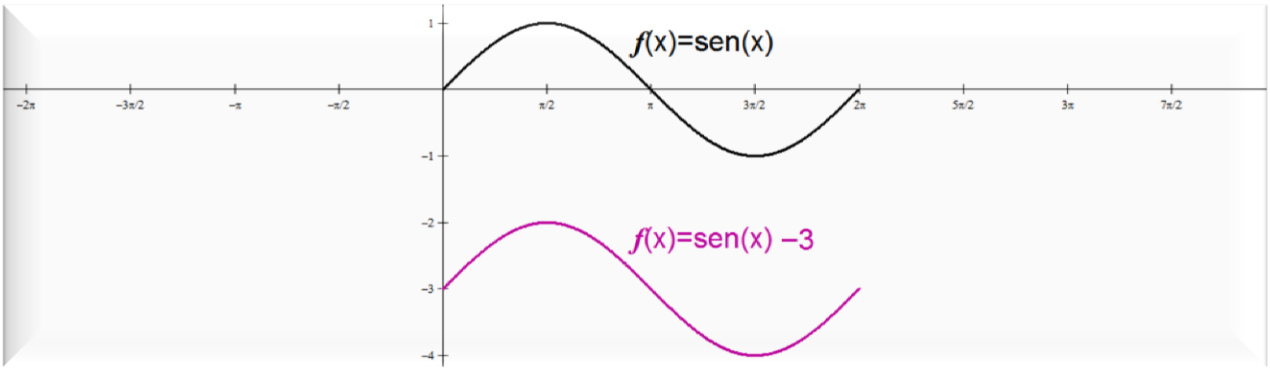
FIGURA 49



A mudança provocada, portanto, pela alteração do parâmetro "d" em $f_4(x) = \operatorname{sen}(x) + d$, é uma TRANSLAÇÃO, deslocando os pontos $(x, f(x))$ do gráfico $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, para cima ou para baixo de acordo com o sinal positivo ou negativo, respectivamente de "d".

Este movimento de TRANSLAÇÃO VERTICAL é causado pela alteração de um PARÂMETRO ADITIVO fora do argumento.

FIGURA 50




₪ - 5

## III-2.3 FUNÇÕES COM UM PARÂMETRO MULTIPLICADOR NEGATIVO.

EXEMPLO 3.10

$f(x) = \operatorname{sen}(-x)$ . Temos que $\rho = 2\pi / |-1| = 2\pi$ .

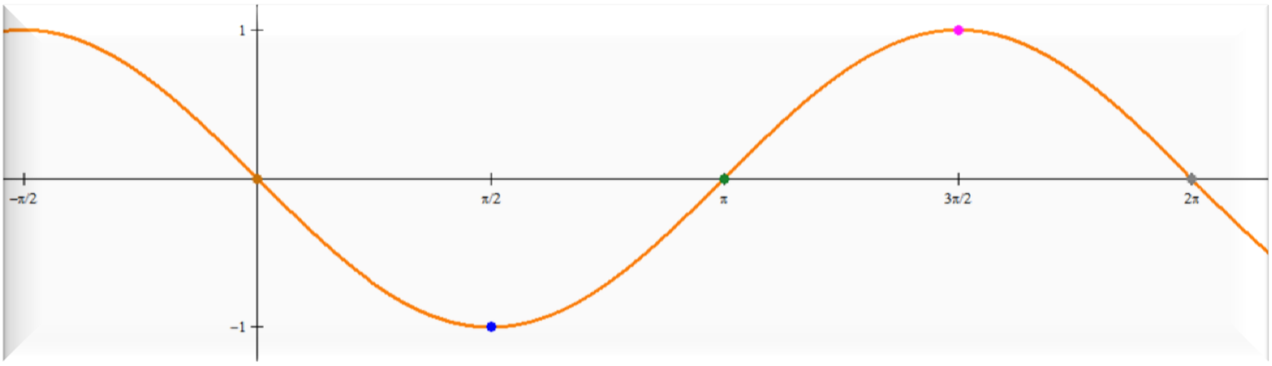
A partir de agora, usaremos a notação $f_I^{sx}(x) = \operatorname{sen}(-x)$("I" sobescrito) para indicar alterações no 1º parâmetro, "II" no 2º parâmetro e etc. ("sx" sobrescrito) para indicar que trata-se de uma simetria do gráfico de $f_I(x)$ em relação ao eixo "X" ( $f_I(x)$ é um rascunho necessário quando o parâmetro "a" é diferente de 1 e $-1$ , nestes dois casos, especificamente, nós não precisamos fazê-lo).

Como seno é função ímpar $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ temos que $f(x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, neste caso podemos evitar fazer um rascunho parcial do gráfico, simplesmente construindo a tabela dos dados de um período utilizando os valores conhecidos da função de período $2\pi$ e os valores simétricos das imagens da tabela de senos dos arcos notáveis da 1ª volta.

| (x) | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (–x) | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |

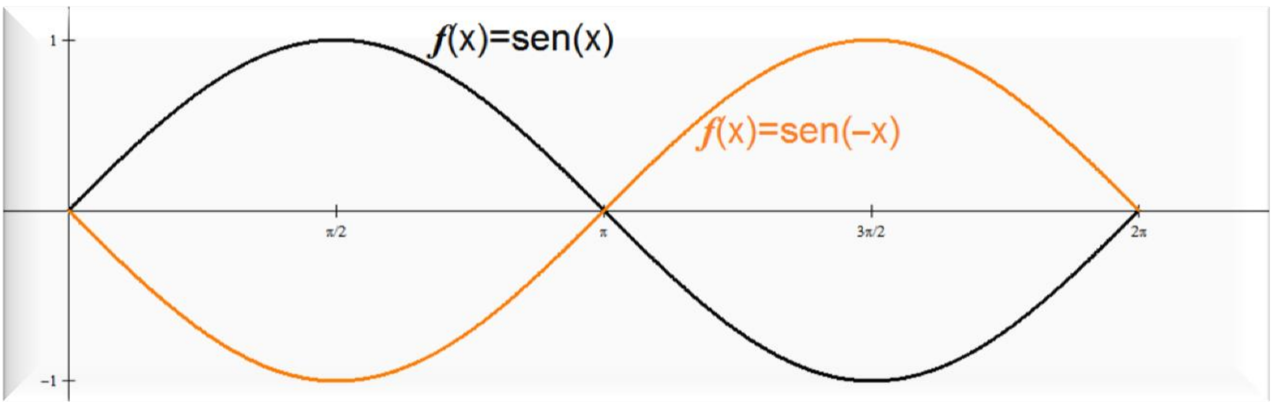
Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}(-x)$.

FIGURA 51




Verificamos facilmente que o gráfico de $f_I^{sx}(x) = \text{sen}(-x)$ é simétrico do gráfico de $f_I(x) = \text{sen}(x)$, em relação ao eixo das abscissas.

FIGURA 52

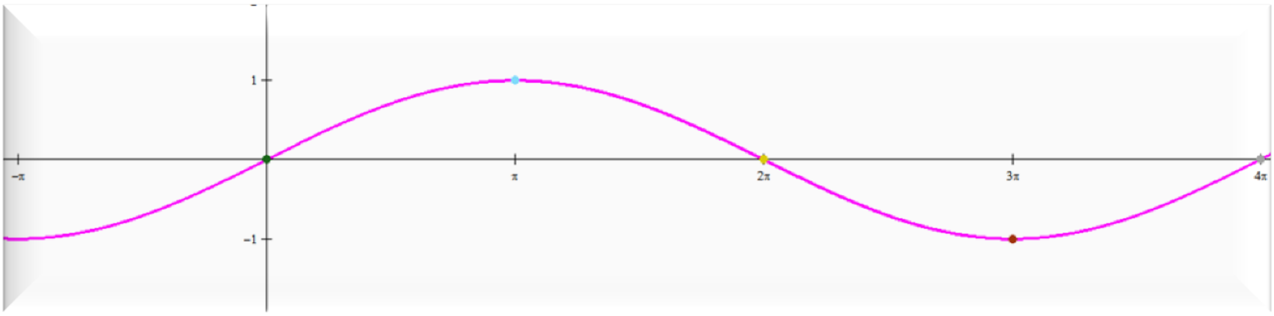



**EXEMPLO 3.11 –** Sendo –1 < a < 0

$f(x) = \text{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)$. Temos que $\rho = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.

| (x) | 0 | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x/2\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

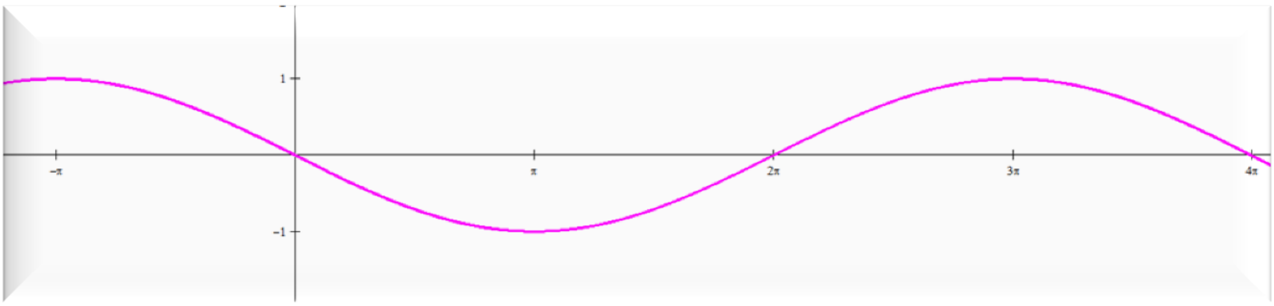
FIGURA 53




Devido ao mesmo motivo citado nos dois exemplos anteriores, basta procedermos com uma simetria em relação ao eixo "X".

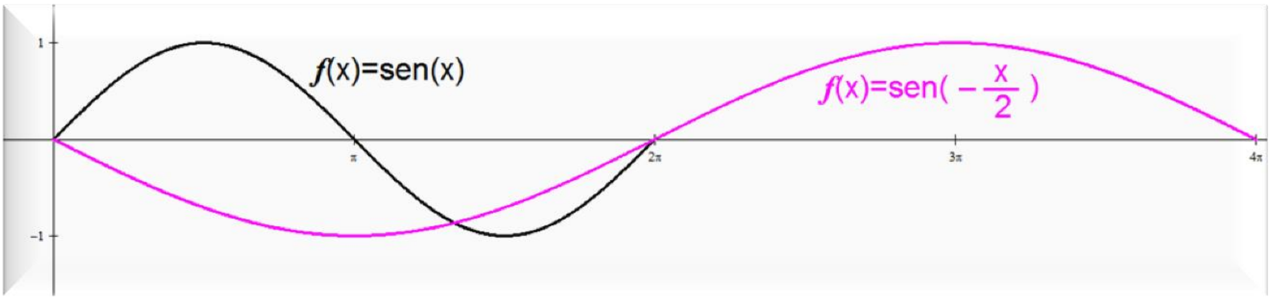
Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(-x/2\right)$.

FIGURA 54



Verificamos assim que o gráfico do exemplo 2.11 da página anterior, sofreu uma expansão de período e uma simetria com relação ao eixo “X”, quando comparamos com $f(x) = \text{sen}(x)$.

FIGURA 55

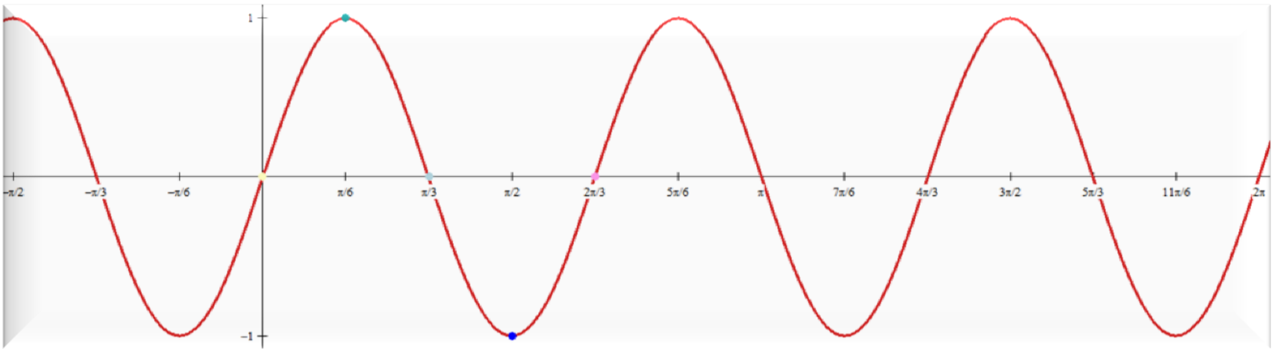



**EXEMPLO 3.12 –** Sendo a < –1.

$f(x) = \text{sen}(-3x)$. Temos que $\rho = \dfrac{2\pi}{|-3|} = \dfrac{2\pi}{3}$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_1(x) = \text{sen}(3x)$.

| (x) | 0 | $\pi/6$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (3x) | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

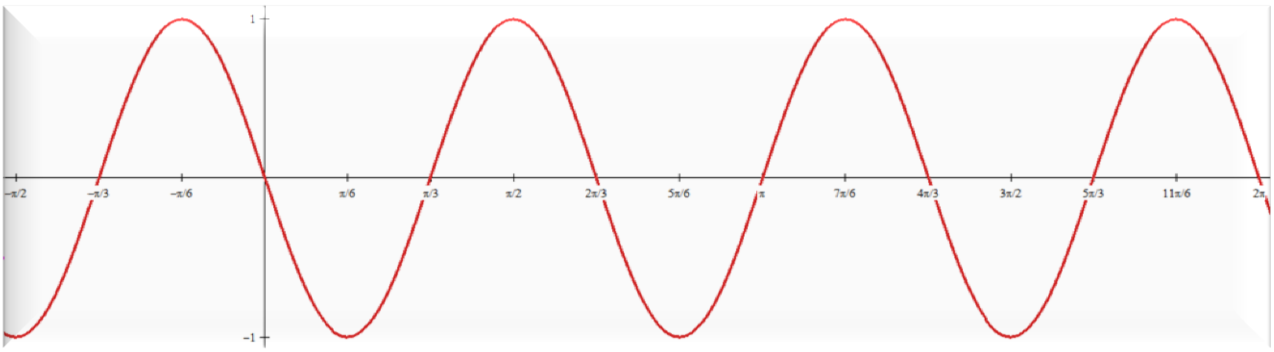
FIGURA 56



Devido ao fato de seno ser uma função ímpar, temos que: $f_{I}^{sx}(x) = sen(-3x) = -sen(3x)$, desta forma basta procedermos com uma simetria em relação ao eixo “X”.

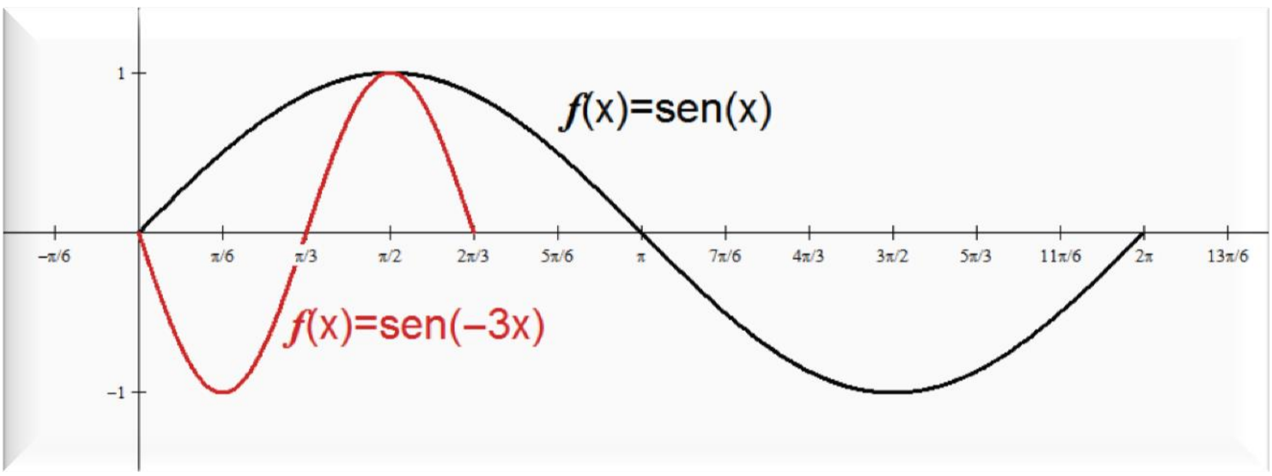
Esboçando o Gráfico de $f(x) = sen(-3x)$.

FIGURA 57




Verificamos assim que o gráfico acima, sofreu uma contração de período e uma simetria com relação ao eixo “X”, quando comparamos com $f(x) = sen(x)$.

FIGURA 58

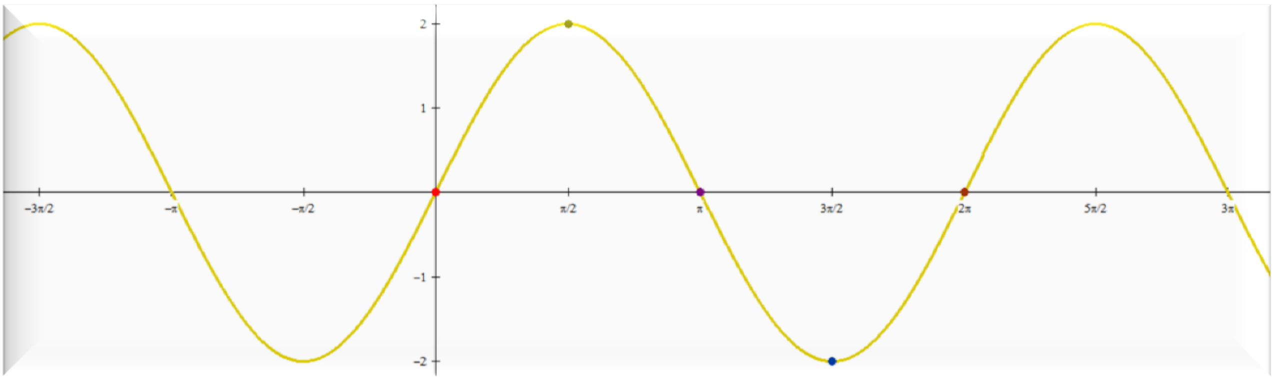



**EXEMPLO 3.13 –** Sendo c < 0.

$f(x) = -2\,\text{sen}(x)$. Temos que $\rho = 2\pi$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = 2\,\text{sen}(x)$.

| (x) | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 seno de $(x)$ | 0 | 2 | 0 | –2 | 0 |

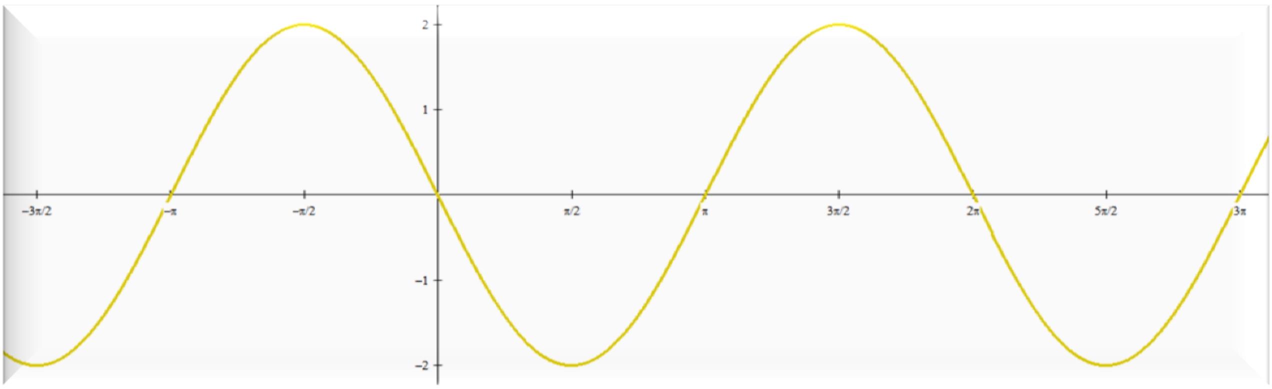
FIGURA 59




Pelo motivo citado no exemplo anterior, basta procedermos com uma simetria em relação ao eixo “X”.

Esboçando o Gráfico de $f(x) = -2\,\text{sen}(x)$.

FIGURA 60



## *CAPÍTULO IV – MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE SENO.*

Para podermos traçar gráficos de funções trigonométricas $f(x) = c\,\mathrm{sen}(ax + b) + d$, com quaisquer parâmetros $(a, b, c, d)$ reais, necessitamos entender e praticar as articulações entre as variações simultâneas de parâmetros.

Conhecemos bem o gráfico com os parâmetros $(1, 0, 1, 0)$; ou seja, com a=1, b=0, c=1 e d=0, que é o gráfico da função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$.

A estes parâmetros iniciais chamaremos de **PARÂMETROS COM VALORES BÁSICOS** e como estes são os valores com os quais sabemos fazer o gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, iniciaremos sempre a partir deles.

No **CAPÍTULO III** (anterior) entendemos como cada um destes parâmetros, individualmente, altera o nosso gráfico com **PARÂMETROS COM VALORES BÁSICOS**, assim como percebemos as alterações devidas à variação de sinal de **PARÂMETROS MULTIPLICADORES**. Agora vamos estudar como fazer outros gráficos de funções trigonométricas $f(x) = c\,\mathrm{sen}(ax + b) + d$, com a variação de mais de um parâmetro simultaneamente.

Lembramos que existe uma estratégia neste método que deve ser sempre mantida: construiremos rascunhos de gráficos parciais, referente a cada parâmetro de valor distinto dos básicos, para expressar a alteração causada no gráfico pedido, a partir do gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, sempre seguindo a ordem alfabética dos parâmetros; ou seja, iniciamos sempre pelo parâmetro “a”, fazendo um gráfico de rascunho para cada parâmetro com valor distinto do parâmetro básico e terminamos no parâmetro “d”, sendo ele ou não, de valor diferente do básico .

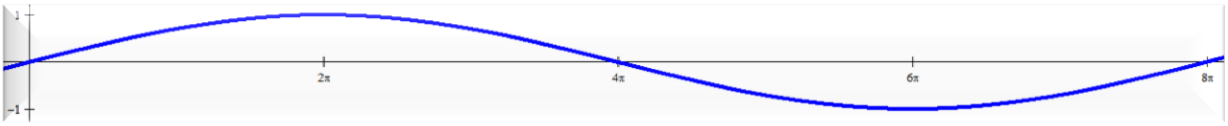
Se algum ou alguns dos valores destes parâmetros já forem iguais aos valores básicos, não teremos que fazer os rascunhos de gráficos parciais.

**EXEMPLO 4.01 –** Com valores dos parâmetros: 0 < a < 1 e b > 0.

$f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$. Temos que $\rho = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \text{sen}\left(x/4\right)$.

| (x) | 0 | $2\pi$ | $4\pi$ | $6\pi$ | $8\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x/4\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

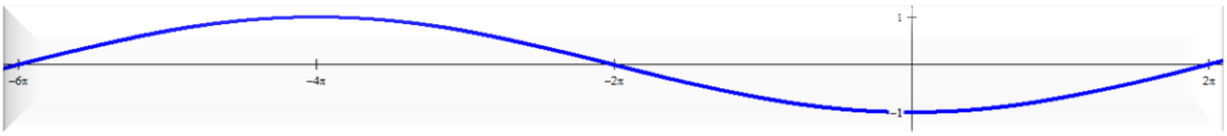
FIGURA 61



Para a alteração do parâmetro "b" devemos verificar para quais argumentos as respostas de 0, $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$ e $8\pi$ são as mesmas da função $f_I(x)$. Se $\frac{x}{4} + \frac{3\pi}{2} = 0$ temos $\frac{x}{4} = -\frac{3\pi}{2}$ e $x = -6\pi$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $-6\pi$ e razão $2\pi$ (que é $1/4$ do período) .

Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$.

FIGURA 62



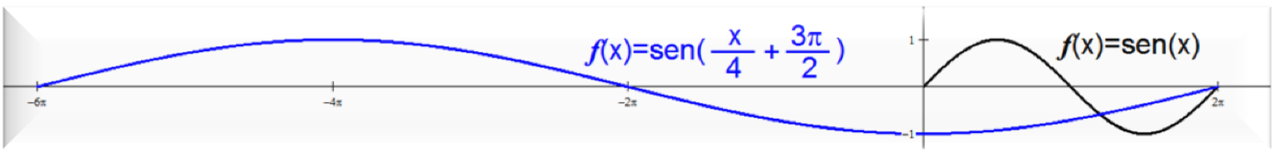
Sabemos que iniciamos o gráfico de um período de $f(x) = \text{sen}(x)$, no ponto $(0,0)$, da mesma forma que iniciamos o de $f_I(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$. No gráfico da página anterior observamos na **FIGURA 62** que o traçado de um período iniciou-se em $(-6\pi, 0)$; ou seja, houve uma **TRANSLAÇÃO HORIZONTAL** de $-6\pi$.

Portanto seja $f(x) = \text{sen}(ax+b)$, quando procedemos o RASCUNHO e fazemos $ax+b=0$, obtendo $ax=-b$ e $x = -b/a$, observamos que o traçado de um período do gráfico se inicia em $(-b/a, 0)$ no lugar de iniciar em $(0,0)$; portanto verificamos que temos uma **TRANSLAÇÃO HORIZONTAL** de $-b/a$.

Neste exemplo tivemos uma **TRANSLAÇÃO HORIZONTAL** de $\dfrac{-3\pi/2}{1/4} = -\dfrac{12\pi}{2} = -6\pi$.

₪ - 6

**FIGURA 63**

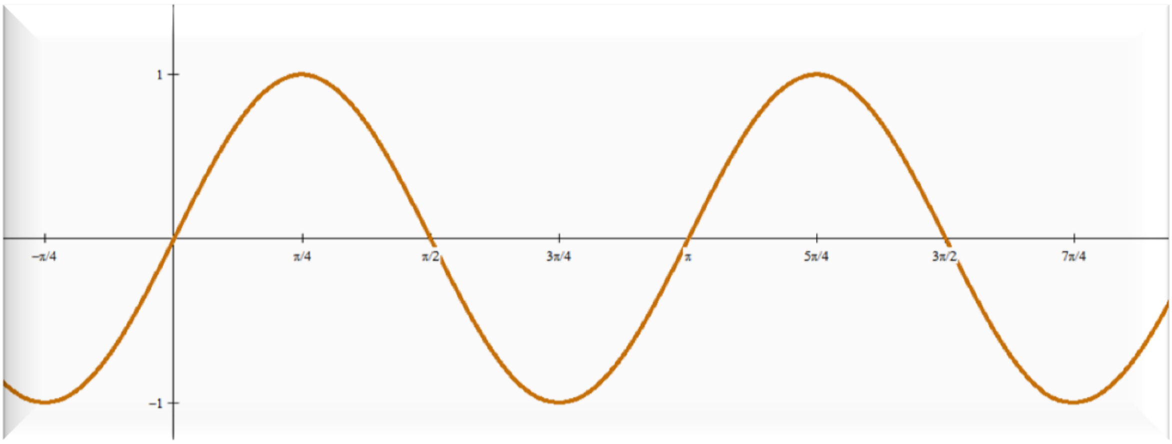



**EXEMPLO 4.02 –** Com valores dos parâmetros: a < –1 e c < 0.

$f(x) = -3\,\text{sen}(-2x)$. Temos que $\rho = \dfrac{2\pi}{|-2|} = \pi$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \text{sen}(2x)$.

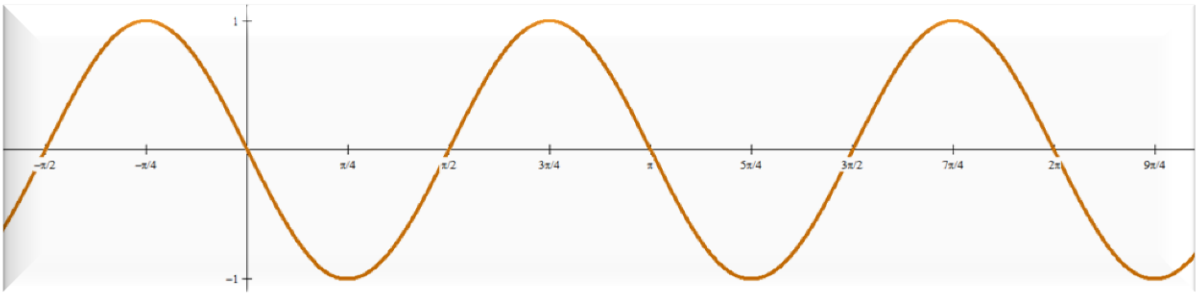
| (x) | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $(2x)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 64



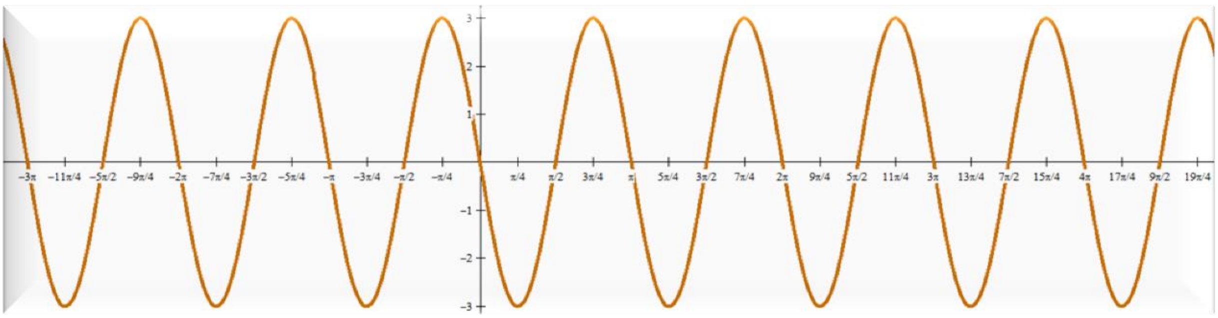

Produzimos o RASCUNHO 2 para $f_{I}^{SX}(x) = \text{sen}(-2x)$, com simetria ao eixo “X”.

FIGURA 65



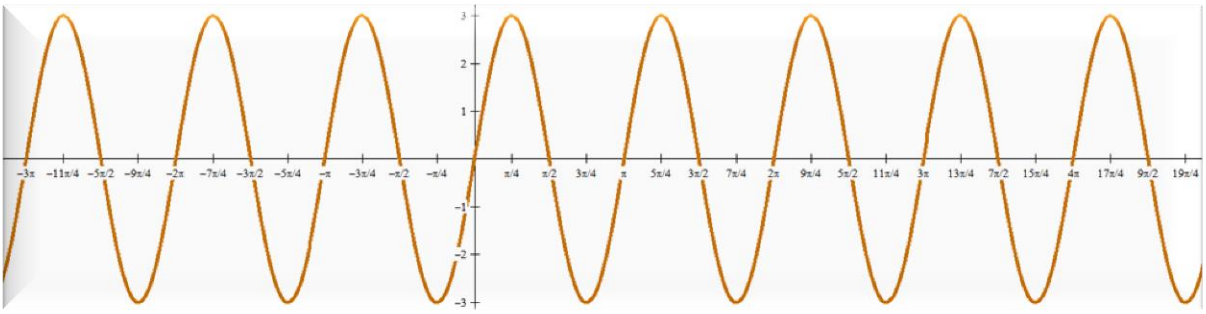

Ainda produzimos o RASCUNHO 3 para $f_{III}(x) = 3\,\text{sen}(-2x)$.

FIGURA 66



Esboçando o Gráfico de $f(x) = -3\,\text{sen}(-2x)$ novamente simetria ao eixo "X".

FIGURA 67

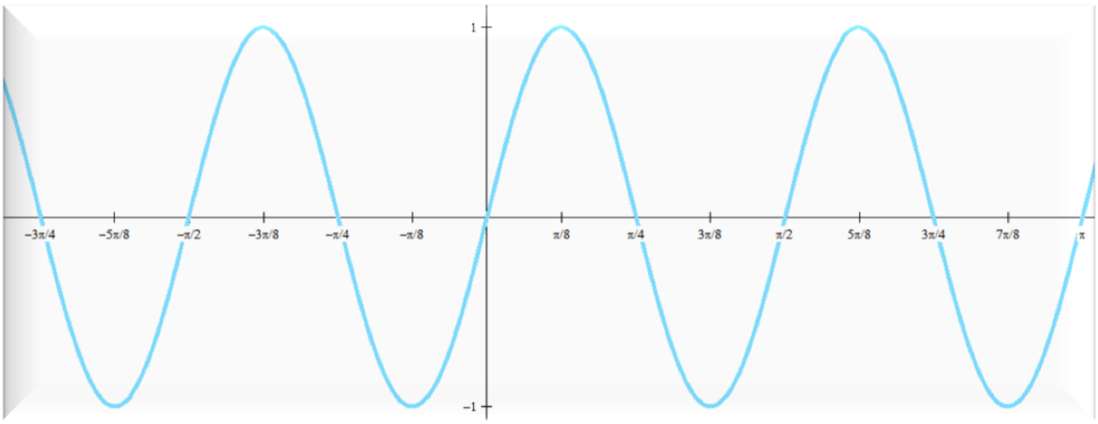


**EXEMPLO 4.03 –** Com valores dos parâmetros: a > 1 e d < 0.

$f(x) = \text{sen}(4x) - 1$. Temos que $\rho = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \text{sen}(4x)$.

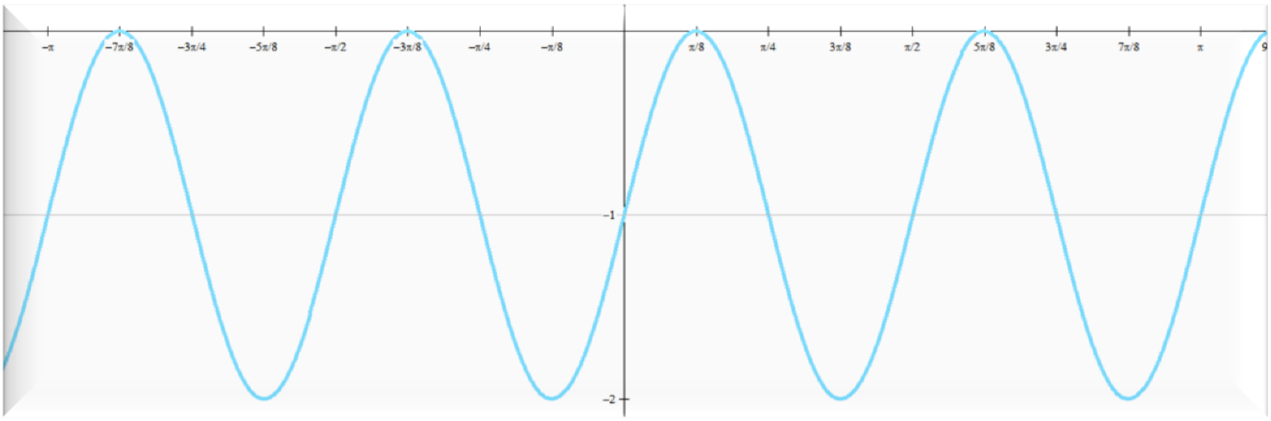
| (x) | 0 | $\pi/8$ | $\pi/4$ | $3\pi/8$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (4x) | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 68



Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}(4x) - 1$ temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de "–1" no gráfico de $f_I(x) = \text{sen}(4x)$.

FIGURA 69

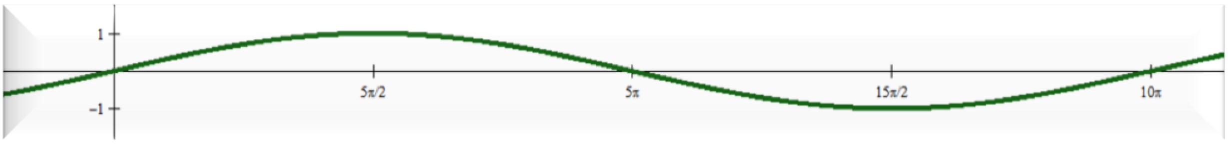



**EXEMPLO 4.04 –** Com valores dos parâmetros: –1 < a < 0 e c > 0.

$f(x)=\dfrac{4}{3}\operatorname{sen}\left(-\dfrac{x}{5}\right)$. Temos que $\rho=\dfrac{2\pi}{\left|-\frac{1}{5}\right|}=10\pi$, assim produzimos o RASCUNHO 1 para $f_I(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{5}\right)$.

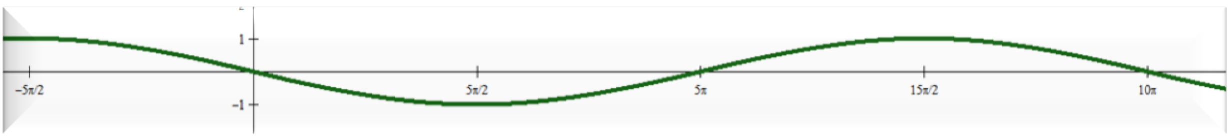
| (x) | 0 | $5\pi/2$ | $5\pi$ | $15\pi/2$ | $10\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x/5\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 70



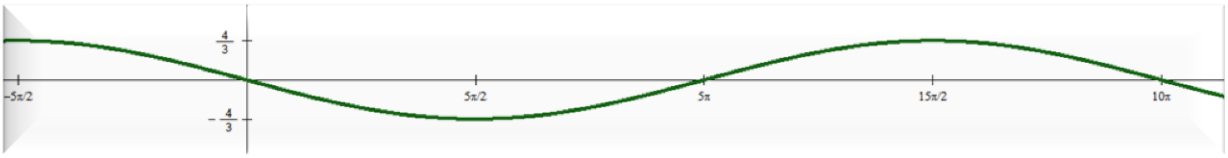

Produzimos o RASCUNHO 2 para $f_I^{SX}(x)=\operatorname{sen}\left(-\dfrac{x}{5}\right)$, com simetria ao eixo “X”.

FIGURA 71



Esboçando o Gráfico de $f(x) = \frac{4}{3}\text{sen}\left(-\frac{x}{5}\right)$.

FIGURA 72

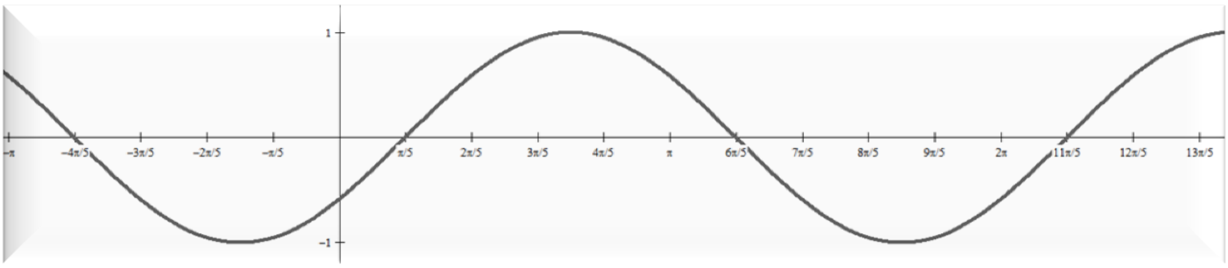



**EXEMPLO 4.05 –** Com valores dos parâmetros: c > 0 e b < 0.

$f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$. Temos que $\rho = 2\pi$, assim devemos produzir o RASCUNHO 1 para $f_{II}(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$, recalculando os valores do "x" que produzam no argumento a sequência de valores de arcos notáveis, construindo a tabela para um período. Façamos $x - \frac{\pi}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ e como o período é $2\pi$, calculamos mais quatro elementos da P.A. cujo primeiro termo é $\pi/5$ e a razão $\pi/2$. Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $\pi/5$.

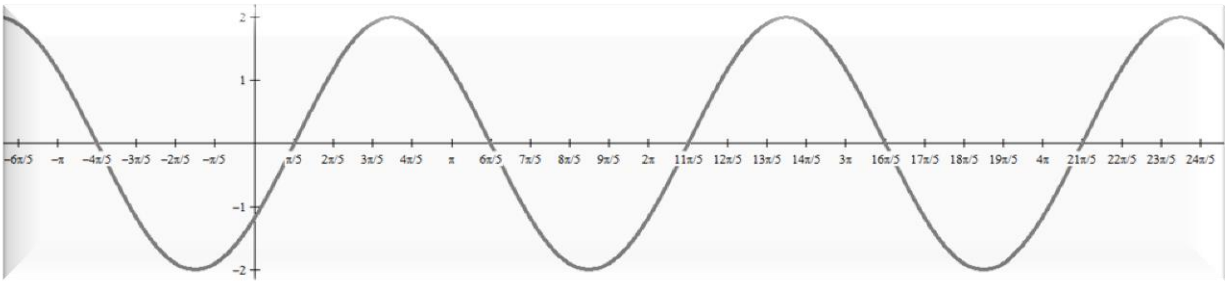
| (x) | $\pi/5$ | $7\pi/10$ | $6\pi/5$ | $17\pi/10$ | $11\pi/5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x - \pi/5\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 73



Esboçando o Gráfico de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$.

FIGURA 74




Como os parâmetros de dentro do argumento promovem **TRANSLAÇÃO HORIZONTAL** e alteração no **PERÍODO**, podemos calcular que sendo $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, temos $-|c| \leq |c|\,\text{sen}(x) \leq |c|$ e $-|c| + d \leq |c|\,\text{sen}(x) + d \leq |c| + d$, portanto a distância $|c| + d - (-|c| + d) = 2|c|$ é o dobro da **AMPLITUDE**.

Concluímos assim que a **AMPLITUDE** da onda do gráfico de seno independe de outro parâmetro, dependendo exclusivamente do módulo de “c”.

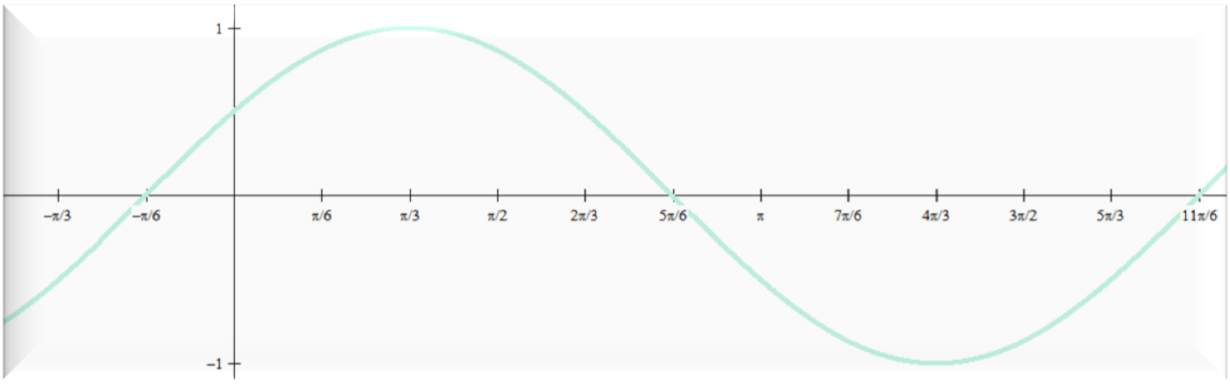
₪ - 7

**EXEMPLO 4.06 –** Com valores dos parâmetros: b > 0 e d < 0.

$f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$. Temos que $\rho = 2\pi$ e como no exemplo anterior temos que recalcular os valores do domínio que tenham as imagens conhecidas. Devemos produzir o RASCUNHO 1 para $f_{II}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, fazendo $x + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ e como o período é $2\pi$, calculamos mais quatro elementos da P.A. cujo primeiro termo é $-\pi/6$ e a razão $\pi/2$. Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $-\pi/6$.

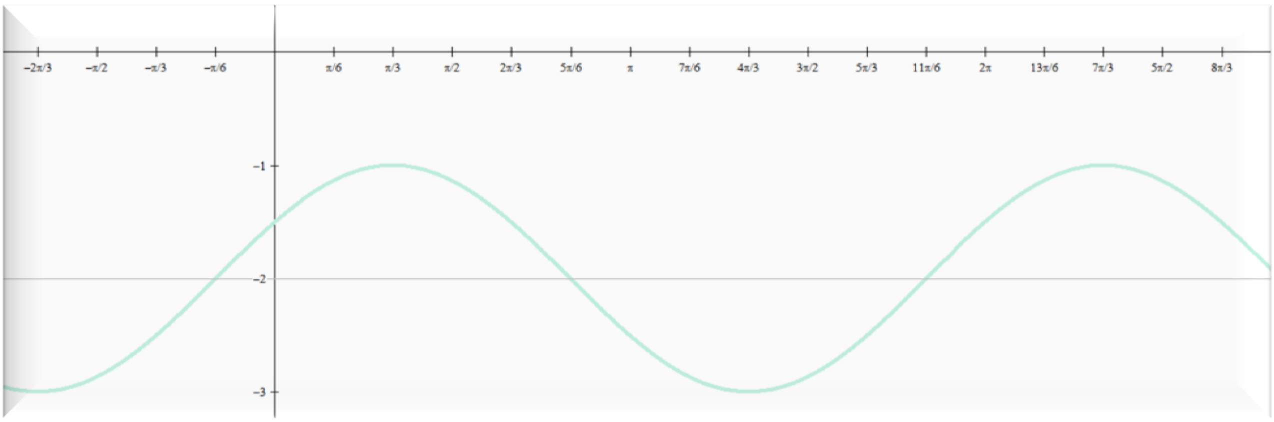
| (x) | $-\pi/6$ | $\pi/3$ | $5\pi/6$ | $4\pi/3$ | $11\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x + \pi/6\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 75



Esboçando o Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$ temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de "–2" no gráfico de $f_{II}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

FIGURA 76

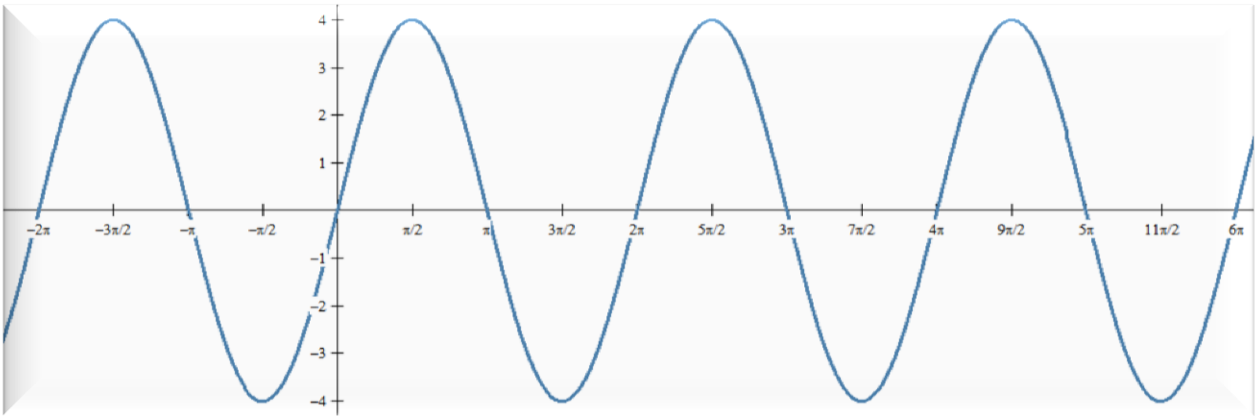


**EXEMPLO 4.07 –** Com valores dos parâmetros: c < 0 e d > 0.

$f(x) = -4\,\text{sen}(x) + 1$. Temos que $\rho = 2\pi$, assim devemos produzir o RASCUNHO 1 para $f_{III}(x) = 4\,\text{sen}(x)$.

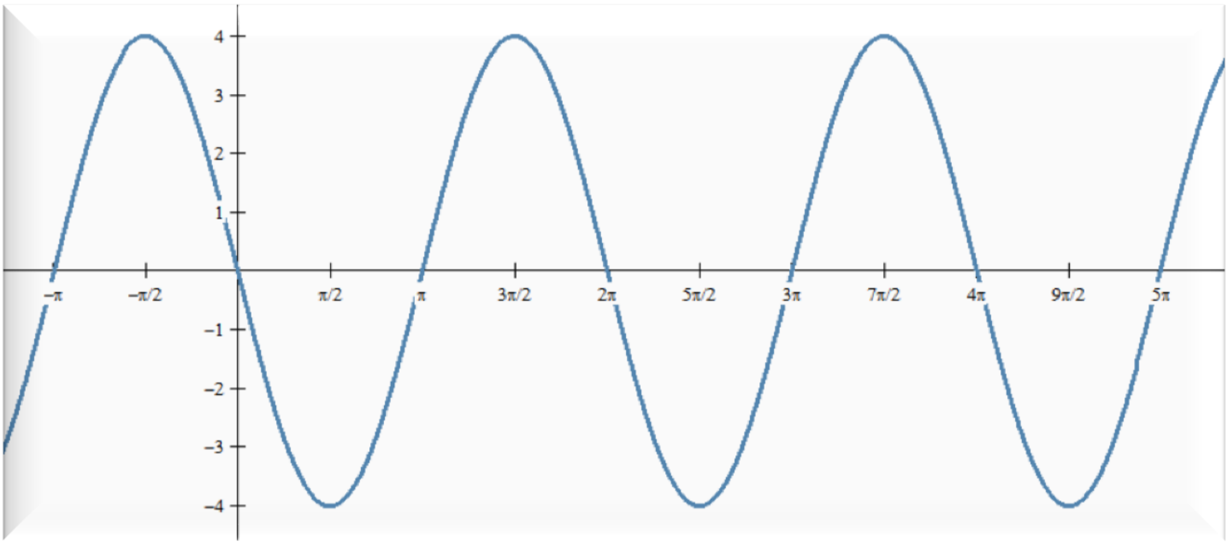
| (x) | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 seno de (x) | 0 | 4 | 0 | –4 | 0 |

FIGURA 77



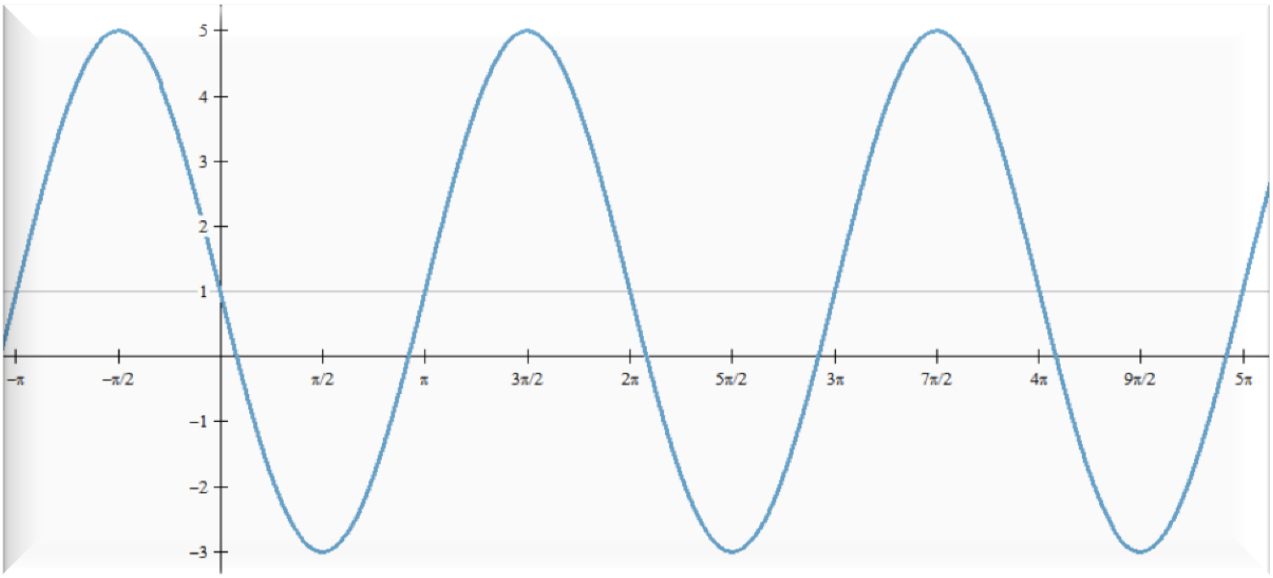

Produzimos o RASCUNHO 2 para $f_{III}^{SX}(x) = -4\,\text{sen}(x)$, com simetria ao eixo “X”.

FIGURA 78




Esboçando o Gráfico de $f(x) = -4\,\text{sen}(x) + 1$ temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de “+1” no gráfico de $f_{III}^{SX}(x) = -4\,\text{sen}(x)$.

FIGURA 79




## IV-2 FUNÇÕES COM TRÊS PARÂMETROS NÃO BÁSICOS.

**EXEMPLO 4.08 –** Com valores dos parâmetros: a < –1, b < 0 e c < 0.

$$f(x) = -\frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\left(-6x - \frac{\pi}{8}\right).$$

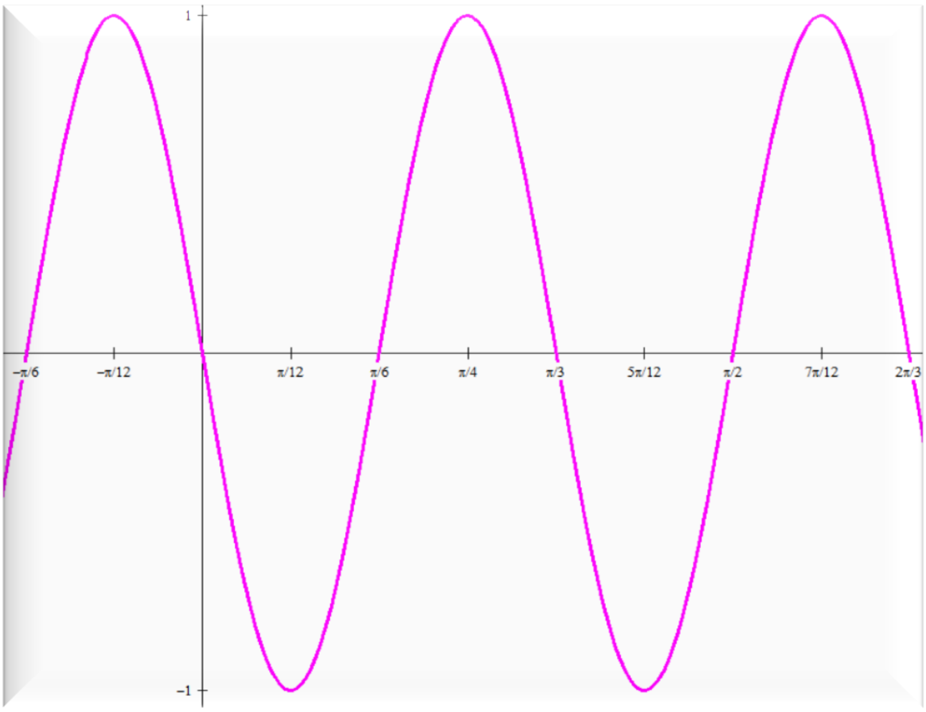
I – Verificando o parâmetro “a” - $\rho = \frac{2\pi}{|-6|} = \frac{\pi}{3}$, assim façamos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \mathrm{sen}(6x)$.

| (x) | 0 | $\pi/12$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (6x) | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 80


Produzimos o RASCUNHO 2 para $f_{I}^{SX}(x) = \text{sen}(-6x)$, com simetria ao eixo “X”.

FIGURA 81



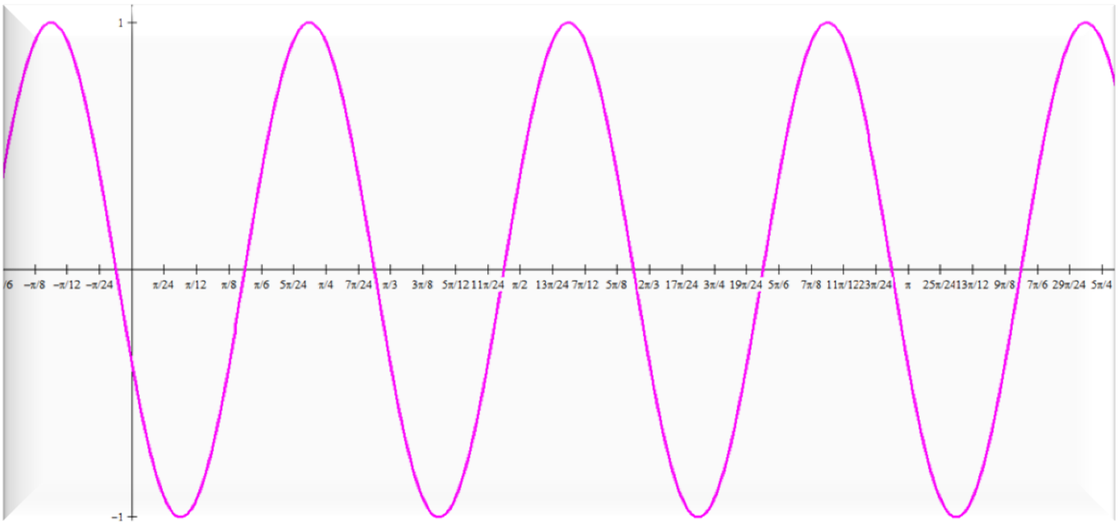
II – Verificando o parâmetro “b” – devemos saber para quais argumentos as respostas são as mesmas de: 0, $\pi/12$, $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$.

Se $-6x-\frac{\pi}{8}=0$ temos $-6x=\frac{\pi}{8}$ e $x=-\frac{\pi}{48}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de termo inicial $-\pi/48$ e razão $\pi/12$. Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $-\pi/48$.

| (x) | $-\pi/48$ | $\pi/16$ | $7\pi/48$ | $11\pi/48$ | $5\pi/16$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(-6x-\frac{\pi}{8}\right)$ | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |

Fazemos o RASCUNHO 3 para $f_{II}(x)=\operatorname{sen}\left(-6x-\frac{\pi}{8}\right)$.

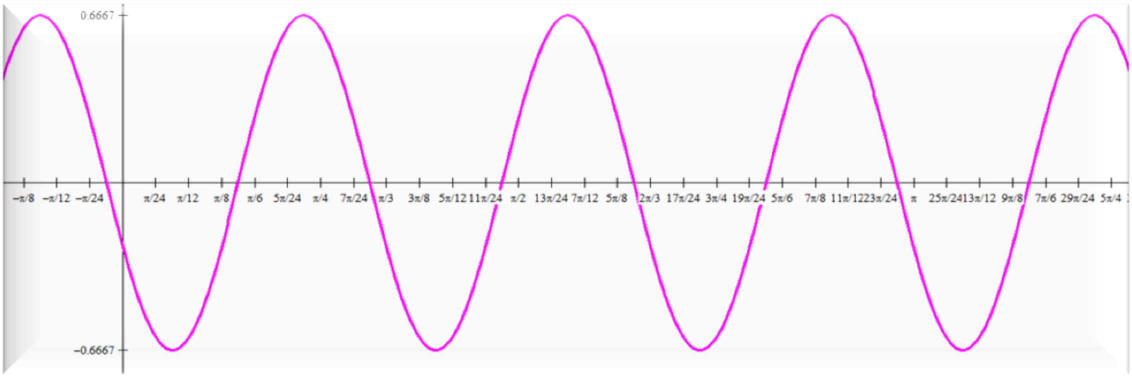
FIGURA 82



III – Verificando o parâmetro “c” – sabemos que $-1\le \operatorname{sen}\left(-6x-\frac{\pi}{8}\right)\le 1$; portanto temos que $-\frac{2}{3}\le \frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(-6x-\frac{\pi}{8}\right)\le \frac{2}{3}$.

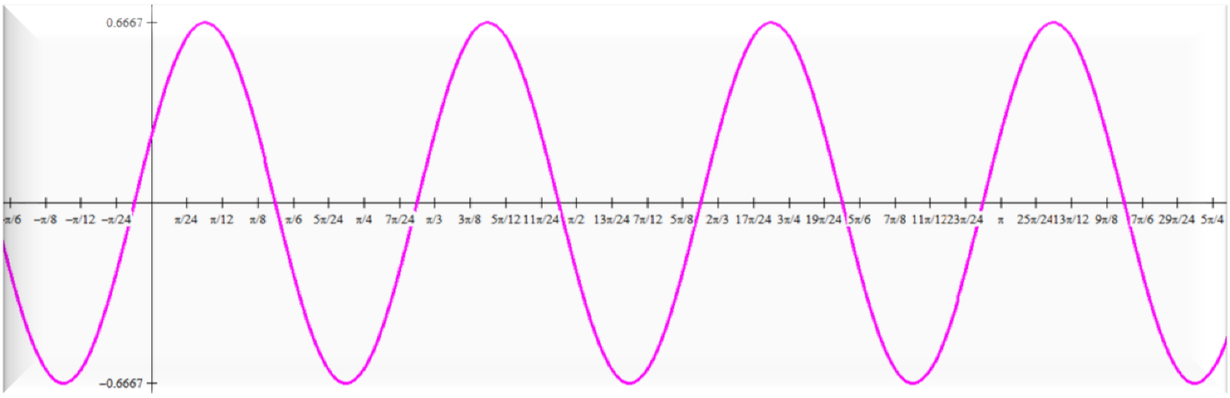
Fazemos o RASCUNHO 4 para $f_{III}(x) = \frac{2}{3}\,\text{sen}\left(-6x - \frac{\pi}{8}\right)$.

FIGURA 83




Finalmente procedemos com uma simetria em relação ao eixo "X" e procedemos com o gráfico de $f(x) = -\frac{2}{3}\,\text{sen}\left(-6x - \frac{\pi}{8}\right)$.

FIGURA 84



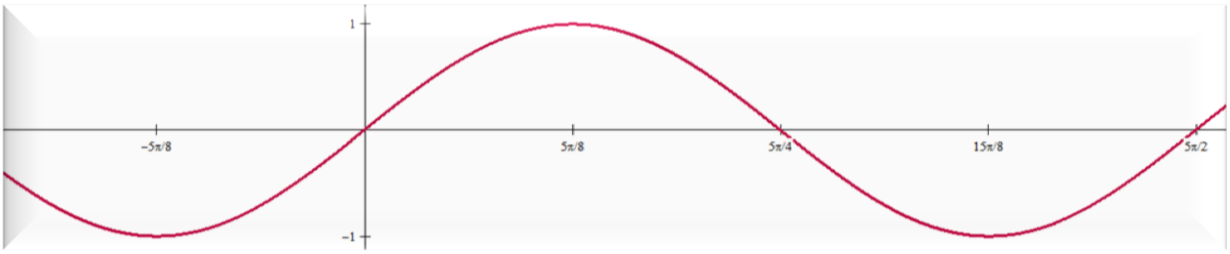

**EXEMPLO 4.09 –** Com valores dos parâmetros: –1 < a < 0 , b > 0 e d > 0.

$$f(x) = \text{sen}\left(-\frac{4x}{5} - \frac{\pi}{7}\right) + 3.$$

I – Verificando o parâmetro “a” - $\rho = \dfrac{2\pi}{\left|-\frac{4}{5}\right|} = \dfrac{5\pi}{2}$, assim façamos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{4x}{5}\right)$.

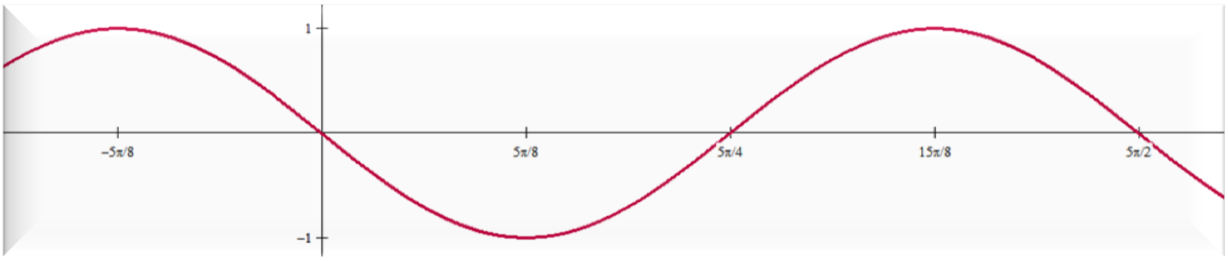
| (x) | 0 | $5\pi/8$ | $5\pi/4$ | $15\pi/8$ | $5\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(\frac{4x}{5}\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

FIGURA 85




Produzimos o RASCUNHO 2 para $f_I^{SX}(x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{5}\right)$, com simetria ao eixo “X”.

FIGURA 86




II – Verificando o parâmetro “b” – devemos saber para quais argumentos as respostas são as mesmas de: 0, $5\pi/8$, $5\pi/4$, $15\pi/8$ e $5\pi/2$.

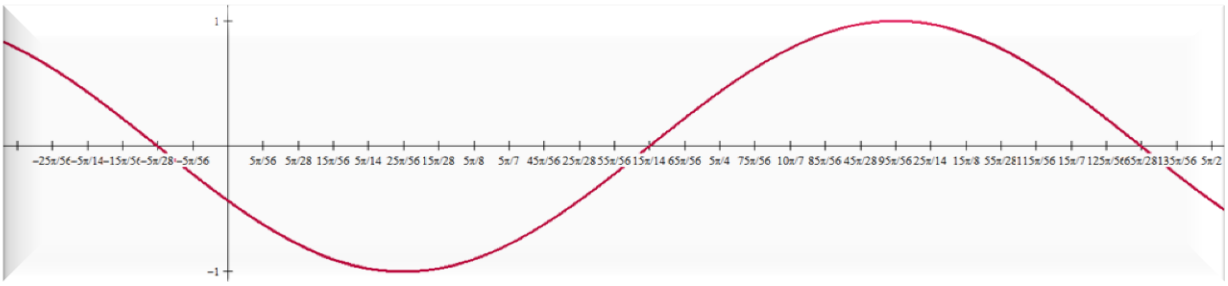
Se $-\dfrac{4x}{5} - \dfrac{\pi}{7} = 0$ temos $-\dfrac{4}{5}x = \dfrac{\pi}{7}$ e $x = -\dfrac{5\pi}{28}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de termo inicial $-5\pi/28$ e razão $5\pi/8$. Temos uma

TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $-\frac{5\pi}{28}$.

| (x) | $-\frac{5\pi}{28}$ | $\frac{25\pi}{56}$ | $\frac{15\pi}{14}$ | $\frac{95\pi}{56}$ | $\frac{65\pi}{28}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(-6x-\frac{\pi}{8}\right)$ | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |

Fazemos o RASCUNHO 3 para $f_{II}(x)=\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{5}-\frac{\pi}{7}\right)$.

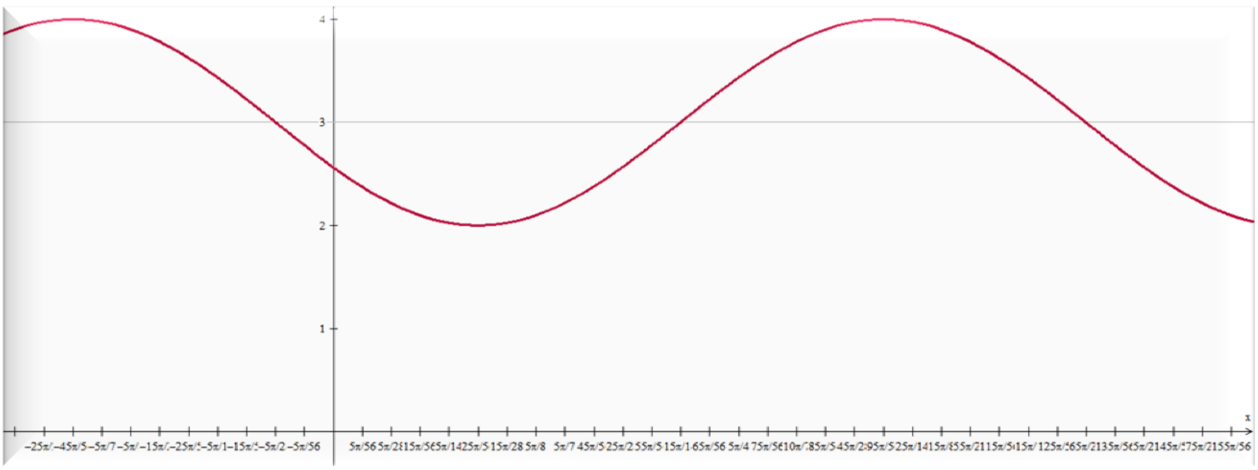
FIGURA 87



III – Verificando o parâmetro “d” – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de “+3” no gráfico de $f_{II}(x)=\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{5}-\frac{\pi}{7}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x)=\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{5}-\frac{\pi}{7}\right)+3$.

FIGURA 88



**EXEMPLO 4.10 –** Com valores dos parâmetros: 0 < a < 1 , c > 0 e d > 0.

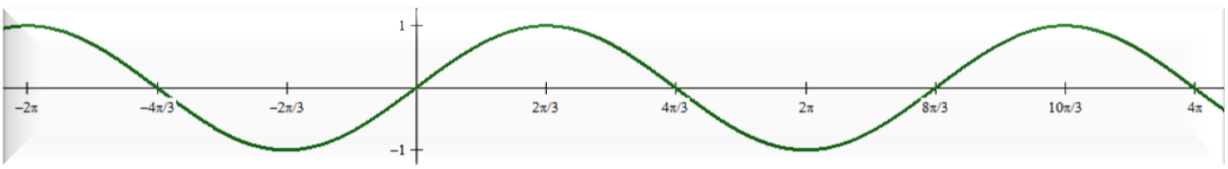
$$f(x) = \frac{6}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{4}\right) + 2.$$

I – Verificando o parâmetro "a" - $\rho = \frac{2\pi}{3/4} = \frac{8\pi}{3}$, assim façamos o RASCUNHO 1 para

$$f_I(x) = \operatorname{sen}\left(3x/4\right).$$

| (x) | 0 | $2\pi/3$ | $4\pi/3$ | $2\pi$ | $8\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de (–x) | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

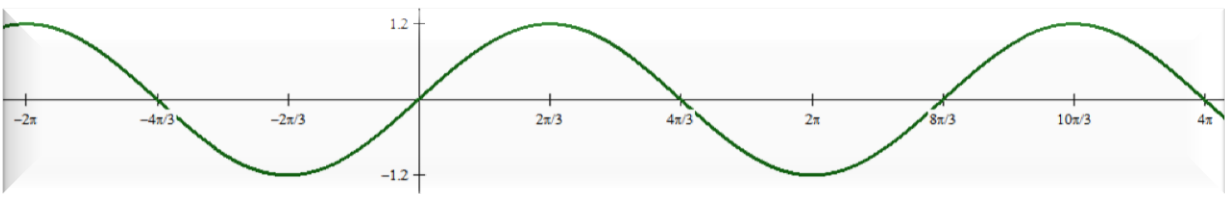
FIGURA 89




II – Verificando o parâmetro "c" – sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{8}\right) \leq 1$; portanto temos que $-\frac{6}{5} \leq \frac{6}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{8}\right) \leq \frac{6}{5}$.

Fazemos o RASCUNHO 2 para $f_{III}(x) = \frac{6}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{8}\right)$.

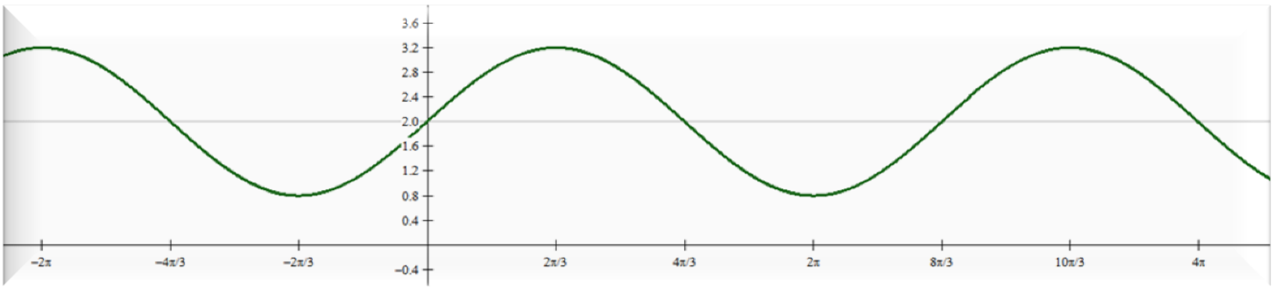
FIGURA 90



III – Verificando o parâmetro "d" – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de "+2" no gráfico de $f_{III}(x)=\frac{6}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{8}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x)=\frac{6}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{4}\right)+2$.

FIGURA 91




**EXEMPLO 4.11 –** Com valores dos parâmetros: b < 0 , c > 0 e d > 0.

$f(x)=\frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$. Como a =1, temos que $\rho=2\pi$.

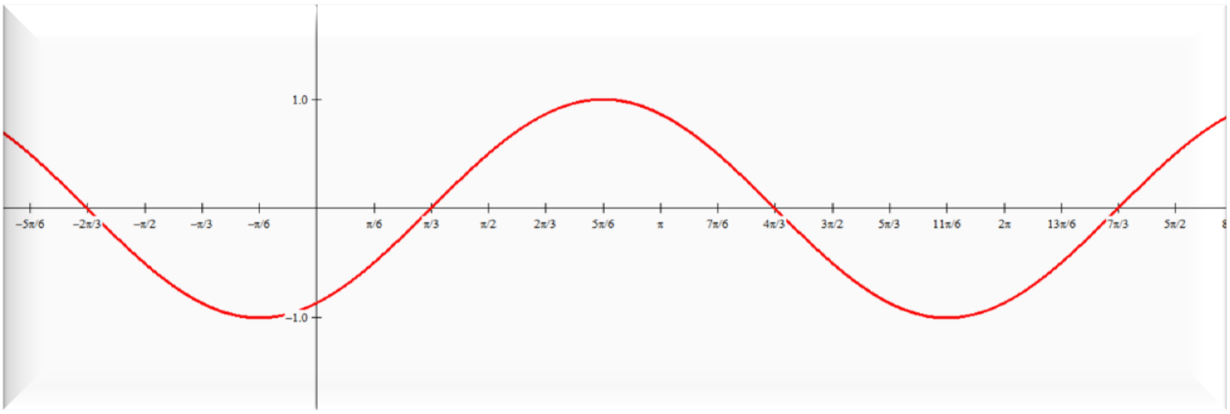
I – Verificando o parâmetro "b" - devemos conhecer os argumentos cujas imagens são as mesmas de: 0, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$ e $2\pi$.

Se $x-\frac{\pi}{3}=0$ temos $x=\frac{\pi}{3}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $\pi/3$ e razão $\pi/2$. Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $\pi/3$.

| (x) | $\pi/3$ | $5\pi/6$ | $4\pi/3$ | $11\pi/6$ | $7\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

Fazemos o RASCUNHO 1 para $f_{II}(x)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

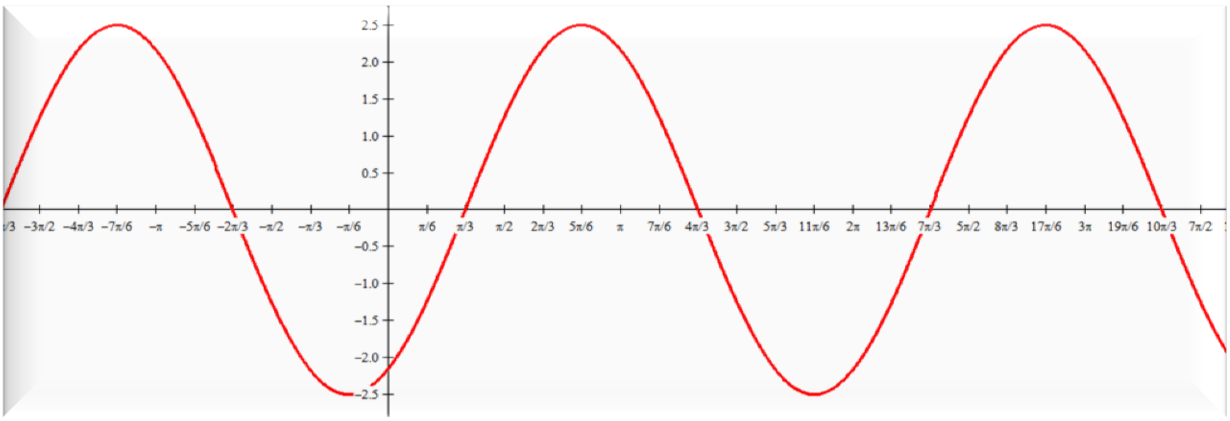
FIGURA 92



II – Verificando o parâmetro “c” – sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$; portanto temos que $-\frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{5}{2}$.

Fazemos o RASCUNHO 2 para $f_{III}(x) = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

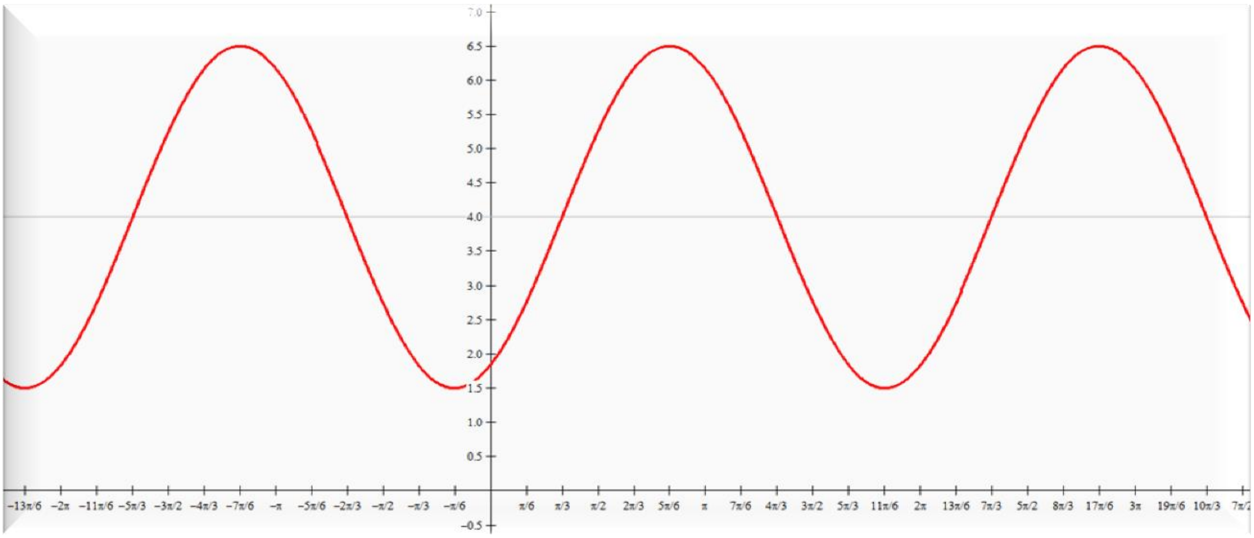
FIGURA 93



III – Verificando o parâmetro “d” – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de “+4” no gráfico de $f_{III}(x) = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x) = \frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4$.

FIGURA 94



## IV-3 FUNÇÕES COM QUATRO PARÂMETROS NÃO BÁSICOS.

Considero que, para que um estudante tenha um bom preparo e uma boa visão de construção de gráficos de funções trigonométricas compostas com a Função Afim, ele deva entender bem qual transformação o gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ sofre quando alteramos cada um dos quatro parâmetros básicos. Devemos lembrar que existem grupos de parâmetros que provocam alterações significativas nos gráficos das funções trigonométricas, independente de seus valores absolutos.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a $\leq -1$ | $-1 < a < 0$ | $0 < a < 1$ | a=1 | a > 1 | 5 opções |
| | b < 0 | b=0 | b > 0 | | 3 opções |
| | c < 0 | c > 0 | c=1 | | 3 opções |
| | d < 0 | d=0 | d > 0 | | 3 opções. |

Esperar que todo estudante construa as diversas combinações de classes de parâmetros, perece pouco razoável uma vez que existe uma quantidade de 135 gráficos com todas estas combinações. Devido a esta multiplicidade de combinações de parâmetros e ao detalhamento deste texto com respeito à construção de gráficos com um, dois e três parâmetros não básicos, não se faz necessária a existência de tantos exemplos de funções com quatro parâmetros não básicos.

Posteriormente no capítulo de Função Cosseno retomaremos a construção de gráficos com quatro parâmetros não básicos. Desta forma vamos ver em um único exemplo a construção de um gráfico que utilize um grupo de parâmetros que enfoque as análises essenciais.

**EXEMPLO 4.12 –** Com valores dos parâmetros: a < 0, b > 0, c < 0 e d > 0.

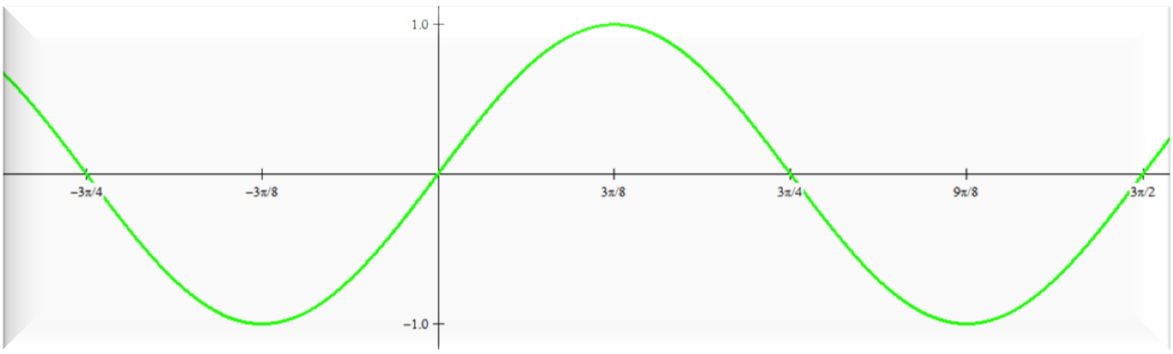
$$f(x) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3} + \frac{7\pi}{6}\right) + 1.$$

I – Verificando o parâmetro "a" – $\rho = \dfrac{2\pi}{\left|-\frac{4}{3}\right|} = \dfrac{3\pi}{2}$, assim façamos o RASCUNHO 1 para

$$f_I(x) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{4x}{3}\right).$$

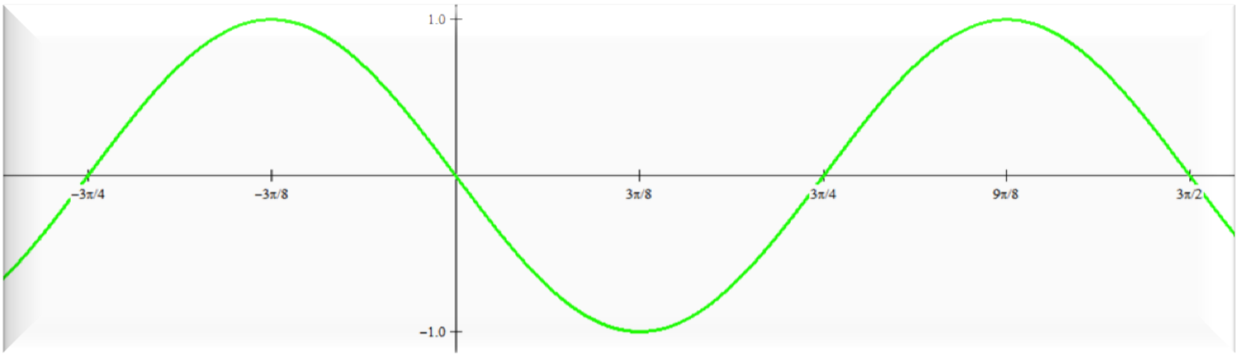
| (x) | 0 | $3\pi/8$ | $3\pi/4$ | $9\pi/8$ | $3\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(4x/3\right)$ | 0 | 1 | 0 | –1 | 0 |

**FIGURA 95**




Produzimos o RASCUNHO 2 para $f_I^{SX}(x) = \operatorname{sen}\left(-4x/3\right)$, com simetria ao eixo "X".

FIGURA 96



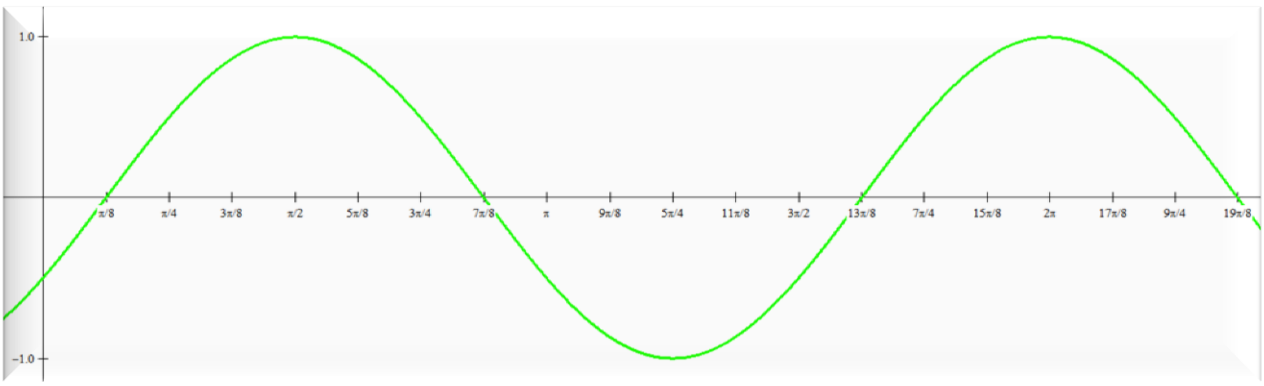

II – Verificando o parâmetro “b” – devemos conhecer os argumentos cujas imagens são as mesmas de: 0, $3\pi/8$, $3\pi/4$, $9\pi/8$ e $3\pi/2$.

Se $-\dfrac{4x}{3}+\dfrac{7\pi}{6}=0$ temos $-\dfrac{4}{3}x=-\dfrac{7\pi}{6}$ e $x=\dfrac{7\pi}{8}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $7\pi/8$ e razão $3\pi/8$. Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $7\pi/8$.

| (x) | $7\pi/8$ | $5\pi/4$ | $13\pi/8$ | $2\pi$ | $19\pi/8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(-4x/3+7\pi/6\right)$ | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |

Fazemos o RASCUNHO 3 para $f_{II}(x)=\operatorname{sen}\left(-\dfrac{4x}{3}+\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

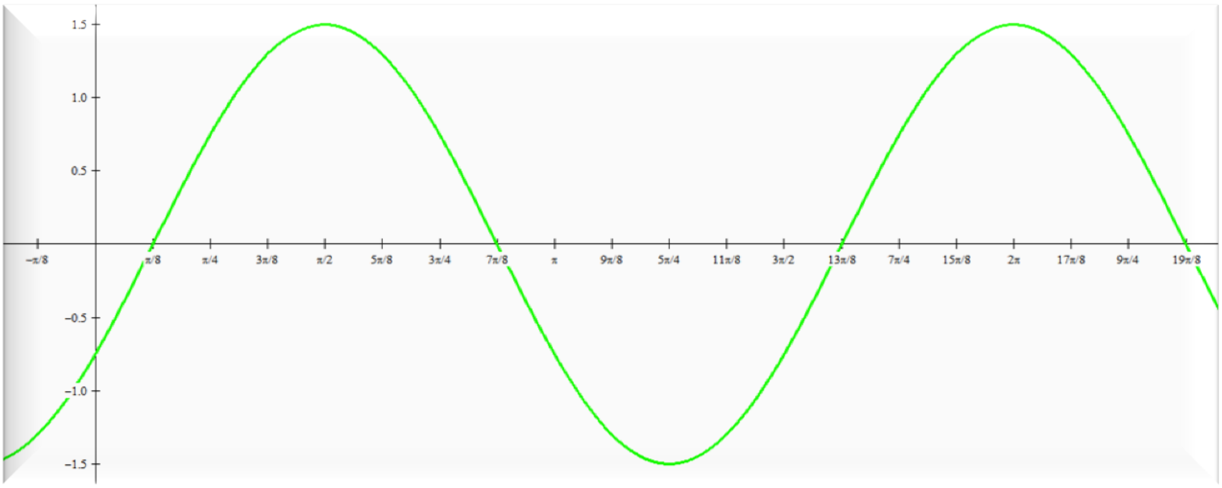
FIGURA 97



III – Verificando o parâmetro “c” – sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3}+\frac{7\pi}{6}\right) \leq 1$; portanto temos que $-\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3}+\frac{7\pi}{6}\right) \leq \frac{3}{2}$.

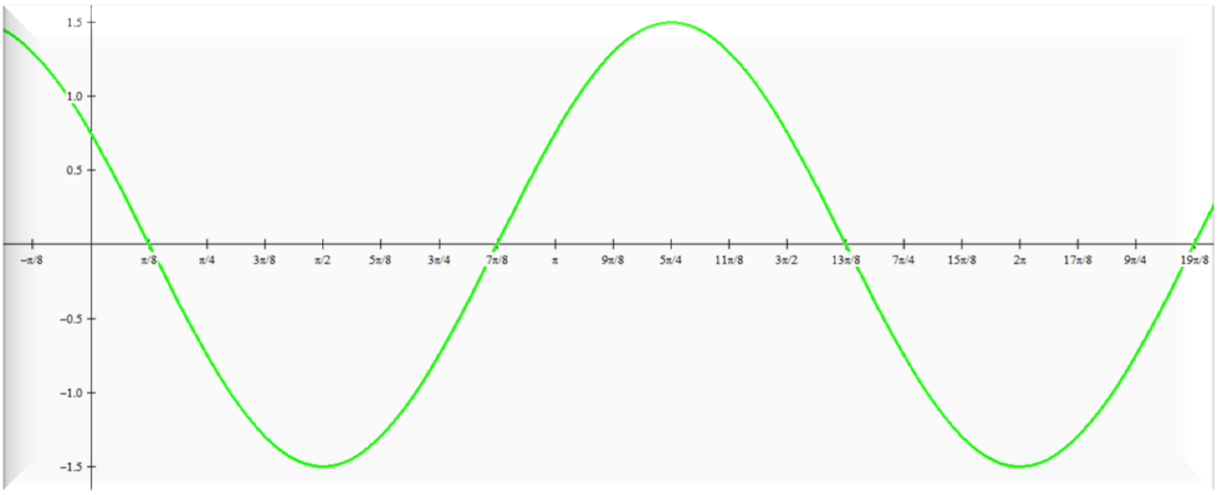
Fazemos o RASCUNHO 4 para $f_{III}(x) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3}+\frac{7\pi}{6}\right)$.

FIGURA 98




Produzimos o RASCUNHO 5 para $f_{III}^{SX}(x) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3}+\frac{7\pi}{6}\right)$, com simetria ao eixo “X”.

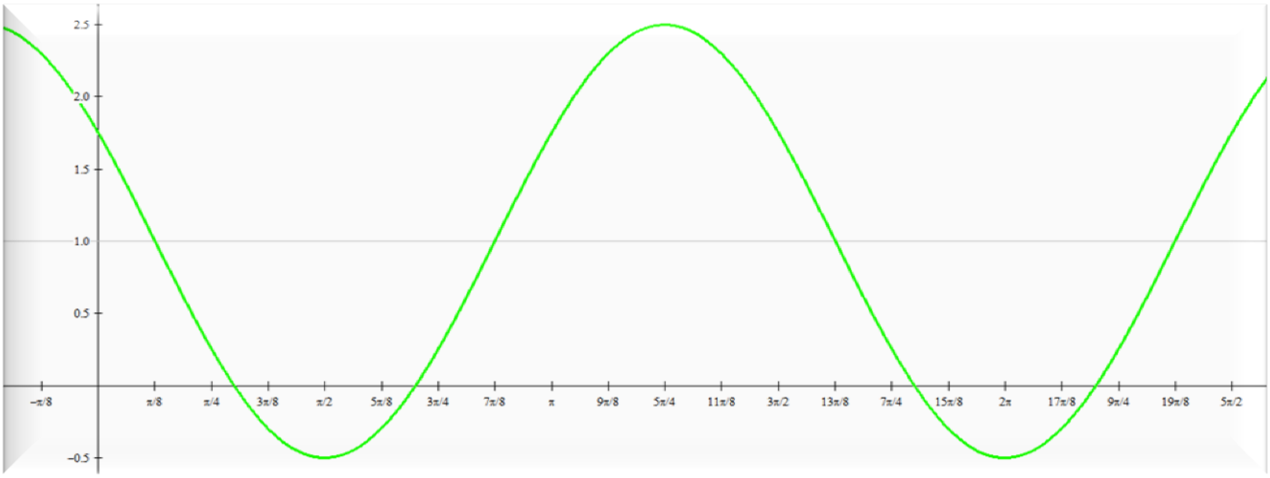
FIGURA 99



IV – Verificando o parâmetro “d” – temos uma **TRANSLAÇÃO VERTICAL** de “+1” no gráfico de $f_{III}^{SX}(x) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3}+\frac{7\pi}{6}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(-\frac{4x}{3}+\frac{7\pi}{6}\right)+1$.

**FIGURA 100**




₪ - 8

# ***CAPÍTULO V – FUNÇÃO COSSENO E MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS.***

## ***V-1 IDENTIFICANDO PARÂMETROS DA FUNÇÃO COSSENO***

Conforme nossa demonstração da **PÁGINA 27** e **PÁGINA 28**, temos que $\cos(x)=\operatorname{sen}\left(\pi/2-x\right)$; portanto $\cos(ax+b)=\operatorname{sen}\left(\pi/2-(ax+b)\right)=\operatorname{sen}\left(-ax+\pi/2-b\right)$ e como o parâmetro "a" altera período na função seno alterará também o período na função cosseno, de onde podemos concluir que o período na função cosseno também é calculado como $\rho=2\pi/|a|$ .

Observamos que se $x=0$ temos $\cos(0)=1$, verificando que $f(x)=\cos(x)$ inicia o período no ponto $(0,1)$ e como o parâmetro "b" promove uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL na função seno, devemos entender que em $\cos(ax+b)=\operatorname{sen}\left(-ax+\pi/2-b\right)$, para obtermos $\operatorname{sen}\left(-ax+\pi/2-b\right)=1$, devemos ter que $-ax+\pi/2-b=\pi/2 \Rightarrow -ax=b$ e $x=-b/a$; portanto o período de $f(x)=\cos(ax+b)$, se inicia em $-b/a$ e desta forma o gráfico sofre uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $-b/a$, tal qual o gráfico da Função Seno.

Assim como $-1\leq\operatorname{sen}\left(\pi/2-x\right)\leq1$ implica em $-|c|\leq c\cdot\operatorname{sen}\left(\pi/2-x\right)\leq|c|$ e sabemos que independente do sinal de c a desigualdade é a mesma; temos como consequência $-|c|+d\leq c\cdot\operatorname{sen}\left(\pi/2-x\right)+d\leq|c|+d$ e concluímos $-|c|+d\leq-c\cdot\cos(x)+d\leq|c|+d$.

Já sabemos do estudo da função seno que o parâmetro "c" determina a amplitude do gráfico; portanto na função $f(x)=c\cos(ax+b)+d$ a amplitude também é calculada como $|c|$, além de que o parâmetro "d" é responsável pela TRANSLAÇÃO VERTICAL, onde podemos resumir que o gráfico sofre uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de "d".

Diante destas conclusões percebemos que os movimentos causados pelas alterações de parâmetros nos gráficos de seno e cosseno são praticamente os mesmos e podemos levar em consideração todo o estudo já feito no método de construção de gráficos do **CAPÍTULO II** e **CAPÍTULO III**.

Embora aparentemente o método seja o mesmo, existem algumas sutilezas que devem ser observadas a fim de incidirmos em erros banais. Após observarmos as características da Função Cosseno, tornaremos a abordar os pontos críticos de distinção entre o método de construção de gráficos da Função Seno e Função Cosseno.

### *V-1.1 CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO.*

Como $f(x) = \cos(x) = \text{sen}\left(\pi/2 - x\right) = \text{sen}\left(-x + \pi/2\right)$. Temos que $\rho = 2\pi/|-1| = 2\pi$ .

Já fizemos no EXEMPLO 2.10, o gráfico de $f_I^{sx}(x) = \text{sen}(-x)$ que é simétrico do gráfico de $f_I(x) = \text{sen}(x)$ em relação ao eixo "X", conforme **FIGURA 51** da **PÁGINA 41**.

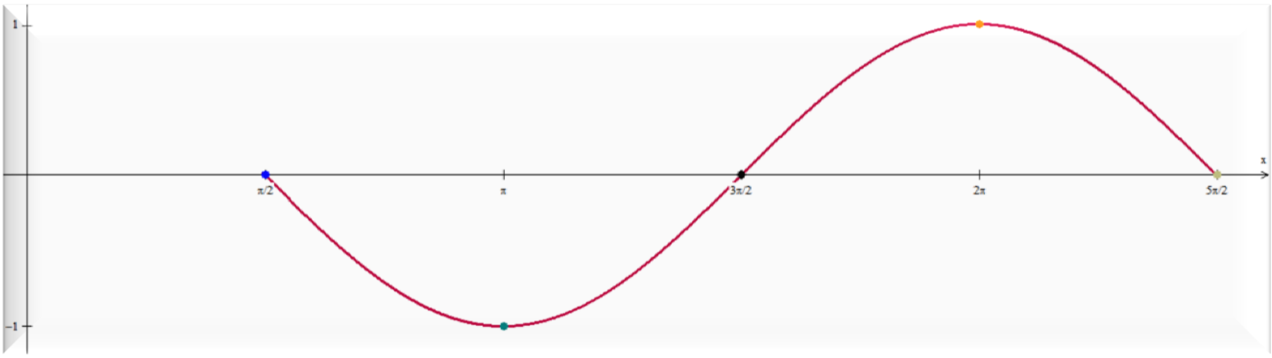
Devemos construir a tabela dos dados de um período recalculando os valores de "x" que produzam no argumento os valores dos arcos notáveis.

Façamos $\frac{\pi}{2} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ e como o período é $2\pi$, calculamos mais quatro elementos da P.A. cujo primeiro termo é $\frac{\pi}{2}$ e a razão $\frac{\pi}{2}$.

| (x) | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ | $5\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno de $\left(\pi/2 - x\right)$ | 0 | –1 | 0 | 1 | 0 |

Esboçando um período do Gráfico de $f(x) = \text{sen}\left(\pi/2 - x\right)$.

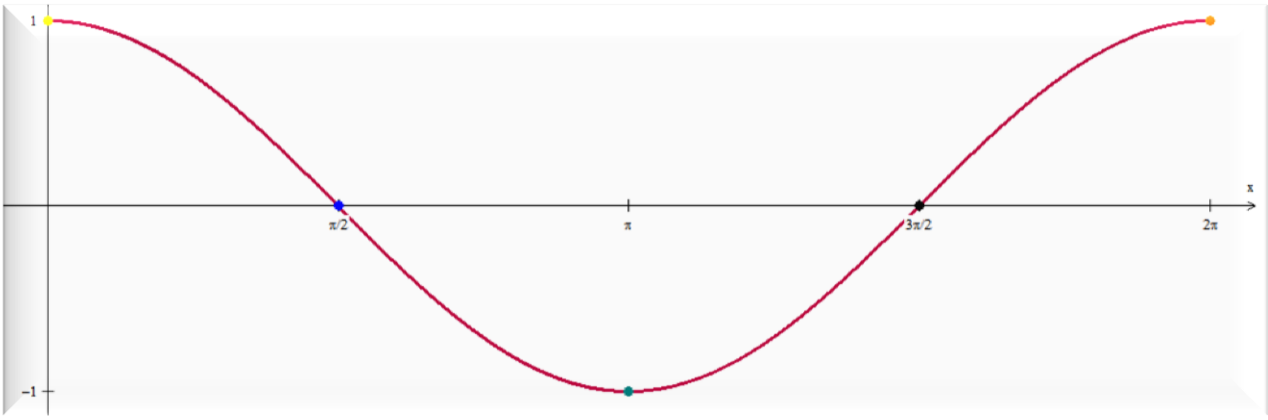
FIGURA 101




Como sabemos que o período da função cosseno é $2\pi$, desejamos tal qual como na função seno, iniciar o período em “0” (zero) e pela observação da **PÁGINA 70**, de que o período inicia no ponto $(0,1)$, podemos eliminar a parte do gráfico que excede a um período e completarmos a parte que falta.

### ESBOÇO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO EM UM PERÍODO.

FIGURA 102




## V-1.2 CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS.

- O gráfico da função Cosseno é também uma Senóide. Os valores da imagem da função variam de –1 a 1; portanto tem valor mínimo –1 e máximo 1.

- A Função Cosseno é uma função par, $f(-x) = f(x)$; ou seja $\cos(-x) = \cos(x)$, como podemos identificar na comprovação da **PÁGINA 19**, devido à projeção ortogonal no eixo horizontal do **CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.**
- Pela análise feita para função seno no **CAPÍTULO III**, também podemos garantir a **PERIODICIDADE** de $f(x) = \cos(x)$, que é dita uma função periódica de período $2\pi$ e para todo valor real $\alpha$, temos que:

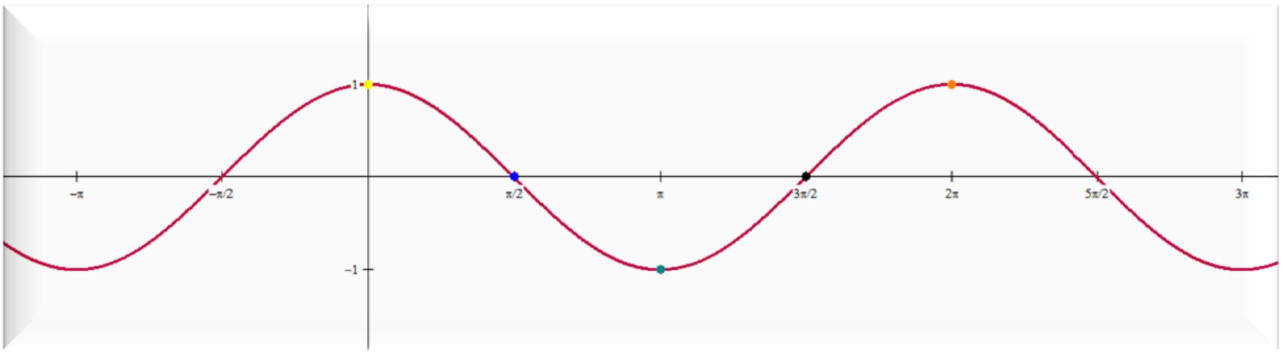
$$\ldots = \cos(\alpha - 4\pi) = \cos(\alpha - 2\pi) = \cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) = \ldots = \cos(\alpha + 2k\pi) = \ldots$$

Desta forma a cada $\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\beta = \alpha + 2\kappa\,\pi$ , para qualquer valor inteiro de $\kappa$, temos que $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$.

Com este entendimento podemos estender nosso gráfico para todos os reais.

### GRÁFICO DE $f$ (x)=cos(x).

FIGURA 103




- Observamos que $f(x) = \cos(x)$ é decrescente na primeira metade do seu período e é crescente na segunda metade.
- Vemos ainda que $f(x) = \cos(x)$ é positiva no primeiro e último um quarto do período, sendo portanto negativa no segundo e terceiro quarto do período. A função é nula para os valores $\pi/2$ e $3\pi/2$ no período $[0, 2\pi]$.
- Podemos resumir que para o traçado do gráfico em um período de $f(x) = \cos(x)$:

Iniciar em 0 e terminar em $2\pi$, também facilita a identificação do período;

a imagem de “0” é “1”; portanto o ponto $(0,1)$ está no gráfico e este é um dos pontos de máximo em $[0,\ 2\pi]$;

a imagem de “$\pi/2$” é “0”; ou seja, “$\pi/2$” é “um zero” da função e o ponto $(\pi/2\ ,0)$ está no gráfico;

o ponto central do período é um ponto de mínimo da função, portanto o ponto $(\pi,-1)$ está no gráfico;

a imagem de “$3\pi/2$” é “0”; ou seja, “$3\pi/2$” é “um zero” da função e o ponto $(3\pi/2\ ,0)$ está no gráfico;

a imagem de “$2\pi$” é “1”; portanto o ponto $(2\pi,1)$ está no gráfico e este é um dos pontos de máximo em $[0,\ 2\pi]$.

₪ - 9

No entanto devido à característica, vista na **PÁGINA 73**, de que a Função Cosseno é uma função par, devemos ressaltar que haverá diferença na construção de alguns gráficos, pois não existirá mais a simetria relativa ao eixo “X” como movimento causado pelo fato do parâmetro “a” ser negativo.

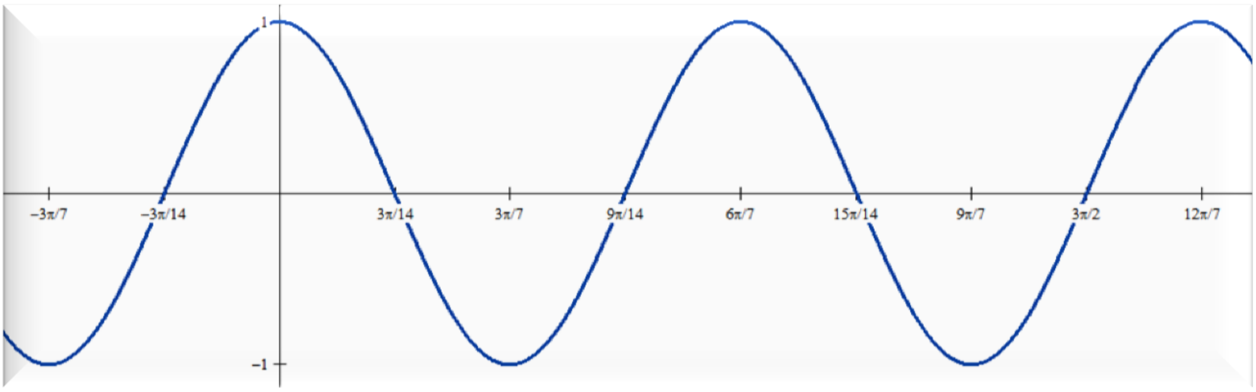
**EXEMPLO 5.01 –** Com valores dos parâmetros: a < 0, b < 0 , c < 0 e d > 0.

$$f(x) = -\cos\left(-\frac{7x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{2}.$$

I – Verificando o parâmetro “a” – $\rho = \dfrac{2\pi}{\left|-7/3\right|} = \dfrac{6\pi}{7}$, assim façamos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \cos\left(-7x/3\right)$.

| (x) | 0 | $3\pi/14$ | $3\pi/7$ | $9\pi/14$ | $6\pi/7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(-7x/3\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

FIGURA 104




Como a Função Cosseno é par não tivemos que fazer o gráfico de $f_I(x) = \cos\left(7x/3\right)$ para depois fazer simetria em relação ao eixo "X", pois $f(x) = \cos\left(-7x/3\right) = \cos\left(7x/3\right)$.

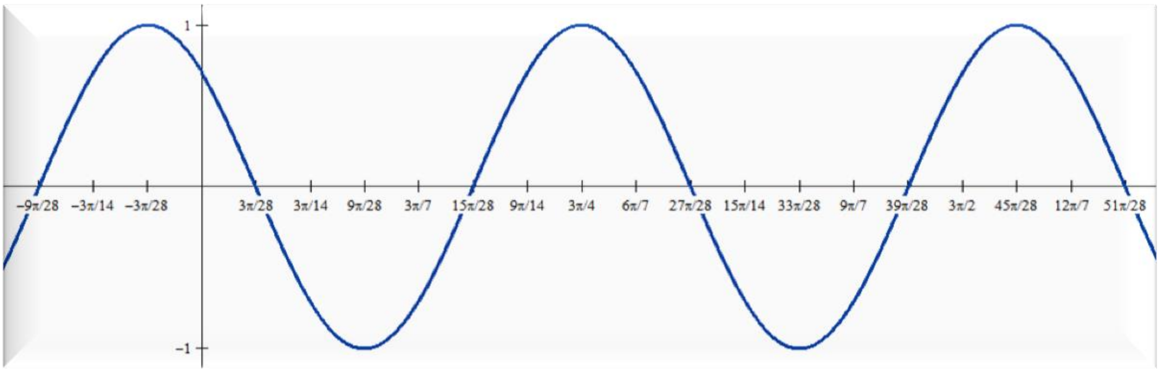
II – Verificando o parâmetro "b" – devemos conhecer os argumentos cujas imagens são as mesmas de: 0, $3\pi/14$, $3\pi/7$, $9\pi/14$ e $6\pi/7$.

Se $-\dfrac{7x}{3} - \dfrac{\pi}{4} = 0$ temos $-\dfrac{7x}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ e $x = -\dfrac{3\pi}{28}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $-3\pi/28$ e razão $3\pi/14$ (que é $1/4$ do período). Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $-3\pi/28$.

| (x) | $-3\pi/28$ | $3\pi/28$ | $9\pi/28$ | $15\pi/28$ | $3\pi/4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(-7x/3 - \pi/4\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

Fazemos o RASCUNHO 2 para $f_{II}(x) = \cos\left(-\dfrac{7x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

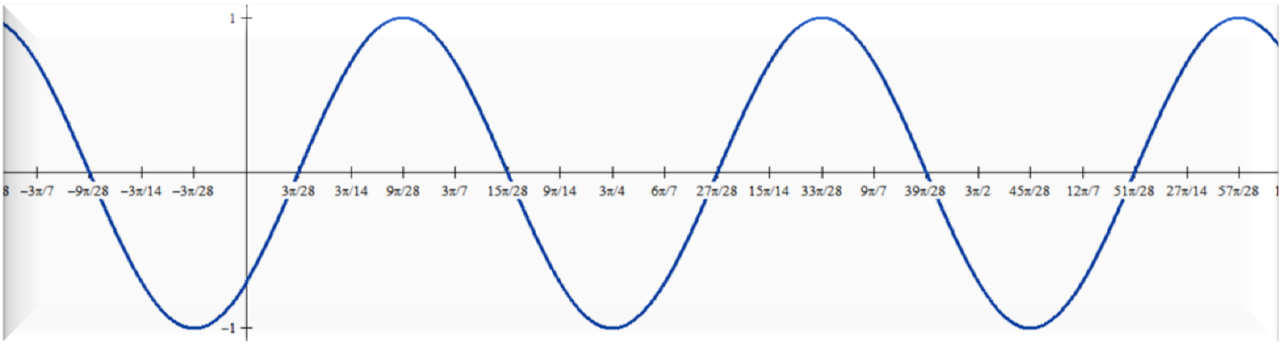
FIGURA 105




III – Verificando o parâmetro "c" – sabemos que $-1 \leq \cos\left(-\frac{7x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$; portanto temos que $-1 \leq -\cos\left(-\frac{7x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$.

Produzimos o RASCUNHO 3 $f_{III}^{SX}(x) = -\cos\left(-\frac{7x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$, com simetria ao eixo "X" do gráfico da função $f_{II}(x) = \cos\left(-\frac{7x}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = f_{III}(x) = 1 \cdot \cos\left(-\frac{7x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

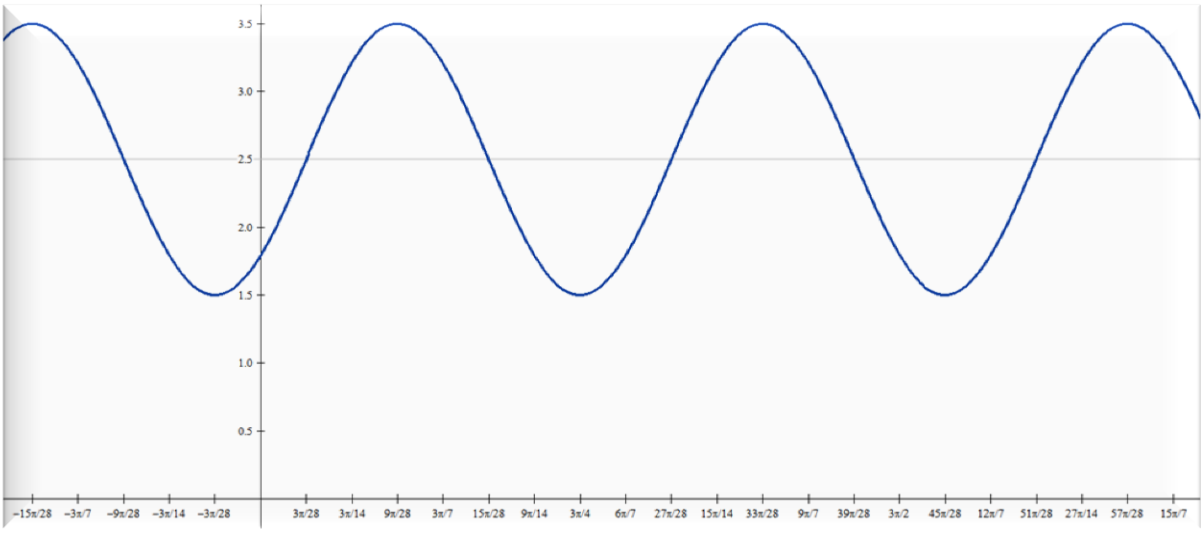
FIGURA 106




IV – Verificando o parâmetro "d" – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de "$+\frac{5}{2}$" no gráfico de $f_{III}^{SX}(x) = -\cos\left(-\frac{7x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x) = -\cos\left(-\dfrac{7x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{5}{2}$.

FIGURA 107




**EXEMPLO 5.02 –** Com valores dos parâmetros: a > 0, b < 0 , c < 0 e d > 0.

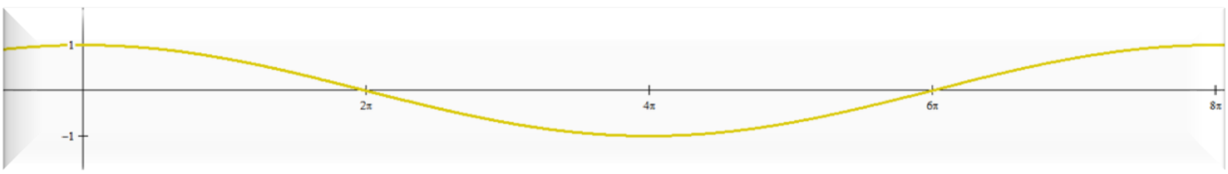
$f(x) = -2\cos\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{5}{3}$.

I – Verificando o parâmetro “a” – $\rho = \dfrac{2\pi}{1/4} = 8\pi$, assim façamos o RASCUNHO 1 para

$f_I(x) = \cos(x/4)$.

| (x) | 0 | $2\pi$ | $4\pi$ | $6\pi$ | $8\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $(-x/4)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

FIGURA 108



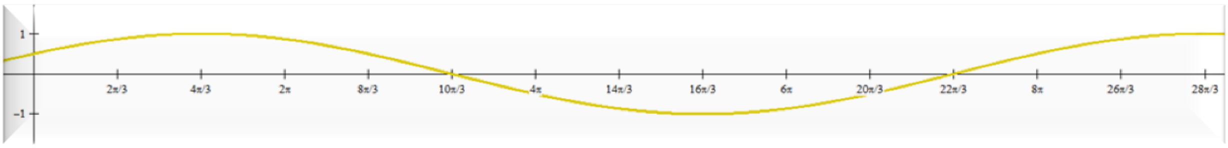

II – Verificando o parâmetro “b” – devemos conhecer os argumentos cujas imagens são as mesmas de: 0, $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$ e $8\pi$.

Se $\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}=0$ temos $\frac{x}{4}=\frac{\pi}{3}$ e $x=\frac{4\pi}{3}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $4\pi/3$ e razão $2\pi$. Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $4\pi/3$.

| (x) | $4\pi/3$ | $10\pi/3$ | $16\pi/3$ | $22\pi/3$ | $28\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(x/4-\pi/3\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

Fazemos o RASCUNHO 2 para $f_{II}(x)=\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$.

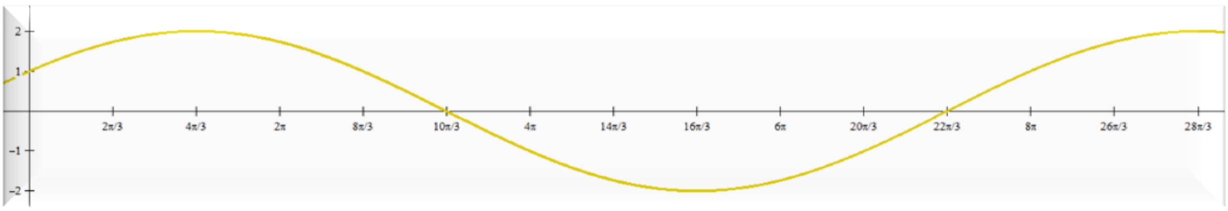
FIGURA 109



III – Verificando o parâmetro "c" – sabemos que $-1\leq\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$; portanto temos que $-2\leq 2\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\leq 2$.

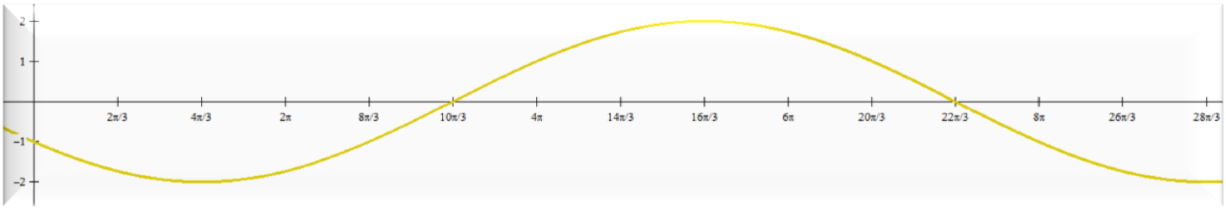
Façamos o RASCUNHO 3 para $f_{III}(x)=2\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

FIGURA 110



Produzimos o RASCUNHO 4 $f_{III}^{SX}(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ com simetria ao eixo "X" do gráfico da função $f_{III}(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

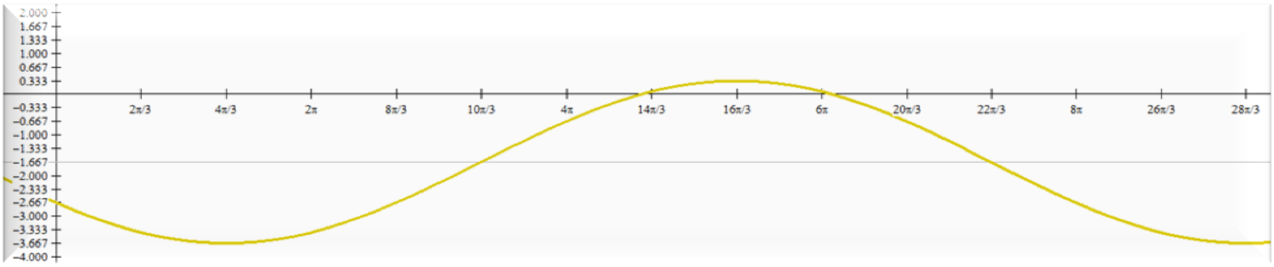
FIGURA 111



IV – Verificando o parâmetro "d" – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de "$-\frac{5}{3}$" no gráfico de $f_{III}^{SX}(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{3}$.

FIGURA 112



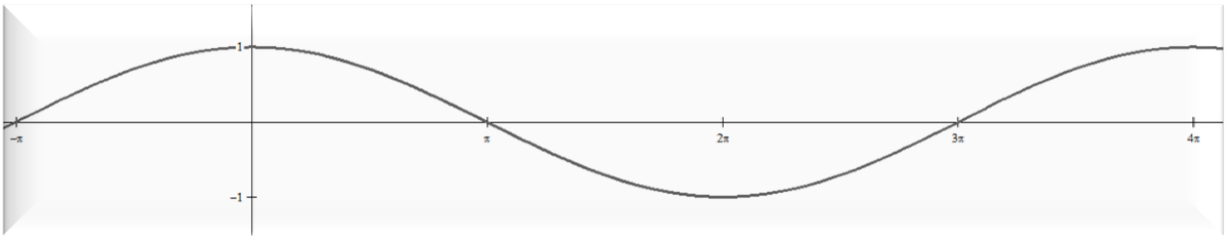
**EXEMPLO 5.03 –** Com valores dos parâmetros: a > 0, b > 0 , c < 0 e d > 0.

$$f(x) = -\frac{4}{3}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{7}{4}.$$

I – Verificando o parâmetro "a" – $\rho = \dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$, assim façamos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \cos\left(x/2\right)$.

| (x) | 0 | $\pi$ | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(x/2\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

FIGURA 113




II – Verificando o parâmetro "b" – devemos conhecer os argumentos cujas imagens são as mesmas de: 0, $\pi$, $2\pi$, $3\pi$ e $4\pi$.

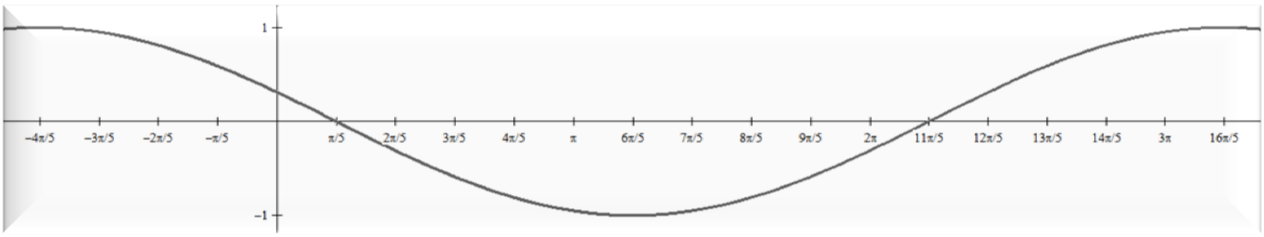
Se $\dfrac{x}{2} + \dfrac{2\pi}{5} = 0$ temos $\dfrac{x}{2} = -\dfrac{2\pi}{5}$ e $x = -\dfrac{4\pi}{5}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $-4\pi/5$ e razão $\pi$ (que é $1/4$ do período).

Temos uma TRANSLAÇÃO HORIZONTAL de $-4\pi/5$.

| (x) | $-4\pi/5$ | $\pi/5$ | $6\pi/5$ | $11\pi/5$ | $16\pi/5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(x/2 + 2\pi/5\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

Fazemos o RASCUNHO 2 para $f_{II}(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2\pi}{5}\right)$.

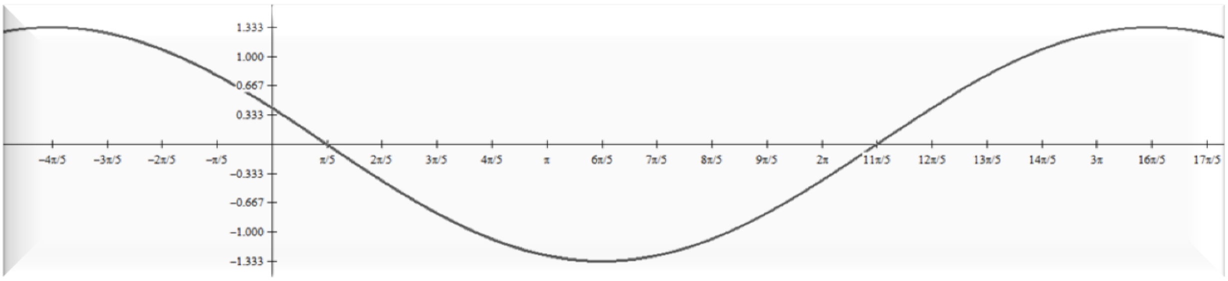
FIGURA 114



III – Verificando o parâmetro “c” – sabemos que $-1 \le \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{5}\right) \le 1$; portanto temos que $-\frac{4}{3} \le \frac{4}{3}\ \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{4}{3}$ .

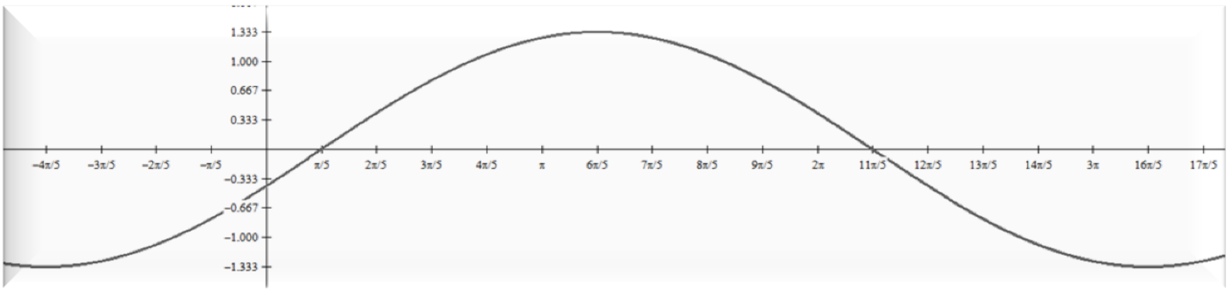
Façamos o RASCUNHO 3 para $f_{III}(x) = \frac{4}{3}\ \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

FIGURA 115



Produzimos o RASCUNHO 4 $f_{III}^{SX}(x) = -\frac{4}{3}\ \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$ com simetria ao eixo “X” do gráfico da função $f_{III}(x) = \frac{4}{3}\ \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$.

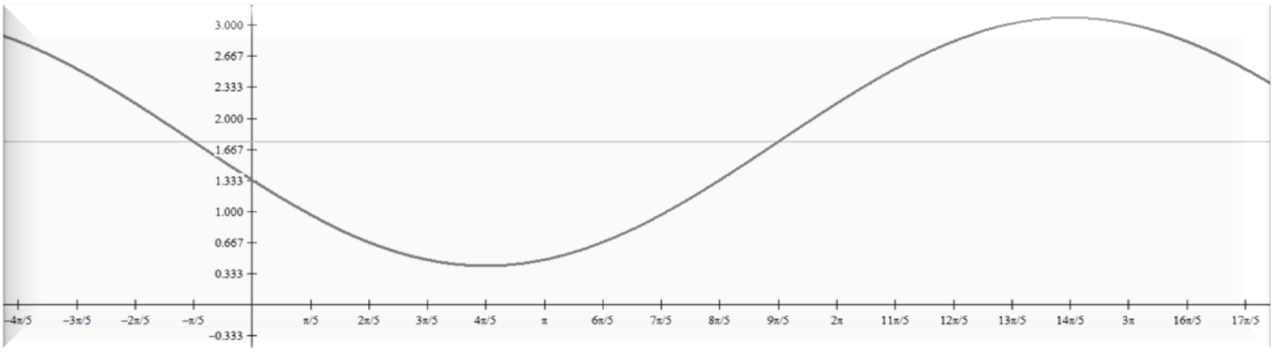
FIGURA 116



IV – Verificando o parâmetro “d” – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de “$+\frac{7}{4}$” no gráfico de $f_{III}^{SX}(x) = -\frac{4}{3}\ \cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x) = -\frac{4}{3}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{7}{4}$.

FIGURA 117



**EXEMPLO 5.04 –** Com valores dos parâmetros: a < 0, b > 0 , c > 0 e d > 0.

$f(x) = \frac{3}{5}\cos\left(-\frac{7x}{2} + \pi\right) + \frac{1}{6}$.

I – Verificando o parâmetro "a" – $\rho = \frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{2}\right|} = \frac{4\pi}{7}$, assim façamos o RASCUNHO 1 para $f_I(x) = \cos\left(-\frac{7x}{2}\right)$.

| (x) | 0 | $\frac{\pi}{7}$ | $\frac{2\pi}{7}$ | $\frac{3\pi}{7}$ | $\frac{4\pi}{7}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(-\frac{7x}{2}\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

FIGURA 118

II – Verificando o parâmetro “b” – devemos conhecer os argumentos cujas imagens são as mesmas de: 0, $\pi/7$, $2\pi/7$, $3\pi/7$ e $4\pi/7$.

Se $-\dfrac{7x}{2}+\pi=0$ temos $-\dfrac{7x}{2}=-\pi$ e $x=\dfrac{2\pi}{7}$, assim basta calcularmos os outros quatro elementos da P.A. de temo inicial $2\pi/7$ e razão $\pi/7$ (que é $1/4$ do período). Temos uma **TRANSLAÇÃO HORIZONTAL** de $2\pi/7$.

| (x) | $2\pi/7$ | $3\pi/7$ | $4\pi/7$ | $5\pi/7$ | $6\pi/7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cosseno de $\left(-7x/2+\pi\right)$ | 1 | 0 | –1 | 0 | 1 |

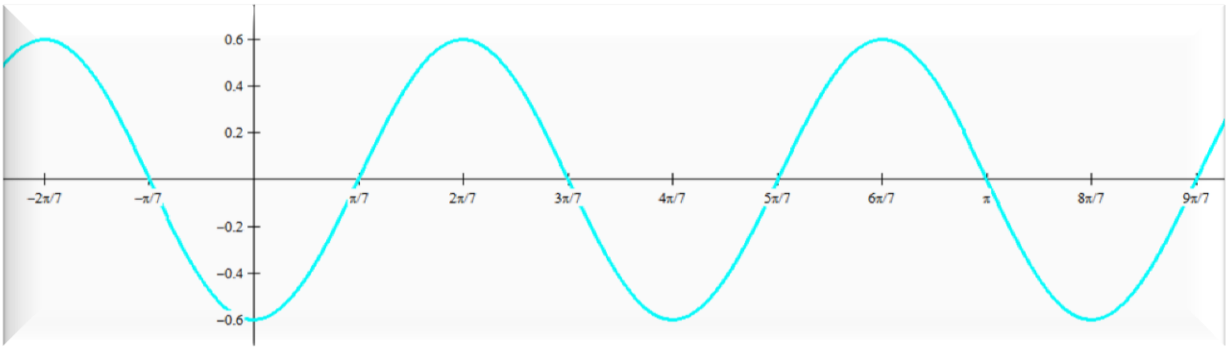
Fazemos o RASCUNHO 2 para $f_{II}(x)=\cos\left(-\dfrac{7x}{2}+\pi\right)$.

FIGURA 119


III – Verificando o parâmetro “c” – sabemos que $-1\le\cos\left(-\dfrac{7x}{2}+\pi\right)\le 1$; portanto temos que $-\dfrac{3}{5}\le\dfrac{3}{5}\cos\left(-\dfrac{7x}{2}+\pi\right)\le\dfrac{3}{5}$.

Façamos o RASCUNHO 3 para $f_{III}(x)=\dfrac{3}{5}\cos\left(-\dfrac{7x}{2}+\pi\right)$

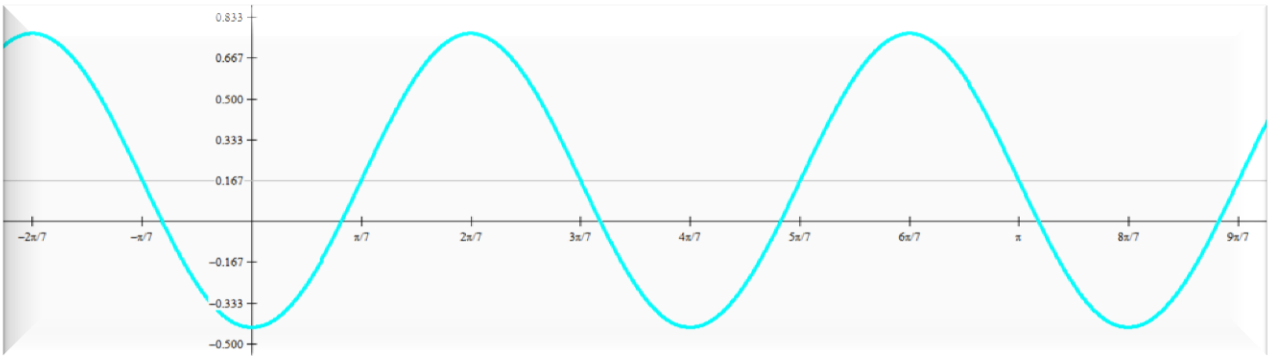
FIGURA 120




IV – Verificando o parâmetro “d” – temos uma TRANSLAÇÃO VERTICAL de “$+\frac{1}{6}$” no gráfico de $f_{III}(x)=\frac{3}{5}\cos\left(-\frac{7x}{2}+\pi\right)$.

Esboçando o Gráfico de $f(x)=\frac{3}{5}\cos\left(-\frac{7x}{2}+\pi\right)+\frac{1}{6}$.

FIGURA 121




Com estes quatro exemplos que envolvem quatro parâmetros pretende-se reforçar a análise para construção de gráficos de $c\cdot\text{sen}(ax+b)+d$ ou $c\cdot\cos(ax+b)+d$, pois estas análises são bem similares e os pontos de divergência foram enfatizados. Diante de todas as informações apresentadas é esperado que neste momento o aluno consiga construir sem dificuldades qualquer gráfico deste tipo.

₪ - 10

## *CAPÍTULO VI – PERCEPÇÃO HUMANA E MECÂNICA DO SOM.*

Existe mais de uma maneira de estudarmos cientificamente um fenômeno sonoro. As abordagens que podemos fazer sobre este assunto estão interligadas, mas cada uma enfoca um aspecto específico distinto. A ACÚSTICA FÍSICA estuda a materialidade do fenômeno sonoro, enquanto a PSICOACÚSTICA trata da percepção do som pelos nossos sentidos e estas duas disciplinas são as mais relevantes para este estudo.

Conforme abordado no CAPÍTULO III, a Ondulatória é a parte da Física que estuda os fenômenos que se apresentam em formas de ondas. Existem dois tipos básicos de fenômenos que se comportam dessa maneira: ondas mecânicas, que atuam no nível das moléculas, cujo fato perceptivo associado é o som e ondas eletromagnéticas, causadas pelo movimento de partículas subatômicas, cujos fatos perceptivos associados são, principalmente, a luz e as cores. Neste capítulo, nos interessa entender o fenômeno físico SOM e como ele é percebido pelos aparelhos eletrônicos e pelo ser humano.

Ondas Eletromagnéticas no nível subatômico e Ondas Mecânicas no nível molecular

FIGURA 122

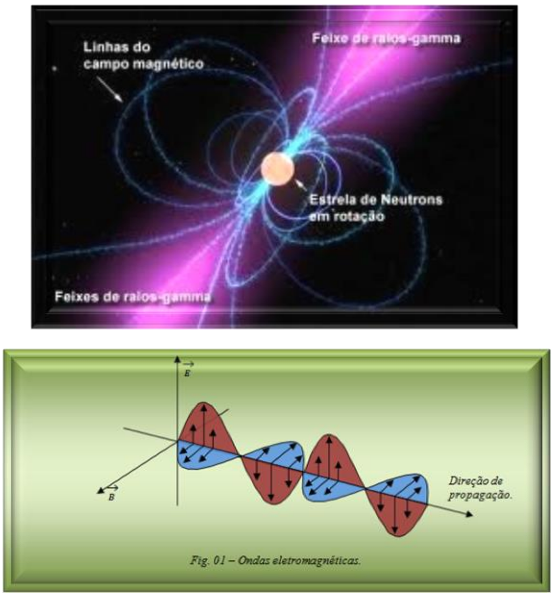
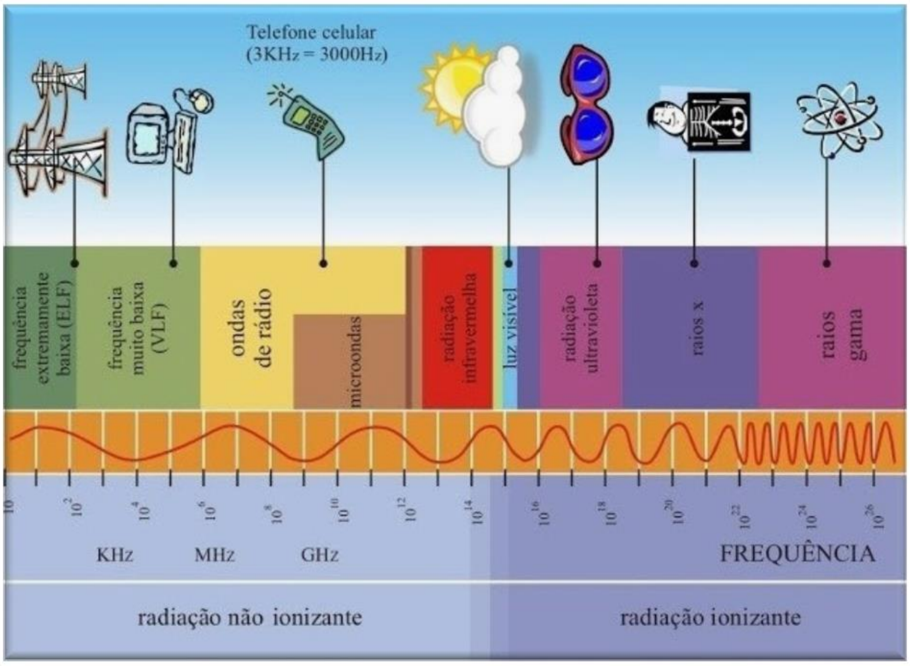
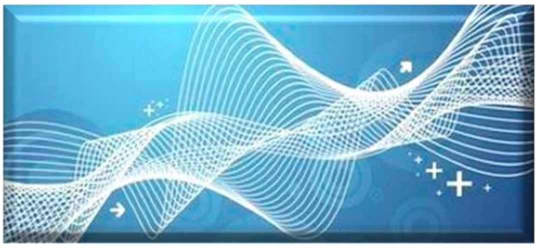



FIGURA 123

## Espectros eletromagnéticos

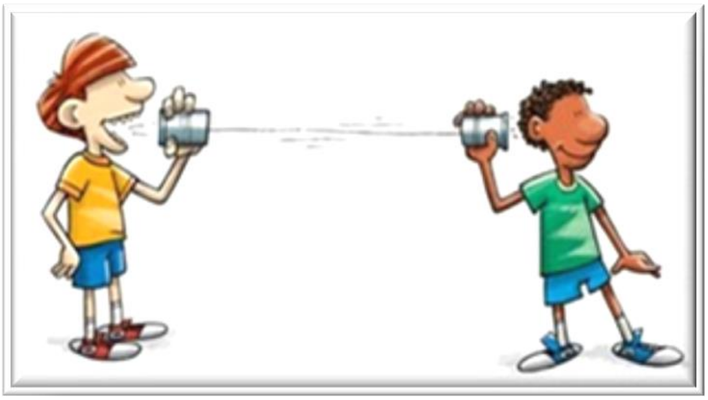
### Figura 124



## Ondas Mecânicas

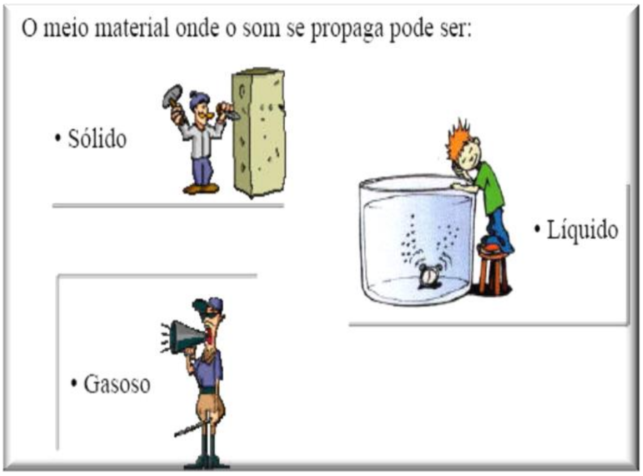
### Figura 125



## VI-1 O QUE É O SOM

*Def*: **SOM** - O som é a propagação de uma frente de compressão mecânica ou **ONDA MECÂNICA**; esta onda é longitudinal e se propaga de forma circuncêntrica apenas em meios materiais (sólidos, líquidos ou gases). Não é possível perceber o som, se não existir um meio material entre o corpo que vibra e o nosso ouvido.

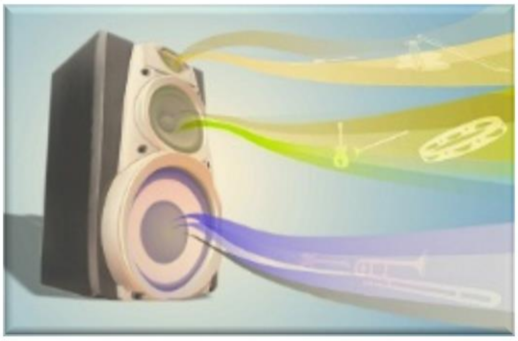
FIGURA 126




Todo som é gerado pela vibração de um corpo que exerce pressão em algum meio e propaga-se por esse meio em forma de ondas.

A energia de uma onda sonora é a medida da quantidade de som nela presente.
O som é um fenômeno físico e, quando ele acontece, ocorre a transformação da energia em um determinado meio.

FIGURA 127



Essa energia transmitida como onda sonora leva a informação de diferentes frequências; ou seja, o som pode ser descrito através de ondas sonoras, que são ondas de deslocamento, densidade e pressão propagando-se por um meio material, isso quer dizer que após a passagem de uma onda sonora por um meio material, a posição de suas partículas, bem como a pressão e a densidade, retornarão aos seus valores originais (anteriores à passagem da onda). Tais deslocamentos e variações de pressão e densidade, ainda que muito pequenos, dão origem ao transporte de energia que caracteriza uma onda sonora.

₪ - 11

## VI-1.1 Três Características Fundamentais no Som.

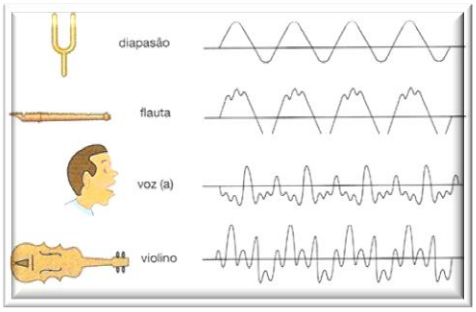
FIGURA 128


A **INTENSIDADE** é a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco (a Intensidade consiste no grau de força com que se apresenta o som e depende da amplitude das ondas geradas pelas vibrações).

FIGURA 129

A **ALTURA** consiste na maior ou menor elevação do som e depende do maior ou menor número de vibrações executadas num tempo dado; é a propriedade que o som tem de ser mais grave ou mais agudo.

FIGURA 130



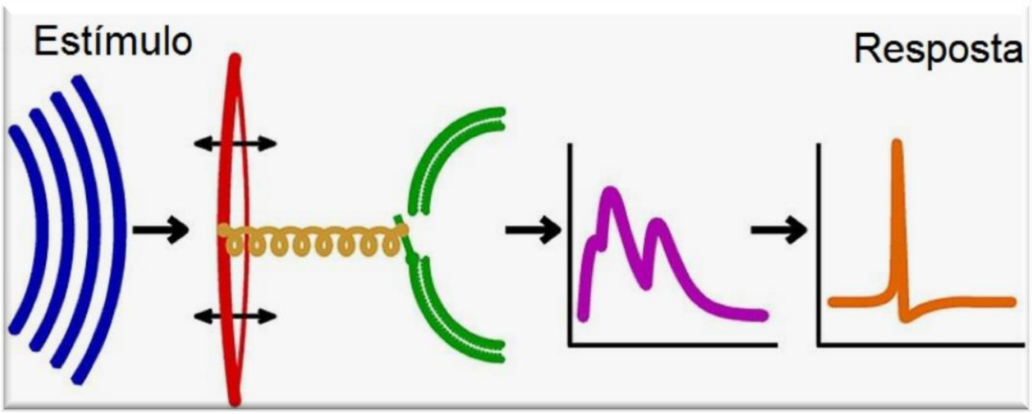

O **TIMBRE** é a qualidade, a personalidade e a "cor" do som, pois permite reconhecer sua origem. Quando ouvirmos um mesmo som produzido por vozes ou instrumentos diferentes, é por meio do timbre que reconhecemos esta ou aquela voz, ou ainda qual o instrumento que o produziu.

Temos então que o som é medido fisicamente por três grandezas: a Intensidade que se refere à amplitude das oscilações da pressão do ar, a Frequência que é o número de vezes que a oscilação ocorre por unidade de tempo e o Timbre que é relativo à presença de harmônicos no som e é gerado por objetos ou instrumentos distintos.

De forma mais comum, devido à propagação no ar, a maioria dos sons chega aos nossos ouvidos, onde há uma estrutura que recebe essas vibrações, interpreta-as e envia-as ao cérebro, gerando a nossa percepção do som.

Esquema representando a audição humana.

FIGURA 131




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ONDAS SONORAS | TÍMPANO | CÓCLEA | CÉLULAS RECEPTORAS DE SOM | ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS DA RESPOSTA DA AUDIÇÃO | POTENCIAL DE AÇÃO DO NERVO |

Nossos ouvidos são dotados de configurações anatômicas que permitem receber a informação e identificar a sua direção.

O entendimento do comportamento do som passa pelo estudo do comportamento das ondas e de como nosso organismo as recebe. As partículas presentes no meio, onde uma onda se propaga, não acompanham o movimento da onda, elas apenas vibram localmente e transmitem as vibrações às partículas vizinhas pelo contato. Pelas descrições, percebemos que a vibração é o fato característico que promove o som. Por VIBRAÇÃO entende-se o movimento de um ponto que oscila em torno de outro ponto ou linha de referência. A ciência pode hoje apontar certas características físicas de um som musical que o distingue de sons que são apenas ruídos.

Usando instrumentos que transcrevem ondas sonoras em imagens ( como por exemplo o “osciloscópio” exibido na **FIGURA 132** e **FIGURA 133**), os cientistas aprenderam que a maioria dos sons musicais formam estruturas definidas por ondas e descritas por funções matemáticas (chamadas de “função seno” ou “senóide”), por meio de um osciloscópio, podemos “ler” a matemática que há por trás da uma música ou qualquer tipo de som, além disso podemos verificar que cada instrumento produz uma modalidade matemática diferente, ou seja, cada tipo de instrumento musical tem uma espécie de "assinatura". Essa assinatura é um conjunto de características sonoras associadas que têm uma descrição matemática extremamente precisa, embora possam parecer subjetivas.

**FIGURA 132**

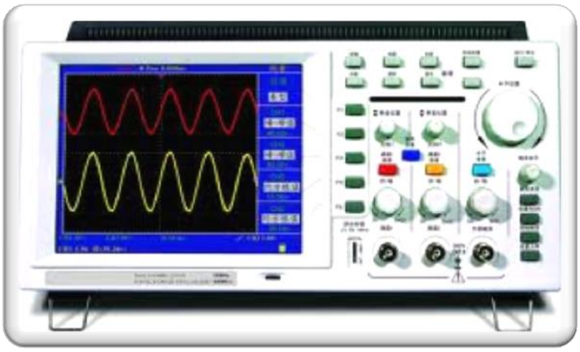
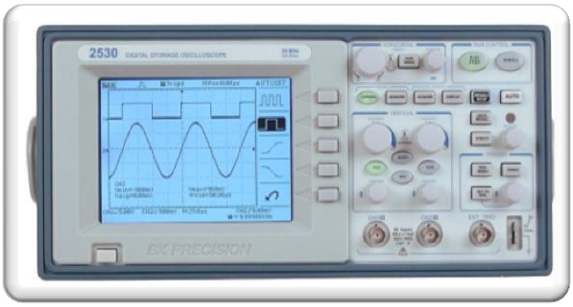


**FIGURA 133**

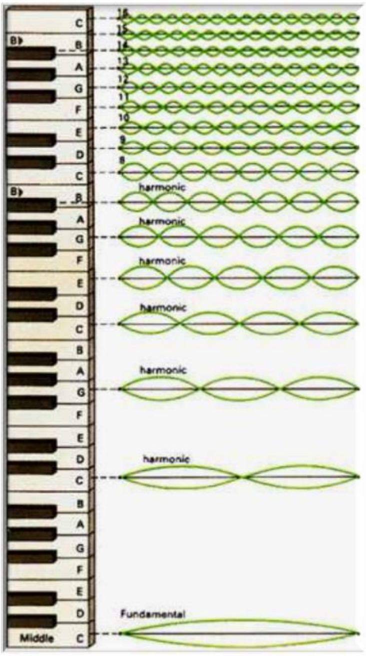



Desta forma, compreendemos que o som é uma perturbação que se propaga em um meio, com propriedades elásticas e na forma de uma onda. Essa onda mecânica é entendida na física como uma soma de funções periódicas e essa soma de funções é também uma função, que em cada período, tem uma forma (ou desenho) chamada de Onda, a qual está fortemente ligada ao Timbre da fonte sonora.

A AMPLITUDE fornece, basicamente, a energia na qual o som está sendo ouvido; ou seja, a intensidade do som que ouvimos é uma função crescente da sua amplitude, melhor ainda, fisicamente é proporcional ao quadrado da sua amplitude.

Por fim a FREQUÊNCIA, que é medida em hertz (Hz), diz quantos períodos estão compreendidos em um segundo de som. A frequência identifica a nota musical associada ao som. Os músicos denominam as notas (ou suas frequências associadas) também de "altura". Enquanto que a "altura" é medida em hertz (Hz), a intensidade, que é o volume de som, é medida em Decibéis (dB). Um som é relativamente AGUDO se sua frequência é alta e é dito Grave se sua frequência é baixa.

FIGURA 134

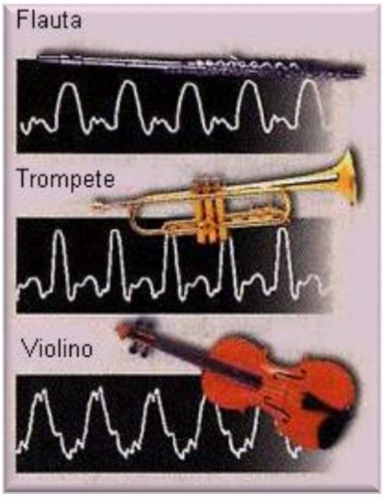



*Def*: **HARMÔNICOS** – são os sons produzidos por um corpo a partir de um estímulo e devido à suas características físicas, consistem em uma frequência principal e seus múltiplos inteiros. (o dobro, o triplo, etc). O TIMBRE é a variação da intensidade que cada um dos múltiplos da frequência natural tem. Estes múltiplos somados, produzem a forma característica do som de um instrumento musical, por exemplo.

₪ - 12

A mesma nota emitida por uma trompa soa diferente quando produzida por um violino. Isto acontece porque, embora a frequência fundamental dos sons seja a mesma em ambos os instrumentos, a excitação das frequências harmônicas é diferente. No violino, uma extensa gama de harmônicos comparece junto à fundamental e do conjunto desses sons resulta o timbre do instrumento. Os sons naturais são, na sua maior parte, combinações de sinais, mas um som puro monotônico é representado por uma **SENÓIDE** pura.

FIGURA 135




Os sons audíveis pelo ouvido humano, embora estes limites não sejam absolutos, têm uma frequência entre 20 Hz e 20.000 Hz. O limite maior normalmente decresce com a idade, acima e abaixo desta faixa estão ultrassom e infrassom, respectivamente. Outras espécies têm diferentes níveis de audição. Por exemplo, os cães conseguem perceber vibrações mais altas que 20.000 Hz.

Para a aplicação que vamos fazer neste trabalho, vamos considerar a percepção do som em isolamento, mas devemos saber que, em situações reais, as ondas sonoras interagem com outras ondas sonoras, com objetos e com mudanças no meio. Essas interações sonoras, alteram frequências e amplitudes produzindo, em alguns casos, sons distintos dos que foram emitidos pela fonte sonora. Embora existam inúmeros fatores que interfiram na propagação do som, como por exemplo: a densidade do meio material, a sobreposição de ondas, a refração, a difração, a absorção do som pelos materiais, as ondas estacionárias e a Interferência por obstáculos, nesta abordagem não nos interessa calcular volume de som, nível de pressão sonora, ou qualquer quantidade ligada à dispersão; o conhecimento destas componentes só é necessário para situarmos as variáveis físicas e relacionarmos com nossos gráficos de som. Precisamos conhecer a terminologia correta para quando necessitarmos falar do objeto físico, possamos fazê-lo com propriedade, sem que nos falte a nomenclatura correta ou tenhamos que denominar o que já é conhecido ou foi batizado.

De forma resumida o som é resultado da percepção de distúrbios das moléculas de um meio num certo espaço de tempo. Esses distúrbios são relacionados com uma onda de pressão que se propaga pelo meio. As ondas de pressão que caracterizam o som nós chamamos de ONDAS SONORAS e são do tipo longitudinal que se propagam por uma série de compressões/descompressões.

### VI-2.1 Introdução à Psicoacústica

A Psicoacústica é o estudo de como o ser humano percebe o fenômeno sonoro. Nosso interesse neste ponto é somente para entender qual é nossa resposta subjetiva ao som, dependendo de sua altura, volume, duração, timbre e posicionamento de fonte emissora. Os itens de estudo da Psicoacústica não são independentes, há uma correlação clara entre eles. Temos, por exemplo, que a nossa sensação de altura depende do tempo, e nossa percepção de volume varia conforme a frequência e o timbre. Deve-se saber que: a maior parte dos resultados no estudo da Psicoacústica foram obtidos experimentalmente.

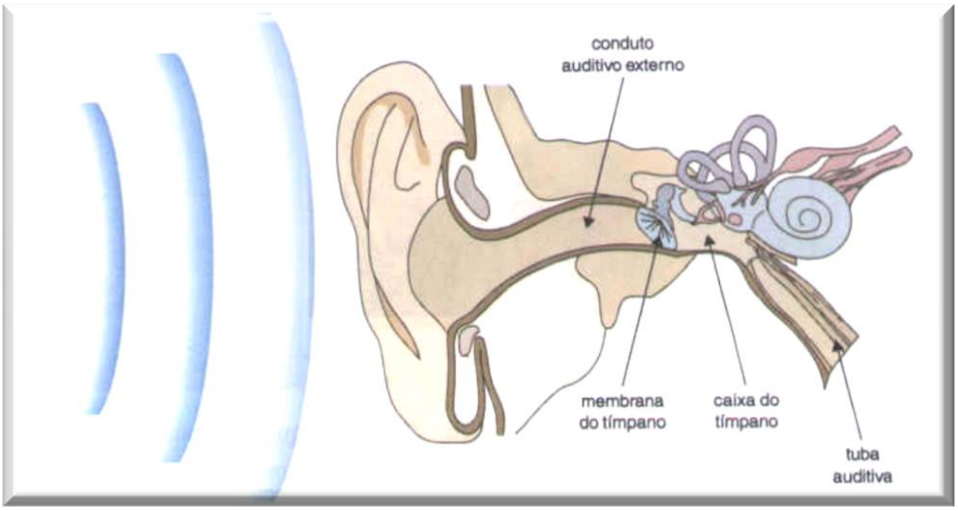
Tais resultados são inferidos de testes em situações cuidadosamente preparadas, com um grupo de ouvintes, cujas respostas aos estímulos sonoros são monitoradas e analisadas. Estes experimentos são geralmente baseados em comparação de dois sons diferentes, por meio de uma escala subjetiva de valores.

Os ouvintes são questionados, sobre o que ouviram, em termos de: "mais alto" ou "mais grave" e etc. Muitas das descobertas da Psicoacústica ainda residem no plano experimental, pois razões físicas ou anatômicas sobre a sua causa ainda não são conhecidas. No entanto os dados apresentados pela Psicoacústica são muito importantes para o entendimento da relação entre a percepção humana e o ambiente sonoro que a envolve.

Como um sinal percebido por um dos sentidos, o som é usado por muitas espécies para detectar o perigo, orientação, caça e comunicação. A atmosfera da Terra, a água e virtualmente todos os fenômenos físicos, como o fogo, a chuva, o vento, as ondas ou os terremotos produzem sons únicos, muitas espécies, como os sapos, os pássaros, mamíferos terrestres e aquáticos foram, também, desenvolvendo órgãos especiais para produzir som, em algumas espécies, essa evolução é percebida na fala e no canto.

Quando falamos, produzimos diferentes sons. Estes sons são conduzidos pelo ar e a informação será captada pelo pavilhão auditivo.

FIGURA 136

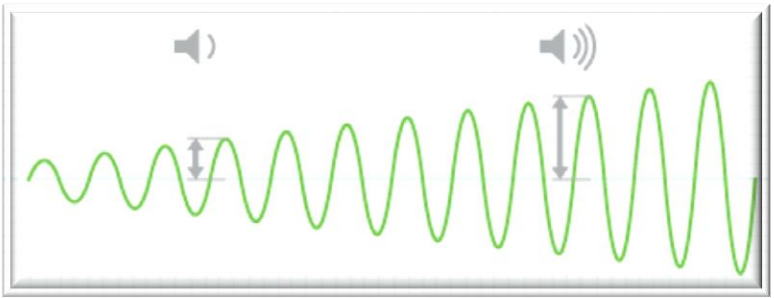


Sem entrarmos em muitos detalhes, devemos entender que na cóclea, a vibração da onda sonora faz com que se movimentem os líquidos existentes na sua estrutura. Essa movimentação faz com que as células do ouvido interno se despolarizem e estimulem o nervo auditivo; esta informação é transmitida pelas vias auditivas até o cérebro, que a processa de maneira a torná-la tal qual nós a escutamos ou a entendemos.

A forma mais simples de onda sonora é aquela descrita por funções harmônicas do tipo senoidal, que são dotadas de uma característica periódica; isto é, repetem-se num certo intervalo de tempo. Sabe-se, também, que todo e qualquer fenômeno ondulatório longitudinal, seja ele periódico ou não, pode ser decomposto em um número de unidades deste tipo.

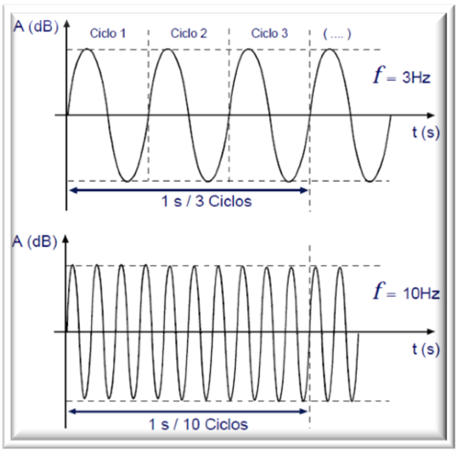
Tomando-se uma onda periódica senoidal como modelo, podemos mapear alguns dos parâmetros apresentados anteriormente com qualidades sensoriais humanas.

FIGURA 137



- A amplitude de uma onda de pressão correlaciona-se diretamente com a nossa percepção de intensidades sonoras; por exemplo, sons mais intensos serão resultado de uma maior amplitude de variação da pressão do meio; ou seja, de um deslocamento maior das moléculas.

FIGURA 138




- A frequência, por consequência, o período e o comprimento de onda, relaciona-se com a percepção de alturas; ou seja, o quão grave ou agudo um som é. Certos valores de frequências são convencionalmente equivalentes às notas musicais ocidentais, por exemplo 440 Hz é a nota Lá, usada para a afinação de instrumentos.

Em ondas sonoras mais complexas, a correlação entre frequência e altura é mais problemática. Podemos verificar questões mais complexas relativas à correlação dos parâmetros físicos com as qualidades subjetivas que são percebidas pelo ouvido no estudo da Psicoacústica.

## VI-3 ENTENDENDO A MÚSICA

Os sons que escutamos em cada instrumento são denominados notas musicais. Para uma melhor e correta compreensão de todos os objetos musicais que vamos denominar e por necessidade do uso de linguagem adequada, seria necessário que o estudante soubesse e entendesse, por exemplo, o que significa ESCALA MUSICAL, TOM, SEMITOM e etc. Devido ao fato de que este texto não é proposto como um trabalho de música, mas sim uma aplicação de matemática em música, seremos mais objetivos com as denominações e vamos considerar a maioria dos conceitos básicos de música como conhecidos.

Todo instrumento musical é classificado como sendo de CORDAS, SOPRO ou PERCUSSÃO. Em qualquer destas classes o processo sonoro se dá pela vibração.

FIGURA 139

Percussão

FIGURA 140

Quando batemos em um anteparo ou numa membrana esticada, como é o caso do tambor, atabaque, surdo, pandeiro entre outros, produzimos uma vibração originada pelo choque.

FIGURA 141

Membranas pouco ou muito esticadas produzem frequências distintas, por isso o simples fato de encostarmos algum objeto ou mesmo a apoiarmos a mão, enquanto batemos, altera a frequência emitida. Cada tipo de instrumento emite seu som impregnado de componentes que identificará seu Timbre.

FIGURA 142

## SOPRO

FIGURA 143


Quando sopramos por um tubo cilíndrico ou qualquer recipiente parcialmente fechado, também produzimos vibrações de acordo com a forma interna do recipiente, como é o caso do saxofone, da flauta , da clarineta , do trombone e da gaita entre outros. De acordo com o comprimento e largura do recipiente, além do formato para a saída do ar, por exemplo, podemos emitir frequências distintas. Estes instrumentos funcionam por liberar a passagem de ar em comprimentos distintos em relação à entrada do ar, ou por liberar o ar através de estruturas distintas preparadas para vibrar.

FIGURA 144

FIGURA 145

## CORDAS

FIGURA 146


Quando esticamos uma corda e a atingimos com algo, fazemos com que ela vibre emitindo um som. Cordas mais esticadas ou menos esticadas, assim como pressionadas em partes distintas de seu comprimento , produzem sons diferentes. Neste caso como nos anteriores, os sons distintos são as diferentes frequências que obtemos quando manipulamos o instrumento. Tocar um instrumento musical é entender como manipulá-lo a fim de emitir uma ou um conjunto de notas musicais. Estas notas musicais quando estão dispostas de uma maneira adequada e num determinado padrão, nós identificamos como música, que é na verdade uma sequência de frequências obtidas por vibração.

FIGURA 147

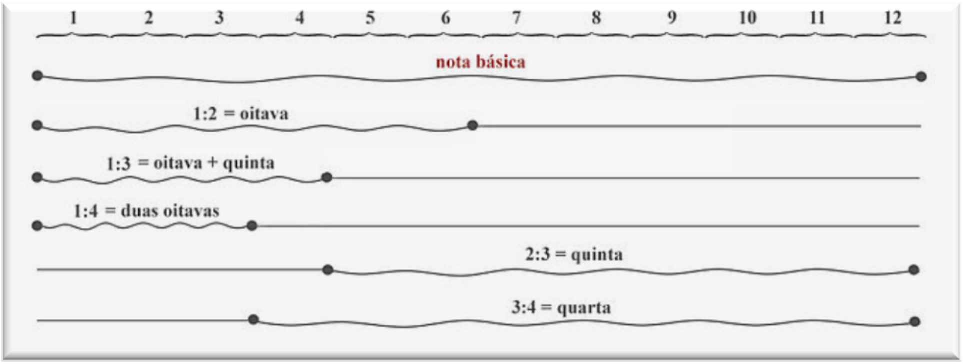
Vale lembrar que esta ideia de pressionar cordas em frações do seu comprimento foi de Pitágoras, por volta do século VI A.C.

Foi ele que realizou a descoberta que em muito contribuiu para a evolução da música. Pitágoras inventou um instrumento que chamou de MONOCÓRDIO , que era composto por uma corda, tal qual como em uma harpa, esticada entre dois cavaletes. Com o MONOCÓRDIO, **FIGURA 148**, Pitágoras realizou a experiência de pressionar a corda em diferentes pontos, para ouvir sons distintos.

**FIGURA 148**

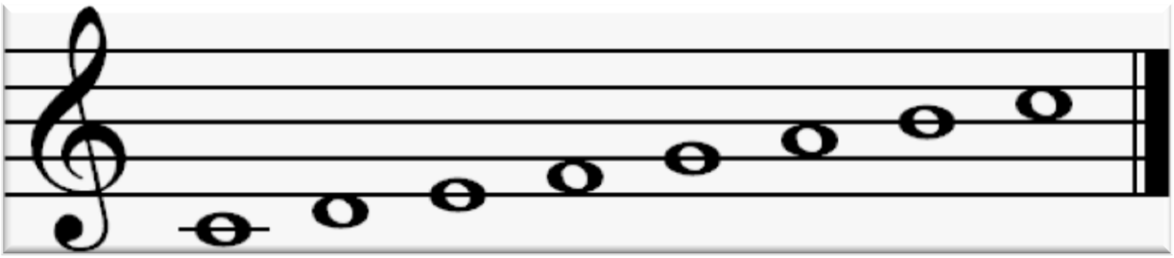
Não só na época, como durante muito tempo, foram usadas relações aritméticas, estabelecendo distâncias por frações do comprimento da corda para se identificar o local onde se deveria pressionar a corda a fim de se emitir notas musicais distintas, com essas razões eram estabelecidas as frequências das notas.

**FIGURA 149**



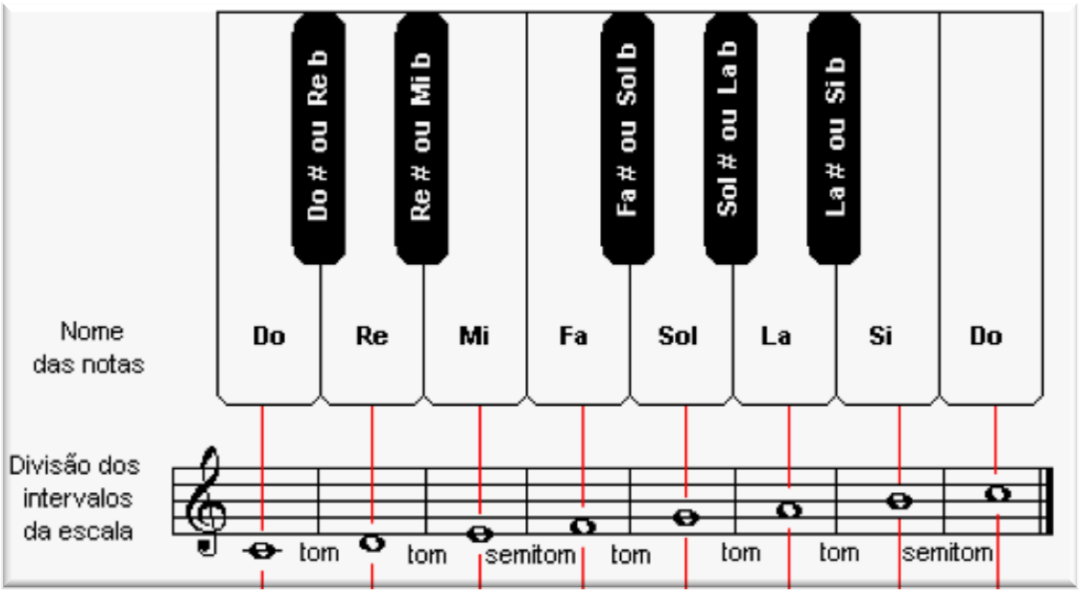

Uma oitava é o intervalo entre uma nota musical e outra com a metade ou o dobro de sua frequência. O nome de oitava tem a ver com a sequência das oito notas da escala maior: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si e dó, a que se chama igualmente "uma oitava". Diz-se que o segundo dó, o último grau da escala, está "uma oitava acima" do primeiro.

**FIGURA 150**



É claro que não existem apenas sete tipos de sons diferentes, porém existem, somente, sete notas musicais. As escalas musicais são, a rigor, a divisão da sequência de notas contidas dentro de uma oitava. Assim como na ciência, na música também ocorreram transformações e ao longo dos anos, estudiosos musicais buscaram desenvolver novas teorias, procurando uma aproximação mais precisa entre os sons e a matemática.

FIGURA 151




A escala, no passado, era baseada em relações inteiras de frequências. Hoje em dia a escala é feita baseada em intervalos logarítmicos.

Uma oitava possui 12 semitons e uma nota uma oitava acima de outra tem exatamente o dobro da frequência da primeira onde existe uma relação de 1:2 entre suas frequências; portanto a relação entre duas frequências separadas por um semitom é igual a $1:2^{1/12}$.

Hoje basicamente todo o ocidente usa a Escala Temperada, pois as variações de frequências dos semitons foram estabelecidas por uma forma muito mais precisa. Em sistemas que não utilizam o temperamento igual, tal como a escala pitagórica ou a série harmônica, a oitava não é dividida realmente em 12 semitons iguais.

Devemos lembrar também que mesmo no sistema de temperamento igual os semitons de uma mesma escala podem ter relações intervalares ligeiramente diferentes entre si, por conta de arredondamentos feitos em números irracionais obtidos por radiciação, afinal trata-se de raiz de índice 12.

## VI-3.1 Examinando as Frequências das Notas Musicais

Sabemos que, fisicamente, o som é uma onda (ou conjunto de ondas) que se propaga no ar com certa frequência. Nota musical é o termo empregado para designar o elemento mínimo de um som e é formado por um único modo de vibração do ar. Sendo assim cada nota, num intervalo de um segundo, está associada à uma frequência, cuja unidade é o hertz (símbolo (Hz), corresponde ao número de oscilações, ciclos, voltas, etc; por segundo).

Esta frequência é o que descreverá, em termos físicos, se a nota é mais grave ou mais aguda. Desde Helmholtz (1821-1894), cientista que estudou, pela primeira vez, as frequências das notas são conhecidas pelos músicos.

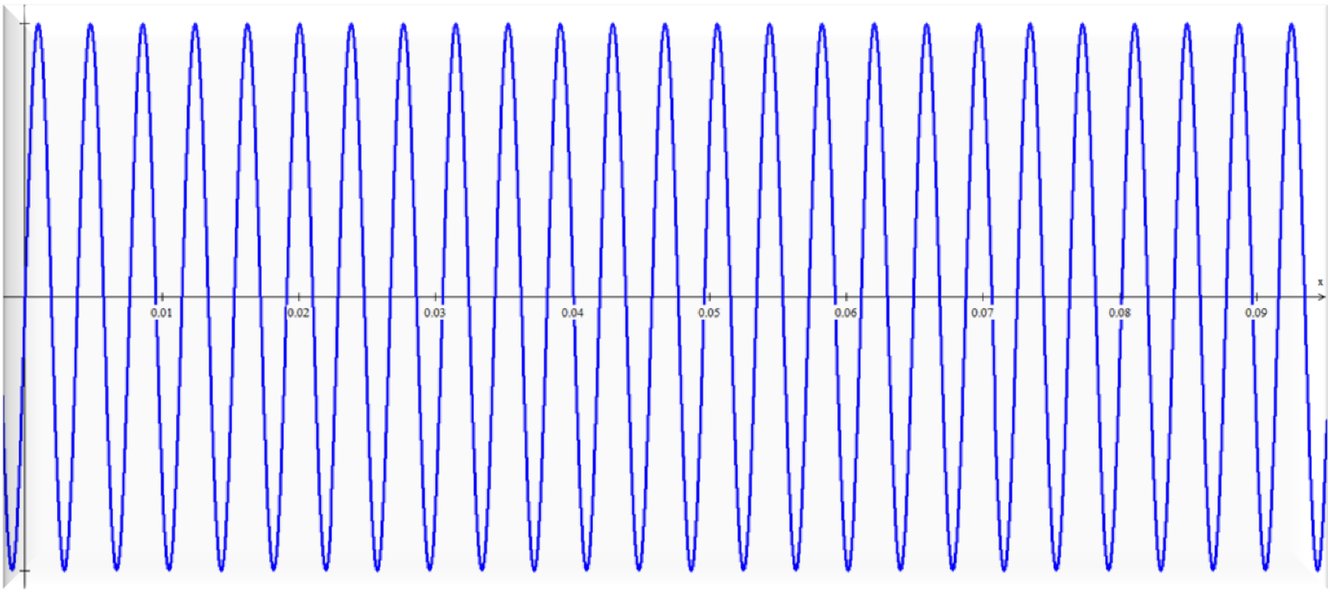
Os valores utilizados atualmente na Escala Temperada para o período de 1 segundo são:

| Nota | Frequência (Hz) | Nota | Frequência (Hz) | Nota | Frequência (Hz) |
|---|---|---|---|---|---|
| dó | 261,62 | mi | 329,63 | sol # - lá ♭ | 415,31 |
| dó # - ré ♭ | 277,18 | fá | 349,23 | lá | 440,00 |
| ré | 293,66 | fá # - sol ♭ | 369,99 | lá # - si ♭ | 466,16 |
| ré # - mi ♭ | 311,13 | sol | 391,99 | si | 493,88 |

Mais propriamente usamos valores inteiros para as frequências; portanto para a nota dó temos a frequência 262 Hz, ou seja 262 oscilações no período de um segundo. Como estas notas têm frequências altas; portanto uma grande quantidade de oscilações por período, só conseguimos observá-las nos seus aspectos mais relevantes se olharmos com uma lupa e para isso vamos desconsiderar a proporção entre amplitude e o período.

EXIBIMOS ABAIXO $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA DÓ EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 262 HZ.

FIGURA 152



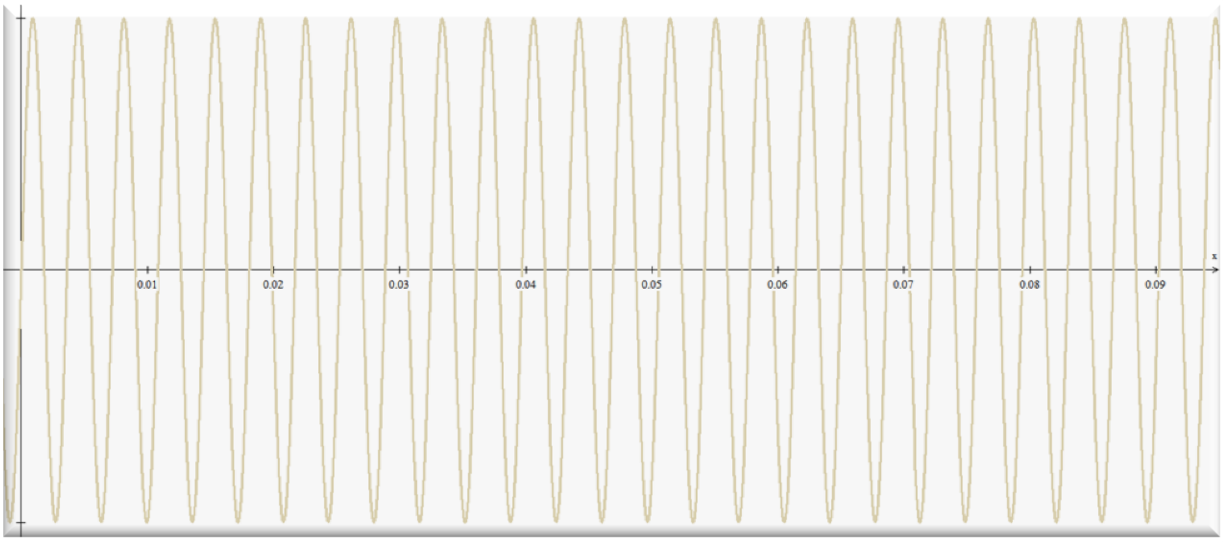

A nota base utilizada pelos músicos para afinação de instrumentos é a nota lá com 440 Hz e em diferentes oitavas terá as frequências mais altas: 880 Hz, 1760 Hz e etc., ou as mais baixas: 220 Hz, 110 Hz, e assim por diante.

Como pudemos concluir desde a **PÁGINA 100**, as frequências das notas formam uma progressão geométrica cuja razão é um número irracional. Com nós utilizarmos números inteiros para representar estas frequências, temos que considerar as devidas aproximações e isto gera pequenas diferenças reais na progressão.

Portanto podemos refazer as contas descritas na página anterior e conferir a frequência do dó # (dó SUSTENIDO) ou ré ♭ (ré BEMOL) nesta escala. Como a razão entre as frequências de mesmas notas em uma oitava é "2" e são doze semitons, calculamos a razão da progressão pensando numa uma interpolação geométrica. $\sqrt[12]{2} = 1{,}059...$ e desta forma a frequência é computada como $262 \times 1{,}059 = 277{,}458$ que com a devida aproximação temos 277 Hz.

Exibimos abaixo $\frac{1}{10}$ do gráfico da nota Dó # ou Ré ♭ em um segundo – frequência 277 Hz.

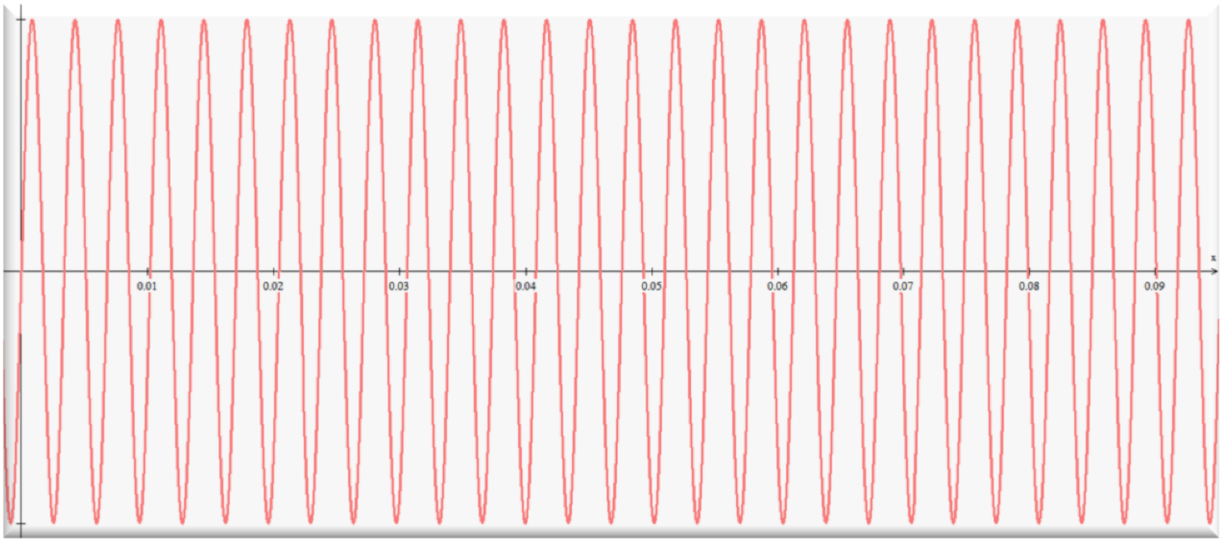
Figura 153




Seguindo este mesmo raciocínio e considerando a memória do cálculo anterior, podemos ratificar o valor da nota ré como $277{,}458 \times 1{,}059 = 293{,}828$ que aproximamos para 294.

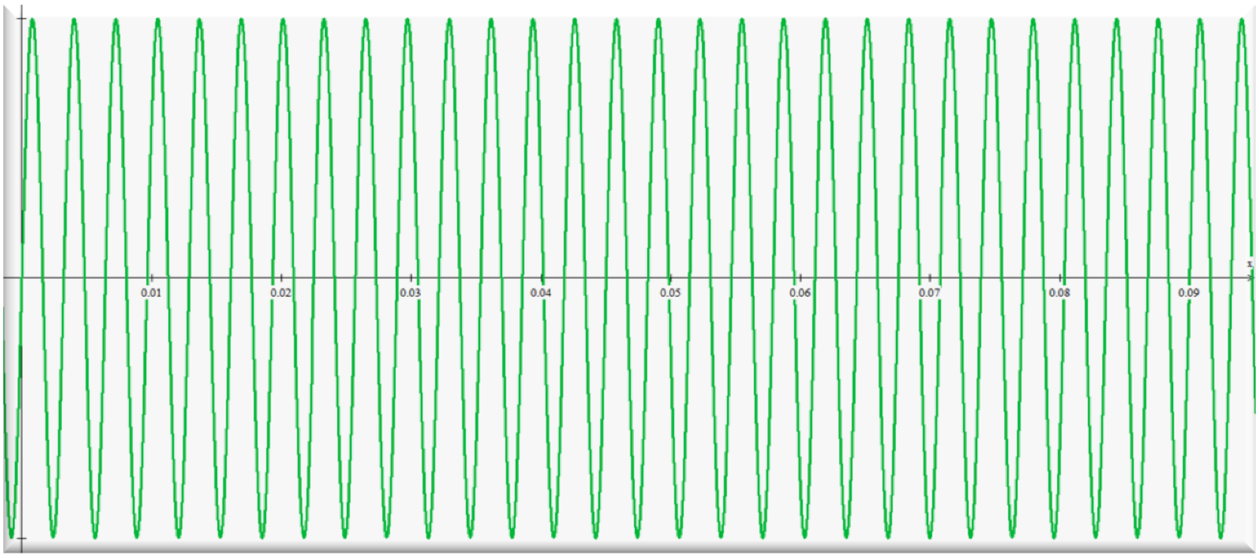
Exibimos abaixo $\frac{1}{10}$ do gráfico da nota Ré em um segundo – frequência 294 Hz.

Figura 154



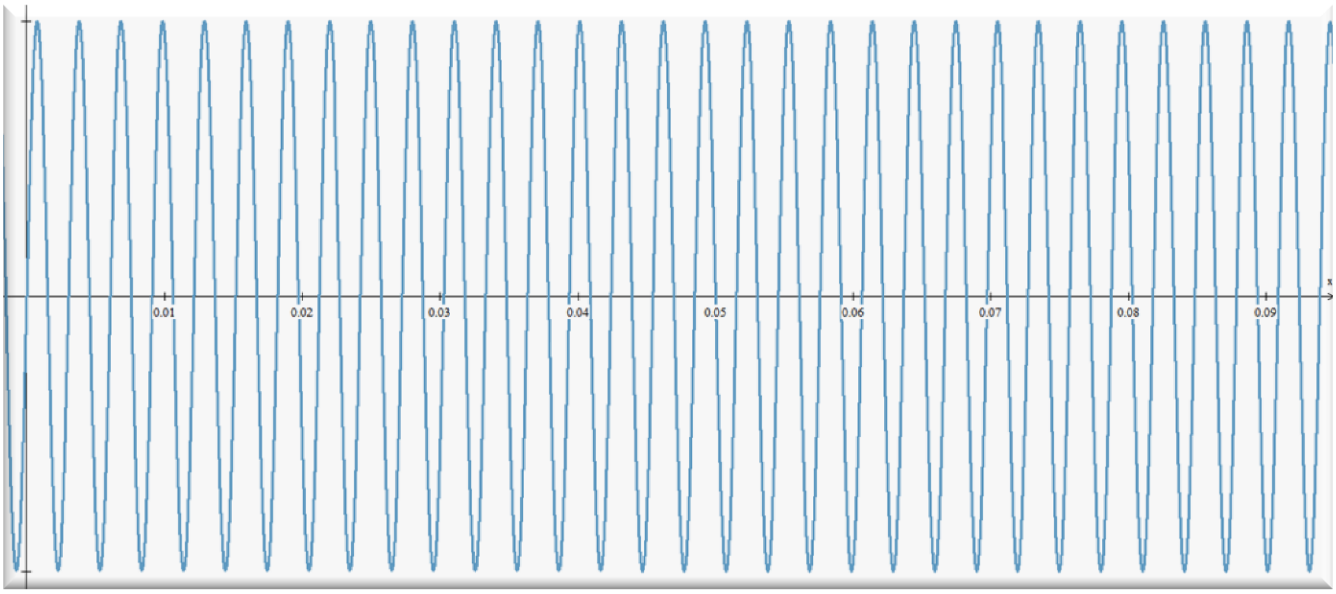
Exibimos abaixo $\frac{1}{10}$ do gráfico da nota Ré # ou Mi ♭ em um segundo – frequência 311 Hz.

Figura 155



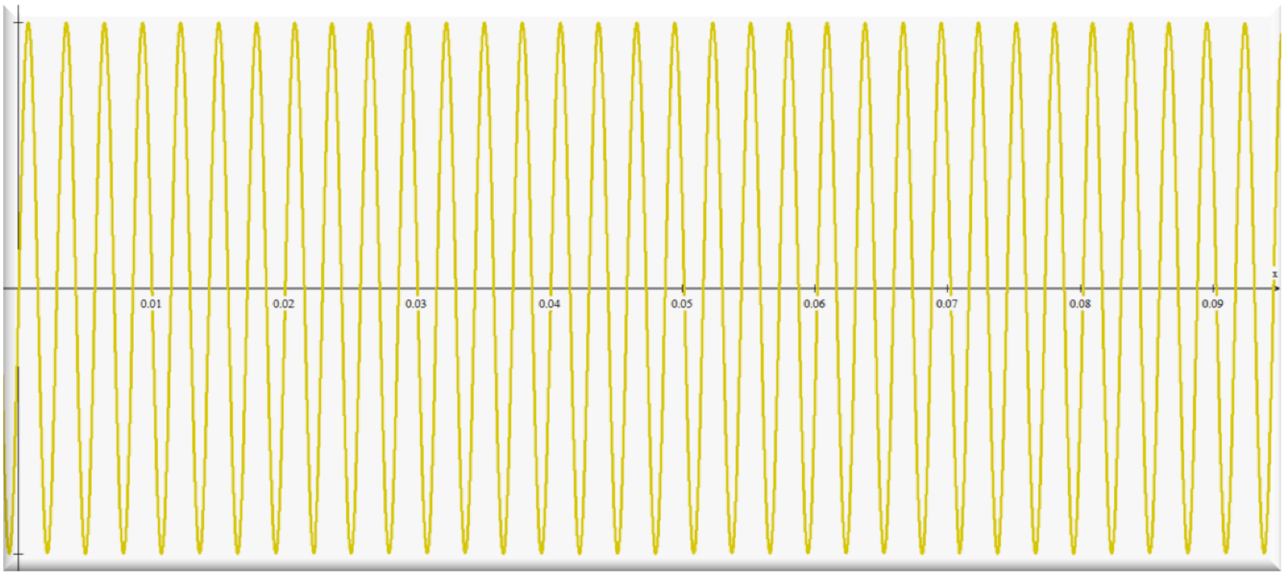

Exibimos abaixo $\frac{1}{10}$ do gráfico da nota Mi em um segundo – frequência 330 Hz.

Figura 156



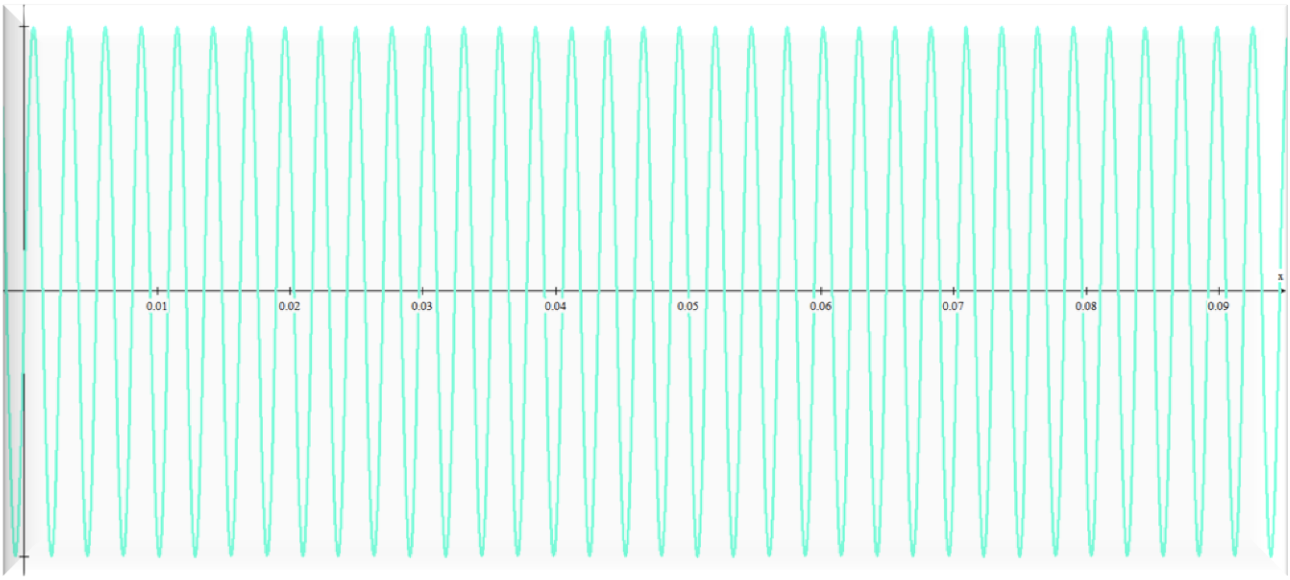
EXIBIMOS ABAIXO $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA FÁ EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 349 HZ.

FIGURA 157



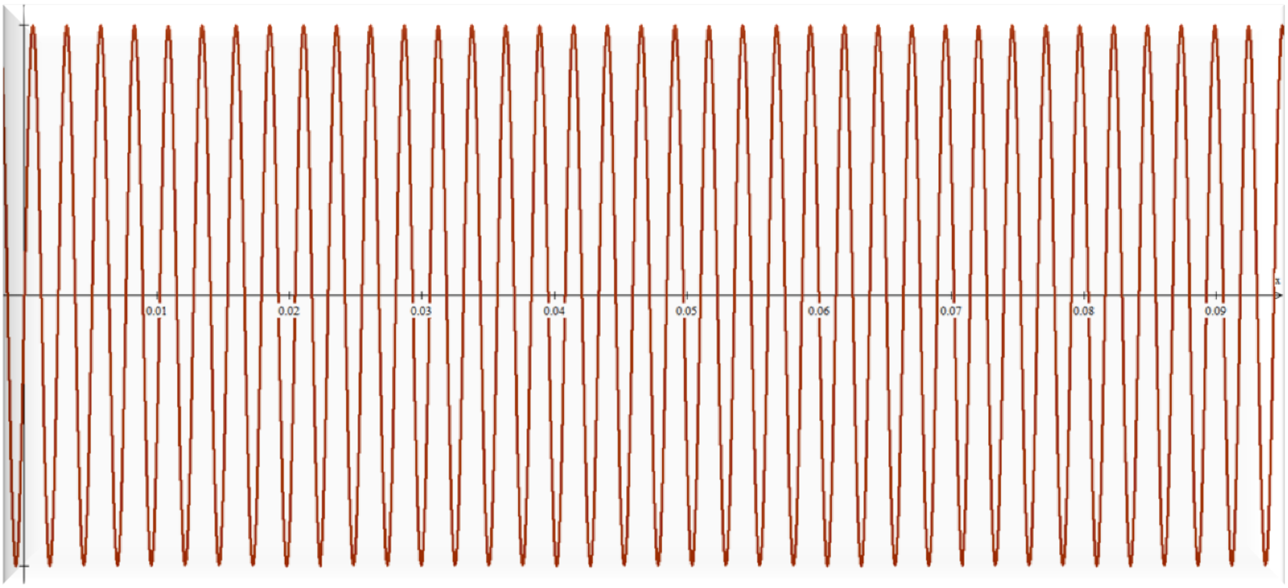

EXIBIMOS ABAIXO $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA FÁ # OU SOL ♭ EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 370 HZ.

FIGURA 158



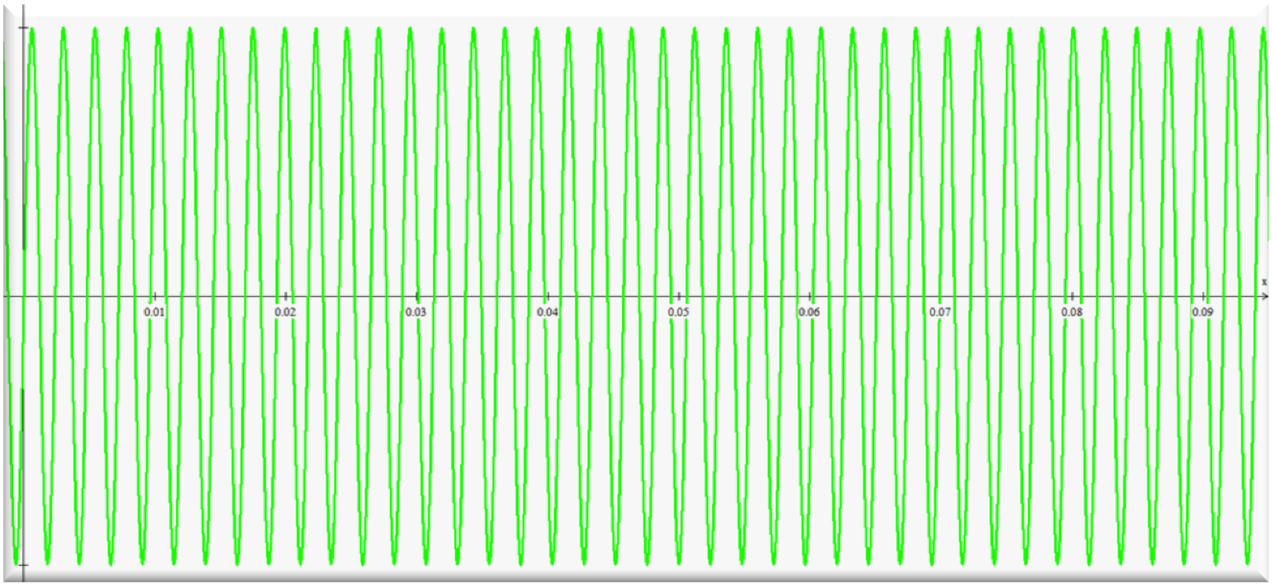
EXIBIMOS ABAIXO $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA SOL EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 392 HZ.

FIGURA 159



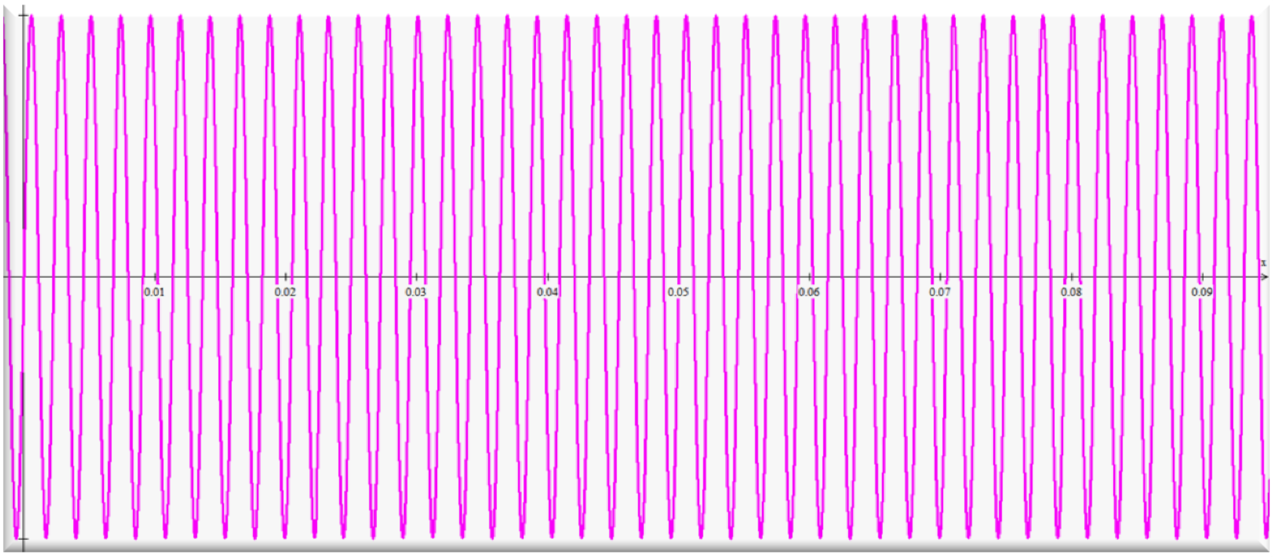

EXIBIMOS ABAIXO $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA SOL # OU LÁ ♭ EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 415 HZ.

FIGURA 160



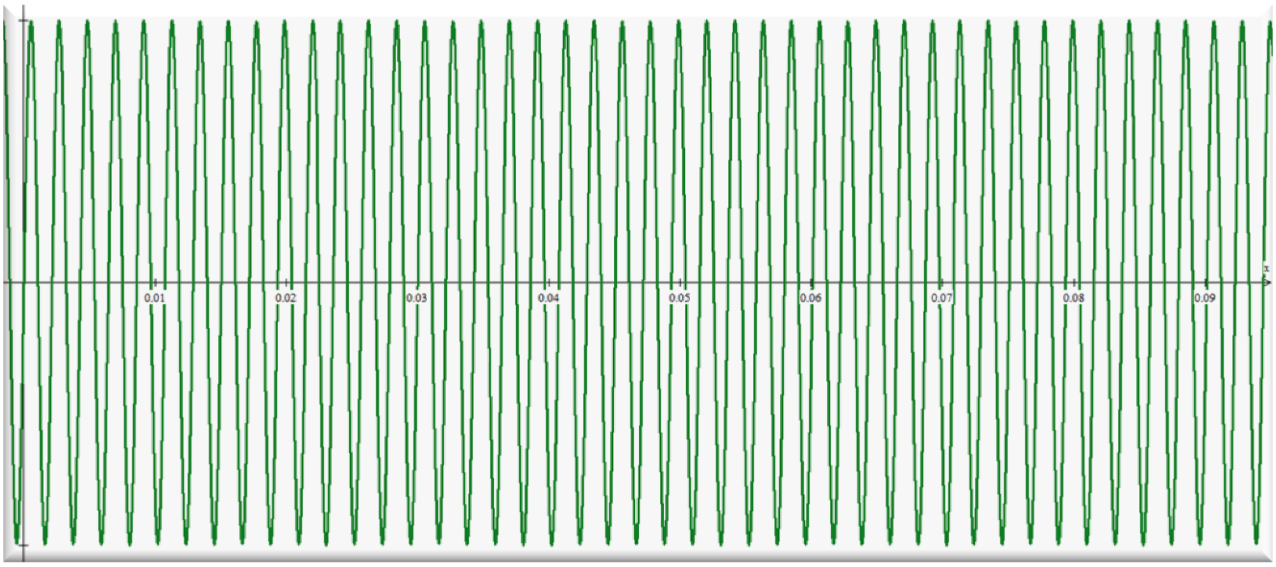
Exibimos abaixo $\frac{1}{10}$ do gráfico da nota Lá em um segundo – frequência 440 Hz.

Figura 161



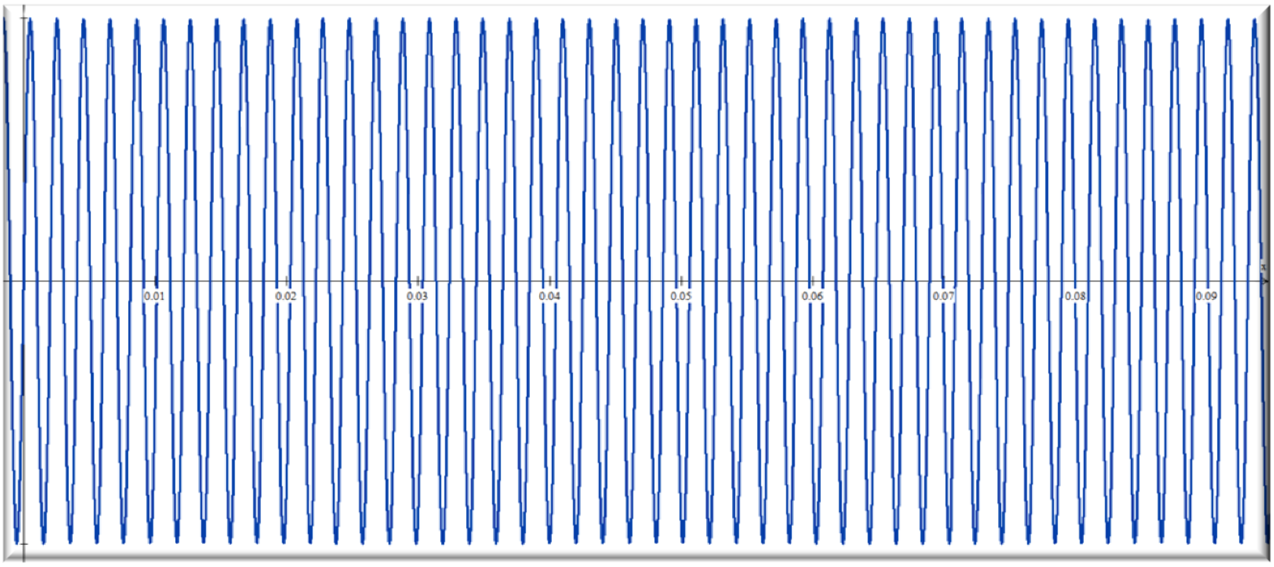

Exibimos abaixo $\frac{1}{10}$ do gráfico da nota Lá # ou Si ♭ em um segundo – frequência 466 Hz.

Figura 162



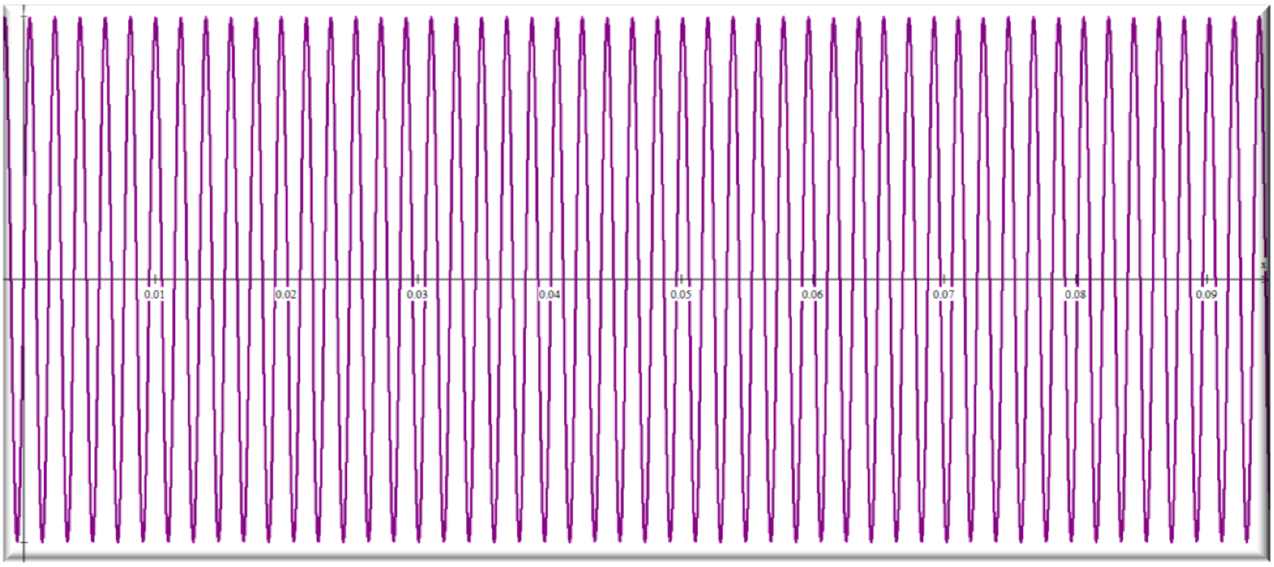
EXIBIMOS ABAIXO $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA SI EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 494 HZ.

FIGURA 163




FINALMENTE TEMOS $\frac{1}{10}$ DO GRÁFICO DA NOTA DÓ EM UM SEGUNDO – FREQUÊNCIA 524 HZ.

FIGURA 164



### VI-3.2 Somando Ondas

Após conhecermos a escala temperada, percebermos como o mundo entende as frequências das notas musicais e depois de aprendermos o que são HARMÔNICOS, estamos prontos para manipular frequências, observar seus gráficos e analisar as interferências e alterações provenientes da manipulação.

Aprendemos que se temos a seguinte onda representada pela função $R = A\cos(wt)$, sabemos que:

- "A" é a amplitude da onda e indica sua intensidade;
- fisicamente período e frequência são inversamente proporcionais e como vimos nos capítulos de Seno e Cosseno $\rho = \frac{2\pi}{w}$, desta forma o parâmetro "w" é a frequência da onda e seu valor identifica a nota musical que está sendo tocada em um instrumento.
- como informação adicional, mas não primordial nesta abordagem, ainda temos que "A" informa a energia da onda, que é proporcional a "$A^2$".

O contexto musical mostra-se ótimo para se explorar as propriedades trigonométricas das funções seno e cosseno.

Como vimos no item **VI-2 PERCEPÇÃO DO SOM**, neste capítulo, o som pode ser representado pela soma de diversas ondas individuais. Cada tipo de composição é percebida de forma distinta e o que diferencia um instrumento de outro são as amplitudes e a duração de cada um dos harmônicos presentes no som resultante.

Em se tratando de notas musicais, que são representadas por senóide, sabemos que o gráfico exibe uma curva periódica e podemos concluir a prova de um fenômeno físico: A SOMA DE DIVERSAS NOTAS, OU ONDAS, TAMBÉM SERÁ REPRESENTADA POR UM GRÁFICO DE UMA CURVA PERIÓDICA. Naturalmente este contexto só é valido se as curvas têm períodos com medidas comensuráveis; ou seja, todas as curvas têm períodos de medidas racionais ou todas as curvas têm períodos cujas medidas são múltiplas de um mesmo irracional.

O caso racional pode ser identificado logicamente com as curvas que representam notas musicais, pois escolhemos números inteiros não nulos como frequências. O caso de múltiplos de um mesmo irracional pode ser identificado com a soma de funções Seno ou Cosseno, compostas com funções Afins que têm coeficientes racionais, isto determinará períodos múltiplos de $\pi$; ou seja, múltiplos de um mesmo irracional.

A prova deste fenômeno está diretamente ligada a uma propriedade trigonométrica: A SOMA DE FUNÇÕES PERIÓDICAS COM PERÍODOS DE MEDIDAS COMENSURÁVEIS, TAMBÉM É UMA FUNÇÃO PERIÓDICA.

Iniciaremos a comprovação deste teorema demonstrando o fato para a soma de duas funções periódicas e esta prova se dará em duas etapas.

PRIMEIRAMENTE PROVAREMOS PARA A SOMA DE DUAS FUNÇÕES PERIÓDICAS RACIONAIS.

Seja por exemplo a seguinte soma: $w(x) = f(x) + g(x)$ onde $f(x)$ tem período $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ e $g(x)$ tem período $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$. Naturalmente temos que $p_i$ e $q_i \in \mathbb{Z}$, além de que $mdc\{p_i, q_i\} = 1$ ou melhor $(p_i, q_i) = 1$ para i=1 e i=2.

Podemos concluir, pela definição de função periódica, que para todo $z \in \mathbb{Z}$, temos $f\left(x + z \cdot \dfrac{p_1}{q_1}\right) = f(x)$ e $g\left(x + z \cdot \dfrac{p_2}{q_2}\right) = g(x)$.

Seja M=mmc$\{p_1, p_2\}$ ou melhor $[p_1, p_2] = M$, então sabemos que $p_1 / M$ e $p_2 / M$, assim como podemos dizer que existem $h_1$ e $h_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $h_1 \cdot p_1 = M$ e $h_2 \cdot p_2 = M$.

Seja também N=mdc$\{q_1, q_2\}$ ou melhor $(q_1, q_2) = N$, então sabemos que $N / q_1$ e $N / q_2$, assim como podemos dizer que existem $k_1$ e $k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $k_1 \cdot N = q_1$ e $k_2 \cdot N = q_2$.

Com estas informações podemos afirmar que o período de $w(x)$ é $M/N$.

Confirmamos isto como:

$$w\left(x+M/N\right)=f\left(x+M/N\right)+g\left(x+M/N\right)=f\left(x+\frac{h_1\cdot p_1}{q_1/k_1}\right)+g\left(x+\frac{h_2\cdot p_2}{q_2/k_2}\right)=$$

$f\left(x+h_1\cdot k_1\cdot\frac{p_1}{q_1}\right)+g\left(x+h_2\cdot k_2\cdot\frac{p_2}{q_2}\right)=f(x)+g(x)=w(x)$, pois $h_1\cdot k_1$ e $h_2\cdot k_2\in\mathbb{Z}$, M é mmc$\{p_1,p_2\}$ e $M/N$ é o menor valor racional para o qual é possível a prova acima.

PROVAREMOS AGORA PARA A SOMA DE DUAS FUNÇÕES PERIÓDICAS DE PERÍODOS MÚLTIPLOS DE UM MESMO IRRACIONAL.

Sejam por exemplo $\varphi\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ e a soma $w(x)=f(x)+g(x)$ onde $f(x)$ tem período $r_1\cdot\varphi$ e $g(x)$ tem período $r_2\cdot\varphi$, sendo que $r_1=\frac{p_1}{q_1}$ e $r_2=\frac{p_2}{q_2}$ com $p_i$ e $q_i\in\mathbb{Z}$, além de que $(p_i,q_i)=1$ para i=1 e i=2, tal qual como definido anteriormente.

Podemos concluir, pela definição de função periódica, que para todo $z\in\mathbb{Z}$, temos $f\left(x+z\cdot\frac{p_1}{q_1}\cdot\varphi\right)=f(x)$ e $g\left(x+z\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\varphi\right)=g(x)$.

Seja M=$[p_1,p_2]$, pela demonstração anterior existem $h_1$ e $h_2\in\mathbb{Z}$ tais que $h_1\cdot p_1=M$ e $h_2\cdot p_2=M$.

Seja também $(q_1,q_2)=N$, então podemos dizer que existem $k_1$ e $k_2\in\mathbb{Z}$ tais que $k_1\cdot N=q_1$ e $k_2\cdot N=q_2$.

Desta forma podemos afirmar que o período de $w(x)$ é $\frac{M}{N}\cdot\varphi$ e podemos verificar isto por:

$$w\left(x+\frac{M}{N}\cdot\varphi\right)=f\left(x+\frac{M}{N}\cdot\varphi\right)+g\left(x+\frac{M}{N}\cdot\varphi\right)=f\left(x+\frac{h_1\cdot p_1}{q_1/k_1}\cdot\varphi\right)+g\left(x+\frac{h_2\cdot p_2}{q_2/k_2}\cdot\varphi\right)=$$

$$f\left(x+h_1\cdot k_1\cdot\frac{p_1}{q_1}\cdot\varphi\right)+g\left(x+h_2\cdot k_2\cdot\frac{p_2}{q_2}\cdot\varphi\right)=f(x)+g(x)=w(x),$$ pois $h_1\cdot k_1$ e $h_2\cdot k_2\in Z$,

M é mmc $\{p_1,p_2\}$ e $M/N$ é o menor valor racional para o qual é possível esta prova.

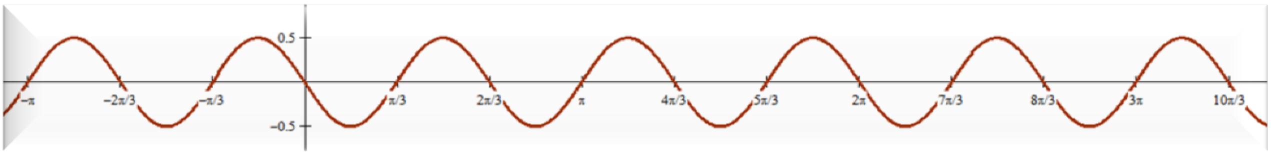
Como o resultado vale para a soma de duas funções, valerá para três, quatro e assim sucessivamente, basta procedermos com a soma para cada dupla onde o conjunto das funções somadas, tenham períodos com medidas comensuráveis.

Vejamos o exemplo a seguir sobre a soma de três ondas caracterizadas por funções trigonométricas:

Considere abaixo os seguintes gráficos das funções que representam ondas:

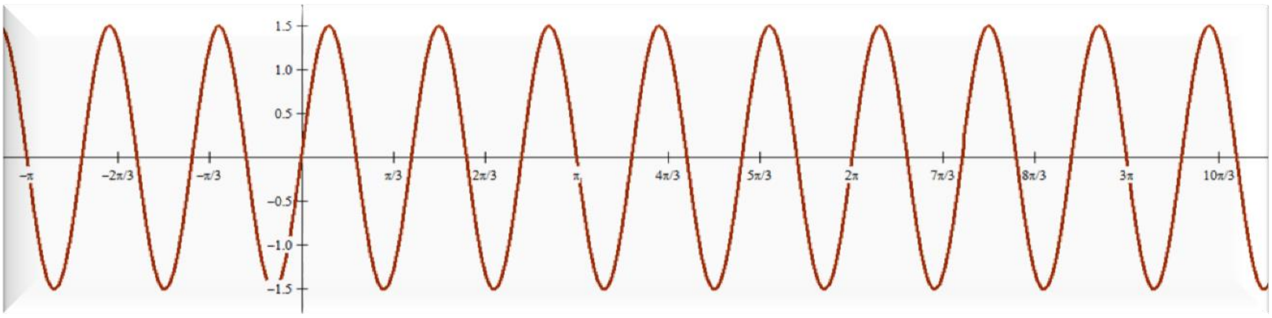
$$X=-\frac{\text{sen}(3t)}{2}\ ,\ \ \rho=\frac{2\pi}{3};$$

FIGURA 165



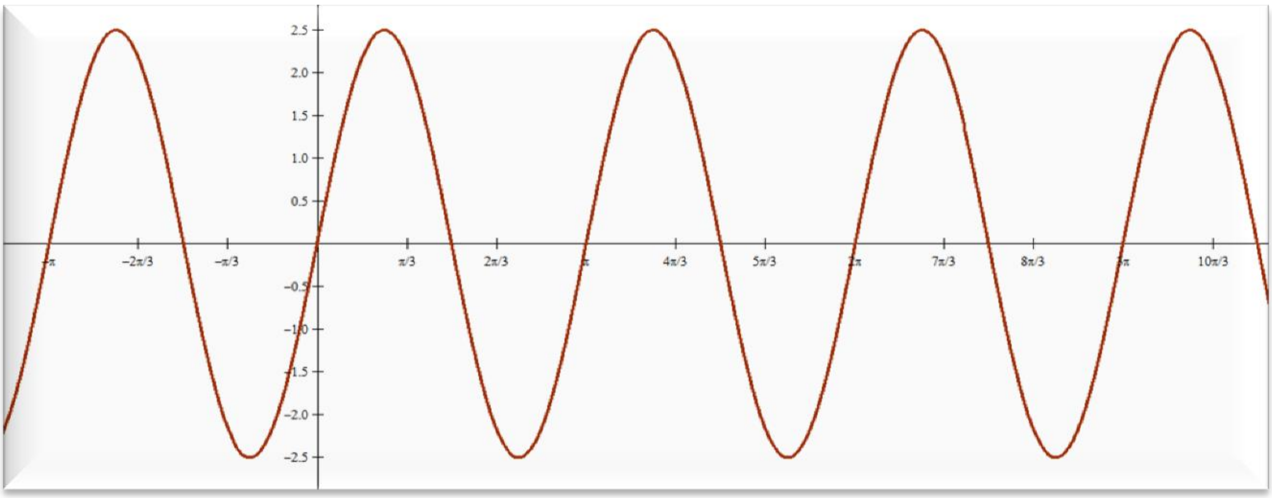

$$Y=\frac{3\,\text{sen}(5t)}{2}\ ,\ \ \rho=\frac{2\pi}{5}$$

FIGURA 166



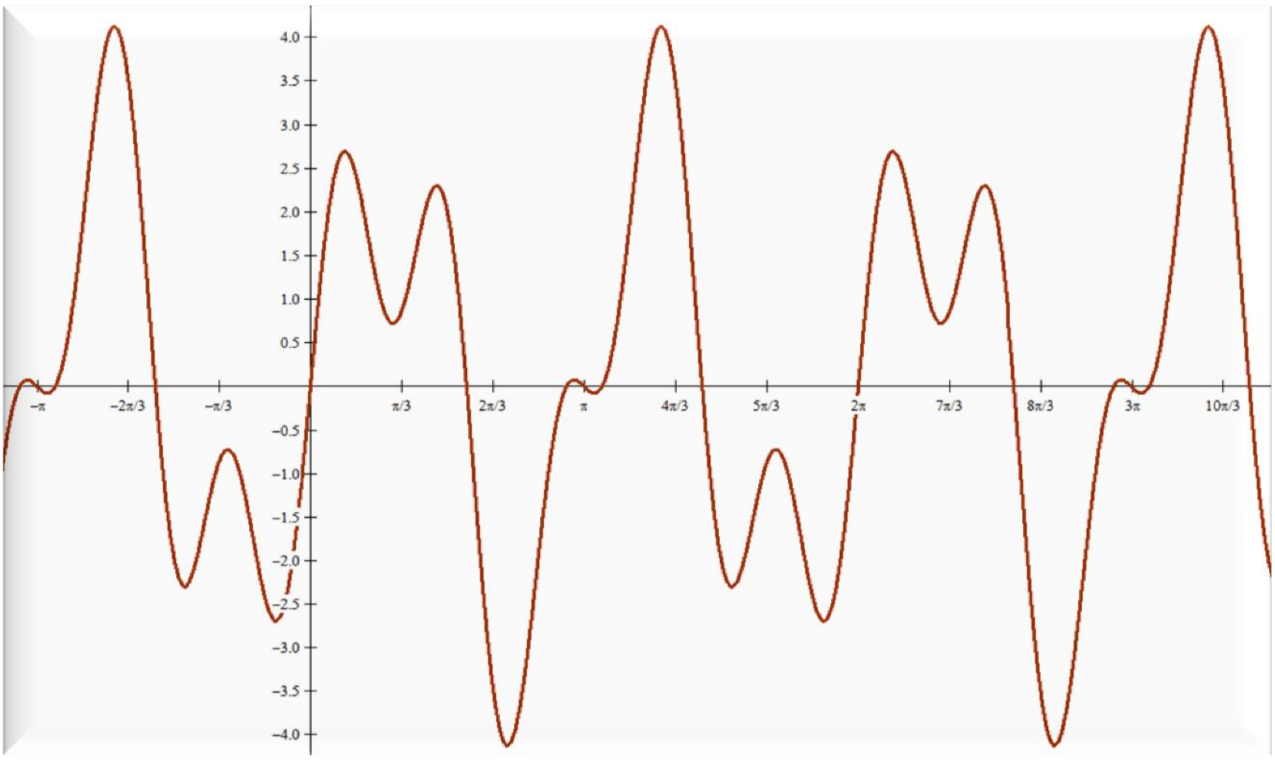
e $Z = \frac{5\,\text{sen}(2t)}{2}$, $\rho = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

FIGURA 167




Como $[2,2,1] = 2$ e $(3,5,1) = 1$ temos portanto o gráfico da soma das funções $S = -\frac{\text{sen}(3t)}{2} + \frac{5\,\text{sen}(2t)}{2} + \frac{3\,\text{sen}(5t)}{2}$ que tem $\rho = \frac{2}{1}\pi = 2\pi$.

FIGURA 168

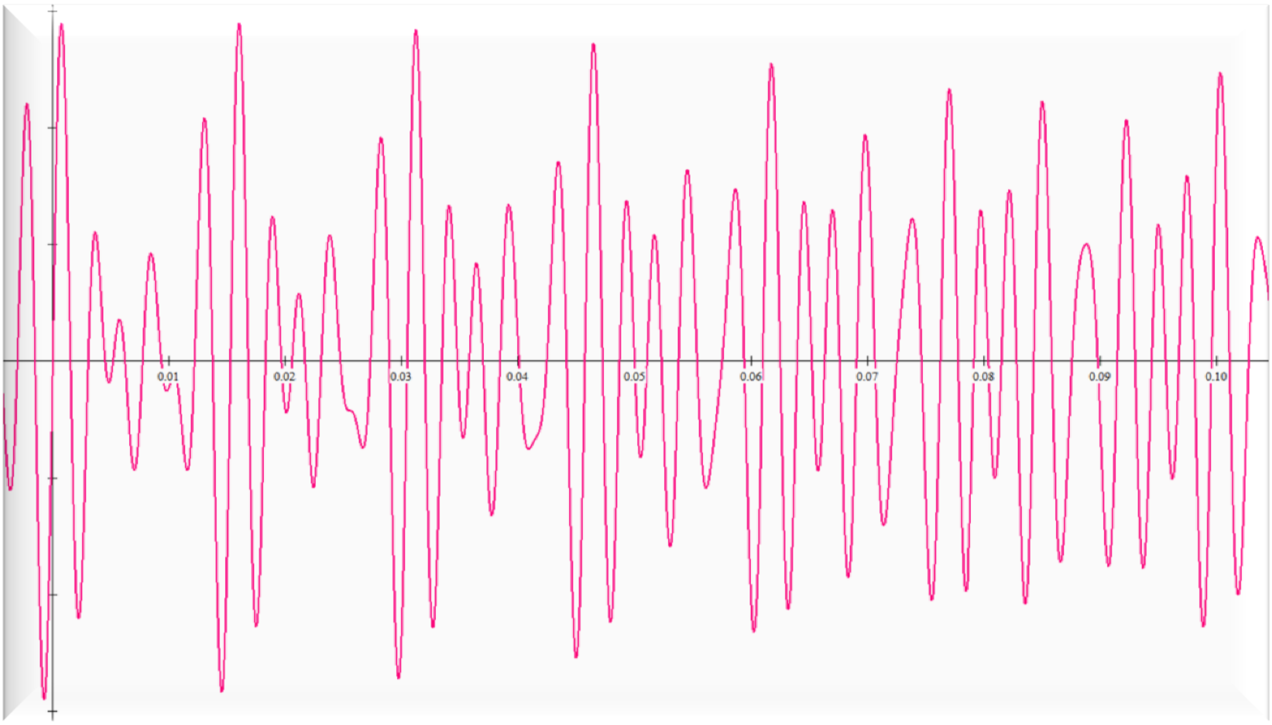


### VI-3.3 Visualizando Acordes

Consideremos primeiramente o acorde de Dó maior, composto pela sequência de notas dó, mi e sol com frequências 262 Hz, 330 Hz e 392 Hz respectivamente.

Devido aos valores altos das frequências vamos desconsiderar a proporção real entre as escalas dos eixos X e Y e tal qual anteriormente vamos exibir $\frac{1}{5}$ do gráfico de $f(x) = \text{sen}(2\pi \cdot 262x) + \text{sen}(2\pi \cdot 330x) + \text{sen}(2\pi \cdot 392x)$ em um segundo.

FIGURA 169

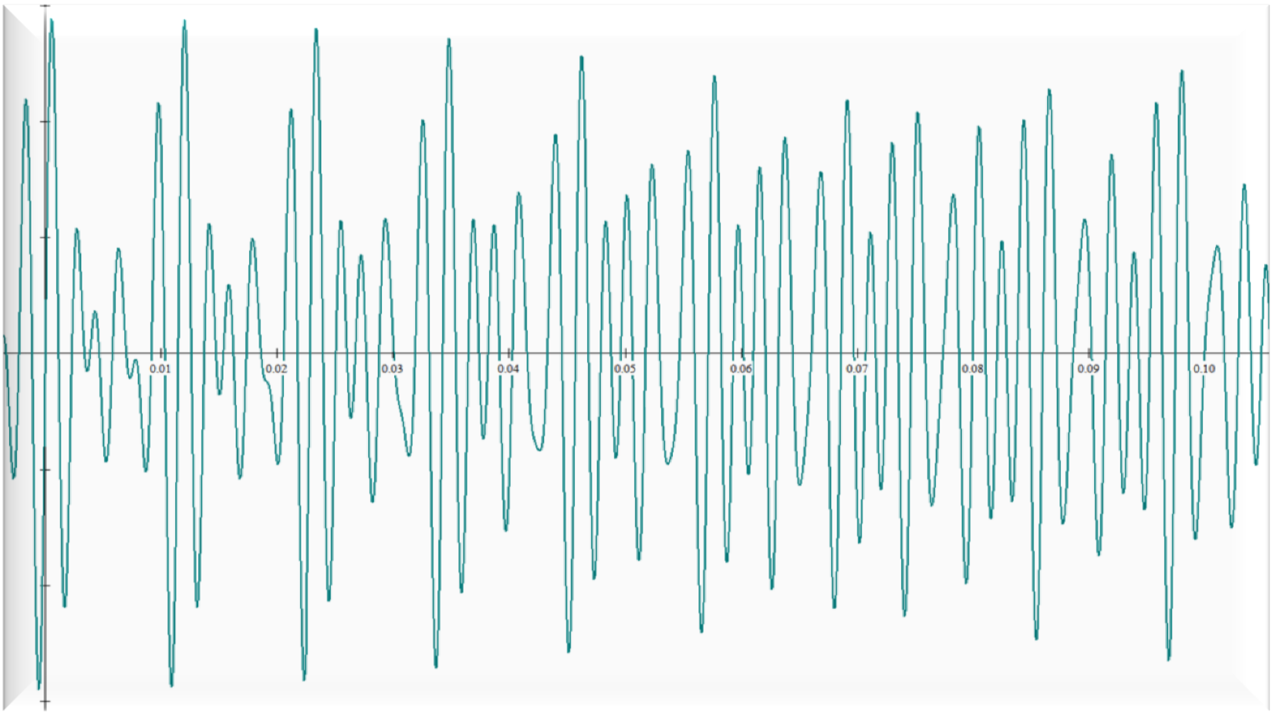



A primeira função da soma tem período $\rho = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 262} = \frac{1}{262}$, a segunda tem período $\rho = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 330} = \frac{1}{330}$ e a terceira tem $\rho = \frac{2\pi}{2\pi \cdot 392} = \frac{1}{392}$. Pelo teorema provado anteriormente temos $[1,1,1] = 1$ e $(262,330,392) = 2$; portanto o gráfico da soma das funções tem período $\rho = \frac{1}{2}$ como estamos mostrando até a medida 0,10 no eixo X estamos exibindo $\frac{1}{5}$ do período.

Consideremos agora o acorde de Fá maior, composto pela sequência de notas fá, lá e dó com frequências 349 Hz, 440 Hz e 524 Hz respectivamente.

Também como anteriormente, devido aos valores altos das frequências vamos desconsiderar a proporção real entre as escalas dos eixos X e Y e vamos exibir $1/10$ do gráfico de $f(x) = \text{sen}(2\pi \cdot 349\,x) + \text{sen}(2\pi \cdot 440\,x) + \text{sen}(2\pi \cdot 524\,x)$ em um segundo.

**FIGURA 170**

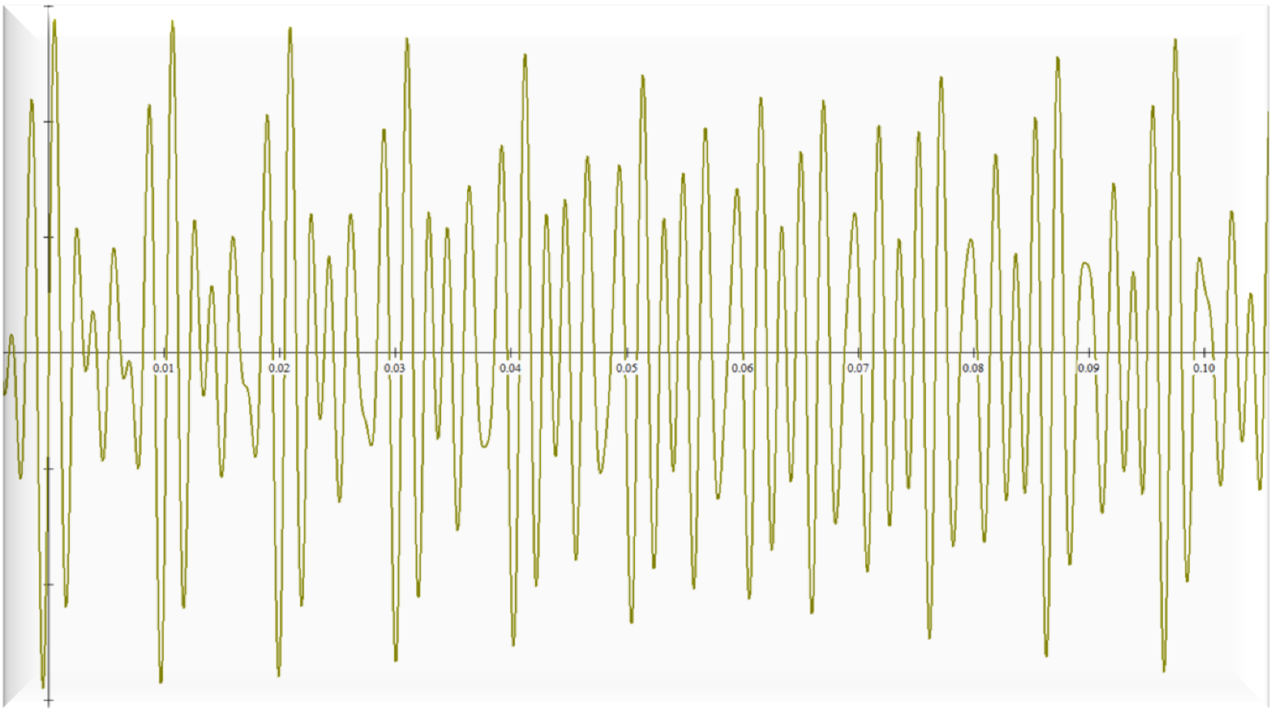



A primeira função da soma tem período $\rho = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 349} = \dfrac{1}{349}$, a segunda tem período $\rho = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 440} = \dfrac{1}{440}$ e a terceira tem $\rho = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 524} = \dfrac{1}{524}$. Pelo teorema provado anteriormente temos $[1,1,1] = 1$ e $(349, 440, 524) = 1$; portanto o gráfico da soma das funções tem período $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$ como estamos mostrando até a medida 0,10 no eixo X estamos exibindo $1/10$ do período.

Consideremos por fim o acorde de Sol maior, composto pela sequência de notas sol, si e ré com frequências 392 Hz, 494 Hz e 588 Hz respectivamente.

Da mesma forma, devido aos valores altos das frequências vamos desconsiderar a proporção real entre as escalas dos eixos X e Y e vamos exibir $1/5$ do gráfico de $f(x) = \text{sen}(2\pi \cdot 392\,x) + \text{sen}(2\pi \cdot 494\,x) + \text{sen}(2\pi \cdot 588\,x)$ em um segundo.

FIGURA 171



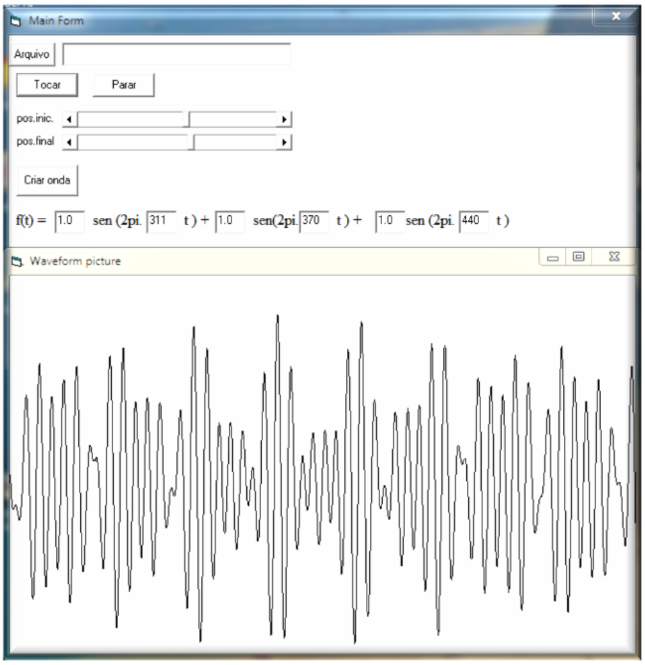

A primeira função da soma tem período $\rho = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 392} = \dfrac{1}{392}$, a segunda tem período $\rho = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 494} = \dfrac{1}{494}$ e a terceira tem $\rho = \dfrac{2\pi}{2\pi \cdot 588} = \dfrac{1}{588}$. Pelo teorema provado anteriormente temos $[1,1,1] = 1$ e $(392, 494, 588) = 2$; portanto o gráfico da soma das funções tem período $\rho = \dfrac{1}{2}$ como estamos mostrando até a medida 0,10 no eixo X estamos exibindo $1/5$ do período.

A partir de agora, nosso experimento consiste em manipular os parâmetros amplitude e frequência em gráficos de sons, identificando as consequências com o que foi estudado, fazendo uso dos programas Wave Player e Audacity.

### WAVE PLAYER

É um programa que reproduz arquivos ".wav", mas que teve a rotina, em Visual Basic, alterada não só para produzir sons a partir de digitações de amplitudes e frequências de uma nota musical até uma soma de até três senóides. De acordo com a digitação das amplitudes e frequências o programa exibe o gráfico da função e toca o resultado da soma das senóides desde um único som (monotônico) até um acorde. Para cada conjunto de amplitudes e frequências produz-se um harmônico distinto.

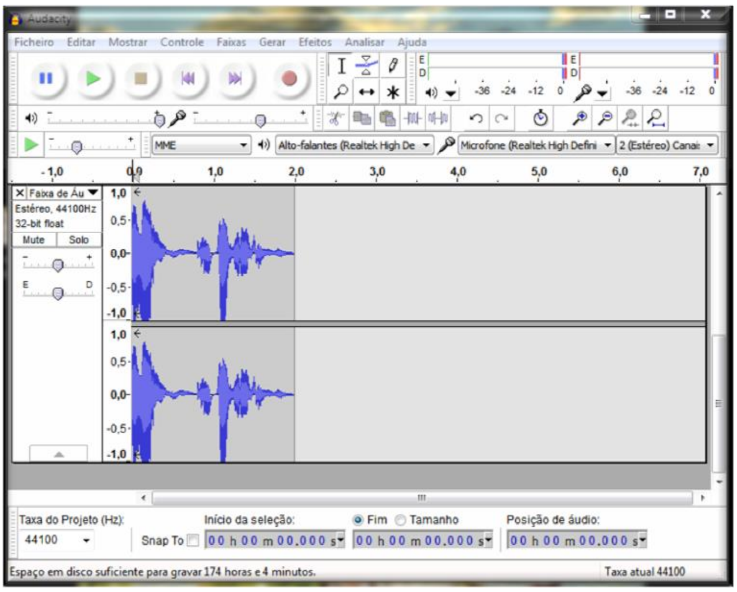
FIGURA 172




### AUDACITY

É um Programa de gravação e edição de áudio, que permite a manipulação de parâmetros de reprodução. Pode-se alterar amplitude, frequência e velocidade de reprodução causando alterações significativas na percepção sonora. O programa também exibe o gráficos dos sons.

FIGURA 173



## ***RELAÇÃO DE GRÁFICOS OU FIGURAS***

| | |
|---|---|
| Figura 124-C | Obtida no site: |
| http://www.manutencaoesuprimentos.com.br/conteudo/6947-teoria-das-ondas-eletromagneticas/ | |
| | |
| Figura 124-D | Obtida no site: |
| http://muraldecristal.blogspot.com.br/2012/07/luz-x-escuridao.html | |
| | |
| Figura 125-A | Obtida no site: |
| http://energiasrenovaveis-2010.blogspot.com.br/2010_06_01_archive.html | |
| | |
| Figura 125-B | Obtida no site: |
| http://omundofisica.blogspot.com.br/2012/10/telefone-de-latinha.html | |
| | |
| Figura 126 | Obtida no site: |
| http://www.sobiologia.com.br/conteudos/oitava_serie/Ondas5.php | |
| | |
| Figura 127 | Obtida no site: |
| http://www.coladaweb.com/fisica/ondas/ondas-sonoras | |
| | |
| Figura 128 | Obtida no site: |
| http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?ID_OBJETO=104127&tipo=ob&cp=99663&cb=&n1=&n2=M%EF%BF%BDdulos%20Did%EF%BF%BDticos&n3=Ensino%20Fundamental&n4=Ci%EF%BF%BDncias&b=s | |
| | |
| Figura 129 | Obtida no site: |
| http://www.hayonik.com/br/noticias | |
| | |
| Figura 130 | Obtida no site: |
| http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?ID_OBJETO=104127&tipo=ob&cp=99663&cb=&n1=&n2=M%EF%BF%BDdulos%20Did%EF%BF%BDticos&n3=Ensino%20Fundamental&n4=Ci%EF%BF%BDncias&b=s | |
| | |
| Figura 131 | Obtida no site: |
| http://pt.encydia.com/ca/Som | |
| | |
| Figura 132 | Obtida no site: |
| http://portuguese.alibaba.com/product-free-img/digital-oscilloscope-storage-oscilloscope-digital-storage-oscilloscope-scan-oscilloscope-usb-oscilloscope-dual-band-oscilloscope-105281096.html | |
| | |
| Figura 133 | Obtida no site: |
| http://www.acrisoft.com/curso_osciloscopio | |
| | |
| Figura 134 e Figura 135 | Obtida no site: |
| http://www.geocities.ws/saladefisica5/leituras/musica.html | |
| | |
| Figura 136 | Obtida no site: |
| http://wwwlinguainglesa.blogspot.com.br/p/passado-simples.html | |
| | |
| Figura 137 | Obtida no site: |
| http://www.apple.com/br/sound/ | |
| | |

| | |
|---|---|
| **FIGURA 138** | Obtida no site: |
| http://carolinadias06.wordpress.com/ | |
| | |
| **FIGURA 139** | Obtida no site: |
| http://www.mundopercussivo.com/products/gupiara-percuss%C3%A3o/ | |
| | |
| **FIGURA 140** | Obtida no site: |
| http://saladmusica.wordpress.com/academico/ | |
| | |
| **FIGURA 141** | Obtida no site: |
| http://www.studioavirtual.com.br/bateria-e-percussao/percussao.html | |
| | |
| **FIGURA 142 E FIGURA 143** | Obtida no site: |
| http://tenhoumblog01.blogspot.com.br/2010/11/como-funciona-instrumento-de-sopro.html | |
| | |
| **FIGURA 144** | Obtida no site: |
| http://cantorrodrigo.blogspot.com.br/2010/05/gravacao-vez-dos-metais.html | |
| | |
| **FIGURA 145** | Obtida no site: |
| http://www.estudioprodusom.com/estudiomusica/cuidarinstrumentos.html | |
| | |
| **FIGURA 146** | Obtida no site: |
| http://tioivys.blogspot.com.br/2011/10/pilula-15-cordas-vibrantes.html | |
| | |
| **FIGURA 147** | Obtida no site: |
| http://tenhoumblog01.blogspot.com.br/2010/11/como-funciona-instrumento-de-cordas.html | |
| | |
| **FIGURA 148** | Obtida no site: |
| http://www.schillerinstitute.org/newspanish/institutoschiller/arte/MusiParadojaPitagoras.html | |
| | |
| **FIGURA 149** | Obtida no site: |
| http://pt.wikipedia.org/wiki/Ars_nova | |
| | |
| **FIGURA 150** | Obtida no site: |
| http://musicaeadoracao.com.br/26154/teoria-musical-online-leitura-de-musica-clave-de-sol/ | |
| | |
| **FIGURA 151** | Obtida no site: |
| http://www.adnipo-isesaki.com/?secao=aulasdemusica&id=16 | |
| | |
| **FIGURA 152 ATÉ A FIGURA 171** | Produzidas ou editadas e montadas pelo autor. |
| | |
| **FIGURA 172** | Imagem de rosto do programa Wave Player. |
| | |
| **FIGURA 173** | Imagem de rosto do programa Audacity. |
| | |

## *REFERÊNCIAS*


ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Agenda para acção**: recomendações para o ensino de matemática nos anos 80. Lisboa, 1985.

________.**Renovação do currículo de matemática**. Lisboa, 1988.

CAMPELLO JUNIOR, Antonio Carlos de Andrade. **Desenhando ondas.** Série Matemática na Escola. Disponível em: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/22313> . Acessos em: jan. e fev. 2013.

FUNDAÇÃO HEAR THE WORLD. **Sons da vida.** Disponível em: <http://www.amigosdaaudicao.com.br/teste-auditivo.php> . Acesso em 27 jan. 2013.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar** : Trigonometria. 8. ed.  Vol 3. São Paulo: Atual Editora, 2004.

MARTINS, Lucas. **Ondulatória (ondas).** Disponível em: <http://www.infoescola.com/fisica/ondulatoria-ondas/>. Acesso em: 27 jan. 2013.

MAYNOOTHLAZZARINI, Victor E. P. **Elementos de Acústica.** National University of Ireland. Disponível em : <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAdDsAK/elementos-acustica>. Acesso em 23 jan. 2013.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Cidadania e Educação Matemática**, Ano 1, n. 1. São Paulo, A Educação Matemática em Revista. 1993.

SOUZA, Carlos Alexandre Wuensche de. **As Escalas Musicais**. São José dos Campos: INPE, 2009.