



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Aplicação do Polinômio de Taylor na Aproximação da Função Seno

Emilio Curi Neto

Goiânia

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):		EMILIO CURI NETO			
E-mail:		emiliocui@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input type="checkbox"/> Sim <input checked="" type="checkbox"/> Não					
Vínculo empregatício do autor		Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal			
Agência de fomento:		Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior		Sigla: CAPES	
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00.889.834/0001-08
Título:		Aplicação do Polinômio de Taylor na Aproximação da Função Seno			
Palavras-chave:		Aproximações Polinomiais, Funções Trigonométricas, Polinômio de Taylor			
Título em outra língua:		Application of the Taylor Polynomial in Approximation of the Sine Function			
Palavras-chave em outra língua:		Polynomial Approximations, Trigonometric Functions, Taylor Polynomial			
Área de concentração:		Matemática do Ensino Básico			
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		03/07/2014			
Programa de Pós-Graduação:		Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT			
Orientador (a):		Dr. Maxwell Lizete da Silva			
E-mail:		maxwell@ufg.br			
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

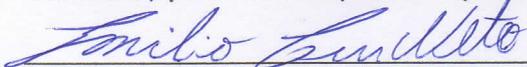
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 29 / 08 / 2014

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Emilio Curi Neto

Aplicação do Polinômio de Taylor na Aproximação da Função Seno

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva

Goiânia

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

Curi Neto, Emilio.

C975a Aplicação do polinômio de Taylor na aproximação da
função seno / Emilio Curi Neto. - 2014.
75 f. : 'figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras e tabelas.

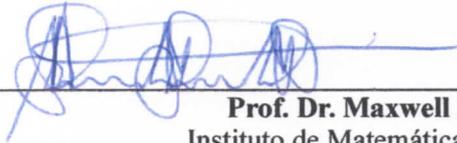
1. Polinômios
2. Trigonometria
3. Polinômio de Taylor
4. Funções trigonométricas. I. Título.

CDU – 514.11

Emilio Curi Neto

**Aplicação do Polinômio de Taylor na
Aproximação da Função Seno**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 03 de julho de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof.ª Dr.ª Sílvia Cristina Belo e Silva
MAF/PUC-GO



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Emilio Curi Neto graduou-se em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS no ano de 2000, concluiu Especialização em Matemática na Universidade de Brasília - UnB no ano de 2003 e desde então atua como professor de matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal - SEEDF e em instituições privadas de ensino superior.

Dedico este trabalho a Deus, a meus avós, meus pais,
minha esposa, minhas filhas e todos aqueles que acredi-
taram em mim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sempre esteve ao meu lado.

Agradeço aos meus avós, pois sempre investiram em minha educação.

Agradeço aos meus pais, pois me criaram para ser uma pessoa de bem.

Agradeço a minha esposa, pois sempre me apoiou.

Agradeço as minhas filhas, pois a cada dia me fazem querer ser melhor.

Agradeço ao Professor Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva, pois sem o auxílio de sua experiência e conhecimento não conseguiria terminar este trabalho.

Agradeço a SEEDF, pois possibilitou minha dedicação integral a este projeto.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho o objetivo principal está focado em aplicar a teoria de Taylor relativa à aproximações polinomiais aplicadas à função trigonométrica definida por $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = \text{sen}(x)$. Para alcançar esse objetivo, foram desenvolvidas oito seções, nas quais inicialmente é apresentada uma reflexão sobre a necessidade e a problemática de obtêr-se os valores desta relação a medida em que varia-se a medida do ângulo x . Posteriormente é apresentado e tratado um problema envolvendo o movimento de um pêndulo, o qual utiliza a aproximação $\text{sen}(x) \approx x$ onde x pertence a um certo intervalo. Nas seções que seguem é apresentada uma revisão bibliográfica das Teorias do Cálculo Diferencial e Integral, assim como da Teoria de Taylor relacionada à aproximação de funções através de polinômios. Posteriormente utilizou-se estas teorias para analisar e determinar polinômios que aproximam a função $\text{sen}(x)$ em uma vizinhança do ponto $x = 0$, assim como estimar o erro gerado ao utilizar-se estas aproximações. Nesse momento também foi analisado o erro ocorrido devido à aproximação utilizada no problema do pêndulo. Por fim é apresentada uma sugestão de atividade prática a ser realizada em sala de aula utilizando as teorias aqui tratadas, assim como o estudo do problema de transferência de calor em uma barra através da teoria de Fourier.

Palavras-chave

Aproximações Polinomiais, Funções Trigonômicas, Polinômio de Taylor

Abstract

In this work the main goal is focused on applying the theory of Taylor polynomial approximations applied on the trigonometric function defined by $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, where $f(x) = \sin(x)$. To achieve this goal, eight sections were developed, in which initially a reflection on the problem and the need to obtain the values in this respect in that it is wide angle measure x is presented. Is presented and subsequently treated a problem involving the movement of a pendulum, which uses the approximation $\sin(x) \approx x$ where x belongs to a certain range. In the sections that follow a literature review of the theories of differential and integral calculus is presented, and the related theory of Taylor approximation of functions by polynomials. Later we used these theories to analyze and determine polynomials approximating the function $f(x) = \sin(x)$ in a neighborhood of the point $x = 0$, and estimate the error when we applied these approaches. At this time the error occurred due to the approach used in the pendulum problem was also analyzed. Finally a hint of practice to be held in the classroom using the theories treated here as well as the study of the problem of heat transfer in a bar through the theory of Fourier activity is presented.

Keywords

Polynomial approximations, Trigonometric Functions, Taylor Polynomial

Lista de Figuras

1	Triângulo Retângulo.	16
2	Triângulo Retângulo $\triangle ACD$ com Ângulo $\widehat{DAC} = 15^\circ$	17
3	Círculo Trigonométrico.	18
4	Círculo Trigonométrico para Redução ao 1º Quadrante.	19
5	Gráfico da Função Seno Relacionada ao Círculo Trigonométrico.	20
6	Pêndulo Simples.	22
7	Pêndulo Simples com Decomposição de Forças.	23
8	Círculo Trigonométrico para Comparação entre $\text{sen}(x)$ e x	28
9	Gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ e dos Polinômios de Taylor $p_{2,0}$, $p_{4,0}$ e $p_{6,0}$ dessa função, avaliados para todo $x \in [0, \pi]$	52
10	Barra com Secção Transversal.	62
11	Barra nos Eixos Coordenados.	62
12	Barra com Secções Transversais S_1 e S_2	63

Lista de Tabelas

1	Tabela com os valores notáveis das funções seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica.	17
2	Tabela com os Valores da Função $f(x) = \text{sen}(x)$ dos ângulos notáveis $0 \leq x \leq 2\pi$	20
3	Tabela da aproximação de $\text{sen}(\theta)$, para $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$	58
4	Tabela da aproximação de $\text{sen}(\theta)$, para $31^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$	59
5	Tabela da aproximação de $\text{sen}(\theta)$, para $61^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$	60
6	Tabela com a Difusibilidade Térmica (K) de Algumas Substâncias. . .	65

Sumário

1	Introdução	14
2	Fundamentos da Trigonometria	16
3	Problema do Pêndulo	22
4	Fundamentos do Cálculo	26
5	Resultados Relacionados a Teoria do Polinômios de Taylor	39
5.1	Polinômio de Taylor	39
5.2	Estimativa para a Função Resto de Taylor	45
6	Determinando as Aproximações	50
6.1	Polinômio de Taylor da Função Seno	50
6.2	Análise do erro no problema do Pêndulo	52
7	Aplicação das Aproximações Polinomiais	54
7.1	Atividade Prática Relacionada a Função Seno e sua Aproximação Polinomial	54
7.2	Algoritmo para a Determinação da Aproximação Polinomial da Função Seno	55
7.3	Exemplo Prático Relacionado a Função Seno	56
7.4	Exercício Proposto para Assimilação da Atividade Relacionada à Função Seno	57
8	A Equação do Calor	61
8.1	Formulação Matemática do Problema	67
9	Considerações Finais	73
	Referências	74

1 Introdução

Desde o surgimento da teoria das relações trigonométricas no triângulo retângulo, muitos matemáticos dedicaram seus estudos para determinar o valor de $\text{sen}(\theta)$, na medida em que varia-se este ângulo θ .

Com o intuito de determinar tais valores, foram desenvolvidos vários estudos e construídas teorias, das quais grande parte é baseada em construções geométricas bastante elaboradas e que apresentam tratamentos algébricos com alto grau de complexidade.

Na medida em que estes estudos avançaram foi possível determinar o valor das relações trigonométricas para os ditos ângulos notáveis, assim como construir tabelas que apresentam valores aproximados para os demais ângulos.

Ao trabalhar as teorias tanto das relações trigonométricas no triângulo retângulo quanto no círculo trigonométrico é muito comum os alunos questionarem seus professores de matemática e disciplinas afins qual a origem desses valores.

Dessa forma este trabalho foi desenvolvido com o principal objetivo de apresentar a teoria de Taylor com o intuito de aproximar a função $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$, através de um polinômio.

Na primeira seção será apresentada uma reflexão sobre a necessidade e problemática relacionada a obtenção dos valores da relação $\text{sen}(x)$, conforme varia-se a medida do ângulo x .

Essa reflexão, além de discutir alguns dos conceitos fundamentais do trabalho para obter-se o valor da relação $\text{sen}(x)$, também trata da importante relação entre os ângulos que possuem o mesmo valor para essa relação.

A característica de existirem ângulos distintos, que apresentam o mesmo valor para a relação $\text{sen}(x)$, possibilita a introdução da teoria de redução ao primeiro quadrante, diminuindo significativamente o trabalho para a determinação dos valores dessa relação.

Como fonte de inspiração, na segunda seção, será apresentado um problema relacionado ao comportamento de um pêndulo simples. Esse problema é amplamente abordado na disciplina de física, assim como nos vários ramos das engenharias.

Em sua abordagem, o problema do pêndulo, apresenta uma aproximação muito utilizada, a qual considera que $\text{sen}(x) \approx x$. Tal abordagem é muito aplicada sem que sejam feitas as devidas considerações sobre o erro ocasionado ao utilizar-se essa aproximação.

Durante o curso de graduação muitos estudantes de matemática questionam sobre a real importância de estudar as teorias do Cálculo Diferencial e Integral, visto que de

forma errônea, os mesmos pensam que dessas pouco ou quase nada será aplicado em sala de aula.

Na terceira seção serão apresentados os fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral, os quais servirão de suporte teórico, tanto para o desenvolvimento da teoria de Taylor relacionada a aproximações polinomiais de funções reais, quanto para a aplicação dessa teoria na determinação de polinômios que aproximam a função $\text{sen}(x)$ em uma vizinhança do ponto $x = 0$.

Tomando como base a teoria de Taylor torna-se possível a tarefa de desenvolver polinômios que aproximam a função $f(x) = \text{sen}(x)$ em uma vizinhança do ponto $x = 0$, assim como estimar o erro ocasionado ao utilizar-se tais polinômios.

Neste ponto concretiza-se o objetivo de desenvolver uma atividade prática aplicável em sala de aula, na qual o professor poderá aplicar seus conhecimentos universitários na área do Cálculo Diferencial e Integral.

Por sua vez o aluno terá a seu alcance a possibilidade de conhecer um polinômio capaz de aproximar os valores da função $\text{sen}(x)$ para todo valor $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e consequentemente para todo $x \in \mathbb{R}$, bastando apenas aplicar a teoria de redução ao primeiro quadrante.

Essa atividade é baseada em calcular os valores da relação $\text{sen}(x)$ para todo ângulo inteiro x , avaliado em graus no primeiro quadrante (intervalo de 0° a 90°) através da conversão de tais ângulos para radianos, utilizando-se o Polinômio de Taylor de grau 6 em uma vizinhança do ponto $x = 0$.

Por fim, na oitava seção, será abordada a problemática de como determinar uma equação que avalie a transferência de calor em uma barra.

Esse problema foi analisado devido ao mesmo apresentar em sua solução a relação $\text{sen}(x)$, assim como ser uma ótima oportunidade para ingressar-se no estudo das séries de Fourier.

Os tópicos desenvolvidos neste trabalho irão propiciar aos professores de matemática o aprofundamento de seus conhecimentos tanto acerca do Cálculo Diferencial e Integral quanto da Teoria de Taylor para aproximações polinomiais de funções reais.

Quanto aos estudantes espera-se que este trabalho sirva para mostrar uma forma de obter-se as aproximações da relação $\text{sen}(x)$, que são apresentadas em livros e por suas calculadoras.

2 Fundamentos da Trigonometria

Nesta seção será abordada a problemática e a importância de se obter o valor numérico da relação trigonométrica $\text{sen}(x)$ quando varia-se o valor do ângulo x . Para maiores detalhes veja [1].

Considerando que a teoria das relações trigonométricas tanto no triângulo retângulo quanto no círculo trigonométrico são amplamente conhecidas, a seguir serão apresentados alguns resultados que são de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

O resultado mais importante que será tratado é a redução ao primeiro quadrante, visto que o mesmo possibilita saber-se o valor da relação seno para qualquer valor de ângulo $x > \frac{\pi}{2}$, desde que seja feita uma relação com um ângulo do primeiro quadrante.

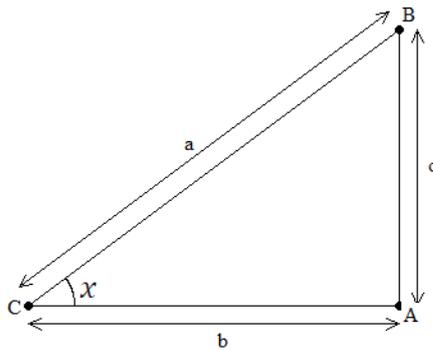


Figura 1: Triângulo Retângulo.

Partindo da relação trigonométrica seno no triângulo retângulo, tem-se que $\text{sen}(x)$ é a razão entre o cateto oposto ao ângulo x e a hipotenusa deste triângulo. Desta forma considerando a Figura 1, tem-se que:

$$\text{sen}(x) = \frac{\textit{Cateto Oposto}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}. \quad (1)$$

Da relação (1) surgiu o problema de determinar-se o valor numérico da relação $\text{sen}(x)$, conforme varia-se a medida do ângulo x . Com o desenvolvimento da matemática e o avanço nos estudos relacionados a este problema foi possível chegar-se a alguns valores, para os ângulos denominados ângulos notáveis.

Com o objetivo de obter-se o valor numérico da relação seno para ângulos fora da Tabela 1, alguns matemáticos utilizam de construções geométricas e manipulações algébricas elaboradas.

Medida do Ângulo em Radianos	Medidado Ângulo em Graus	Valor do Seno	Valor do Cosseno	Valor da Tangente
0 rad	0 ⁰	0	1	0
$\pi/6$ rad	30 ⁰	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$ rad	45 ⁰	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$ rad	60 ⁰	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$\pi/2$ rad	90 ⁰	1	0	$\cancel{\neq}$
π rad	180 ⁰	0	-1	0
$3\pi/2$ rad	270 ⁰	-1	0	$\cancel{\neq}$
2π rad	360 ⁰	0	1	0

Tabela 1: Tabela com os valores notáveis das funções seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica.

Um exemplo de construção geométrica pode ser observado na Figura 2, a qual apresenta os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$, os quais foram criados respeitando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, assim como os valores apresentados na Tabela 1.

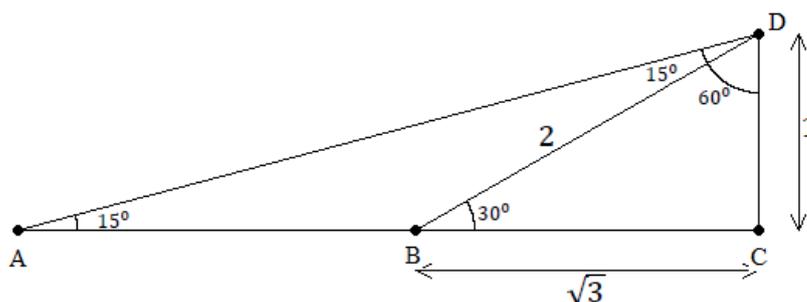


Figura 2: Triângulo Retângulo $\triangle ACD$ com Ângulo $\widehat{DAC} = 15^\circ$.

Essa figura foi elaborada com o objetivo de determinar o valor da relação $\text{sen}(\frac{\pi}{12}) = \text{sen}(15^\circ)$. Para tanto deve-se observar que o triângulo $\triangle ABD$ é isósceles com base \overline{AD} , assim tem-se que os segmentos $\overline{AB} = \overline{BD} = 2$.

Nesse ponto tem-se um avanço significativo, visto que deixa-se de procurar os valores da função seno para todos os valores reais e retorna-se ao problema de determinar somente os valores compreendidos no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Fica ainda mais claro este avanço quando é definida a função seno como uma função real e analisa-se seu gráfico com a propriedade de seus valores se repetirem, isto é, seu comportamento repete-se em ciclos onde a variável independente afasta-se a uma distância igual a 2π .

Definindo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{sen}(x)$ e variando o valor do ângulo x no círculo trigonométrico, através da teoria de redução ao primeiro quadrante pode-se obter o valor desta função para os ângulos notáveis $0 \leq x \leq 2\pi$, conforme a Tabela 2.

$\text{sen}(0) = \text{sen}(2\pi) = 0$	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\text{sen}(\pi) = 0$	$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

Tabela 2: Tabela com os Valores da Função $f(x) = \text{sen}(x)$ dos ângulos notáveis $0 \leq x \leq 2\pi$.

Observando as repetições dos valores vistos na Tabela 2, é possível obter-se um esboço do gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ conforme apresentado na Figura 5.

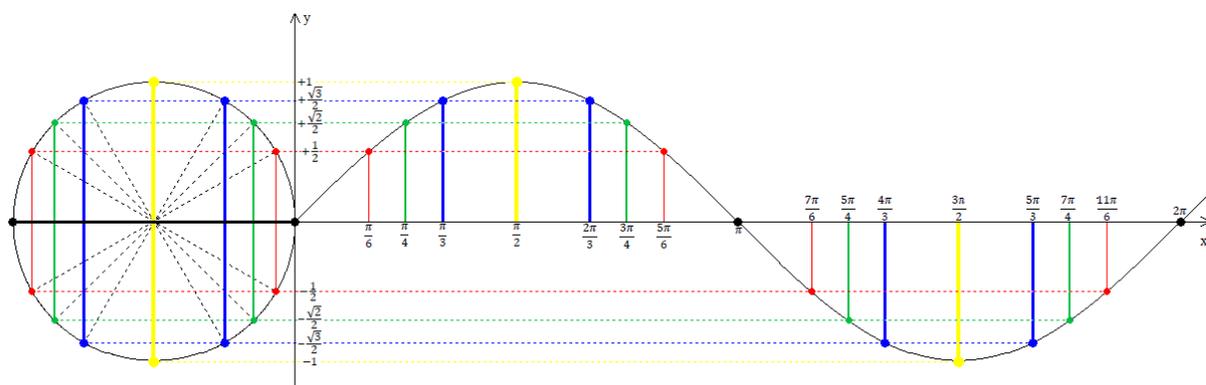


Figura 5: Gráfico da Função Seno Relacionada ao Círculo Trigonométrico.

No esboço do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$, apresentado na Figura 5, tem-se que

os segmentos com cores iguais representam a mesma medida. A altura de cada ponto é igual ao valor da relação $\text{sen}(x)$, obtidos na Tabela 2, conforme a variável independente x desloca-se sobre o semi-eixo das ordenadas.

Nas seções que seguem será apresentada a teoria de Taylor para aproximações polinomiais, a qual será utilizada com o intuito de obter-se uma estimativa para os valores da relação $\text{sen}(x)$, para todo $x \in [0, 2\pi]$.

3 Problema do Pêndulo

Nesta seção será apresentado o problema do Pêndulo. Esse caso além de ser muito abordado na disciplina de Física no ensino médio, também possui aplicação em inúmeros problemas relacionados às diversas engenharias. Para maiores detalhes veja [10] ou [12].

Supondo inicialmente que exista um corpo possuindo massa m que esteja suspenso por um fio com massa desprezível e comprimento l , então este corpo irá se movimentar sobre um círculo de raio l e sob a ação das forças peso ($P = mg$) e tensão (T).

A Figura 6 representa a construção do problema acima citado considerando que esse tenha sido parado em um determinado momento do tempo.

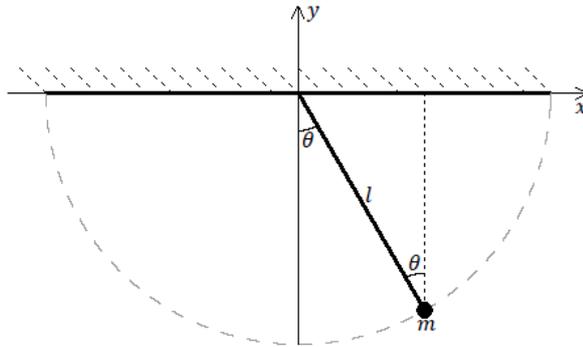


Figura 6: Pêndulo Simples.

Os estudos da modelagem matemática através de sistemas dinâmicos, baseiam-se em compreender a evolução de um fenômeno físico utilizando um sistema de equações diferenciais. Essas equações diferenciais devem caracterizar seu comportamento ao longo do tempo.

Observando as características do problema a ser estudado, pode-se elencar quais são os fatores físicos que influenciam seu comportamento. Posteriormente, deve-se aplicar as leis físicas que o regem, a fim de obter-se um conjunto de equações que sejam capazes de representar, com precisão, as variações que irão ocorrer no decorrer do tempo.

Usualmente os problemas envolvendo um pêndulo simples são analisados como sendo um oscilador harmônico simples, os quais geram um modelo matemático para sistemas relacionados ao movimento de uma partícula exposta a uma força de atração com magnitude proporcional a distância desta partícula em relação à origem do sistema.

Para facilitar a dedução das equações a seguir, será adotada a seguinte notação relacionada a funções que possuem derivadas de primeira e segunda ordem na variável t . Assim, considerando uma função $\psi(t)$, tem-se que:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \psi'(t) = \dot{\psi} \implies \frac{d^2}{dt^2}\psi(t) = \psi''(t) = \ddot{\psi}.$$

Sendo m a massa da partícula e a sua aceleração, pela segunda Lei de Newton, tem-se que $F = m.a$. Por outro lado, como a partícula será exposta a uma força (Gravidade e Tensão) de atração proporcional à distância dessa partícula em relação a sua posição inicial (repouso), tem-se que $F = -k.x$, uma vez que a força será contrária ao sentido do deslocamento x e $k > 0$ é a constante de proporcionalidade da força em relação ao deslocamento.

De acordo com os estudos da física, relacionados ao movimento instantâneo de uma partícula, tem-se que $a = \ddot{x}$. Assim igualando as duas equações da força, obtêm-se que:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{7}$$

Decompondo a aceleração da partícula em seus componentes radial e tangencial é possível chegar-se a um esquema de movimento conforme a Figura 7.

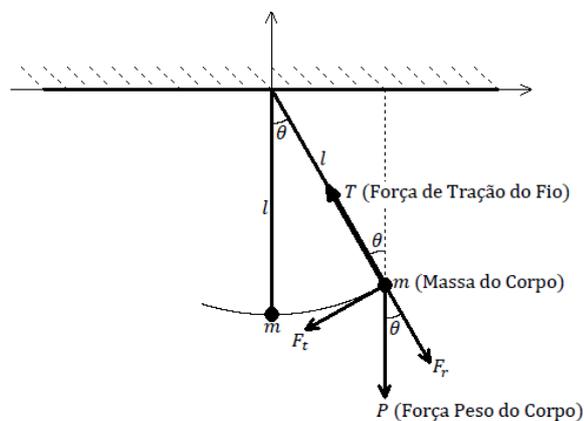


Figura 7: Pêndulo Simples com Decomposição de Forças.

Seguindo a ilustração da Figura 7 e em conformidade com a equação (7) é possível relacionar o ângulo de desvio (avaliado em radianos), medido a partir da posição vertical de equilíbrio e em conformidade com a segunda Lei de Newton, tem-se que:

$$F_r = m\ddot{y} = mg - T \cdot \cos(\theta) \quad (8)$$

$$F_t = m\ddot{x} = -T \cdot \sin(\theta) \quad (9)$$

Com o intuito de determinar uma equação para o ângulo de desvio serão tratadas as equações (8) e (9). Multiplicando a igualdade (8) por $\sin(\theta)$ e igualdade (9) por $\cos(\theta)$. Dessa forma reorganizando os termos obtêm-se que:

$$m\ddot{y} \cdot \sin(\theta) - mg \cdot \sin(\theta) = -T \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad (10)$$

$$m\ddot{x} \cdot \cos(\theta) = -T \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad (11)$$

Igualando as equações (10) e (11) em função do termo $-T \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$, tem-se que:

$$m\ddot{y} \cdot \sin(\theta) - mg \cdot \sin(\theta) = m\ddot{x} \cdot \cos(\theta) \quad (12)$$

Considerando-se que $m \neq 0$, pode-se dividir a equação (12) por m e reorganizar seus termos obtendo assim:

$$\ddot{x} \cdot \cos(\theta) - \ddot{y} \cdot \sin(\theta) = -g \cdot \sin(\theta) \quad (13)$$

Das relações trigonométricas no triângulo retângulo e das suposições feitas para a construção da Figura 7, pode-se facilmente obter:

$$\begin{cases} x = \ell \cdot \sin(\theta) \\ y = \ell \cdot \cos(\theta) \end{cases} \quad (14)$$

Aplicando a teoria da regra da cadeia e derivando as equações do sistema (14), em relação a variável θ obtém-se que:

$$\dot{x} = \ell \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \implies \ddot{x} = \ell \cdot \left(-\sin(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 + \cos(\theta) \cdot (\ddot{\theta}) \right) \quad (15)$$

$$\dot{y} = \ell \cdot (-\sin(\theta) \cdot \dot{\theta}) \implies \ddot{y} = \ell \cdot \left(-\cos(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 - \sin(\theta) \cdot (\ddot{\theta}) \right) \quad (16)$$

Substituindo as equações (15) e (16) em (13), obtém-se:

$$\ell \cdot \left(-\sin(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 + \cos(\theta) \cdot (\ddot{\theta}) \right) \cdot \cos(\theta) - \ell \cdot \left(-\cos(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 - \sin(\theta) \cdot (\ddot{\theta}) \right) \cdot$$

$$\sin(\theta) = -g \cdot \sin(\theta) \implies$$

$$\ell \cdot \left(-\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 + \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 + \cos^2(\theta) \cdot (\ddot{\theta}) + \sin^2(\theta) \cdot (\ddot{\theta}) \right) =$$

$$-g \cdot \sin(\theta) \implies \ell \cdot (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \cdot (\ddot{\theta}) = -g \cdot \sin(\theta) \implies \ell \cdot \ddot{\theta} = -g \cdot \sin(\theta)$$

Sabendo que $\ell \neq 0$, visto que do contrário o problema do pêndulo não faria sentido, é possível reescrever a última igualdade da seguinte forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \cdot \text{sen}(\theta) = 0. \quad (17)$$

Para concluir a dedução da relação desejada, é muito comum em vários ramos da ciência considerar que haverá apenas uma pequena variação no deslocamento do corpo em relação a posição inicial (vertical). Desta forma torna-se usual considerar que $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, fazendo com que a equação da oscilação harmônica em questão seja reduzida a seguinte igualdade:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (18)$$

Dessa forma assumindo uma aproximação, ao considerar-se que em pequenos desvios em relação a posição inicial tem-se que $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, faz-se necessário avaliar uma estimativa para o erro que ocorrerá ao utilizar-se tal aproximação.

Assumindo a aproximação dada, a solução dessa equação diferencial resume-se a uma equação na qual tem-se única e exclusivamente uma relação entre a função e sua segunda derivada, desde que admita-se que a aproximação utilizada possua um grau aceitável de precisão. A solução da equação (18) será da forma $\theta(t) = \cos\left(\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)t\right)$ ou $\theta(t) = \text{sen}\left(\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)t\right)$.

Através de uma combinação linear é possível obter-se a seguinte resposta para o problema inicial do pêndulo:

$$\theta(t) = A \cdot \text{sen}\left(\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)t\right) + B \cdot \cos\left(\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)t\right), \quad (19)$$

onde as constantes A e B são determinadas conforme o conhecimento dos valores da posição inicial e da velocidade inicial do pêndulo.

Conforme foi visto nessa seção, determinar os valores da função seno é muito importante para inúmeros problemas, inclusive a solução dos problemas relacionados a utilização de pêndulos.

Nas seções que seguem será apresentada a teoria de Taylor, tanto para a determinação de aproximações para os valores da relação $\text{sen}(x)$ quanto apresentar uma estimativa para o erro envolvido.

4 Fundamentos do Cálculo

Nesta seção serão apresentados alguns resultados relativos ao Cálculo Diferencial e Integral que serão necessários para a aplicação da teoria de Taylor à função $\text{sen}(x)$. Para maiores detalhes veja [4].

Definição 4.1 (Ponto de Acumulação). *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}$, diz-se que a é um ponto de acumulação do conjunto X se, e somente se, toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio ponto a .*

Definição 4.2 (Limite de uma Função em um Ponto a). *Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f possui limite $L \in \mathbb{R}$ em um ponto $a \in I' \subset I$ se, e somente se, para todo número real $\epsilon > 0$ que seja dado, existir um número real $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ tem-se que:*

$$0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \epsilon, \quad (20)$$

onde I' é o conjunto de pontos de acumulação de I .

Tal número L , quando existir é único e apresentado através da notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Observação: Anotação $\|\rho\|$ indica o valor absoluto de ρ , isto é, $\|\rho\| = \rho$, se $\rho \geq 0$ e $\|\rho\| = -\rho$, se $\rho < 0$.

Definição 4.3 (Continuidade de uma Função em um Ponto a). *Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em um ponto $a \in I$ se, e somente se, para todo número real $\epsilon > 0$ que seja dado, pode-se obter um número real $\delta > 0$ tal que $x \in I$ e $\|x - a\| < \delta$ implica que:*

$$\|f(x) - f(a)\| < \epsilon. \quad (21)$$

Definição 4.4 (Continuidade de uma Função). *Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em todo seu domínio ou simplesmente contínua se, e somente se, para todo ponto $a \in I$, tem-se que f é contínua em a .*

Proposição 4.1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então f é contínua em um ponto $a \in I$ se, e somente se:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (22)$$

Demonstração. Supondo inicialmente $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua em um ponto $a \in I$, pela Definição 4.3 tem-se que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Como $a \in I$, tem-se que a função f está definida neste ponto e portanto faz sentido considerar que $L = f(a)$. Assim para todo $x \neq a$ a condição acima pode ser reescrita como:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \epsilon.$$

Em conformidade com a Definição 4.2, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = f(a).$$

Reciprocamente supondo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função definida em um ponto $a \in I$ e que a mesma possua a seguinte propriedade:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Desta forma pela Definição 4.2 e considerando $L = f(a)$, tem-se que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \epsilon,$$

ou equivalentemente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Como f está definida em $a \in I$, tem-se que se $x = a$ então $\|x - a\| = 0 < \delta$ e $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$. Dessa forma a condição acima pode ser reescrita como:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Em conformidade com a Definição 4.3, tem-se que a função f é contínua no ponto $x = a$. □

A seguinte proposição relaciona o valor numérico da relação seno de um arco com a medida desse arco. Essa proposição será utilizada tanto na demonstração da continuidade da função seno, quanto na demonstração da Proposição do Limite Fundamental do Cálculo.

Proposição 4.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\|\text{sen}(x)\| \leq \|x\|$.*

Demonstração. Considerando o círculo trigonométrico, para um ângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, pode-se obter os pontos $O = (0, 0)$, $A = (\cos(x), \text{sen}(x))$, $C = (1, 0)$, $D = (\cos(x), -\text{sen}(x))$ e $E = (\cos(x), 0)$.

Ainda neste círculo trigonométrico deve-se marcar o ponto $B = (1, \tan(x))$, o qual é a interseção da reta que passa pelos pontos O e A com a reta tangente ao círculo no ponto C .

A Figura 8 foi elaborada com o intuito de ilustrar essa construção. Sendo que na mesma o ângulo x é dado em radianos.

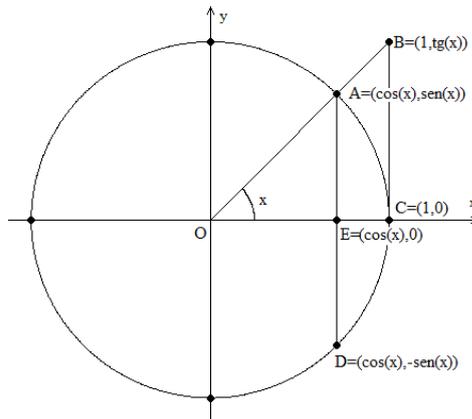


Figura 8: Círculo Trigonométrico para Comparação entre $\text{sen}(x)$ e x .

Supondo inicialmente que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, conforme a construção da Figura 8, pode-se obter duas desigualdades.

A primeira desigualdade obtida refere-se a relação entre o valor do seno de um arco e a medida do próprio arco. Analizando a Figura 8 pode-se perceber que o comprimento do segmento de reta \overline{AD} é menor ou igual que o comprimento do arco \widehat{AD} , visto que a reta é a menor distância entre dois pontos. Assim:

$$\overline{AD} \leq \widehat{AD}. \quad (23)$$

Por outro lado através da comparação entre as áreas dos triângulos $\triangle OAE$ e $\triangle OBC$, juntamente como a área do setor circular $O\widehat{AC}$, pode-se obter que:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\triangle OAE) < \text{Área}(O\widehat{AC}) < \text{Área}(\triangle OBC) &\iff \\ \frac{\text{sen}(x) \cdot \cos(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\text{sen}(x)}{2 \cdot \cos(x)}. \end{aligned}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \text{sen}(x) < 1$, tem-se que a relação acima pode ser multiplicada por 2 e dividida por $\text{sen}(x)$, implicando em:

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\text{sen}(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}. \quad (24)$$

Esta segunda desigualdade será utilizada na demonstração da Proposição 4.7.

Retornando a demonstração desta Proposição, da desigualdade (23), pode-se facilmente obter que:

$$\overline{AD} \leq \widehat{AD} \iff 2 \cdot \text{sen}(x) \leq 2 \cdot x \iff \|\text{sen}(x)\| \leq \|x\|,$$

para todo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Por outro lado, supondo que $x \geq \frac{\pi}{2}$, tem-se que:

$$\|\text{sen}(x)\| \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \leq x \leq \|x\|.$$

Logo a desigualdade é válida para todo $x \geq 0$. Por fim supondo que $x < 0$, tem-se que $-x > 0$. Como a função $\text{sen}(x)$ possui a propriedade de que $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$, pode-se obter que:

$$\|\text{sen}(x)\| = \|-\text{sen}(-x)\| \leq \|-x\| = \|x\|,$$

para todo $x < 0$.

Portanto a desigualdade é válida para todo número real x e tem-se que:

$$\|\text{sen}(x)\| \leq \|x\|. \quad (25)$$

□

Proposição 4.3. *O limite da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, com $0 \in I$ e definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ existe no ponto $x = 0$ e o mesmo é dado por:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) = 0. \quad (26)$$

Demonstração. Considerando a Definição 4.2 aplicada ao ponto $a = 0$ e $L = 0$, basta mostrar que para todo número real $\epsilon > 0$ que seja dado, existe um número real $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ tem-se que:

$$0 < \|x - 0\| < \delta \implies \|f(x) - 0\| < \epsilon \iff$$

$$0 < \|x\| < \delta \implies \|\text{sen}(x)\| < \epsilon.$$

Pela Proposição 4.2, tem-se que $\|\text{sen}(x)\| \leq \|x\|$, assim para todo $\epsilon > 0$ que seja dado, basta tomar $\delta = \epsilon$ e tem-se que:

$$0 < \|x\| < \delta \implies \|\text{sen}(x)\| \leq \|x\| < \delta = \epsilon.$$

Portanto a função $f(x) = \text{sen}(x)$ possui limite em $x = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) = 0.$$

□

Teorema 4.1 (Teorema do Confronto). *Sejam f, g e h três funções, definidas em uma vizinhança do ponto $x = p$. Supondo que exista $r > 0$ tal que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$

A demonstração deste teorema será omitida. Para uma demonstração formal desse teorema, veja [4] página 98.

Proposição 4.4. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$, onde $0 \in I$, então:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1. \tag{27}$$

Demonstração. Considerando uma vizinhança do ponto $x = 0$, tem-se $\cos(x) > 0$, desta forma:

$$\begin{aligned}\|\cos(x) - 1\| &= \|\cos(x) - \cos^2(x) - \text{sen}^2(x)\| \\ &\leq \|\cos(x) - \cos^2(x)\| + \|\text{sen}^2(x)\| \\ &\leq \cos(x) \cdot \|1 - \cos(x)\| + \|\text{sen}(x)\|^2.\end{aligned}$$

Reescrevendo esta desigualdade obtém-se que:

$$\begin{aligned}\|\cos(x) - 1\| - \cos(x)\|1 - \cos(x)\| &\leq \|\text{sen}(x)\|^2 \Rightarrow \\ (1 - \cos(x)) \cdot \|\cos(x) - 1\| &\leq \|\text{sen}(x)\|^2 \Rightarrow \\ (1 - \cos(x)) \cdot \|1 - \cos(x)\| &\leq \|\text{sen}(x)\|^2 \Rightarrow \\ \|1 - \cos(x)\|^2 &\leq \|\text{sen}(x)\|^2.\end{aligned}$$

Assim é possível aplicar o Teorema 4.1 à desigualdade $0 \leq \|\cos(x) - 1\|^2 \leq \|\text{sen}(x)\|^2$, isto é:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \|\cos(x) - 1\|^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \|\text{sen}(x)\|^2 = 0.$$

Desta forma $\lim_{x \rightarrow 0} \|\cos(x) - 1\|^2 = 0$ e conseqüentemente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1.$$

□

Proposição 4.5. *A função seno é contínua em todo seu domínio.*

Demonstração. Esta demonstração será baseada na Definições 4.3 e 4.4, assim como a Proposição 4.2.

Assim será mostrado que para todo a no domínio da função e para todo número real $\epsilon > 0$ que seja dado, existe um número real $\delta > 0$ tal que para todo x no domínio de f tem-se que $\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

Das identidades trigonométricas, tem-se que:

$$\text{sen}(a) - \text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{a-x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+x}{2}\right). \quad (28)$$

Como $\|\cos(x)\| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, aplicando as propriedades do módulo e a Proposição 4.2, pode-se facilmente obter:

$$\|\text{sen}(x) - \text{sen}(a)\| = \left\| \text{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right\| \leq \left\| \text{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right\| \leq \left\| \frac{x-a}{2} \right\|.$$

Desta forma para todo $\epsilon > 0$ que seja dado, tomando $\delta = 2\epsilon$ tem-se que:

$$\|x - a\| < \delta \implies \|\text{sen}(x) - \text{sen}(a)\| \leq \left\| \text{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right\| \leq \left\| \frac{x-a}{2} \right\| \leq \frac{\delta}{2} = \epsilon.$$

Portanto pela Definição 4.3, a função f é contínua no ponto a . Como esse ponto a é um qualquer no domínio de f , tem-se que a função é contínua em todos os seu pontos e conseqüentemente em todo seu domínio. \square

Proposição 4.6. *A função cosseno é contínua em todo seu domínio.*

Observação: Argumentos análogos aos apresentados na demonstração da Proposição 4.5, garantem tal resultado.

Definição 4.5 (Derivada de uma Função em um Ponto a). *Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é derivável em um ponto $a \in I$ se, e somente se existir o limite*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Caso este limite exista, a função é dita derivável em a e sua derivada é indicada por:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (29)$$

Definição 4.6 (Derivada de uma Função em um Intervalo). *Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é derivável em um intervalo $I_1 \subset I$ se, e somente se a função f for derivável em todo ponto $x \in I_1$.*

Proposição 4.7 (Limite Fundamental do Cálculo). *O limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$, onde x é dado em radianos, existe e é igual a 1.*

Demonstração. Esta demonstração será realizada baseada nas propriedades de limites, assim como uma partição do domínio para $x > 0$ e $x < 0$.

Como o limite será calculado para $x \rightarrow 0$, pode-se inicialmente supor que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, assim conforme a análise da Figura 8 realizada na demonstração da Proposição 4.2, pode-se considerar a desigualdade (24) que garante que:

$$\cos(x) < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \implies \cos(x) \leq \frac{\text{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Por hipótese está sendo suposto que $x > 0$, pode-se utilizar a notação de limite lateral à direita. Esta notação é indicada por $x \rightarrow 0^+$ e representa uma aproximação do ponto $x = 0$ para valores $x > 0$.

Aplicando as propriedades do confronto, juntamente com a do limite do quociente na desigualdade acima, pode-se obter que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos(x)} \implies 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} \leq 1,$$

Desta forma pelo Teorema 4.1, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$, para todo $x > 0$.

Para finalizar essa demonstração, é necessário mostrar que este limite também existe quando $x < 0$. Seguindo a mesma linha de raciocínio aplicada na parte inicial, pode-se considerar que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ e adotar a notação $x \rightarrow 0^-$.

Como para $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \implies 0 < -x < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen}(x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(-x)}{-x} \stackrel{y=-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1.$$

Portanto, tanto para $x > 0$, quanto para $x < 0$, tem-se que o limite existe e é igual a 1, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

□

Proposição 4.8. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ é derivável em todo seu domínio e sua derivada é dada por:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x),$$

para todo x pertencente ao seu domínio.

Demonstração. De acordo com a Definição 4.6, para a função f ser derivável em todo seu domínio, é necessário mostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se que a função f é derivável em a .

Assim conforme a Definição 4.5, basta mostrar que para todo $a \in \mathbb{R}$ o seguinte limite existe:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (30)$$

Para tanto, este limite será tratado utilizando-se identidades trigonométricas e propriedades de limites conhecidas. Assim considerando um número real a qualquer, tem-se que:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a + \Delta x) - \text{sen}(a)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a) \cdot \cos(\Delta x) + \cos(a) \cdot \text{sen}(\Delta x) - \text{sen}(a)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(a) \cdot \text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a) \cdot \cos(\Delta x) - \text{sen}(a)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(a) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a) \cdot [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} = \\
&= \cos(a) \cdot 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a) \cdot [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} \cdot \frac{[\cos(\Delta x) + 1]}{[\cos(\Delta x) + 1]} = \\
&= \cos(a) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a) \cdot [\cos^2(\Delta x) - 1]}{\Delta x \cdot [\cos(\Delta x) + 1]} = \\
&= \cos(a) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a) \cdot [-\text{sen}^2(\Delta x)]}{\Delta x \cdot [\cos(\Delta x) + 1]} = \\
&= \cos(a) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\text{sen}(a) \cdot \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\text{sen}(\Delta x)}{[\cos(\Delta x) + 1]} \right) = \\
&= \cos(a) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen}(a) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{[\cos(\Delta x) + 1]} = \\
&= \cos(a) - \text{sen}(a) \cdot 1 \cdot \frac{0}{2} = \cos(a).
\end{aligned}$$

Portanto o limite existe, fazendo com que a proposição seja verdadeira. Assim a função $f(x) = \text{sen}(x)$ é derivável em todo intervalo $I \in \mathbb{R}$. \square

Proposição 4.9. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos(x)$ é derivável em todo seu domínio e sua derivada é dada por:*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\text{sen}(x),$$

para todo x pertencente ao seu domínio.

Observação: Argumentos análogos aos apresentados na demonstração da Proposição 4.8, garantem tal resultado.

Definição 4.7 (Derivada de Ordem Superior). *Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em um intervalo $I_1 \subset I$, define-se a função $f'(x) = f^{(1)}(x) : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ denominada função derivada primeira de f .*

Caso exista um intervalo $I_2 \subset I_1$, no qual a função f' seja derivável, define-se a função derivada de segunda ordem da função f , indicada por $f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx} f'(x) : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso diz-se que f é duas vezes derivável no intervalo I_2 .

Seguindo recursivamente este procedimento e supondo que a função f seja n vezes derivável em um intervalo $I_n \subset I$, define-se a derivada de ordem n da função f ,

indicada por $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) : I_n \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso diz-se que f é n vezes derivável no intervalo I_n .

Proposição 4.10. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ é infinitamente derivável em todo seu domínio e sua derivada de ordem n em um ponto x de seu domínio é dada por:*

$$f^{(4k)}(x) = \text{sen}(x) \text{ ou} \quad (31)$$

$$f^{(4k+1)}(x) = \text{cos}(x) \text{ ou} \quad (32)$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\text{sen}(x) \text{ ou} \quad (33)$$

$$f^{(4k+3)}(x) = -\text{cos}(x), \quad (34)$$

onde n é um número natural e pode ser escrito de forma única por $n = 4k + i$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Demonstração. Conforme o princípio Euclidiano da divisão, tem-se que para todo número $n \in \mathbb{N}$, é possível determinar de forma única os números $k, i \in \mathbb{N}$, onde $0 \leq i \leq 3$ tais que $n = 4.k + i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim para demonstrar essa Proposição basta mostrar que a mesma é válida para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Dessa forma aplicando o princípio da indução finita para $k = 0$ nas igualdades (31),(32), (33) e (34) juntamente com as Proposições (4.8) e (4.9) , tem-se que:

$$f^{(4k)}(x) = f^{(0)}(x) = \text{sen}(x),$$

$$f^{(4k+1)}(x) = f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = \text{cos}(x),$$

$$f^{(4k+2)}(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}(\text{cos}(x)) = -\text{sen}(x),$$

$$f^{(4k+3)}(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}(-\text{sen}(x)) = -\frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = -\text{cos}(x).$$

Logo tem-se que a Proposição é válida para $k = 0$.

Dando continuidade à demonstração, pelo princípio da indução finita, deve-se supor que a Proposição é verdadeira para todo $0 \leq k \leq (t - 1)$, e mostrar que a mesma também é válida para $k = t \geq 1$. Para tanto, segue a seguinte análise:

Para $k = t \geq 1$ as igualdades (31),(32), (33) e (34) juntamente com as Proposições (4.8) e (4.9), assim como a hipótese de indução , tem-se que:

$$\begin{aligned}
f^{(4t)}(x) &= f^{(4(t-1)+4)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(4(t-1)+3)}(x) = \frac{d}{dx} (-\cos(x)) = \sin(x), \\
f^{(4t+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(4t)}(x) = \frac{d}{dx} (\sin(x)) = \cos(x), \\
f^{(4t+2)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(4t+1)}(x) = \frac{d}{dx} (\cos(x)) = -\sin(x), \\
f^{(4t+3)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(4t+2)}(x) = \frac{d}{dx} (-\sin(x)) = -\cos(x).
\end{aligned}$$

Assim tem-se que a Proposição também é válida para $k = t \geq 1$. Portanto a Proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 4.2. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo aberto I . Se a função f possui um ponto de máximo (reciprocamente mínimo) local em um ponto $c \in I$ e é derivável em c , então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Esta demonstração será realizada supondo que a função f possui um máximo local no ponto $c \in I$, para o caso em que f possui um ponto de mínimo neste ponto, a demonstração é análoga e será omitida.

Pela hipótese do Teorema, tem-se que a função f é derivável no ponto c , assim existem os limites laterais de $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ quando x tende para c e os mesmos são iguais, isto é:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \quad (35)$$

Como c é um ponto de máximo local, a função f atinge um valor de máximo local em c . Assim existe um intervalo aberto $(a, b) \subset I$, tal que $c \in (a, b)$ e $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in (a, b)$. Dessa forma $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Como para todo $x > c$, tem-se que $x - c > 0$, assim $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$. Assim, pelo Teorema do Confronto, para todo $x \in (a, b)$ o limite lateral direito desta fração é limitado superiormente pelo 0, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (36)$$

Por outro lado para todo $x < c$, tem-se que $x - c < 0$, assim $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Assim, pelo Teorema do Confronto, para todo $x \in (a, b)$ o limite lateral esquerdo dessa fração é limitado inferiormente pelo 0, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (37)$$

Pela igualdade (35), os limites laterais esquerdo e direito são iguais. Assim comparando as desigualdades (36) e (37), tem-se que:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

□

Teorema 4.3 (Teorema de Weierstrass). *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.*

A demonstração deste teorema será omitida. Para uma demonstração formal desse teorema, veja [4] página 513.

Teorema 4.4 (Teorema de Rolle). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b] \subset I$ e derivável no intervalo aberto $(a, b) \subset I$. Se $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$, tal que:*

$$f'(c) = 0. \tag{38}$$

Demonstração. Esta demonstração será realizada em duas etapas. Primeiramente supondo que a função dada é constante, isto é $f(x) = k$ para algum $k \in \mathbb{R}$, tem-se que $f'(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$. Assim basta tomar um ponto qualquer $c \in (a, b)$ e tem-se que $f'(c) = 0$.

Posteriormente supondo que a função seja tal que $f(x) \neq f(a)$, para algum $x \in (a, b)$. Neste caso, ou $f(x) > f(a)$ ou $f(x) < f(a)$. Como $f(a) = f(b)$, pelo Teorema 4.3, tem-se que a função assumirá um valor máximo ou mínimo em algum $c \in (a, b)$.

Dessa forma a função possui um ponto de máximo ou mínimo local em c . Portanto pelo Teorema 4.2, como f é derivável em (a, b) , tem-se que $f'(c) = 0$. □

Observação: Para aplicação do Teorema de Rolle, tem-se de observar se a condição inicial da função ser derivável no intervalo aberto (a, b) é plenamente satisfeita.

Por exemplo a função definida por $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = 2 + \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$ é derivável no intervalo aberto $(0, 1)$ e sua função derivada é dada por: $f'(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Essa função além de ser derivável em $(0, 1)$, possui $f(0) = f(1) = 2$, assim pode-se aplicar o Teorema de Rolle e obter que existe um $c \in (0, 1)$, tal que $f'(c) = 0$. Pode-se facilmente obter que se $c = \frac{1}{3} \in (0, 1)$, então $f'(\frac{1}{3}) = 0$.

Por outro lado, considerando a função definida por $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$, tem-se que a mesma é derivável no intervalo aberto $(0, 2) \cup (2, 4) \subset (0, 4)$ e que sua função além de ser derivável em $(0, 2) \cup (2, 4)$, possui $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$, mas não pode-se aplicar o Teorema de Rolle, pois não existe $f'(2)$.

Teorema 4.5 (Teorema de L'Hospital). *Sejam f e g duas funções deriváveis nos intervalos abertos $(a-r, a)$ e $(a, a+r)$, para algum número real $r > 0$ e com $g'(x) \neq 0$ para todo x tal que $0 < |x-a| < r$. Nestas condições, se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

e se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A demonstração deste teorema será omitida. Para uma demonstração formal desse teorema, veja [4] página 244.

Teorema 4.6 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I . Então*

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f , isto é, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

A demonstração deste teorema será omitida. Para uma demonstração formal desse teorema, veja [9] página 132.

5 Resultados Relacionados a Teoria do Polinômios de Taylor

Nesta seção será definida a base da teoria de Taylor relativa a aproximação de funções reais através de polinômios, assim como uma estimativa de erro ao utilizar-se essas aproximações. Para maiores detalhes veja [4], [6] e [9].

5.1 Polinômio de Taylor

Definição 5.1 (Polinômios de Taylor). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$. Define-se o Polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto $x = a$ das seguintes formas:*

$$p_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^n c_i(x-a)^i, \quad (39)$$

$$p_{n,a}(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n, \quad (40)$$

onde os coeficientes c_i , com $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ são tais que as derivadas de ordem $k \leq n$ do polinômio $p_{n,a}(x)$ estimadas no ponto $x = a$ coincidem com as derivadas de mesma ordem da função f também estimadas no ponto $x = a$.

Deve-se observar que nessa definição, assim como no restante da teoria de Taylor que será apresentada, os índices n e a representam respectivamente o grau e o ponto em que foram definidos esse polinômio.

Para determinar os coeficientes do Polinômio de Taylor de uma função dada é necessário construir uma argumentação válida baseada nas n derivadas da função f estimadas no ponto $x = a$.

Proposição 5.1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$ e seja $p_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^n c_i(x-a)^i$ o Polinômio de Taylor de grau n desta função no ponto $x = a$. Cada um dos n coeficientes desse polinômio são completamente determinados através da equação:*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \text{para } k \leq n. \quad (41)$$

onde $f^{(k)}(a)$ representa a k -ésima derivada da função f estimada no ponto $x = a$.

Demonstração. A seguir será demonstrado, através do método de indução finita, que a proposição acima é verdadeira. Para tanto segue a seguinte análise.

Por definição tem-se que a derivada de ordem $k = 0$ de uma função resulta na própria função, isto é, $f^{(0)}(x) = f(x)$, logo $f^{(0)}(a) = f(a)$.

Por outro lado a derivada de ordem $k = 0$ do Polinômio de Taylor desta função também será igual ao próprio polinômio, logo:

$$p_{n,a}^{(0)}(x) = p_{n,a}(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n.$$

Avaliando este polinômio no ponto $x = a$, obtem-se o seguinte resultado:

$$p_{n,a}^{(0)}(a) = p_{n,a}(a) = c_0 + c_1(a - a) + c_2(a - a)^2 + c_3(a - a)^3 + \dots + c_n(a - a)^n = c_0.$$

Conforme a definição do Polinômio de Taylor faz-se necessário impor que a derivada de ordem $k = 0$ tanto da função quanto do polinômio avaliados no ponto $x = a$ têm de ser iguais, assim é necessário ter-se que $f^{(0)}(a) = p_{n,a}^{(0)}(a)$, isto é $f(a) = c_0$. Desta forma:

$$c_0 = f(a) = f^{(0)}(a) = \frac{f^{(0)}(a)}{1} = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}.$$

Portanto a proposição é verdadeira para $k = 0$.

Dando continuidade a esta demonstração deve-se supor como hipótese de indução que a proposição é verdadeira para todo $0 \leq k \leq (n - 1)$, isto é:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

para todo $0 \leq k \leq (n - 1)$.

Desta forma, para concluir esta demonstração, basta somente provar que a referida proposição ainda é válida para $k = n$. Para tanto segue a seguinte análise.

Como o Polinômio de Taylor, relativo à função f , é definido de forma geral por $p_{n,a}(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots + c_n(x - a)^n$, tem-se que a n -ésima derivada será igual a $p_{n,a}^{(n)}(x) = c_n \cdot n!$, visto que todos os termos com índice $0 \leq i \leq (n - 1)$ são anulados devido a apresentarem grau menor ou igual a $(n - 1)$.

Por fim avaliando a n -ésima derivada do polinômio no ponto $x = a$ e igualando com a n -ésima derivada da função f também avaliada no ponto $x = a$, será obtido o seguinte resultado:

$$p_{n,a}^{(n)}(a) = c_n \cdot n! = f^{(n)}(a) \Leftrightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Concluindo assim a demonstração e provando que a proposição acima é verdadeira. □

Através da Proposição 5.1, é possível fazer uma releitura da Definição 5.1 da seguinte forma:

Definição 5.2 (Polinômio de Taylor com Coeficientes Determinados). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$. Defina-se o Polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a das seguintes formas:*

$$p_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \quad (42)$$

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (43)$$

Definição 5.3 (Função Resto de Taylor). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$. Defina-se a função Resto de Taylor de grau n como sendo $r_{n,a} : I \rightarrow \mathbb{R}$, determinada através da diferença entre a função e seu Polinômio de Taylor, isto é, $r_{n,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x)$, onde $p_{n,a}(x)$ é o Polinômio de Taylor de grau n da função f conforme as Definições 5.1 e 5.2.*

É válido ressaltar que devido a forma como foi definida a função $r_{n,a} : I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $r_{n,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x)$, tem-se que a mesma é a diferença entre duas funções n vezes deriváveis, o que implica que a função $r_{n,a}$ denominada como Resto de Taylor de grau n também seja uma função n vezes derivável.

Também cabe uma observação baseada na imposição da Definição 5.1 que obriga que o Polinômio de Taylor da função f seja tal que as derivadas de ordem $0 \leq k \leq n$ do polinômio $p_{n,a}(x)$ estimadas no ponto $x = a$ coincidam com as derivadas de mesma ordem da função f também estimadas no ponto $x = a$. Assim:

$$r_{n,a}(a) = r'_{n,a}(a) = r''_{n,a}(a) = r'''_{n,a}(a) = r^{(4)}_{n,a}(a) = \dots = r^{(n)}_{n,a}(a) = 0. \quad (44)$$

Proposição 5.2. *Seja $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$. Se $r^{(k)}(a) = 0$ para todo $0 \leq k \leq n$ então tem-se que:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0. \quad (45)$$

Demonstração. Inicialmente será suposto que $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$, com $r^{(k)}(x) = 0$ para todo $0 \leq k \leq n$, assim basta mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Conforme a suposição inicial, tem-se que r é uma função n vezes derivável em um ponto $x = a$, logo a mesma possui todas as derivadas de ordem 0 (própria função) até n neste ponto e conseqüentemente todas estas derivadas de ordem menor ou iguais a n são contínuas no ponto $x = a$. Desta forma, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} r^{(k)}(x) = r^{(k)}(a) = 0,$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

Por outro lado, considerando a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = (x-a)^n$, tem-se que g é uma função polinomial de grau n centrada em $x = a$, logo a mesma é contínua em $x = a$ e n vezes derivável neste ponto, sendo estas derivadas contínuas em $x = a$.

Derivando sucessivamente a função g , obtem-se que a sua derivada de ordem k é dada por:

$$g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k},$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

Desta forma $\lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k} = 0$, para todo $0 \leq k \leq n$.

Portanto pode-se aplicar n vezes o Teorema 4.5 para calcular o limite do quociente dado, obtendo-se assim:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r'(x)}{\frac{n!}{(n-1)!} (x-a)^{(n-1)}} \stackrel{L'H}{=} \dots \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r^{(n)}(x)}{\frac{n!}{(n-n)!} (x-a)^{(n-n)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{r^{(n)}(x)}{n!} \stackrel{n \text{ vezes}}{=} \frac{r^{(n)}(a)}{n!} = \frac{0}{n!} = 0. \end{aligned}$$

Como era de interesse provar. □

Definição 5.4 (Funções Iguais até Ordem n). *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções, diz-se que f e g são iguais até ordem n no ponto $x = a$ se, e somente se:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Teorema 5.1 (Polinômios Iguais de Ordem n em a). *Sejam p e q dois polinômios de grau no máximo igual a n em $(x-a)$ e a um número real qualquer. Se as funções polinomiais $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são iguais até a ordem n em a , então $p = q$.*

Demonstração. Conforme as hipóteses do Teorema, os polinômios p e q são iguais até a ordem n em $x = a$, assim pela Definição 5.4, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - q(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Denotando o polinômio diferença entre p e q por r , tem-se que $r(x) = p(x) - q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Reescrevendo a igualdade acima, pode-se obter que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^k} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{r(x)}{(x - a)^n} (x - a)^{n-k} \right] = 0, \quad (46)$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

Por outro lado, observando o polinômio r em sua forma geral, pode-se perceber que: $r(x) = r_0 + r_1(x - a) + r_2(x - a)^2 + r_3(x - a)^3 + \dots + r_n(x - a)^n = \sum_{k=0}^n r_k(x - a)^k$, para todo $0 \leq k \leq n$, uma vez que p e q são dois polinômios em $(x - a)$.

Deve-se então mostrar que todos os coeficientes do polinômio r são nulos, isto é, tem-se de mostrar que: $r_k = 0$, para todo $0 \leq k \leq n$. Para tanto será analisada a igualdade (46) variando o valor de k de 0 a n .

Seguindo o princípio da indução finita será analisado inicialmente o caso em que $k = 0$.

Para $k = 0$, a igualdade (46) juntamente com a forma geral do polinômio r resultam em:

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^0} = \lim_{x \rightarrow a} r(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{k=0}^n r_k(x - a)^k \right) = r_0. \text{ De onde conclui-se que } r_0 = 0.$$

Conforme mostrado acima tem-se que $r_0 = 0$. Neste ponto pode-se supor por indução que $r_k = 0$, para todo $0 \leq k \leq n - 1$, assim basta mostrar que $r_n = 0$.

Pela igualdade (46), assim como a hipótese de indução tem-se que:

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{k=n}^n r_k(x - a)^{k-n} \right) = r_n. \text{ De onde conclui-se que } r_n = 0.$$

Portanto tem-se que todos os coeficientes do polinômio $r(x)$ são nulos e consequentemente $p = q$. \square

Teorema 5.2 (Teorema de Taylor). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$. Então a função Resto de Taylor*

$r_{n,a} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $r_{n,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x)$, onde $p_{n,a}(x)$ é o Polinômio de Taylor da função f , ou equivalentemente:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_{n,a}(x),$$

é tal que satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0$.

Reciprocamente, dado um polinômio p de grau no máximo igual a n tal que a função definida por $r(x) = f(x) - p(x)$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^n} = 0$, então este polinômio $p(x)$ é o Polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto $x = a$.

Demonstração. Inicialmente para demonstrar a primeira parte do teorema deve-se supor que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e n vezes derivável em um ponto $a \in I$ e mostrar que a função Resto de Taylor $r_{n,a} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $r_{n,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x)$, onde $p_{n,a}(x)$ é o Polinômio de Taylor da função f é tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0$.

Pelas Definições 5.1 e 5.3 do Polinômio de Taylor e da função Resto de Taylor definida como a diferença de uma função f e um polinômio, os quais são n -vezes deriváveis no ponto $x = a$ e com suas derivadas iguais neste ponto, isto é, $f^{(k)}(a) = p_{n,a}^{(k)}(a)$, para todo $0 \leq k \leq n$.

Desta forma tem-se que $r_{n,a}^{(k)}(a) = 0$, para todo $0 \leq k \leq n$. Assim pode-se aplicar a Proposição 5.2 e obter que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Para demonstrar a recíproca, deve-se considerar que p seja um polinômio qualquer de grau $\leq n$, tal que a função diferença definida por $r(x) = f(x) - p(x)$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x - a)^n} = 0$. Assim basta mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se que $p(x) = p_{n,a}(x)$, onde $p_{n,a}(x)$ é o Polinômio de Taylor de grau n centrado em $x = a$ da função f . Conforme hipótese, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} = 0. \quad (47)$$

Aplicando a Proposição 5.2 ao Resto de Taylor, tem-se que:

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n}. \quad (48)$$

Como os polinômios p e $p_{n,a}$ são definidos em $(x - a)$ e possuem grau no máximo igual a n , pelo Teorema 5.1, basta provar que os mesmos são iguais até a ordem n em $x = a$, isto é, mostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0. \quad (49)$$

Com efeito somando e subtraindo a parcela $f(x)$ na parte esquerda da igualdade acima e manipulando algebricamente, tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n} - \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n}. \end{aligned}$$

Substituindo as igualdades obtidas nas equações (47) e (48) na igualdade acima, tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x - a)^n} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} = 0 - 0 = 0$$

Portanto os polinômios p e $p_{n,a}$ são iguais até a ordem n e conseqüentemente $p = p_{n,a}$, isto é o polinômio p é o próprio Polinômio de Taylor de grau n da função f . Como era de interesse provar. \square

5.2 Estimativa para a Função Resto de Taylor

Conforme a Definição 5.3, tem-se que a função Resto de Taylor é determinada por $r_{n,a}(x) = f(x) - p_{n,a}(x)$, por outro lado o Teorema 5.2 torna possível estimar o limite da função Resto de Taylor quando x tende para a . Porém o mesmo não possibilita a determinação do valor numérico de $r_{n,a}(x)$ para uma função f de ordem n , estimado no ponto $x = a$.

A seguir será apresentado um resultado que utiliza hipóteses mais fortes do que as utilizadas no Teorema de Taylor 5.2. Esse novo resultado, juntamente com o Teorema do Valor Médio é de grande valia quando deseja-se obter estimativas para o valor de $r_{n,a}(x)$.

O Teorema 5.3 que será visto a seguir apresenta uma forma explícita para a função Resto de Taylor e garante estimar este resto para todo ponto b pertencente ao domínio

da função, desde que a função seja $n + 1$ vezes derivável no intervalo aberto (a, b) e que as funções derivadas de ordem menor ou igual a n sejam contínuas no intervalo fechado $[a, b]$.

Teorema 5.3 (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, $(n + 1)$ vezes derivável no intervalo aberto (a, b) , com suas funções derivada $f^{(i)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, para todo $0 \leq i \leq n$, então existe um $c \in (a, b)$ tal que:*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2}(b - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + r_{n,a}(b), \quad (50)$$

onde
$$r_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{(n+1)}. \quad (51)$$

Demonstração. Definindo a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com lei de formação dada por:

$$g(x) = f(b) - \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k \right) - \frac{M}{(n + 1)!}(b - x)^{n+1},$$

onde a constante M é escolhida de forma que $g(a) = 0$.

Pela hipótese do Teorema, tem-se que a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $(n + 1)$ vezes derivável no intervalo aberto (a, b) , logo a função g será contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) .

Analisando o valor da função g nos extremos deste domínio, tem-se que $g(a) = g(b) = 0$, visto que a constante M será escolhida de forma que $g(a) = 0$ e calculando $g(b)$, pode-se facilmente obter que $g(b) = 0$.

Por outro lado aplicando as regras do produto e da cadeia para derivação, chega-se a derivada da função g no intervalo (a, b) , a qual é dada por:

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(b) - f(x) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k \right) - \frac{M}{(n+1)!} (b-x)^{n+1} \implies \\
g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \right) + \frac{M}{n!} (b-x)^n = \\
&= -f'(x) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \right) + \frac{M}{n!} (b-x)^n = \\
&= -f'(x) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \right) + \frac{M}{n!} (b-x)^n = \\
&= \left(\sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k \right) + \frac{M}{n!} (b-x)^n.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $j = k - 1$ no primeiro somatório, e reorganizando o segundo tem-se que:

$$g'(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x)}{j!} (b-x)^j - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + \frac{M}{n!} (b-x)^n.$$

Desta forma, como ambos os somatórios são iguais, tem-se que a derivada da função $g(x)$ é dada por:

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + \frac{M}{n!} (b-x)^n.$$

Aplicando o Teorema de Rolle à função $g(x)$, tem-se que existe um $c \in (a, b)$, tal que $g'(c) = 0$. Assim, substituindo c na igualdade acima, tem-se que:

$$0 = g'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n + \frac{M}{n!} (b-c)^n \iff \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n = \frac{M}{n!} (b-c)^n.$$

Como $b \neq c$, a última equação determina que o valor de M seja da forma $M = f^{(n+1)}(c)$. Substituindo este valor em $g(x)$ e calculando $g(a)$ chega-se a:

$$\begin{aligned}
0 = g(a) &= f(b) - \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \iff \\
f(b) &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ou equivalentemente: $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + r_{n,a}(b)$, onde $r_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$. □

Definição 5.5 (Resto de Lagrange para a Fórmula de Taylor). *A equação (51) descrita por:*

$$r_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{(n+1)},$$

que encontra-se apresentada no Teorema 5.3 é denominada forma de Lagrange para o Resto de Taylor.

Cabe também ressaltar que além da forma de Lagrange para o Resto de Taylor existem outras formas, tais como a forma de Cauchy e a forma integral do resto, as quais não serão discutidas neste trabalho, visto que as mesmas não serão necessárias na determinação dos resultados aqui desejados.

Conforme foi visto o Polinômio de Taylor e o Resto de Lagrange são duas ferramentas matemáticas consistentes, as quais serão utilizadas para a resolução tanto do problema inicial de determinar os valores da função seno, assim como apresentar uma análise da consistência na resolução do problema do pêndulo ao considerar-se que $\text{sen}(\theta) \approx \theta$.

Observação: Ao tratar-se de funções que sejam infinitamente deriváveis pode-se expandir o Polinômio de Taylor, de forma que a ordem do mesmo seja tão grande quando necessário. Desta forma é possível representar estas funções através da Série de Taylor.

Definição 5.6 (Série de Taylor). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e infinitamente derivável em um ponto $a \in I$. Define-se a série infinita denominada Série de Taylor da função f no ponto a da seguinte forma:*

$$S_T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i. \quad (52)$$

Cabe ressaltar que a Série de Taylor definida no ponto $a = 0$ restringe-se a seguinte relação:

$$S_T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

a qual também é conhecida como Série de Maclaurin.

Em particular, para a função $f(x) = \text{sen}(x)$, tem-se que $\|r_{n,a}\| \leq \frac{\|(b-a)^{n-1}\|}{(n-1)!}$ tende a 0 quando n tende para o infinito, para qualquer que seja o intervalo dado.

Assim pode-se representar a função $\text{sen}(x)$ como sendo a sua própria Série de Taylor. Dessa forma em uma vizinhança de $x = 0$, a mesma pode ser expressa por:

$$\text{sen}(x) = S_T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{(2j+1)}.$$

6 Determinando as Aproximações

Nesta seção será utilizada a teoria de Taylor vista na seção 5, com o objetivo de encontrar um polinômio que determine um valor aproximado da função $\text{sen}(x)$ para $x \in [0, \pi/2]$, assim como determinar uma estimativa do erro gerado por esta aproximação. Para maiores detalhes veja [4].

Além da aproximação polinomial, também será de interesse desta seção analisar o erro ao aproximar-se $\text{sen}(x) \approx x$, utilizada na resolução do problema do pêndulo.

6.1 Polinômio de Taylor da Função Seno

A seguir será apresentada a dedução do Polinômio de Taylor para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$, restrita a uma vizinhança do ponto $x = 0$.

Considerando a função $f(x) = \text{sen}(x)$, através da teoria de derivação, pode-se facilmente obter que:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) = \text{sen}(x) &= f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = \dots = f^{(4n)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ f^{(1)}(x) = \cos(x) &= f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = \dots = f^{(4n+1)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ f^{(2)}(x) = -\text{sen}(x) &= f^{(6)}(x) = f^{(10)}(x) = \dots = f^{(4n+2)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ f^{(3)}(x) = -\cos(x) &= f^{(7)}(x) = f^{(11)}(x) = \dots = f^{(4n+3)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a função $f(x) = \text{sen}(x)$ é infinitamente derivável em todo seu domínio, visto que a dedução acima foi realizada com base em um valor qualquer de x .

Como os Polinômios de Taylor aqui construídos serão em torno do ponto $x = 0$, pelas definições da seção (5), deve-se obter as derivadas desta função avaliadas em $x = 0$. Assim substituindo $x = 0$ nas derivadas obtidas acima, tem-se que:

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(0) = \text{sen}(0) = 0, \quad f^{(4n+1)}(0) = \cos(0) = 1, \quad f^{(4n+2)}(0) = -\text{sen}(0) = 0, \\ f^{(4n+3)}(0) = -\cos(0) = -1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Conforme as igualdades acima, pode-se perceber que todas as derivadas de ordem ímpar da função $f(x) = \text{sen}(x)$ avaliadas em $x = 0$ se anulam. Por outro lado as derivadas de ordem par avaliadas no mesmo ponto resultam em -1 e 1 .

Dessa forma pode-se generalizar o resultado das derivadas desta função em $x = 0$ através das seguintes relações:

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad (53)$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1}, \quad (54)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando as relações (53) e (54) na Definição 5.2 do Polinômio de Taylor, pode-se perceber que os polinômios de grau $n = 2j + 1$ (ímpar) e $n + 1 = 2j + 2$ (par), para todo $j \in \mathbb{N}$ estimados em uma vizinhança próxima ao ponto $x = 0$ são iguais, visto que:

$$p_{2j+2,0}(x) = p_{2j+1,0}(x) + \frac{f^{(2j+2)}(0)}{(2j+2)!}(x)^{2j+2} = p_{2j+1,0}(x),$$

pois $\frac{f^{(2j+2)}(0)}{(2j+2)!}(x)^{2j+2} = 0$, devido a $\frac{f^{(2j+2)}(0)}{(2j+2)!} = 0$.

Dessa forma os Polinômios de Taylor de graus $n = 2j + 1$ e $n + 1 = 2j + 2$ avaliados em uma vizinhança do ponto $a = 0$, podem ser expressos por:

$$p_{2j+1,0}(x) = p_{2j+2,0}(x) = \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}(x)^{2i+1}, \quad (55)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Logo pode-se adequar o Polinômio de Taylor para a função $f(x) = \text{sen}(x)$, estimada em uma vizinhança próxima de $x_0 = 0$ e adotando uma expansão com $n = 2j + 1$ ou $n = 2j + 2$ com $j, n \in \mathbb{N}$.

Variando o valor de j na equação(55), pode-se facilmente obter que para algum $c_i \in (0, x) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, com $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} p_{1,0}(x) = p_{2,0}(x) = x \text{ e } r_{2,0}(x) &= -\frac{\cos(c_1).x^3}{6}, \\ p_{3,0}(x) = p_{4,0}(x) = x - \frac{x^3}{6} \text{ e } r_{4,0}(x) &= \frac{\cos(c_2).x^5}{120}, \\ p_{5,0}(x) = p_{6,0}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ e } r_{6,0}(x) &= -\frac{\cos(c_3).x^7}{5040}. \end{aligned}$$

A Figura 9 foi elaborada com o intuito de ilustrar as aproximações polinomiais de Taylor. Na mesma foram plotados os gráficos da função $f(x) = \text{sen}(x)$, assim como dos Polinômios de Taylor de Grau 2, 4 e 6, definidos em uma vizinhança do ponto $a = 0$.

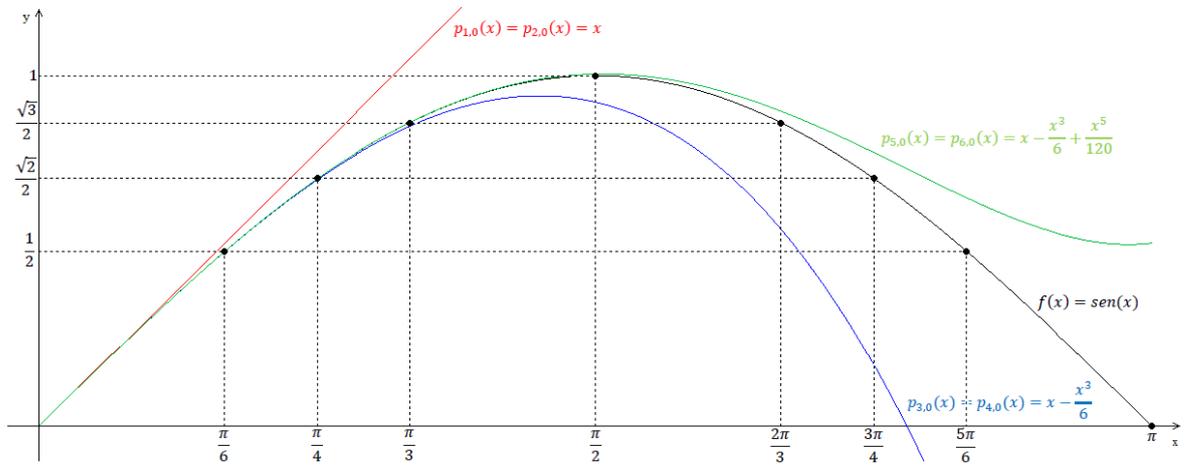


Figura 9: Gráfico da função $f(x) = \sin(x)$ e dos Polinômios de Taylor $p_{2,0}$, $p_{4,0}$ e $p_{6,0}$ dessa função, avaliados para todo $x \in [0, \pi]$.

Como para todo $c \in (0, x) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, tem-se que $\|\cos(c)\| \leq 1$, então o valor estimado para o erro da aproximação polinomial, $p_{2j+2,0}(x) \approx \sin(x)$ estará limitado da seguinte forma:

$$\|E\| = \|r_{2j+2,0}(x)\| = \left\| (-1)^{j+1} \frac{\cos(c) \cdot x^{2j+3}}{(2j+3)!} \right\| \leq \frac{x^{2j+3}}{(2j+3)!}.$$

Logo é possível aproximar os valores da função $f(x) = \sin(x)$ para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ através do Polinômio de Taylor de grau $n = 2j + 2$, conforme a dedução acima e obter-se que:

$$p_{2j+1,0}(x) = p_{2j+2,0}(x) = \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{2k+1!} (x)^{2k+1},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Sendo que esse apresentará um erro estimado em:

$$E = r_{2j+2,0}(x) = (-1)^{j+1} \frac{\cos(c) \cdot x^{2j+3}}{(2j+3)!},$$

para algum $c \in (0, x) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

6.2 Análise do erro no problema do Pêndulo

Na resolução do problema do pêndulo, tratado na seção (3), para otimizar os cálculos, foi utilizada uma aproximação muito comum aos vários ramos da engenharia, a qual considera que $\sin(x) \approx x$.

Conforme visto na seção (5), esta prática baseia-se em considerar a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ como sendo aproximadamente o Polinômio de Taylor de grau 2 em uma vizinhança do ponto $x = 0$.

Tomando $j = 0$ e adequando a equação (55), tem-se que o Polinômio de Taylor de ordem 2 em uma vizinhança do ponto $x = 0$ é da forma $p_{2,0}(x) = x$ e que seu resto na forma de Lagrange é expresso por $r_{2,0}(x) = -\frac{\cos(c).x^3}{6}$, para algum $c \in (-\|x\|, \|x\|)$.

Conforme o Teorema de Taylor 5.3, tem-se que $f(x) = p_{n,a}(x) + r_{n,a}(x)$, assim para cada x , existe um $c \in (-\|x\|, \|x\|)$, tal que a função $f(x) = \text{sen}(x)$ pode ser escrita através da seguinte igualdade:

$$\text{sen}(x) = p_{2,0}(x) + r_{2,0}(x) = x - \frac{\cos(c).x^3}{6}.$$

Logo, ao considerar-se que $\text{sen}(x) \approx x$, está sendo inserido no problema um erro relativo a diferença entre o valor real da função e a aproximação utilizada. O valor desse erro aumenta conforme o ponto x afasta-se de 0 e o mesmo é dado por:

$$E = r_{2,0}(x) = -\frac{\cos(c).x^3}{6},$$

para algum $c \in (-\|x\|, \|x\|)$.

Portanto a aproximação utilizada no problema irá gerar uma diferença entre os valores determinados pela equação (19) em relação aos que realmente ocorreram durante o deslocamento do pêndulo.

Na literatura, relativa ao estudo do comportamento desse tipo de pêndulo, muitos autores defendem uma tolerância máxima de $10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{rad}$ para a variação do ângulo de movimentação.

Assim, considerando que a variação desse ângulo respeite a limitação dada por $\|x\| \leq \frac{\pi}{18}$, o erro ocasionado pela aproximação utilizada será limitado da seguinte forma:

$$\|E\| = \|r_{2,0}(x)\| = \left\| -\frac{\cos(c).x^3}{6} \right\| \leq \left\| \frac{x^3}{6} \right\| \leq \left\| \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{6} \right\| = \frac{\pi^3}{34992}.$$

Como $\frac{\pi^3}{34992} \approx 0,000886 < 0,001 = 10^{-3}$, tem-se que o erro gerado pela aproximação utilizada, considerando-se uma variação máxima de $10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{rad}$ será inferior a 10^{-3} .

Portanto a aproximação utilizada pode ser aplicada, desde que seja feita uma análise muito aprimorada quanto à tolerância do movimento do pêndulo que será aceita, assim como o limite dos erros que serão gerados.

7 Aplicação das Aproximações Polinomiais

Nesta seção será apresentada uma sugestão de atividade que pode ser realizada em sala de aula a fim de aplicar as teorias apresentadas nas seções anteriores. Para maiores detalhes veja [2] e [4].

Essa atividade foi elaborada partindo de uma aproximação da função $f(x) = \text{sen}(x)$, a qual irá utilizar o Polinômio de Taylor de ordem 6 definido em uma vizinhança do ponto $a = 0$, para valores de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Conforme foi visto na seção 6, o Polinômio de Taylor de ordem 6 é dado por:

$$p_{5,0}(x) = p_{6,0}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

onde seu resto na forma de Lagrange é obtido através da relação $r_{6,0}(x) = -\frac{\cos(c).x^7}{5040}$, para algum $c \in (0, x) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Essa aproximação foi escolhida, visto que no intervalo dado a mesma apresentará um erro limitado podendo o mesmo ser mensurado, uma vez que para todo $c \in (0, \frac{\pi}{2})$, tem-se que $-1 \leq -\cos(c) \leq 0$.

Logo o valor estimado para o erro da aproximação polinomial utilizada estará compreendido entre $-\frac{\pi^7}{5040.2^7}$ e 0. Como $\frac{\pi^7}{5040.2^7} \approx 0,00468$ tem-se que $\|E\| \leq 0,00468$, de onde é possível estimar que os valores obtidos dessa forma apresentarão uma precisão de pelo menos duas casas decimais.

7.1 Atividade Prática Relacionada a Função Seno e sua Aproximação Polinomial

Esta atividade foi elaborada para ser desenvolvida em uma turma do primeiro ano do ensino médio. Durante a mesma será apresentado um método simples e eficaz para determinar uma aproximação do valor numérico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.

Inicia-se a atividade apresentando um polinômio supostamente mágico $P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, o qual possui o poder de calcular o valor aproximado da função $f(x) = \text{sen}(x)$ para qualquer ângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Como esse polinômio possibilita uma aproximação da referida função para qualquer ângulo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tem-se na verdade a possibilidade de obter-se o valor aproximado

do seno de qualquer ângulo, basta utilizar-se esta teoria juntamente com a técnica da redução ao primeiro quadrante.

Após iniciada a aula, apresenta-se aos alunos o polinômio $P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, explicando aos mesmos que essa expressão algébrica será utilizada para obtermos o valor aproximado da função seno.

Para facilitar e organizar os cálculos será utilizada a seguinte tabela, juntamente com o algoritmo descrito na seção 7.2.

Grau(θ)	Radianos(x)	x	x^3	$\frac{x^3}{6}$	x^5	$\frac{x^5}{120}$	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

7.2 Algoritmo para a Determinação da Aproximação Polinomial da Função Seno

A seguir será apresentado um algoritmo (descrição) elaborado com o intuito de nortear a atividade a ser desenvolvida em sala de aula.

- 1) Escolha um ângulo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ e escreva na tabela, na coluna dos Graus.
- 2) Transforme este ângulo de Graus para Radianos, denote-o como x e escreva na tabela, na coluna dos Radianos. Utilizar uma aproximação (arredondamento) de três casas decimais.
- 3) Escreva o valor de x obtido no item 2) na tabela, na coluna x . Mantenha a mesma aproximação (arredondamento) de três casas decimais.
- 4) Calcule, utilizando sua calculadora, o valor de x^3 partindo do valor encontrado no item 3) e escreva na tabela, na coluna x^3 . Utilizar uma aproximação (arredondamento) de três casas decimais.
- 5) Calcule, utilizando sua calculadora, o valor de x^5 partindo do valor encontrado nos itens 3) e 4) e escreva na tabela, na coluna x^5 . Utilizar uma aproximação (arredondamento) de três casas decimais.
- 6) Calcule, utilizando sua calculadora, o valor de $\frac{x^3}{6}$ partindo do valor encontrado no item 4) e escreva na tabela, na coluna $\frac{x^3}{6}$. Utilizar uma aproximação (arredondamento) de três casas decimais.
- 7) Calcule, utilizando sua calculadora, o valor de $\frac{x^5}{120}$ partindo do valor encontrado no item 4) e escreva na tabela, na coluna $\frac{x^5}{120}$. Utilizar uma aproximação (arredondamento)

de três casas decimais.

8) Calcule, utilizando sua calculadora, o valor de $P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ partindo dos valores encontrados nos itens 3), 6) e 7) e escreva na tabela, na coluna $P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. Utilizar uma aproximação (arredondamento) de três casas decimais.

Deve-se observar que o professor ao utilizar esta aproximação polinomial da função seno, deve frizar aos alunos que este cálculo irá resultar em um valor próximo ao valor real, mas que o mesmo apresenta uma pequena diferença em relação ao valor real, visto que trata-se de uma aproximação polinomial e que foram realizados inúmeros arredondamentos durante o processo, gerando assim uma diferença.

7.3 Exemplo Prático Relacionado a Função Seno

Solicite a um aluno que escolha um ângulo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Supondo sem perda de generalidade que o mesmo escolha o ângulo $\theta = 38^\circ$. Preencha a tabela conforme abaixo:

Grau (θ)	Radianos(x)	x	x^3	$\frac{x^3}{6}$	x^5	$\frac{x^5}{120}$	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
38°							

Converta o ângulo dado para radianos utilizando a seguinte expressão: $x = \frac{\theta \times \pi}{180^\circ}$. Assim como $\theta = 38^\circ$ e utilizando $\pi = 3,142$, tem-se que:

$$x = \frac{38^\circ \times \pi}{180^\circ} \approx 0,663311111 \approx 0,663.$$

Preencha a tabela conforme abaixo:

Grau (θ)	Radianos(x)	x	x^3	$\frac{x^3}{6}$	x^5	$\frac{x^5}{120}$	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
38°	0,663						

A partir deste ponto pode-se solicitar que seja preenchido o restante da tabela, desde que observado que todas as aproximações (arredondamentos) deverão ser feitas com três casas decimais.

Após os alunos completarem o preenchimento da tabela dada, espera-se que os mesmos obtenham o seguinte resultado:

Grau (θ)	Radianos(x)	x	x^3	$\frac{x^3}{6}$	x^5	$\frac{x^5}{120}$	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
38°	0,663	0,663	0,291	0,049	0,122	0,001	0,615

Vale ressaltar que utilizando um computador ou uma calculadora científica, pode-se encontrar o valor $\text{sen}(38^\circ) \approx 0,615661475$, mostrando assim que o método utilizado foi eficiente na aproximação obtida.

7.4 Exercício Proposto para Assimilação da Atividade Relacionada à Função Seno

Solicitar aos alunos que elaborem uma tabela completa com todos os ângulos inteiros $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, utilizando a tabela abaixo como modelo:

Grau (θ)	Radianos(x)	x	x^3	x^5	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = \text{sen}(x)$
0°						
1°						
2°						
3°						
\vdots						
89°						
90°						

Observando que a última coluna será obtida utilizando-se uma calculadora científica ou mesmo um computador que possibilite obter-se os valores aproximados da função seno.

Resultado esperado para a tabela a ser elaborada pelos alunos com $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

Grau	Radianos(θ)	x	x^3	x^5	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = \text{sen}(x)$
0°	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1°	0,017	0,017	0,000	0,000	0,017	0,017
2°	0,035	0,035	0,000	0,000	0,035	0,035
3°	0,052	0,052	0,000	0,000	0,052	0,052
4°	0,070	0,070	0,000	0,000	0,070	0,070
5°	0,087	0,087	0,001	0,000	0,087	0,087
6°	0,105	0,105	0,001	0,000	0,105	0,105
7°	0,122	0,122	0,002	0,000	0,122	0,122
8°	0,140	0,140	0,003	0,000	0,139	0,139
9°	0,157	0,157	0,004	0,000	0,156	0,156
10°	0,175	0,175	0,005	0,000	0,174	0,174
11°	0,192	0,192	0,007	0,000	0,191	0,191
12°	0,209	0,209	0,009	0,000	0,208	0,208
13°	0,227	0,227	0,012	0,001	0,225	0,225
14°	0,244	0,244	0,015	0,001	0,242	0,242
15°	0,262	0,262	0,018	0,001	0,259	0,259
16°	0,279	0,279	0,022	0,002	0,276	0,276
17°	0,297	0,297	0,026	0,002	0,292	0,292
18°	0,314	0,314	0,031	0,003	0,309	0,309
19°	0,332	0,332	0,036	0,004	0,326	0,326
20°	0,349	0,349	0,043	0,005	0,342	0,342
21°	0,367	0,367	0,049	0,007	0,358	0,358
22°	0,384	0,384	0,057	0,008	0,375	0,375
23°	0,401	0,401	0,065	0,010	0,391	0,391
24°	0,419	0,419	0,073	0,013	0,407	0,407
25°	0,436	0,436	0,083	0,016	0,423	0,423
26°	0,454	0,454	0,093	0,019	0,438	0,438
27°	0,471	0,471	0,105	0,023	0,454	0,454
28°	0,489	0,489	0,117	0,028	0,469	0,469
29°	0,506	0,506	0,130	0,033	0,485	0,485
30°	0,524	0,524	0,144	0,039	0,500	0,500

Tabela 3: Tabela da aproximação de $\text{sen}(\theta)$, para $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

A Tabela 3 apresenta os resultados esperados ao aproximar-se a relação $\text{sen}(x)$ através do Polinômio de Taylor de ordem 6, em uma vizinhança do ponto $a = 0$, isto é, considerar $\text{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Considerando que o ângulo θ seja inteiro e calculado em graus, tem-se que para a Tabela 3, $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$. Fazendo a transformação desses ângulos de graus para radianos, obtêm-se que $x = \frac{\theta \cdot \pi}{180} \text{rad}$, assim $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Por outro lado, o erro de cada relação $\text{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, gerado por esta estimativa estará vinculado a um valor $c \in (0, \frac{\pi}{6})$, sendo o mesmo dado por $\|E(x)\| = \|r_{6,0}(x)\| = \frac{\cos(c) \cdot x^7}{5040}$. Dessa forma $\|E(x)\| \leq \|E(\frac{\pi}{6})\| = \frac{\pi^7}{5040 \cdot 6^7} \approx 0,00000214 < 10^{-5}$.

Portanto para a Tabela 3, tem-se que $\|E(x)\| \leq 10^{-5}$.

Resultado esperado para a tabela a ser elaborada pelos alunos com $31^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$.

Grau	Radianos(θ)	x	x^3	x^5	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = \text{sen}(x)$
31°	0,541	0,541	0,158	0,046	0,515	0,515
32°	0,559	0,559	0,174	0,054	0,530	0,530
33°	0,576	0,576	0,191	0,063	0,545	0,545
34°	0,593	0,593	0,209	0,074	0,559	0,559
35°	0,611	0,611	0,228	0,085	0,574	0,574
36°	0,628	0,628	0,248	0,098	0,588	0,588
37°	0,646	0,646	0,269	0,112	0,602	0,602
38°	0,663	0,663	0,292	0,128	0,616	0,616
39°	0,681	0,681	0,315	0,146	0,629	0,629
40°	0,698	0,698	0,340	0,166	0,643	0,643
41°	0,716	0,716	0,366	0,188	0,656	0,656
42°	0,733	0,733	0,394	0,212	0,669	0,669
43°	0,750	0,750	0,423	0,238	0,682	0,682
44°	0,768	0,768	0,453	0,267	0,695	0,695
45°	0,785	0,785	0,484	0,299	0,707	0,707
46°	0,803	0,803	0,517	0,334	0,719	0,719
47°	0,820	0,820	0,552	0,371	0,731	0,731
48°	0,838	0,838	0,588	0,413	0,743	0,743
49°	0,855	0,855	0,625	0,457	0,755	0,755
50°	0,873	0,873	0,665	0,506	0,766	0,766
51°	0,890	0,890	0,705	0,559	0,777	0,777
52°	0,908	0,908	0,748	0,616	0,788	0,788
53°	0,925	0,950	0,792	0,677	0,799	0,799
54°	0,942	0,942	0,837	0,744	0,809	0,809
55°	0,960	0,960	0,885	0,815	0,819	0,819
56°	0,977	0,977	0,934	0,892	0,829	0,829
57°	0,995	0,995	0,985	0,974	0,839	0,839
58°	1,012	1,012	1,037	1,063	0,848	0,848
59°	1,030	1,030	1,092	1,158	0,857	0,857
60°	1,047	1,047	1,148	1,259	0,866	0,866

Tabela 4: Tabela da aproximação de $\text{sen}(\theta)$, para $31^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$.

A Tabela 4 apresenta os resultados esperados ao utilizar-se a aproximação $\text{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Considerando que o ângulo θ seja inteiro e calculado em graus, tem-se que para a Tabela 4, $30^\circ < \theta \leq 60^\circ$. Fazendo a transformação desses ângulos de graus para radianos, obtêm-se que $x = \frac{\theta \cdot \pi}{180} \text{rad}$, assim $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$.

Por outro lado, o erro de cada relação $\text{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, gerado por esta estimativa estará vinculado a um valor $c \in (0, \frac{\pi}{3})$, sendo o mesmo dado por $\|E(x)\| = \|r_{6,0}(x)\| = \frac{\cos(c) \cdot x^7}{5040}$. Dessa forma $\|E(x)\| \leq \|E(\frac{\pi}{3})\| = \frac{\pi^7}{5040 \cdot 3^7} \approx 0,000274012 < 10^{-3}$.

Portanto para a Tabela 4, tem-se que $\|E(x)\| \leq 10^{-3}$.

Resultado esperado para a tabela a ser elaborada pelos alunos com $61^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Grau	Radianos(θ)	x	x^3	x^5	$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$	$f(x) = \text{sen}(x)$
61°	1,065	1,065	1,207	1,368	0,875	0,875
62°	1,082	1,082	1,267	1,484	0,883	0,883
63°	1,100	1,100	1,329	1,607	0,891	0,891
64°	1,117	1,117	1,394	1,739	0,899	0,899
65°	1,134	1,134	1,460	1,879	0,907	0,906
66°	1,152	1,152	1,528	2,028	0,914	0,914
67°	1,169	1,169	1,599	2,187	0,921	0,921
68°	1,187	1,187	1,672	2,355	0,928	0,927
69°	1,204	1,204	1,747	2,533	0,934	0,934
70°	1,222	1,222	1,824	2,722	0,940	0,940
71°	1,239	1,239	1,903	2,922	0,946	0,946
72°	1,257	1,257	1,984	3,134	0,952	0,951
73°	1,274	1,274	2,068	3,357	0,957	0,956
74°	1,292	1,292	2,154	3,594	0,962	0,961
75°	1,309	1,309	2,243	3,843	0,967	0,966
76°	1,326	1,326	2,334	4,106	0,972	0,970
77°	1,344	1,344	2,427	4,384	0,976	0,974
78°	1,361	1,361	2,523	4,676	0,980	0,978
79°	1,379	1,379	2,621	4,983	0,983	0,982
80°	1,396	1,396	2,722	5,307	0,987	0,985
81°	1,414	1,414	2,825	5,647	0,990	0,988
82°	1,431	1,431	2,931	6,004	0,993	0,990
83°	1,449	1,449	3,040	6,379	0,995	0,993
84°	1,466	1,466	3,151	6,773	0,997	0,995
85°	1,484	1,484	3,265	7,186	0,999	0,996
86°	1,501	1,501	3,382	7,619	1,001	0,998
87°	1,518	1,518	3,501	8,072	1,002	0,999
88°	1,536	1,536	3,623	8,547	1,003	0,999
89°	1,553	1,553	3,748	9,044	1,004	1,000
90°	1,571	1,571	3,876	9,563	1,005	1,000

Tabela 5: Tabela da aproximação de $\text{sen}(\theta)$, para $61^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

A Tabela 5 apresenta os resultados esperados ao utilizar-se a aproximação $\text{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Considerando que o ângulo θ seja inteiro e calculado em graus, tem-se que para a Tabela 5, $60^\circ < \theta \leq 90^\circ$. Fazendo a transformação desses ângulos de graus para radianos, obtêm-se que $x = \frac{\theta \cdot \pi}{180} \text{rad}$, assim $\frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Por outro lado, o erro de cada relação $\text{sen}(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, gerado por esta estimativa estará vinculado a um valor $c \in (0, \frac{\pi}{2})$, sendo o mesmo dado por $\|E(x)\| = \|r_{6,0}(x)\| = \frac{\cos(c) \cdot x^7}{5040}$. Dessa forma $\|E(x)\| \leq \|E(\frac{\pi}{2})\| = \frac{\pi^7}{5040 \cdot 2^7} \approx 0,004681754 < 10^{-2}$.

Portanto para a Tabela 5, tem-se que $\|E(x)\| \leq 10^{-2}$.

8 A Equação do Calor

Nessa seção será estudado o problema da equação da transferência de calor ao longo de uma barra. Esse estudo tem como objetivo introduzir a importância do estudo das séries de Fourier. Para maiores detalhes veja [11].

Considerando os estudos matemáticos, relacionados aos fenômenos físicos que são tratados através das teorias do Cálculo Diferencial e Integral, desde o século XVIII o problema da condução de calor em uma barra, vem sendo estudado.

Utilizando as teorias do Cálculo Diferencial e Integral, veremos como chegar à conclusão de que a temperatura ao longo de uma barra em um ponto x e no instante t é uma função de duas variáveis $u(x, t)$, a qual possui derivadas parciais nas variáveis x e t , satisfazendo a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (56)$$

onde k é uma constante real relacionada ao tipo de material que compõe a barra.

A seguir será utilizado o método de Fourier para a obtenção de uma função de duas variáveis que satisfaça simultaneamente a Equação (56), assim como certas condições de valor inicial.

O método de resolução de Fourier que será utilizado consiste em duas fases. Na primeira etapa procura-se obter, através da separação das variáveis, um problema de autovalor, para as equações diferenciais ordinárias relacionadas às equações diferenciais parciais relativas ao problema.

Partindo da família de soluções encontradas na primeira etapa, inicia-se a segunda etapa a qual é basicamente a composição de uma solução para o problema inicial através de uma série cujos termos são produtos das soluções da etapa anterior por coeficientes adequados.

Para tornar possível o estudo em questão, será necessário realizar algumas considerações. Será considerado que o problema trata de uma barra cujo material, com o qual tenha sido feita, seja um condutor uniforme de calor, isto é, a temperatura flui de forma igual, em todos pontos dessa barra.

Após fazer as considerações relativas ao material com que foi feita essa barra, também é necessário determinar o formato da mesma. Quanto a forma da barra será considerado que esta possui comprimento L e que ao longo de seu comprimento todas as seções transversais possuem a mesma forma e conseqüentemente a mesma área A .

Por fim a última consideração é a de que essa barra possui um isolamento térmico em toda sua área lateral ao longo de seu comprimento, evitando assim a transferência de calor com o ambiente, a não ser em suas extremidades.

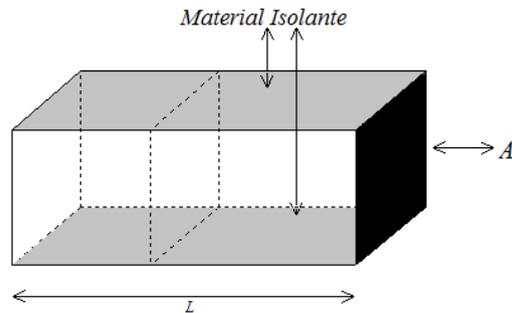


Figura 10: Barra com Secção Transversal.

Com as restrições feitas acima o estudo deste problema torna-se unidimensional, visto que a uniformidade do material, o isolamento térmico e as secções transversais implicam que a transferência do calor pela barra ocorra somente no sentido longitudinal do comprimento.

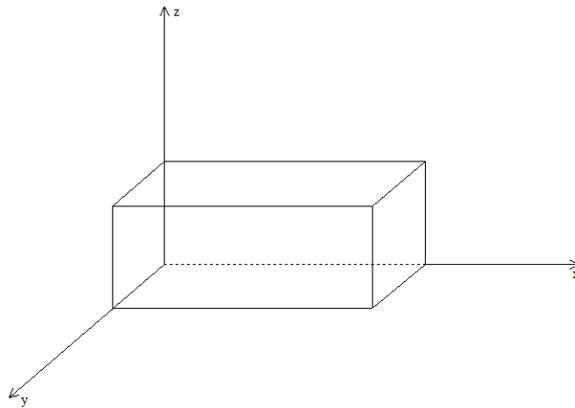


Figura 11: Barra nos Eixos Coordenados.

A lei física que rege a condução de calor é basicamente baseada nas observações experimentais de Jean-Baptiste Biot (1774-1862), porém na grande maioria das vezes é creditada a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), o qual foi o primeiro a utilizá-la de forma explícita.

Conhecida como Lei do Resfriamento de Fourier, essa lei afirma que o calor trocado através de condução, em uma determinada direção, é proporcional à área da secção normal (ortogonal) à direção e ao gradiente da temperatura relacionados a esta direção.

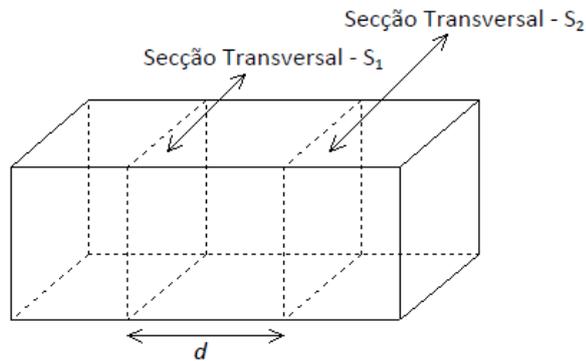


Figura 12: Barra com Secções Transversais S_1 e S_2 .

Em outras palavras, essa lei garante que considerando duas secções transversais S_1 e S_2 de uma barra, normais ao sentido do deslocamento desejado, possuindo áreas iguais a A , mantidas respectivamente às temperaturas constantes T_1 e T_2 e estando uma da outra a uma distância d , então haverá uma transferência de calor da placa (secção) mais quente para a mais fria.

A cada unidade de tempo a quantidade de calor transferido entre as secções respeita a seguinte equação:

$$Q = \frac{k \cdot A |T_2 - T_1|}{d}, \quad (57)$$

na qual Q representa a quantidade de calor transferido e k é um número real relacionado a condutividade térmica do material entre as secções.

Supondo que a barra seja colocada em um eixo coordenado, conforme a Figura 11, o comprimento longitudinal varia juntamente com a coordenada x . Assim é possível representar por $u(x, t)$ a temperatura da barra em um ponto de abcissa x , no instante de tempo t .

Tomando como base a representação da Figura 12 e considerando que as placas S_1 e S_2 estão ortogonalmente posicionadas respectivamente sobre os pontos de abcissa x e $x + d$, faz sentido discutir-se sobre a transferência de calor de uma placa para outra, desde que observados alguns detalhes.

Como as temperaturas das placas não são constantes, isto é, variam com o tempo,

não é possível aplicar diretamente a Lei de Fourier. Para adequar essa teoria ao problema em questão, faz-se necessário introduzir uma nova grandeza, a qual será denominada de fluxo de calor através de uma placa na posição x e no instante de tempo t . Esta grandeza será representada por $q(x, t)$.

Fixando o tempo na equação (57), torna-se possível considerar que as temperaturas nas placas S_1 e S_2 são dadas por $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + d, t)$, respectivamente. Logo essa equação pode ser expressa por:

$$Q = \frac{k.A|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d}. \quad (58)$$

Definindo o fluxo de calor na direção positiva do eixo coordenado x e tomando o limite quando d tende a zero, na equação (58), obtêm-se que:

$$q(x, t) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{k.A|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d} = -k.A \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (59)$$

Para facilitar o entendimento dos cálculos, que serão desenvolvidos a seguir, serão utilizadas as seguintes notações: $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$. Dessa forma a igualdade (59) pode ser reescrita por:

$$q(x, t) = -k.A.u_x(x, t). \quad (60)$$

O módulo apresentado na equação (59) foi substituído pelo sinal de menos na equação (60), visto que se a variável temperatura u cresce, quando ocorre um deslocamento x da esquerda para a direita, tem-se que $u_x > 0$, porém o fluxo de calor fluirá da direita para a esquerda (sentido contrário do deslocamento x), fazendo com que o $q(x, t)$ seja negativo.

Analogamente pode-se observar que se u decresce, quando ocorre um deslocamento x da esquerda para a direita, tem-se que $u_x < 0$, porém o fluxo de calor fluirá da esquerda para a direita (mesmo sentido do deslocamento x), fazendo com que o $q(x, t)$ seja positivo.

Para analisar a quantidade de calor q que passa por um elemento dessa barra, deve-se fazer algumas suposições. Supondo que o elemento esteja em uma seção localizada entre as posições x_0 e $(x_0 + \epsilon)$ e que o tempo irá variar de t_0 até $(t_0 + \phi)$, utilizando o fluxo de calor $q(x, t)$, juntamente com a igualdade (60), obtêm-se que:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\phi} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\phi} q(x_0 + \epsilon, t) dt = k.A \int_{t_0}^{t_0+\phi} [u_x(x_0 + \epsilon, t) - u_x(x_0, t)] dt. \quad (61)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se que a equação (61) pode ser reescrita por:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\phi} \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} k.A.u_{xx}(x,t) dx dt. \quad (62)$$

Conforme os estudos relacionados à transferência de calor em uma substância, tem-se que a constante, denominada calor específico c , é a quantidade de calor necessária para aumentar em um grau Celsius a temperatura dessa substância. Assim, considerando uma substância com densidade ρ , área A e constante de calor específico c , pode-se obter que:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+\phi} \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} c.\rho.A.u_t(x,t) dt. \quad (63)$$

Igualando as equações (62) e (63), obtêm-se:

$$\int_{t_0}^{t_0+\phi} \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} k.A.u_{xx}(x,t) dx dt = \int_{t_0}^{t_0+\phi} \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} c.\rho.A.u_t(x,t) dt. \quad (64)$$

Analisando a igualdade (64) e observando que a mesma é válida para todo $t_0 > 0$, $0 < x_0 < L$, $\phi > 0$ e $\epsilon > 0$, obtêm-se que $k.u_{xx}(x,t) = c.\rho.u_t(x,t)$. Fazendo $K = \frac{k}{c.\rho}$, tem-se que:

$$u_t(x,t) = K.u_{xx}(x,t). \quad (65)$$

A constante $K = \frac{k}{c.\rho}$ é denominada Difusibilidade Térmica. Cada substância possui uma difusibilidade térmica própria. A seguir será apresentada a Tabela 6, na qual são relacionadas algumas substâncias com suas respectivas difusibilidades térmicas (K).

Material	$K(cm^2/s)$	Material	$K(cm^2/s)$
Prata	1,71	Ferro Fundido	0,12
Cobre	1,14	Argila	0,0038
Alumínio	0,86	Água	0,00144

Tabela 6: Tabela com a Difusibilidade Térmica (K) de Algumas Substâncias.

A equação (65) é denominada Equação do calor, sendo a mesma a lei que rege a variação de temperatura $u(x,t)$ em uma barra, conforme as hipóteses feitas para a obtenção da Figura 10.

Neste ponto deve-se observar que para obter a Equação do Calor foi feita a hipótese de que a temperatura é uma função de duas variáveis denotada por $u(x,t)$, para a qual

as derivadas parciais de até segunda ordem existem e são contínuas em uma região do plano (x, t) com $t > 0$ e $0 < x < L$.

Analisando a equação diferencial parcial (65), pode-se verificar que a mesma apresenta inúmeras soluções. Para chegar-se a real solução da mesma é necessário analisar o problema, a fim de obter-se valores que possam determinar as ditas condições de fronteira.

Para determinar os valores de fronteira desta equação, deve-se inicialmente considerar que no tempo inicial de medição das temperaturas, cada placa da barra em estudo possui uma temperatura inicial constante para todos os seus pontos.

Assim, a temperatura nos pontos de cada placa no instante $t = 0$ pode ser expressa como uma função unidimensional que irá depender única e exclusivamente de sua posição na barra. Dessa forma pode-se considerar que:

$$u(x, 0) = f(x),$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real que a cada ponto x em que se localiza a secção transversal será relacionada a temperatura desta placa no instante $t = 0$.

Além de analisar a temperatura das seções transversais no instante $t = 0$, deve-se também analisar a situação das extremidades desta placa. Explorando exaustivamente todas as possibilidades, pode-se perceber que existiram exatamente 4 casos a saber:

- 1ª Possibilidade : As temperaturas das extremidades são mantidas constantes.
- 2ª Possibilidade : As extremidades estão termicamente isoladas, isto é, os fluxos de calor através de $x = 0$ e $x = L$ são nulos.
- 3ª Possibilidade : Existe transferência de calor entre as extremidades e o meio ambiente, o qual está a uma temperatura constante u_0 .
- 4ª Possibilidade : Ocorre uma combinação de duas das possibilidades anteriores.

Devido a esse problema ser meramente ilustrativo, a seguir será tratado apenas o caso relatado na 1ª possibilidade.

Supondo que as extremidades da barra sejam mantidas constantes com T_1 , sendo a temperatura na extremidade em que $x = 0$ e T_2 , sendo a temperatura na extremidade em que $x = L$. Dessa forma, tem-se que:

$$u(0, t) = T_1 \quad \text{e} \quad u(L, t) = T_2. \quad (66)$$

Poderia também ser considerado que se conhece a variação da temperatura nas extremidades, isto é, existem as funções $T_1(t)$ e $T_2(t)$ para $t \geq 0$, as quais estimam as temperaturas nas extremidades da barra em $x = 0$ e $x = L$, respectivamente.

8.1 Formulação Matemática do Problema

Considerando as hipóteses do problema da condução de calor sobre uma barra, que foram feitas na seção (8), assim como o caso retratado na primeira possibilidade de valores de contorno, a seguir será formulado matematicamente este problema.

Seja $\mathfrak{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L \text{ e } t > 0\}$, a região do plano (x, t) que representa o a variação das posições das secções transversais internas da barra, juntamente com a variação do tempo imediatamente após o início da medição.

Por outro lado, seja $\tilde{\mathfrak{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < L \text{ e } t > 0\} \cup \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x = 0 \text{ e } t > 0\} \cup \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x = L \text{ e } t > 0\} \cup \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq L \text{ e } t = 0\}$. Isto é $\tilde{\mathfrak{R}}$ é a união do conjunto \mathfrak{R} com sua fronteira, a qual é formada pelo segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$, juntamente com as semi-retas $\{x = 0, t > 0\}$ e $\{x = L, t > 0\}$.

Assim, o problema em questão baseia-se em determinar uma função real de duas variáveis $u(x, t)$ definida no conjunto $\tilde{\mathfrak{R}}$, a qual satisfaz a equação (65), isto é:

$$u_t = K.u_{xx} \quad \text{em } \mathfrak{R}, \quad (67)$$

respeitando a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (68)$$

onde $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real que satisfaz as condições de fronteira.

Supondo inicialmente que as temperaturas nas extremidades são mantidas constantes e iguais a zero, tem-se que:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (69)$$

Problemas descritos através de equações do tipo (67) e (69) são costumeiramente denominados Problemas de Valores Iniciais e de Fronteira e são representados pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} u_t = K.u_{xx} & \text{em } \mathfrak{R}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0. \end{cases} \quad (70)$$

Neste momento será inserido o método de Fourier (Separação de Variáveis) para determinar a solução u do problema 70, o qual inicialmente irá supor que ela pode ser decomposta como um produto de duas outras funções. Isto é, existem duas funções $F(x)$ e $G(t)$, para as quais tem-se que:

$$u(x, t) = F(x).G(t). \quad (71)$$

Substituindo a equação (71) na equação (67), obtem-se que $F(x).G'(t) = K.F''(X).G(t)$. Supondo que as funções F e G são tais que $F(x) \neq 0$, para todo $0 < x < L$ e $G(t) \neq 0$, para todo $t > 0$ e sabendo que $K \neq 0$, pode-se obter que:

$$\frac{G'(t)}{K.G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \quad (72)$$

Analisando a igualdade (72), pode-se verificar que seu lado esquerdo dado por $\frac{G'(t)}{K.G(t)}$ independe da variável x , assim como o lado direito dado por $\frac{F''(x)}{F(x)}$ independe da variável t . Logo, ambos os lados podem ser reescritos e obter-se:

$$\frac{G'(t)}{K.G(t)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma, \quad (73)$$

onde σ é um parâmetro que independe das variáveis x e t .

Assim a segunda igualdade, em (73), pode ser reescrita da seguinte forma $F''(x) - \sigma.F(x) = 0$, a qual é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Conforme as hipóteses feitas para a obtenção da equação (72), tem-se que $G(t) \neq 0$, para todo $t > 0$. Assim, como imposto pela igualdade (71), tem-se que $u(x, t) = F(x).G(t)$ de onde conclui-se que se $0 = u(0, t) = F(0).G(t)$ então $F(0) = 0$. Analogamente obtêm-se que $F(L) = 0$.

Portanto a função F deve satisfazer a seguinte equação diferencial ordinária com valor inicial dada por:

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma.F(x) = 0 \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases} \quad (74)$$

Em posse do sistema (74), deve-se avaliar para quais valores de σ o mesmo possui solução e quais são as mesmas.

Para $\sigma > 0$, o polinômio característico da equação(74) possui duas raízes reais distintas $(\sqrt{\sigma})$ e $(-\sqrt{\sigma})$. Dessa forma a solução geral dessa equação é da forma:

$$F(x) = c_1.e^{(\sqrt{\sigma}).x} + c_2.e^{(-\sqrt{\sigma}).x}.$$

Porém para que os valores iniciais $F(0) = F(L) = 0$, dados no sistema (74), sejam satisfeitos é necessário ter-se $c_1 = c_2 = 0$ fazendo assim com que a função F seja identicamente nula. O que não interessa para este estudo.

Dando continuidade, supondo $\sigma = 0$, a equação diferencial do sistema (74) se reduz à $F''(x) = 0$, logo sua solução geral será um polinômio de grau 1, isto é:

$$F(x) = c_1x + c_2.$$

Analisando os valores iniciais dados no sistema, tem-se que para F satisfazer os mesmos é necessário ter-se $c_1 = c_2 = 0$, fazendo assim com que a função F seja identicamente nula. O que também não interessa para este estudo.

Por fim, supondo que $\sigma < 0$, pode-se considerar que $\sigma = -\lambda^2$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\lambda > 0$. Assim o polinômio característico da equação(74) possui duas raízes complexas conjugadas $(i\lambda)$ e $(-i\lambda)$. Dessa forma a solução geral dessa equação é da forma:

$$F(x) = c_1 \cdot \cos(\lambda \cdot x) + c_2 \cdot \text{sen}(\lambda \cdot x).$$

Impondo que os valores iniciais $F(0) = F(L) = 0$, dados no sistema (74), sejam satisfeitos é necessário ter-se $c_1 = 0$ e $c_2 \cdot \text{sen}(\lambda \cdot L) = 0$.

De $c_2 \cdot \text{sen}(\lambda \cdot L) = 0$, tem-se que $c_2 = 0$ ou $\text{sen}(\lambda \cdot L) = 0$. Como $c_2 = 0$ não é interessante, pois implicaria em F ser identicamente nula, deve-se determinar os valores de λ para os quais $\text{sen}(\lambda \cdot L) = 0$.

Da trigonometria tem-se que a relação $\text{sen}(x)$ anula-se somente quando $x = n \cdot \pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim o parâmetro λ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$-\sigma = \lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}. \quad (75)$$

Os valores expressos na forma da equação (75) são denominados autovalores do problema determinado pelo sistema (74). Por outro lado as funções expressas na forma da equação (76) são denominadas autofunções do problema determinado pelo sistema (74).

$$F_n(x) = \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right). \quad (76)$$

Neste momento deve-se redirecionar a atenção para analisar a primeira igualdade apresentada, em (73), a qual pode ser reescrita da seguinte forma:

$$G'(t) - \sigma \cdot K \cdot G(t) = 0. \quad (77)$$

Devido a equação (77) representar uma equação diferencial ordinária homogênea de grau 1, tem-se que sua solução geral é descrita por:

$$G(t) = c.e^{\sigma.K.t}. \quad (78)$$

Substituindo a igualdade (75) na equação (78) e tomando $c = 1$, tem-se que a solução geral da equação diferencial (77) é dada por:

$$G_n(t) = e^{\left(\frac{-n^2.\pi^2.K.t}{L^2}\right)}. \quad (79)$$

Dessa forma, substituindo as igualdades (76) e (79), na equação (71), tem-se que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ a solução do problema de valores iniciais e de fronteira definidos pelo sistema (70) é da forma:

$$u_n(x, t) = F_n(x).G_n(t) = e^{\left(\frac{-n^2.\pi^2.K.t}{L^2}\right)}. \text{sen} \left(\frac{n.\pi.x}{L} \right). \quad (80)$$

Estas funções denotadas por $u_n(x, t)$ são soluções da equação diferencial definida pelo sistema (70). Porém para que as mesmas também sejam solução do problema definido pela equação diferencial (67).

Analisando a equação diferencial (67), pode-se facilmente perceber que a mesma é linear, isto é, para todo conjunto de soluções $u_n(x, t)$, tem-se que a combinação linear,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.e^{\left(\frac{-n^2.\pi^2.K.t}{L^2}\right)}. \text{sen} \left(\frac{n.\pi.x}{L} \right), \quad (81)$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$ e c_n são constantes reais, também será solução do sistema (67).

Dessa forma a função definida em (81) será solução do sistema de equações (70). Para que a mesma também seja solução do problema definido pelas equações (67), (68) e (69) é necessário que a função f satisfaça o problema inicial dado em (69), isto é:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.u_n(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\text{sen} \left(\frac{n.\pi.x}{L} \right), \quad (82)$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$ e c_n são constantes reais que dependem da função f .

Neste ponto torna-se interessante refletir sobre quais tipos de funções podem ser escritas conforme a equação (82) e quais características essas devem possuir.

Conforme foi observado no início deste trabalho, o estudo deste problema tem a intenção de despertar o interesse à investigação das teorias relacionadas à Análise de Fourier.

Observação: A seguir serão apresentados alguns resultados relacionados a essa teoria, os quais servirão de fonte norteadora para um eventual aprofundamento nessa área do conhecimento.

Esses resultados são relacionados as teorias da Série de Fourier e da Análise de Fourier, as quais tem o objetivo principal de criar mecanismos matemáticos que possibilitem analisar quais os tipos de funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser expressas da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right). \quad (83)$$

Dentre os resultados, foram escolhidos a definição da Série de Fourier e um Teorema que garante a convergência dessa série para a própria função. O teorema apresentado a seguir, pode ser utilizado para obter aproximações de funções que sejam contínuas e de classe C^2 , diferentemente das aproximações de Taylor que necessitam de funções $n + 1$ vezes deriváveis.

Definição 8.1 (Série de Fourier). *Dada uma função integrável $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, define-se sua Série de Fourier através da expressão dada por:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot x)], \quad (84)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f , obtidos através das seguintes expressões:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (85)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx, \quad n \geq 1; \quad (86)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \text{sen}(n \cdot x) dx, \quad n \geq 1. \quad (87)$$

Teorema 8.1. *Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, de classe C^2 por partes e tal que $f(-\pi) = f(\pi)$, então para todo $x \in [-\pi, \pi]$ sua Série de Fourier converge uniformemente para a própria função, isto é:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \text{sen}(n \cdot x)], \quad (88)$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f .

Observação: Entende-se como funções de classe C^2 aquelas que possuem, pelo menos, as funções derivadas de até segunda ordem contínuas.

Neste momento encerra-se esta introdução à teoria relacionada ao estudo das Séries de Fourier e da Análise de Fourier.

Conforme visto, essas teorias apresentam uma forma de aproximar-se uma função através da soma de parcelas que envolvem as relações trigonométricas seno e cosseno, assim como coeficientes determinados através da integração do produto da função em questão, juntamente com uma dessas relações trigonométricas.

Essa aproximação pode parecer muito mais complexa do que a apresentada na seção (5), porém a mesma exige apenas que a função seja periódica, integrável e absolutamente integrável, enquanto que a teoria de Taylor exige que a mesma seja $(n + 1)$ vezes derivável e que suas derivadas sejam contínuas em um intervalo.

Assim espera-se que esta apresentação mostre que além da teoria de Taylor, existem outras formas de aproximar-se funções, despertando assim o interesse em aprofundar-se também no estudo desta teoria.

9 Considerações Finais

Conforme visto no desenvolvimento deste trabalho, determinar os valores da função $\text{sen}(x)$ para valores reais desse ângulo é muito importante, porém nem um pouco fácil.

Tentar determinar tais valores através de construções geométricas ou tratamentos algébricos, que utilizam as identidades trigonométricas comumente conhecidas, é uma tarefa não só árdua como também bastante difícil.

Na medida em que são aprimorados os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral, assim como suas aplicações, torna-se possível ter acesso à teoria de Taylor para aproximações polinomiais de funções reais.

O Polinômio de Taylor, juntamente com seu resto na forma de Lagrange, apresenta-se como uma ferramenta consistente para determinar aproximações dos valores da função $\text{sen}(x)$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, assim como estimar o erro cometido ao utilizar-se esta aproximação.

Porém, a utilização dessa teoria não se restringe apenas à determinação da aproximação da função $f(x) = \text{sen}(x)$, mas sim para toda função que seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e $(n + 1)$ vezes derivável em no intervalo aberto (a, b) .

Através do conhecimento da teoria de Taylor, os professores de matemática podem elaborar atividades em sala de aula que possibilitem a seus alunos aprimorar seus conhecimentos matemáticos relacionados a funções tradicionalmente tratadas de forma superficial.

Por exemplo a função exponencial $f(x) = e^x$ é igual a sua série de Taylor e pode ser aproximada através de seu Polinômio de Taylor de grau n em uma vizinhança próxima ao ponto $x = 0$, o qual é dado por $p_{n,0}(x) = \sum_{n=0}^n \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

Ao obter o Polinômio de Taylor de uma função, um estudante tem a oportunidade de determinar valores aproximados para funções que normalmente teriam de ser calculadas através de calculadoras científicas, ou mesmo utilizando valores tabelados, sem que saibam sua origem.

Por fim, o aprofundamento na teoria de aproximações podem culminar no interesse de estudar-se a teoria das Séries de Fourier uma vez que estas, diferentemente dos Polinômios de Taylor, exigem apenas que a função seja no mínimo duas vezes derivável.

Referências

- [1] WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar de O.; CARMO, Manfredo P. do. Trigonometria e números complexos. 3^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [2] Iezzi, Gelsom. Fundamentos de matemática elementar - trigonometria. 9^a ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.
- [3] AYRES JR., Frank; MOYERS, Robert E. Trigonometria. 3^a ed. São Paulo: BOOKMAN, 2003 - Coleção Schaum.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um curso de cálculo. 5^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um curso de cálculo. 5^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 4.
- [6] THOMAS, George B. Cálculo. 11^a ed. São Paulo: PEARSON, 2009. v. 1.
- [7] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3^a ed. São Paulo: HARBRA, 1994. v. 1.
- [8] MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. Cálculo - funções de uma e várias variáveis. 2^a ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- [9] LIMA, Elon Lages. Análise real. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. v. 1.
- [10] MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. Sistemas dinâmicos. 3^a ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [11] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. 4^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [12] FIGUEIREDO, Djairo Guedes ; NEVES, Aloísio Freiria. Equações diferenciais aplicadas. 3^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [13] BOYCE, William E.; DI PRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 8^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

- [14] MEDEIROS, Luis Adauto; ANDRADE, Nirzi Gonçalves. Introdução às equações diferenciais parciais. Rio de Janeiro: LTC, 1978.
- [15] BOYER, Carl B. História da matemática. 3^a ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.
- [16] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Dicionário Aurélio da língua portuguesa. 5^a ed. Curitiba: Positivo, 2010.