UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA: ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA.

CARLOS ANDRÉ NEIVA DE OLIVEIRA

GOIÂNIA - GO
2013

sistema de ... ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado profissional**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Carlos André Neiva de Oliveira				
E-mail:	andreaprov@ibest.com.br				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Professor da Secretaria de Educação de Goiás				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES		
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00889834/0001 - 08
Título:	O uso do GeoGebra no ensino da Geometria Analítica: estudo da circunferência				
Palavras-chave:	GeoGebra, tecnologia, circunferência e geometria analítica.				
Título em outra língua:	The use of GeoGebra in teaching analytic geometry: circunference study				
Palavras-chave em outra língua:	GeoGebra, technology, circumference and analytic geometry				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	15/03/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT				
Orientador (a):	Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues				
E-mail:	paulo@mat.ufg.br				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Carlos André Neiva de Oliveira — Data: 29 / 06 / 2013

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

CARLOS ANDRÉ NEIVA DE OLIVEIRA

O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA: ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática e Estatística da UFG, como parte dos requisitos para obtenção do título de: **MESTRE EM MATEMÁTICA.**
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

GOIÂNIA - GO
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Oliveira, Carlos André Neiva.
O482u O uso do GeoGebra no estudo da geometria analítica [manuscrito] : estudo da circunferência / Carlos André Neiva Oliveira. - 2013.
xiii, 46 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. GeoGebra (*Software*) – Uso - Geometria analítica. 2. Geometria analítica – Estudo e ensino. I. Título.

CDU: 514.112.6:37.016

Carlos André Neiva de Oliveira

O Uso do Geogebra no Ensino da Geometria Analítica: Estudo da Circunferência

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 15 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Ary Vasconcelos Medino

Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino
Membro/UnB

Ole Peter

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus pais João Batista Neiva e Lenice de Oliveira Neiva que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida e nunca mediram esforços para realizar meus sonhos.

Ao meu irmão Joel Neiva, que sempre esteve ao meu lado em todas as situações, inclusive nas mais difíceis.

Aos meus amigos, Leonardo Marins, Raniere Rodrigues, Leandro Batista e Daniel Hilário, amigos esses verdadeiros, que sempre me estenderam a mão.

E à toda minha família que sempre torceu pelo meu sucesso.

Agradecimentos

Agradeço:

- Primeiramente a Deus.

- Aos amigos do Colégio David Persicano que sempre me trataram com muito carinho.

- A Secretaria de Educação do Estado de Goiás que me concedeu a licença para que eu pudesse fazer esse mestrado.

- Ao PROFMAT que foi o grande responsável por esse projeto.

- E a todos professores do curso de mestrado que se dedicaram nesse projeto, em especial, o professor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues que foi meu orientador nesse trabalho.

Muito obrigado!

OLIVEIRA, Carlos André Neiva *O Uso do Programa GeoGebra no Ensino da Geometria Analítica: Estudo da Circunferência.* 2013. 45 p. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Goiânia-GO.

Resumo

Esse trabalho refere - se ao uso do aplicativo GeoGebra para o ensino de geometria analítica. Nele é feito uma abordagem sobre as orientações do PCNEM para o ensino da geometria analítica e discussões acerca do uso de tecnologias, como, computador e software no ensino da matemática. Fizemos um breve histórico do aplicativo mostrando algumas ferramentas que dispõe, e que são utéis para o desenvolvimento de atividades sobre o estudo da circunferência, e no final, apresentamos algumas atividades sobre a circunferência que podem ser aplicadas na 3º série do ensino médio, utilizando o software GeoGebra.

Palavras-chave: GeoGebra, tecnologia, circunferência e geometria analítica.

OLIVEIRA, Carlos André Neiva *The use of GeoGebra in teaching Analytic Geometry: circunference study* 2013. 45 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Goiás, Goiânia-GO.

Abstract

This work refers to the GeoGebra application use for teaching analytic geometry. In this work it was made a guidelines approach about the PCNEM, to teach and discuss the use of the technologies in analytic geometry about computers, software and mathematics. It was made a brief history about the applications testing some tools checking if they are useful to develop circumference studies to apply in high school first grades using that GeoGebra study.

Key-words:GeoGebra,technology, circumference and analytic geometry

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Ao longo da história da educação escolar brasileira, o ensino da Matemática sempre foi alvo de muitas discussões, especialmente, no que diz respeito às metodologias adotadas pelos professores. Tanto as observações empíricas, quanto os estudos teóricos revelam que as aulas de Matemática, na maioria das vezes, são consideradas pelos alunos como monótonas e desmotivantes. Isso normalmente ocorre por uma conjuntura de fatores, como a má formação teórica e prática do professor, os parcos recursos didáticos que as escolas dispõem, a complexidade da abordagem que se faz dos conteúdos didáticos em sala, a metodologia adotada pelos professores, só para citar alguns.

Acreditamos, no entanto, que entre os fatores acima elencados, o que mais influencia na qualidade do ensino de Matemática é a metodologia utilizada nas aulas. Observa-se que o professor, além do quadro, do giz e da exposição oral, raramente faz uso de outros recursos metodológicos. Isso ocorre por uma gama de motivos, como a falta de conhecimento sobre outras estratégias, a escassez de outros recursos nas escolas, o desinteresse por parte do docente, que acredita que seus métodos são satisfatórios, a falta de apoio da gestão da escola para que haja uma mudança na prática pedagógica dos professores de Matemática, entre outras. Diante dessa conjuntura que influi no ensino de Matemática, no imaginário coletivo dos alunos, esta disciplina se tornou, para eles, um desafio inalcançável, e um comentário que se tornou comum entre eles é que "nunca vou aprender matemática".

Esses percalços que influem no ensino de Matemática nos motivaram a desenvolver um trabalho que objetivasse refletir sobre como utilizar um recurso tecnológico para trabalhar um conteúdo curricular com os alunos da Educação Básica, neste caso, a circunferência. Nosso intuito é que a referida pesquisa possa servir de subsídio para o trabalho do professor na tarefa de ensinar um conteúdo tão complexo e abstrato para os alunos como o citado.

No decorrer do curso de mestrado tivemos acesso ao software GeoGebra, aplicativo de código livre que explora a geometria e a álgebra. O GeoGebra é uma excelente ferramenta, principalmente para o ensino da geometria analítica. A facilidade de se trabalhar com o software, haja vista a forma didática em que se apresentam suas instruções, e a dificuldade encontrada pelos alunos para compreenderem a geometria analítica, conduziram-me a escolher como tema dessa dissertação "O uso do GeoGebra no ensino da geometria analítica: estudo da circunferencia."Nesse sentido, o objetivo geral que justifica esta pesquisa é refletir sobre como o uso do programa GeoGebra pode tornar-se um instrumento eficaz no ensino da Geometria Analítica.

No intuito de alcançarmos este objetivo, elaboramos quatro capítulos: No Capítulo 1, apresentaremos o que os Parâmetros Curriculares sugerem a respeito do ensino da Geometria Analítica e do uso das tecnologias no ensino da Matemática. No Capítulo 2, explanaremos sobre o programa GeoGebra e discorreremos sobre algumas ferramentas importantes para as aplicações propostas no trabalho. O Capítulo 3 se deterá na fundamentação teórica sobre o estudo da circunferência , o Capítulo 4, deter-se-á à exemplificação de aplicações do programa GeoGebra no estudo da circunferência e por último são feitas algumas considerações finais do que se espera da aplicação do GeoGebra em sala de aula.

Carlos André Neiva de Oliviera

Goiânia-GO, 25 de fevereiro de 2013.

Capítulo 1

Orientações Curriculares para o Ensino da Geometria Analítica

No presente capítulo apresentaremos as orientações curriculares sugeridas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) no que tange ao ensino da Geometria Analítica, abordando sobre suas origens e discutiremos, ainda, sobre a importância do uso de tecnologias no ensino da Matemática e explanaremos sobre alguns softwares educacionais.

1.1 Orientações Curriculares para o Ensino da Geometria Analítica

A Geometria Analítica, conhecida também como geometria de coordenadas, estuda a geometria por meios de princípios algébricos utilizando um sistema de coordenadas, chamado plano cartesiano. Nesse sistema de coordenadas cartesianas podemos fazer a análise de equações de retas, planos, cônicas, circunferências ou uma curva qualquer, que podem ser estudadas em duas, três ou mais dimensões. René Descartes foi quem deu início ao estudo da Geometria Analítica, em 1637, num trabalho publicado chamado Geometria, em que o filósofo introduziu os conceitos da álgebra no estudo da geometria. Esse trabalho marcou o início da Matemática moderna, e hoje é muito importante no estudo da Física e da Engenharia.

A Geometria Analítica é ensinada na 3° série do ensino médio, e segundo os PCNEM (2000, p. 121), "tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações."Nesse sentido, cabe ao professor possibilitar o encontro do aluno com este conteúdo, que, inicialmente, é entendido por ele como algo abstrato e, consequentemente, de difícil compreensão. Com o trabalho do professor, o aluno desenvolverá as capacidades de resolução de equações, sistemas e inequações.

Os PCNEM também apresentam os conteúdos e habilidades propostos para as unidades temáticas. No caso da Geometria Analítica, são especificadas as seguintes propostas (BRASIL, 2000, p 122.)

> Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
>
> - Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
> - Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
> - Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
> - Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2006) explicam que o estudo da Geometria deve:

> possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida (BRASIL, 2006, p. 75).

Dessa forma, o professor precisa tornar os conteúdos significativos para a vida prática do aluno fora da escola. Os conteúdos estudados precisam constituir-se um instrumento para o indivíduo ao longo de sua vida, não somente no período escolar. Ainda conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas.

Neste caso, a prática do professor que se restringe à mera apresentação de equações sem explicações estruturadas e bem construídas e a memorizações excessivas deve ser abolida em prol de uma prática pautada em explicações alicerçadas no raciocínio lógico-matemático, em exemplificações acessíveis ao nível de desenvolvimento intelectual dos alunos e na relação entre conteúdo teórico e vida prática.

1.2 O uso de tecnologias no ensino da Matemática

O mundo em que vivemos hoje é um mundo moderno, marcado pelo uso de tecnologias que estão intimamente inseridas no cotidiano das pessoas que vivem em uma sociedade dita informatizada.

A tecnologia, simplificadamente, significa estudo da técnica, ou seja, representa uma ferramenta ou um método usado para a resolução de problemas ou, ao menos, para facilitar a resolução dos mesmos. Na educação, podemos chamar de tecnologia toda ferramenta utilizada para a melhoria do ensino-aprendizagem. Assim, são ferramentas tecnológicas educacionais: giz, quadro-negro, livro didático, caderno, lápis, calculadora, data-show, TV, DVD, computador, etc. Porém, na maioria das vezes, quando se fala no uso de tecnologias na educação, entende-se que tecnologia refere-se ao computador e seus softwares.

A realidade que a educação brasileira vivencia hoje é a de que, apesar de todos os avanços tecnológicos do mundo moderno, ainda temos dificuldades para inserirmos novas tecnologias no ensino da Matemática.

Mesmo com todo o arsenal tecnológico espalhado por todos os espaços, o que predomina na escola é uma metodologia tradicionalista, em que prevalece a exposição oral realizada pelo professor e o uso do livro didático. Com isso, a maioria dos alunos não se sente motivada para aprender Matemática, uma vez que consideram as aulas monótonas e desinteressantes. Apesar de todos os conteúdos ministrados pelo professor, os alunos não estão aprendendo.

O uso do computador no ensino da Matemática é indispensável para a melhoria da aprendizagem, ele não pode ser deixado de lado nesse processo. É importante que os professores entendam que nossos alunos estão inseridos nessa tecnologia em sua vida cotidiana e que usá-la pode facilitar-lhes a aprendizagem. O computador traz para a sala de aula mais motivação e sabemos que a motivação é o principal ingrediente para um bom aprendizado.

É, portanto, papel do professor de Matemática, em sua prática diária, desenvolver nos alunos algumas habilidades básicas, quais sejam: comunicar-se nas várias linguagens; saber investigar; ter capacidade de interpretação; resolver e também elaborar situações problema; pensar estratégias para resolver problemas; saber tomar decisões; trabalhar em grupo, de forma cooperativa; entre outras. Nesse sentido, o uso das tecnologias se torna um aliado do professor na difícil tarefa de desenvolver tais habilidades, pois, por meio do uso do computador, da internet, de vídeos, etc., o aluno terá mais facilidade para estabelecer contato com as várias linguagens, interpretar dados e informações, tomar decisões, resolver problemas, investigar, enfim, terá mais autonomia para desenvolver sua própria aprendizagem, com o auxílio do professor.

No meio educacional existem vários softwares que podem ser ferramentas bastante úteis na aprendizagem de Matemática, se utilizados de maneira planejada. Dentre eles, destacamos:

- Geogebra: reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente.

- Winplot: plota gráficos de funções de uma ou duas variáveis. É muito simples de ser utilizado e não requer conhecimento em linguagem de programação.

- Maple: é um sistema de álgebra computacional comercial usado para cálculos de expressões algébricas e simbólicas, podendo também fazer representações gráficas em 2D ou 3D.

- Cabri: é uma ferramenta usada para o estudo da geometria e que possibilita a exploração de figuras geométricas de maneira interativa por meio da construções de pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos e outros objetos.

- Gcompris: é uma suíte que contém vários programas educacionais com atividades para crianças entre 2 e 10 anos, que se encontram separadas por categoria.

- Kbruch: é um programa que gera problemas envolvendo frações e porcentagens.

- KmPlot: é um programa desenvolvido para criação e análise de gráficos a partir de diversas funções, como derivadas, integrais, entre outras.

- Kpercentage: é um aplicativo usado no ensino de porcentagens.

Mesmo apesar desse número de softwares disponíveis para o ensino da Matemática, muitos professores não têm acesso a eles, por desconhecimento, por não terem acesso a computadores, por desinteresse, ou, ainda, por não saberem utilizar o computador como ferramenta de trabalho em sua prática diária de sala de aula.

Diante disso, notamos que, para o computador se tornar uma ferramenta adicional no trabalho do professor, é preciso escolas que disponham de recursos materiais, tecnológicos e humanos de qualidade, pois o professor precisa possuir formação teórica e prática para enfrentar o desafio de inserir a tecnologia em suas aulas de modo a garantir a facilitação do processo de ensino e aprendizagem.

Acreditamos que, para que o aluno realmente saia da sala de aula tendo aprendido Matemática, grandes mudanças devem ocorrer, tanto no que diz respeito à estrutura física e aos recursos financeiros disponíveis às escolas públicas, quanto ao aperfeiçoamento do professor. Afinal, não basta que ele saiba o conteúdo, é muito importante também que compreenda as teorias educacionais, metodológicas e tecnológicas.

Diante disso, os próximos capítulos abordarão o programa Geogebra, um dos softwares educacionais elencados acima, e as possibilidades de sua aplicação em sala de aula.

Capítulo 2

O GeoGebra

É objetivo deste capítulo apresentar o Geogebra, enquanto um sofware educacional, que pode ser utilizado por todos os professores de Matemática da Educação Básica, e especificar sua função, onde pode ser acessado e como utilizá-lo.

2.1 O Aplicativo

O GeoGebra é um aplicativo que foi desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg na Áustria, no ano de 2001. É um software livre e de código aberto, escrito em Java e disponível em várias plataformas e em diversos idiomas. Por ser um software livre tem seu código - fonte disponibilizado permitindo o uso, a cópia, o estudo e a redistribuição. O programa explora a álgebra, a geometria e o cálculo de maneira simples e interativa, podendo ser utilizado em diversos níveis de ensino.

O aplicativo foi criado com o propósito de se tornar um grande aliado do professor no processo de ensino-aprendizagem. Ganhou vários prêmios educacionais, como: o Prêmio Nacional de Liderança em Tecnologia (EUA), o prêmio Alemão Software Educacional e o Prêmio Europeu de Software Acadêmico.

Ele permite construir pontos, segmentos, vários tipos de retas, circunferências, elipses, hiperbóles, parábolas, polígonos e gráficos de funções. Calcula medidas de ângulos, distâncias, áreas e inclinações. Determina o ponto médio de um segmento e a intersecção entre dois objetos. Inseri texto e imagem. E tudo isso de maneira simples e didática.

O Geogebra pode ser facilmente baixado acessando-se o site www.geogebra.org.br, onde podemos encontrar a versão 4.2. O software possui três janelas diferentes que podem aparecer abertas ao mesmo tempo: a janela de álgebra, a janela de cálculo e a janela de gráficos. A zona de gráficos possui a opção de exibir ou não malhas e eixos.

As janelas estão interligadas e qualquer mudança feita em uma delas acarretará mudança nas outras, como mostra a figura a seguir.

Figura 2.1: Tela inicial do Software GeoGebra

Na barra de menus podemos encontrar as seguintes opções: arquivo, editar, exibir, opções, ferramentas, janela e ajuda. Essas opções estão subdivididas da seguinte forma.

Menu	Opções
Arquivo	Nova Janela Novo Abrir Abrir páginas web Abrir arquivo recente Gravar Gravar como Compartilhar Exportar Visualizar impressão Fechar

Figura 2.2: Opções do Menu Arquivo.

Menu	Opções
Editar	Desfazer Refazer Copiar Colar Copiar para área de transferência Propriedades Selecionar tudo

Figura 2.3: Opções do Menu Editar

Menu	Opções
Exibir	Eixos Malha Janela de álgebra Planilha Janela de visualização Janela de visualização 2 Protocolo de construção Teclado Campo de entrada Barra de ferramentas Barra de navegação para passos da construção Atualizar janelas Recalcular todos os objetos

Figura 2.4: Opções do Menu Exibir

Menu	Opções
Disposições	Álgebra e gráficos Geometria básica Geometria Tabelas e gráficos Gerenciar disposições Gravar disposição atual

Figura 2.5: Opções do Menu Disposições

Menu	Opções
Opções	Descrições algébricas Pontos sobre a malha Arredondamento Rotular Tamanho da fonte Idioma Configurações

Figura 2.6: Opções do Menu Opções

Menu	Opções
Ferramentas	Configurar barra de ferramentas Criar uma nova ferramenta Gerenciar ferramentas Movimento Pontos Retas, segmentos, semirretas e vetores Retas especiais e lugar geométrico Polígonos Círculos e arcos Cônicas Medidas Transformações Objetos especiais Interface gráfica Gerais Personalizadas

Figura 2.7: Opções do Menu Ferramentas

Menu	Opções
Janela	Nova janela

Figura 2.8: Opções do Menu Janela

Menu	Opções
Ajuda	Ajuda Tutoriais GeoGebra fórum GeoGebra tube Geogebra.org Sobre/licença

Figura 2.9: Opções do Menu Ajuda

A figura apresentada a seguir tem o intuito de representar a estrutura das janelas no Software GeoGebra, onde foi escolhido apresentar apenas uma janela com o Menu Arquivo em exibição.

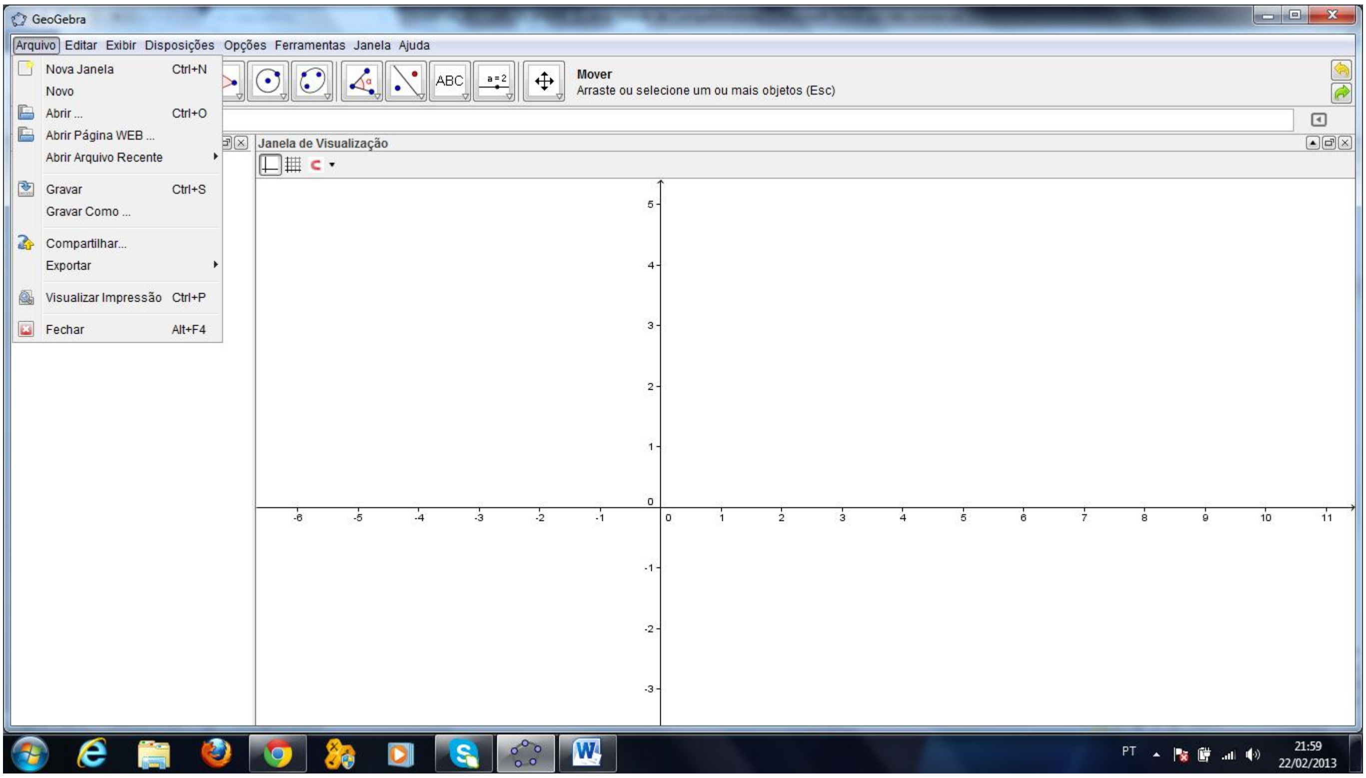

Figura 2.10: Tela do GeoGebra com Menu Arquivo em exibição

Na tela inicial podemos encontrar a barra de ferramentas de acesso rápido:

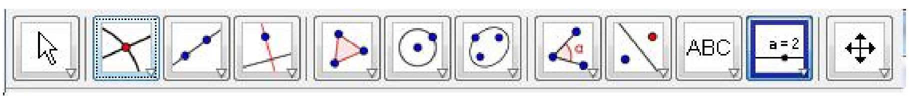

Figura 2.11: Barra de ferramentas de acesso rápido

Ao clicarmos no canto inferior direito de cada comando, novos comandos se abrem:

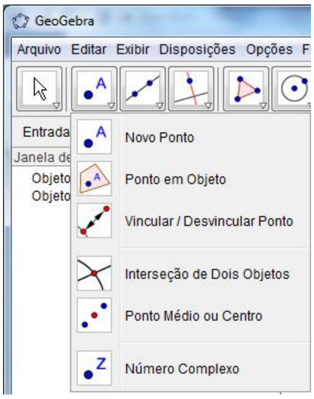

Figura 2.12: Ilustração da barra de acesso rápido com opção de novo ponto

No campo de entrada podemos digitar uma equação de reta, circunferência, parábola, etc.

Figura 2.13: Campo de entrada de funções

A seguir, apresentaremos as funções de alguns comandos que serão importantes na aplicação do Geogebra para o desenvolvimento das atividades de circunferência propostas no Capítulo 4. Ao passar o mouse sobre cada comando uma caixa de texto se abre, explicando como proceder.

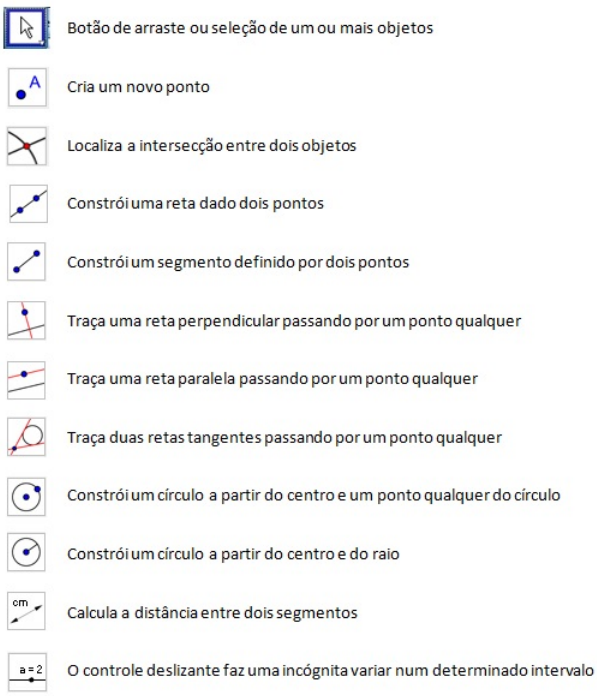

Figura 2.14: Comandos utilizados nas Atividades

A seguir faremos uma fundamentação teórica sobre o estudo da circunferência para dar embasamento às atividades propostas no capítulo 4.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica:Estudo da Circunfêrencia

Neste capítulo abordaremos o estudo da Circunferência, atendo-nos, principalmente, às seguintes definições: Sistema de Coordenadas Cartesianas; Distância entre dois pontos; circunferência; Equação geral da circunferência; Equação reduzida da circunferência; Equações paramétricas da circunferência; Posições relativas entre ponto e circunferência; Posições relativas entre reta e circunferências; e Problemas de tangência.

3.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas, mais conhecido como plano cartesiano, é representado por dois eixos perpendiculares entre si, sendo um horizontal (eixo x) e outro vertical (eixo y). O eixo horizontal é também conhecido como eixo das abcissas e o eixo vertical como eixo das ordenadas.

O plano cartesiano é enumerado pelo conjunto dos números reais e tem o objetivo de especificar pontos. Cada ponto é representado por um número real no eixo x e outro no eixo y. Esses dois números são as coodenadas cartesianas ortogonais do ponto. O ponto $(0,0)$ é a origem do sistema de coordenadas.

Os eixos perpendiculares dividem o plano cartesiano em 4 partes,cada uma das quais denominada quadrante. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti - horário. A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada primeira bissetriz e a que divide os quadrantes pares é a segunda bissetriz. Veja a figura a seguir:

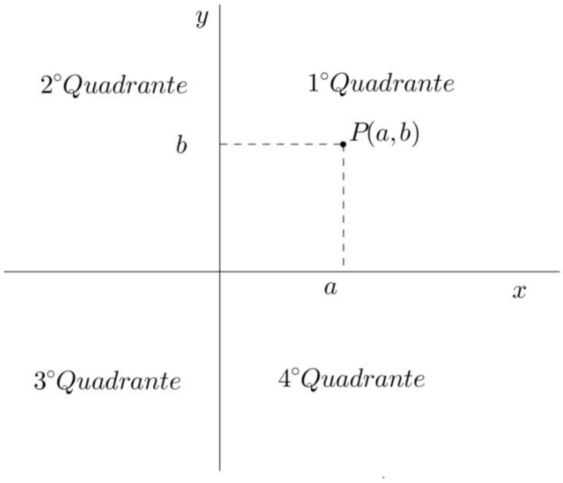

Figura 3.1: Plano Cartesiano

3.2 Distância entre dois pontos

Sejam os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos do plano. A distância entre os pontos A e B é a medida do segmento que tem os dois pontos como extremidade. A distância entre A e B é representada por $d(A, B)$ e pode ser calculada usando-se o Teorema de Pitágoras. Veja a figura abaixo.

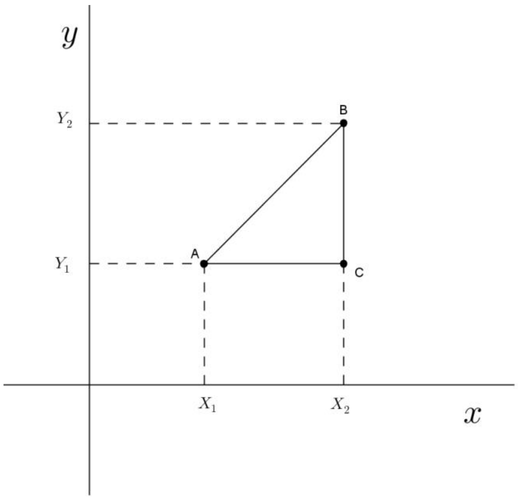

Figura 3.2: Distância entre dois pontos

O triângulo ABC é retângulo em C, o segmento AB é a sua hipotenusa e os segmentos AC e BC são seus catetos. Usando-se o Teorema de Pitágoras temos:

$$d^2_{A,B} = d^2_{A,C} + d^2_{B,C}$$

sendo $d_{A,C} = x_2 - x_1$ e $d_{B,C} = y_2 - y_1$. Então $d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3.3 A circunferência

Uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um único ponto fixo do mesmo plano. O ponto fixo é chamado de centro da circunferência e a distância desse ponto a qualquer outro ponto da circunferência é chamado de raio da circunferência. Na figura 3 representamos uma circunferência de Centro $C(x_0, y_0)$ e raio r:

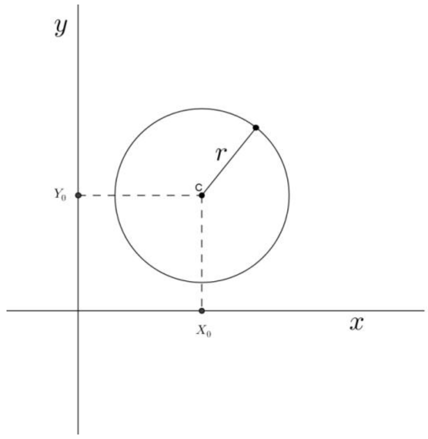

Figura 3.3: Circunferência de raio r

3.4 Equação reduzida da circunferência

Seja P(x, y) um ponto qualquer de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r. A equação da circunferência será dada pela distância entre os pontos P e C igual a r. Sendo assim, teremos:

$$d_{P,C} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando-se membro a membro ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Esta equação é chamada de equação reduzida da circunferência.

3.5 Equação geral da circunferência

Retomando a forma reduzida $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ desenvolvendo os quadrados e agrupando os termos convenientemente, temos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

Essa expressão é conhecida como forma geral da equação da circunferência, ou equação geral da circunferência com centro (a, b) e raio r.

3.5.1 Casos particulares

1.A circunferência passa pela origem, ou seja, o ponto (0, 0) pertence à circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

2.A circunferência passa pela origem e o centro está no eixo x. Nesse caso, a circunferência é tangente ao eixo y:

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

3.A circunferência passa pela origem e o centro está no eixo y. Nesse caso, a circunferência é tangente ao eixo x:

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

4.O centro da circunferência coincide com a origem:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Nem sempre, porém, uma equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com coeficientes reais e $A \neq 0$, representa uma circunferência. Existe um método que trata da análise dos coeficientes da equação sobre os quais recairão certas condições para que a equação possa representar, de fato, uma circunferência. Inicialmente, dividamos a equação acima por A, ficando da seguinte forma:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Comparando-a com a anterior $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$, obtemos as relações:

1º $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$

2º $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$

3º $\frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = \frac{-D}{2A}$

4º $\frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = \frac{-E}{2A}$

5º $\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}}$, se $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Importante destacar que todas as relações devem ser satisfeitas para que a equação represente uma circunferência. Se $D^2 + E^{2'} - 4AF > 0$, então circunferência real de centro (a, b) e de raio r. Se $D^2 + E^2 - 4AF = 0$, então circunferência de raio nulo,reduzindo-se a um ponto (a, b). Se $D^2 + E^2 - 4AF < 0$, então a equação não representa uma circunferência.

3.6 Equações paramétricas da circunferência

Seja a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r num sistema cartesiano XOY, conforme a figura abaixo: Se tomarmos $P(x, y)$ um ponto qualquer, o suporte do raio relativo a ele forma, com o

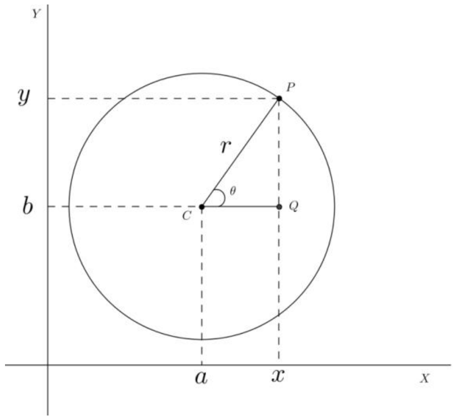

Figura 3.4: Equação paramétrica

suporte do raio horizontal, o ângulo θ, parâmetro: As equações paramétricas da circunferência considerada têm a forma:

$$\begin{cases} x &= f_1(\theta) \\ y &= f_2(\theta) \end{cases}$$

pois a cada valor de θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, corresponde um, e somente um, ponto P. Do triângulo retângulo CQP, tiramos:

$$\begin{cases} CQ &= CPcos(\theta) \\ QP &= CPsen(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - a &= rcos(\theta) \\ y - b &= rsen(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= a + rcos(\theta) \\ y &= b + rsen(\theta) \end{cases}$$

Quando o centro C for o ponto $(0, 0)$, teremos:

$$\begin{cases} x &= rcos(\theta) \\ y &= rsen(\theta) \end{cases}$$

Para passarmos das equações paramétricas para a equação cartesiana devemos eliminar o parâmetro (θ). Para isto, basta elevarmos ambos os membros das equações ao quadrado e somá-las em seguida.

3.7 Posições relativas entre ponto e circunferência

Sabemos que a distância entre o centro da circunferência e um ponto qualquer dela é sempre igual. Portanto, se essa distância for menor ou maior, dizemos que esse ponto não pertence à circunferência. Para uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r e um ponto $P(x, y)$ qualquer, compararemos $d_{(P,C)}$ com r. Há 3 casos possíveis:

1°) Se $d_{(P,C)} = r$,então P pertence à circunferência.

2°) Se $d_{(P,C)} > r$,então P é externo à circunferência.

3°) Se $d_{(P,C)} < r$,então P é interno à circunferência.

A principal consequência disso é um método para resolver inequação do 2° grau da forma $f(x,y) > 0$ e $f(x,y) < 0$, em que $f(x,y) = 0$ é a equação da circunferência com coeficiente x^2 positivo. Dada a circunferência λ de equação $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$, o plano cartesiano fica dividido em 3 subconjuntos:

a Subconjunto dos pontos (x,y) exteriores a λ, que representa o conjunto solução para $f(x,y) > 0$.

b Subconjunto dos pontos (x,y) pertencentes a λ, que representa o conjunto solução para $f(x,y) = 0$.

c Subconjunto dos pontos (x,y) interiores a λ, que representa a solução para $f(x,y) < 0$.

3.8 Posições relativas entre reta e circunferências

Seja uma circunferência λ de centro $C(a,b)$ e raio r. Existem, no plano, retas que interceptam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não interceptam a circunferência em ponto algum. Essas retas são chamadas, respectivamente: secantes, tangentes e externas à circunferência.

3.8.1 Reta secante

Seja a circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r e a reta t que contém os pontos P e Q e intercepta a circunferência nesses pontos, conforme a figura abaixo.

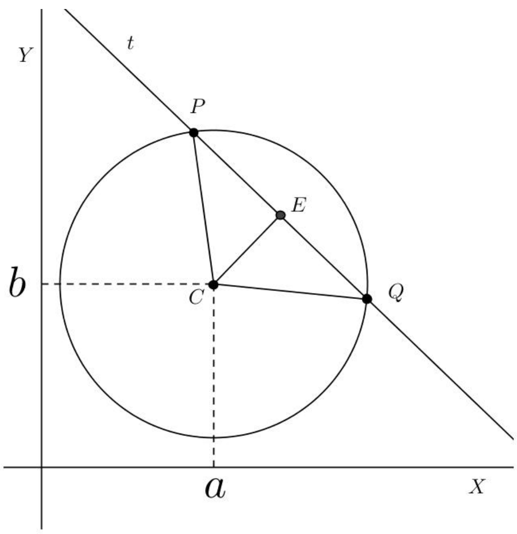

Figura 3.5: Reta secante

O segmento CE é a distância entre o centro da circunferência e a reta t, portanto, o triângulo CEP é retângulo em E. O segmento CP é a hipotenusa desse triângulo e os segmentos CE e EP são os catetos. Como CP representa o raio da circunferência e a hipotenusa de um triângulo é sempre maior que qualquer um dos seus catetos, então, a distância entre o centro da circunferência e a reta t secante a ela é menor que o raio dessa circunferência, ou seja, $d_{C,E} < r$.

3.8.2 Reta tangente

Seja a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r e a reta t que contém o ponto P e intercepta a circunferência nesse ponto, conforme a figura abaixo.

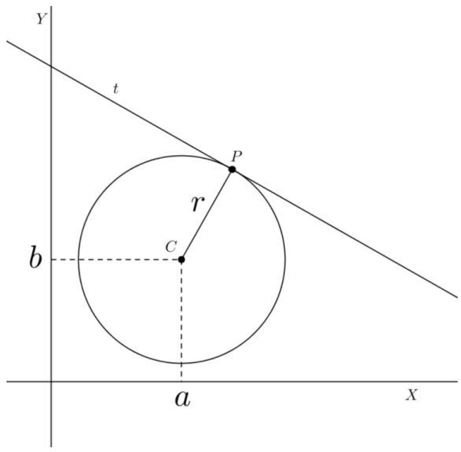

Figura 3.6: Reta tangente

Como P pertence à circunferência e também a reta t, então, a distância entre o centro da circunferência e o ponto P é igual ao raio da circunferência, ou seja, $d_{C,P} = r$.

3.8.3 Reta exterior

Seja a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r e a reta t, conforme a figura abaixo.

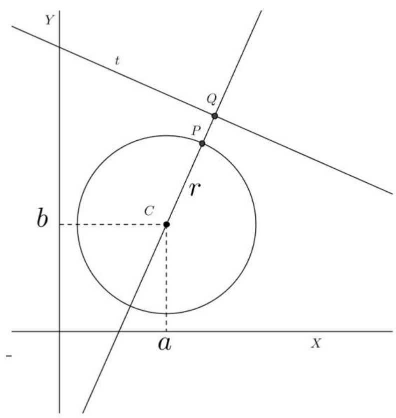

Figura 3.7: Reta exterior

Como $CQ = CP + PQ$ e $PQ > 0$, então, $CQ > CP$. Sendo a medida do segmento CP o raio da circunferência e a medida do segmento CQ a distância entre o centro da circunferência e a reta t, então $d_{C,Q} > r$.

3.9 Problemas de tangência

3.9.1 Equação da reta tangente à circunferência, dado o ponto de tangência

Seja a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r, referida num sistema cartesiano XOY, conforme mostra a figura.

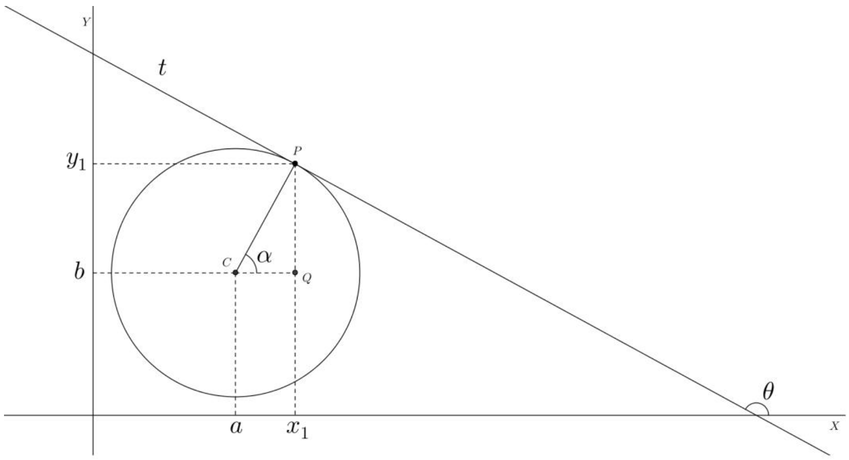

Figura 3.8: Reta tangente num ponto

Procuramos a equação da reta t tangente a circunferência no ponto $P(x_1, y_1)$. A equação da reta é dada pela fórmula:

$$y - y_1 = tan(\theta)(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{-1}{tag(\alpha)(x - x_1)} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

Se o centro $C(a, b)$ estiver na origem, a equação da tangente assumirá a forma:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \quad ou \quad y_1 y + x_1 x = x_1^2 + y_1^2$$

E, como x_1 e y_1 são as coordenadas do ponto de contato, então satisfaz à equação da circunferência, logo $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ e, finalmente, temos:

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

3.9.2 Equações das retas tangentes à uma circunferência paralelas a uma reta dada

Seja a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r e a reta t, referidas num sistema cartesiano XOY, conforme mostra a figura:

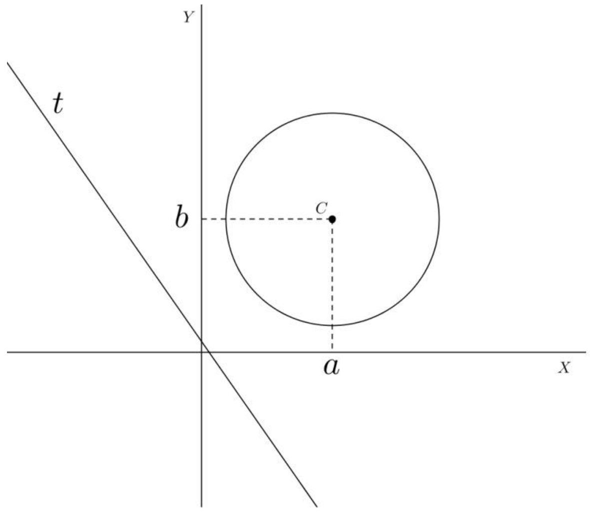

Figura 3.9: Reta t e cincunferência C sem pontos em comum

Procuramos as equações das retas tangentes à circunferência e paralelas à reta t. Seja $Ax+By+C=0$ a equação geral da reta t, nosso problema se resume em encontrar as equações das retas $Ax+By+C'$ de modo que a distância entre o centro da circunferência e as retas a serem encontradas seja igual a r. Desse modo, teremos:

$$\left\|\frac{Aa+Bb+C'}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\| = r \quad ou \quad C' = \pm r\sqrt{A^2+B^2} - Aa - Bb$$

Portanto, as equações das retas tangentes são $Ax+By \pm r\sqrt{(A^2+B^2)} - Aa - Bb = 0$. Se o centro da circunferência é o ponto $(0,0)$, então, teremos $Ax+By \pm r\sqrt{(A^2+B^2)} = 0$.

3.9.3 Equações das retas tangentes à circunferência, traçadas de um ponto exterior dado

Consideremos a circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r e o ponto $P(x_1,y_1)$ exterior a circunferência, conforme mostra a figura:

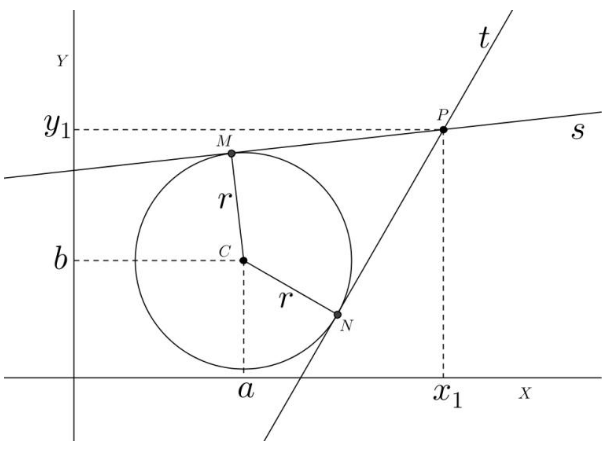

Figura 3.10: Retas tangentes dado ponto exterior

As retas t e s tangentes à circunferência têm equações do tipo $y - y_1 = m(x - x_1)$, onde m corresponde à declividade das retas. Calculemos t e s através da distância entre o centro da circunferência e as retas t e s, que é igual ao raio da circunferência. Sendo assim, teremos:

$$\left\| \frac{ma - b - mx_1 + y_1}{\sqrt{m^2+1}} \right\| = r \Rightarrow m = \frac{(a-x_1)(b-y_1) \pm r\sqrt{(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 - r^2}}{(a - x_1^2) - r^2}$$

Substituindo m na equação da reta, obtemos as equações de t e s.

Se o centro da circunferência é o ponto $(0,0)$, então:

$$m = \frac{x_1 y_1 + r.\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{-x_1^2 - r^2}$$

3.10 Posição relativa de duas circunferências

As posições entre duas circunferências podem ser: secantes, tangentes exteriores, tangentes interiores, externas ou internas.

3.10.1 Circunferências secantes

São aquelas circunferências que possuem somente dois pontos em comum, conforme mostra a figura abaixo.

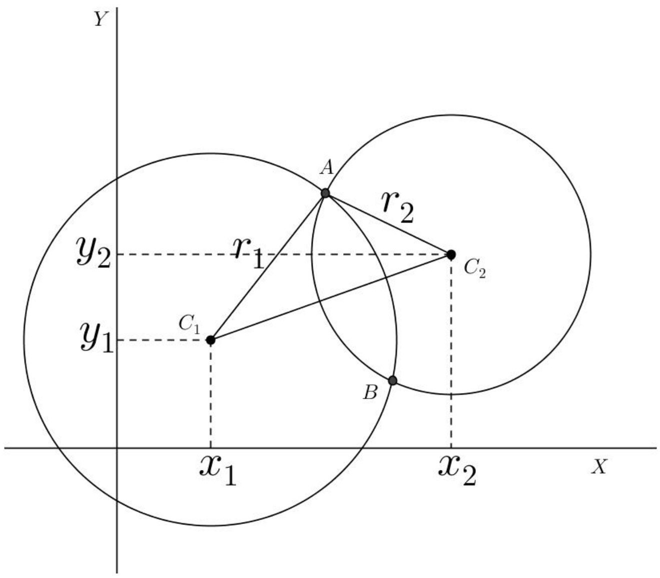

Figura 3.11: Cincunferências secantes

As circunferências de centro $C_1(x_1, y_1)$ e raio r_1 e $C_2(x_2, y_2)$ e raio r_2 são secantes nos pontos A e B. Pela desigualdade triangular, temos que:

$$|r_1 - r_2| < d_{C_1,C_2} < |r_1 + r_2|$$

3.10.2 Circunferências tangentes exteriores

São aquelas circunferências que possuem apenas um ponto em comum e a distância entre seus centros é igual à soma das medidas dos seus raios, conforme mostra a figura abaixo. As

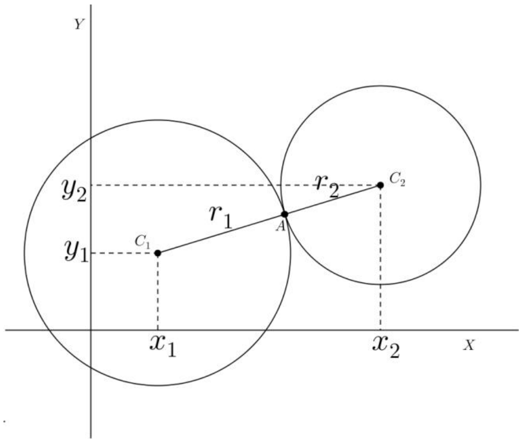

Figura 3.12: Circunferências tangentes exteriores

circunferências de centro $C_1(x_1, y_1)$ e raio r_1 e $C_2(x_2, y_2)$ e raio r_2 são tangentes no ponto A. A distância entre os centros das circunferências é a medida do segmento C_1C_2. Como $C_1C_2 = C_1A + AC_2$, $C_1A = r_1$ e $AC_2 = r_2$, então, temos que: $d_{C_1,C_2} = r_1 + r_2$

3.10.3 Circunferências tangentes interiores

São aquelas que possuem apenas um ponto em comum e a distância entre os seus centros é a diferença entre as medidas de seus raios, conforme mostra a figura abaixo.

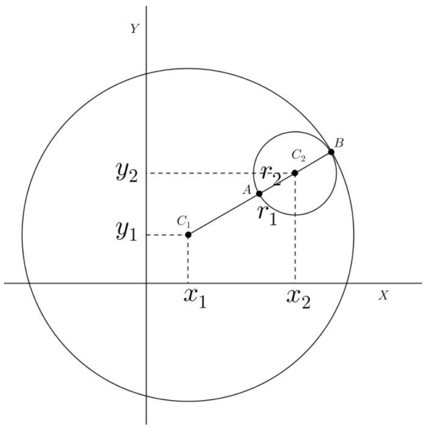

Figura 3.13: Circunferências tangentes interiores

As circunferências de centro $C_1(x_1, y_1)$ e raio r_1 e $C_2(x_2, y_2)$ e raio r_2 são tangentes no ponto B. A distância entre os centros das circunferências é a medida do segmento C_1C_2. Sendo $d_{C_1,C_2} = d_{C_1,B} - d_{C_2,B}$, então, temos que:

$$d_{C_1,C_2} = r_1 - r_2$$

3.10.4 Circunferências externas

São aquelas que não se interceptam e a distância entre os centros é maior que a soma das medidas dos raios, conforme mostra a figura abaixo. As circunferências de centro $C_1(x_1, y_1)$ e

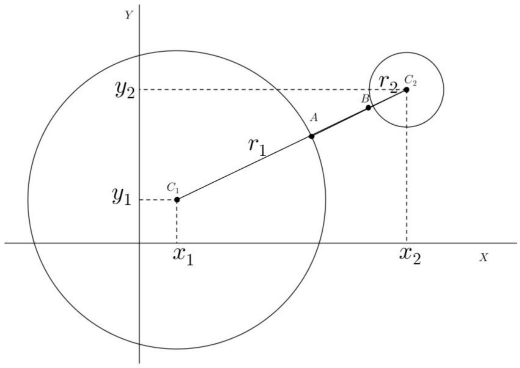

Figura 3.14: Circunferências externas

raio r_1 e $C_2(x_2, y_2)$ e raio r_2 não se interceptam. A distância entre os centros das circunferências é a soma das medidas dos segmentos C_1A, AB e BC_2. Como C_1A e BC_2 são, respectivamente, $r1$ e $r2$, então,

$$d_{C_1,C_2} > r_1 + r_2$$

3.10.5 Circunferências internas

São aquelas que não possuem ponto em comum e a distância entre os centros é menor que a diferença entre os raios, conforme mostra a figura: As circunferências de centro $C_1(x_1, y_1)$ e

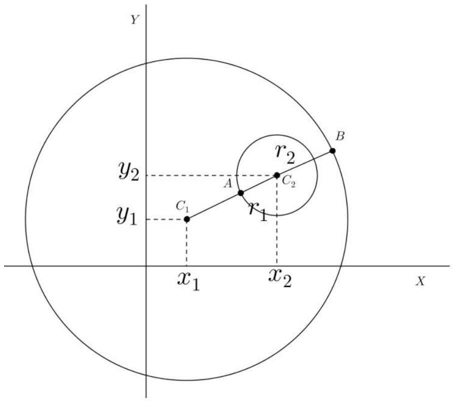

Figura 3.15: Circunferências internas

raio r_1 e $C_2(x_2, y_2)$ e raio r_2 não se interceptam. Como $d_{C_1,C_2} + r_2 < r_1$, então, $d_{C_1,C_2} < r_1 - r_2$.

Se duas circunferências internas possuem o mesmo centro, dizemos que elas são concêntricas.

Capítulo 4

Aplicações do GeoGebra no Estudo da Circunferência

Nesse capítulo, propomos algumas atividades sobre circunferências utilizando o aplicativo GeoGebra. Ao todo são propostas seis atividades e duas questões de vestibulares que podem ser trabalhadas em três aula de cinquenta minutos, podendo ser intercaladas no decorrer das aulas sobre o estudo da circunferência.

Atividade 1: construir uma circunferência dado um segmento de comprimento fixo e habilitando o rastro.

Objetivo: Entender o conceito de circunferência como o conjunto de pontos equidistantes de um ponto fixo(centro da circunferência).

Passo 1: Criar um ponto de coordenadas (4, 2).

Passo 2: Criar um segmento de comprimento fixo com extremidade em A e comprimento 3.

Passo 3: Ativar a ferramenta de rastro sobre o ponto B.

Passo 4: Movimentar o ponto B. Qual figura foi formada pelo rastro? Justifique.

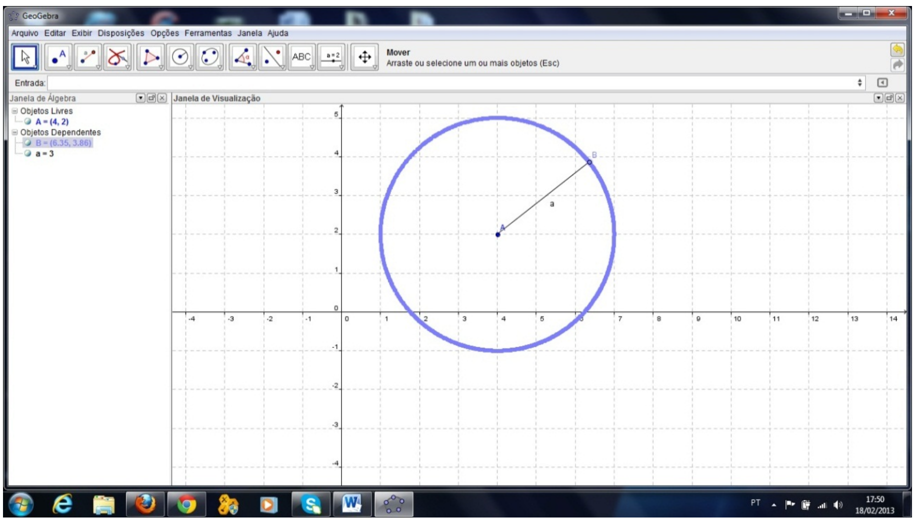

Figura 4.1: Obtenção de uma circunferência

Atividade 2: equação geral da circunferência.

Objetivo: Descobrir o centro e o raio de uma circunferência dada a sua equação geral.

Passo 1: No campo de entrada do Geogebra, digitar a equação $x^2+y^2-4x-8y-5=0$.

Passo 2: Clicar com o botão direito na equação dentro da janela de álgebra e depois clicar em "equação $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$".

Passo 3: Determinar o centro e o raio da circunferência dada.

Passo 4: Agora, calcular os resultados encontrados no item anterior, completando quadrado.

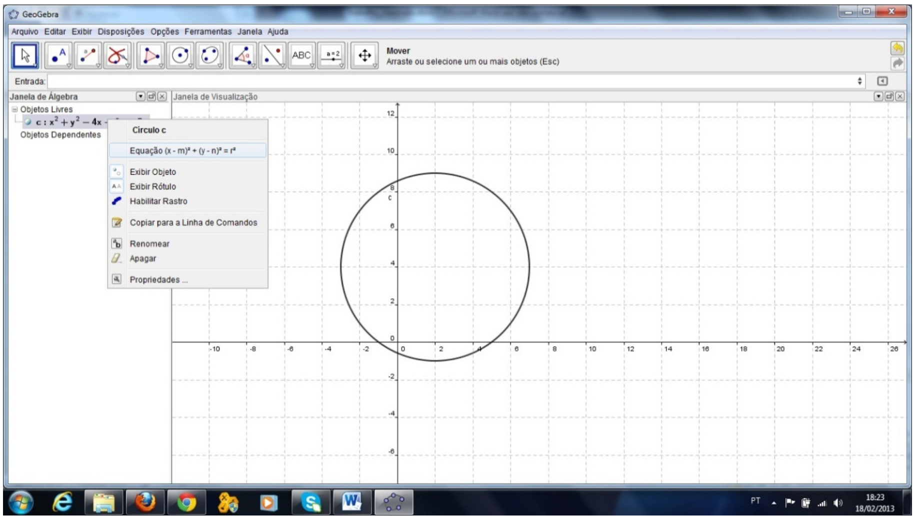

Figura 4.2: Equação geral da circunferência

Atividade 3: posição relativa entre reta e circunferência.

Objetivo: Verificar a posição de uma reta em relação a uma circunferência, ou seja, dizer se ela é secante, tangente ou exterior, através de análise de gráficos e resoluções de equações.

Passo 1: No campo de entrada do Geogebra digitar as equações das retas e da circunferência abaixo.

$$s: 12x-5y=0 \quad r: -x+y=-4 \quad t: -x+y=3$$

$$C: (x-3)^2+(y-1)^2=4$$

Passo 2: Observando-se o gráfico, determinar a posição relativa das retas em relação à circunferência.

Passo 3: Utilizando os comandos do Geogebra já conhecidos, determinar a intersecção entre as retas e a circunferência. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção?

Passo 4: Agora, determinar os pontos de intersecção do item anterior fazendo os cálculos algébricos.

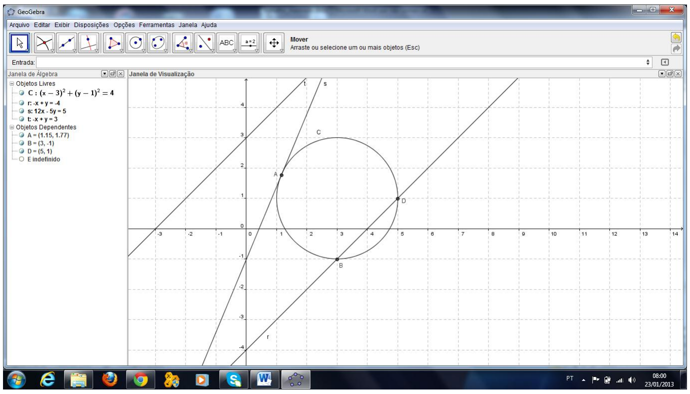

Figura 4.3: Posição relativa entre reta e circunferência

Atividade 4: posição relativa entre reta e circunferência:

Objetivo: Investigar e discutir a posição de uma reta em relação à circunferência, de acordo com o termo independente da reta.

Passo 1: No campo de entrada do Geogebra digitar as equações da reta e da circunferência abaixo:

$$r : 4x + 3y + d = 0 \quad e \quad C : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Passo 2: Inserir um controle deslizante de intervalo variando de -15 a 20 e incremento 1.

Passo 3: Movimentar o controle deslizante analisando os intervalos em que a reta r é secante, tangente ou exterior à circunferência C.

Passo 4: Determinar os intervalos do item c através de cálculos algébricos.

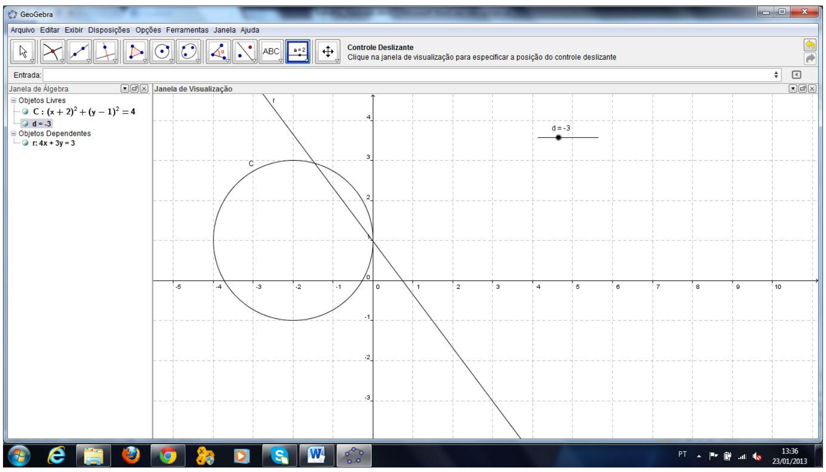

Figura 4.4: Posição relativa entre reta e circunferência

Atividade 5: Posição relativa entre duas circunferências.

Objetivo: Verificar a posição entre duas circunferências, dadas as suas equações.

Passo 1: No campo de entrada do Geogebra digitar as equações das circunferências abaixo.

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad e \quad (x-7)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Passo 2: Observando o gráfico determinar a posição relativa das circunferências.

Passo 3: Utilizando os comandos do Geogebra já conhecidos determinar a intersecção das duas circunferências, caso exista. Quais são as coordenadas dos pontos de intersecção das duas circunferências?

Passo 4: Utilizando os comandos do Geogebra já conhecidos determinar a distância entre os centros das circunferências. Qual a relação entre essa distância e os raios das circunferências?

Passo 5: Calcular algebricamente os resultados obtidos nos passos 3 e 4.

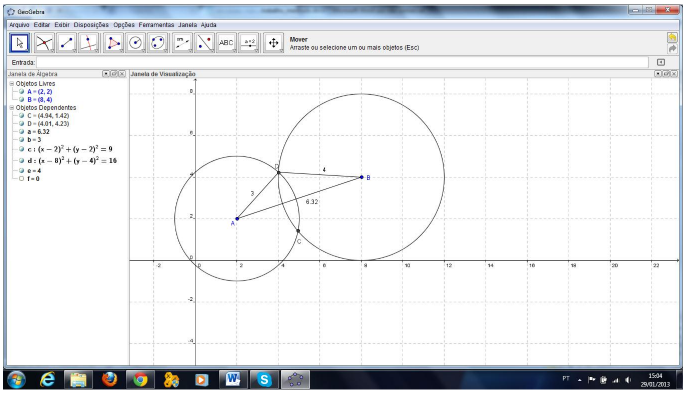

Figura 4.5: Posição relativa entre duas circunferências

Atividade 6: Posição relativa entre duas circunferências.

Objetivo: Investigar e discutir a posição relativa entre duas circunferências de acordo com a variação do raio de uma delas.

Passo 1: Inserir um controle deslizante de nome r, de intervalo variando de 1 a 12 e incremento 1.

Passo 2: Ativar o comando de exibir rastro.

Passo 3: No campo de entrada do Geogebra digitar as equações das circunferências abaixo.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad e \quad (x-6)^2 + y^2 = 16$$

Passo 4: Movimentar o controle deslizante observando a posição relativa das circunferências de acordo com o valor de r. Para qual valor de r as circunferências são secantes, tangentes, internas ou externas?

Passo 5: Calcular os valores de r encontrados no passo 3 através de cálculos algébricos.

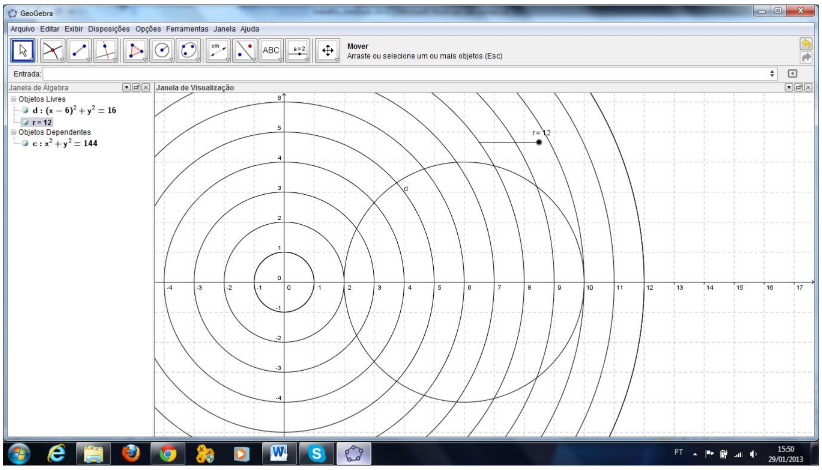

Figura 4.6: Posição relativa entre duas circunferências com rastro

Vamos propor agora duas situações problema onde possamos utilizar o GeoGebra pra resolvê - las.

(PUC/SP): Duas circunferências, ambas de raio igual a 5, têm intersecções sobre a reta de equação $y = -x + 5$. Se o centro de uma delas é a origem do sistema cartesiano, encontre a equação geral da outra.

Passo 1: No campo de entrada digite as equações da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ e da reta $y = -x + 5$.

Passo 2: Determine a reflexão da circunferência em relação a reta que foi criada.Essa é a circunferêcia procurada. Veja a figura a seguir.

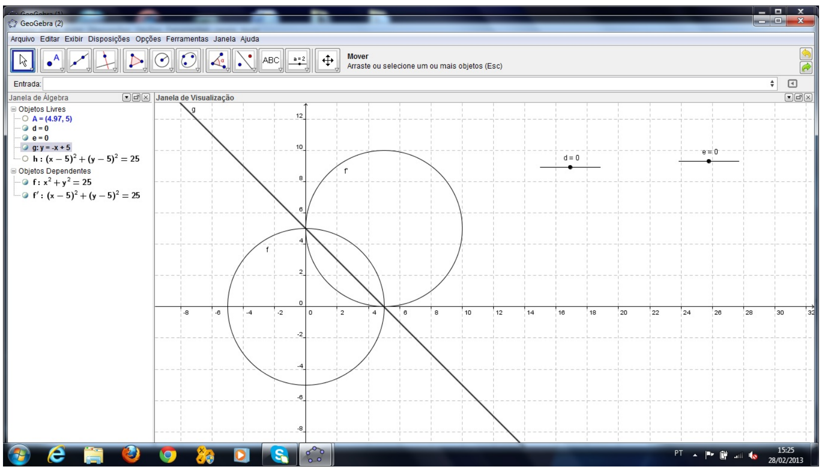

Figura 4.7: figura problema 1

(Unicamp - 2000): Sejam A e B os pontos de intersecção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?

b) Se P é um ponto da circunferência diferente de A e B, calcule as medidas possíveis para os ângulos APB.

Passo 1: Digite no campo de entrada a equação da parábola $y = x^2$.

Passo 2: Crie uma circunferência com centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

Passo 3: Determine a intersecção entre a parábola e a circunferência.

Passo 4: Marque um ponto P na circunferência.

Passo 5: Crie os segmentos AP e BP.

Passo 6: Determine o ângulo APB.

Passo 7: Movimente o ponto P e verifique quais valores o ângulo APB assume. Veja a figura a seguir.

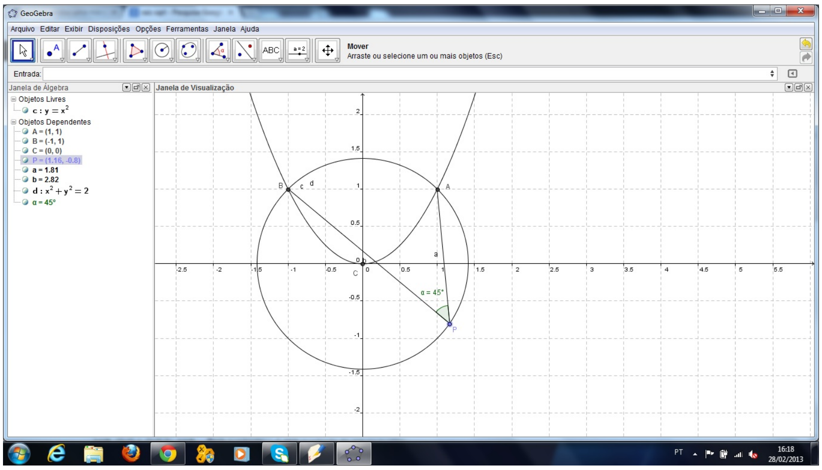

Figura 4.8: figura problema 2

Conclusão

Com base em nossa experiência em sala de aula enquanto professor de Matemática, entendemos que ensinar matemática é um papel desafiador para qualquer professor. Num país onde a educação básica não é prioridade, o professor se desdobra para fazer o seu máximo, porém, as dificuldades são imensas e dar aula se torna um grande desafio.

As escolas públicas não possuem estrutura física nem recursos humanos e materiais suficientes, os alunos não desenvolveram a cultura de estudar, pois estão inseridos em um sistema educacional que não os coloca realmente como foco do ensino e os professores, por sua vez, devido a uma série de fatores, não se sentem, em sua maioria, preparados adequadamente para lidarem com as tecnologias e com o novo contexto sócio-econômico e cultural que vai, aos poucos, invadindo as salas de aula.

Todos esses ingredientes, juntos, fazem com que a educação no Brasil não obtenha o sucesso esperado. Com alunos e professores cada vez mais desmotivados, urge que se pense sobre os problemas que afligem o ensino e sobre novas propostas metodológicas que estejam mais próximas dos educandos e que despertem nos mesmos o interesse por aprender, especialmente a Matemática.

Diante desse contexto, interessamo-nos por realizar uma pesquisa que pudesse estimular a discussão sobre novas possibilidades metodológicas a serem usadas para se ensinar Matemática.

Durante a pesquisa e a observação empírica, por meio de nossa própria experiência diária em sala de aula, percebemos que o uso de tecnologias na educação é uma ferramenta muito importante para o desenvolvimento do trabalho pedagógico. Quando está no laboratório de informática da escola, o aluno se sente motivado e interessado, o que pode ser percebido em suas expressões faciais, em seu comportamento, na sua participação durante a aula, na realização das atividades, no comprometimento com a tarefa, enfim, a vontade de aprender é diferente de quando ele está na sala de aula, sentado, mergulhado em seus pensamentos, esperando calmamente que o professor escreva longas equações no quadro.

Nossa pesquisa mostra que existem vários softwares educacionais disponíveis, que podem ser usados para se ensinar Matemática, porém, foi com o programa Geogebra que tivemos uma grande identificação, pois se trata de um software livre, muito didático, e, principalmente, um excelente recurso para se ensinar Geometria Analítica, que é uma das áreas da Matemática em que os alunos demonstram maior dificuldade de aprendizagem, tanto pela complexidade do conteúdo quanto pela falta de recursos além do quadro, do giz e da exposição oral do professor.

Depois de pesquisar várias atividades que usam o Geogebra para ensinar Geometria Analítica, pudemos elaborar algumas para o ensino da circunferência. Acreditamos que essas e outras atividades que usam o Geogebra facilitam o aprendizado, pois as aulas se tornam mais dinâmicas e, consequentemente, o aluno se sente mais motivado. A tecnologia está inserida no mundo moderno, e o professor não pode se abster de utilizá-la em suas aulas.

É responsabilidade do professor de Matemática munir os alunos de conhecimentos matemáticos, haja vista serem estes essenciais para sua vida pessoal e profissional. A escola deve ser a mediadora entre tais conhecimentos e o indivíduo, para que o mesmo possa, nos momentos oportunos, atuar criticamente frente ao mundo e às problemáticas da vida. Por isso, é importante que o professor repense cotidianamente sua prática pedagógica e reflita sobre como tem feito a abordagem dos conteúdos matemáticos com seus alunos, de modo a analisar em que medida seu trabalho está sendo efetivo e quais pontos ainda estão falhos.

Desse modo, o professor saberá reconhecer a necessidade de adotar novas metodologias e recursos que o auxiliem a cumprir a sua tarefa, que é fazer com que os alunos apreendam e compreendam os conhecimentos matemáticos e saiba utilizá-los em sua vida cotidiana. Neste ponto, acreditamos que o programa Geogebra configura-se como um desses recursos que servirão de suporte para o trabalho do professor com os conteúdos da Geometria Analítica. os quais podem ser encontrados em Reis e Silva [2].

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, gelson et. al.. *Matemática*: Volume Único. São Paulo, SP: atual, 2002. 660 p.

[2] REIS, genésio lima dos; SILVA, valdir vilmar da. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Cientifícos, 1993. 227 p.

[3] BIANCHINI, edwaldo; PACCOLA, herval; *Curso de Matemática*.2ª ed., São Paulo, SP: Moderna, 1998. 689 p.

[4] PCN+, ENSINO MÉDIO, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias". Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf, acesso em 08 de janeiro de 2013

[5] ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias". Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf`, acesso em 08 de janeiro de 2013.

[6] Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/index.html, acesso em 08 de janeiro de 2013

[7] Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf, acesso em 08 de janeiro de 2013