



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Números Complexos e Transformação de Möbius

por

Helder Rodrigues Pereira

Goiânia  
2013

Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística

Números Complexos e Transformação de  
Möbius

Por

Helder Rodrigues Pereira

Goiânia  
2013

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):	Helder Rodrigues Pereira				
Email:	helderdavinci@yahoo.com.br				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não					
Vínculo empregatício do autor			Secretaria de Estado de Educação do DF		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior		Sigla:	CAPES	
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	05.509.077/000105
Título:	Números Complexos e Transformação de Mobius				
Palavras-chave:	Números Complexos, Equações Algébricas, Transformação de Mobius.				
Título em outra língua:	Complex Numbers and Mobius transformation				
Palavras-chave em outra língua:	Complex Numbers, Algebraic Equations, Mobius Transformation.				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	05/07/2013				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional				
Orientador (a):	Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo				
E-mail:	melo@mat.ufg.br				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Helder Rodrigues Pereira

# Números Complexos e Transformação de Möbius

*Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática e Estatística da UFG, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

**Área de concentração:** Matemática do ensino básico.

**Orientador:** Prof. Dr. Dr. Maurílio Márcio Melo

Goânia, 05 de julho de 2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
GPT/BC/UFG**

Pereira, Helder Rodrigues.  
P436n Números complexos e transformação de Mobius  
[manuscrito] / Helder Rodrigues Pereira. - 2013.  
53 f. : figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Márcio Melo.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de  
Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.  
Bibliografia.

1. Números complexos. 2. Equações algébricas. 3.  
Mobius, Transformações de. I. Título.

CDU: 511.11

**Helder Rodrigues Pereira**

## **Números Complexos e a Transformação de Möbius**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 05 de julho de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Maurício Márcio Melo**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca



---

**Prof. Dr. Walter Batista dos Santos**  
Membro-UaB



---

**Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Helder Rodrigues Pereira**

**Graduou-se em Matemática na UnB - Universidade de Brasília. Atualmente trabalha com turmas do Ensino Médio no Centro Educacional Leonardo da Vinci do Distrito Federal e também leciona na SEEDF - Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal.**

# Dedicatória

À Deus, à minha esposa Maria Helena e aos meus trigêmeos: Arthur,  
Gustavo e Diana.



# Agradecimentos

A todos os meus colegas do pólo de Anapólis.

Aos companheiros Carlos, Ronam e Walter pela solidariedade nos momentos mais difíceis.

Ao grupo de professores da UFG que acolheu este projeto, em especial, aos professores Mário, Jesus e Maurílio.

“Se cheguei até aqui, é porque estive apoiado em ombros de gigantes.”  
Isaac Newton

# Resumo

O conjunto dos números complexos surgiu da necessidade da expansão do conjunto dos números reais visando a resolução de equações algébricas. O fato se deu na Europa no século dezesseis. Grandes matemáticos italianos como Scipione, Tartaglia, Cardano e Bombelli contribuíram para isto. Este foi o passo inicial que hoje nos permite conhecer as raízes quadradas de um número negativo.

Um conjunto numérico não precisa ter necessariamente elementos associados à numeração, medição ou a contagem. O conjunto das partes de um conjunto de objetos, munido das operações união e interseção, pode ser um conjunto numérico mesmo que seus elementos não sejam números. O corpo não ordenado dos números complexos é um conjunto numérico (onde os números são pares ordenados) e pode ser representado por outras estruturas isomorfas a este conjunto como as matrizes quadradas de ordem dois ou como classes de restos de polinômios.

Certas funções complexas colaboram para um melhor entendimento das transformações geométricas. A transformação de Möbius é um bom exemplo de função complexa que aplicada sobre uma curva pode gerar os efeitos de rotação, translação, dilatação ( ou contração) e inversão.

**Palavras-chave:** Números Complexos, Equações Algébricas, Transformações de Möbius.

# Abstract

The set of complex numbers arose from the necessity of expanding the set of real numbers with the aim of solving algebraic equations. That has happened in Europe in the sixteenth century. Great Italian mathematicians as Scipione , Tartaglia, Cardano and Bombelli, contributed. This was the initial step that now allows us to know the square root of a negative number.

A set numeric need not necessarily associated elements numbering, measuring or a count. O set of parts, a set of objects, provided the operations union and intersection, can be a set number even if its elements are not numbers. The body unordered of the complex numbers is a set of numbers (where the numbers are ordered pairs ) and can be represented by other structures, isomorpha to this set as the square matrices as two or classes of residual polynomial.

Certain complex functions contribute for a better understanding of geometric transformations. The transformation of Möbius is a good example of complex function, applied on a curve that can generate the effects of rotation, translation, dilation (or contraction) and inversion.

**Keywords:** Complex Numbers, Algebraic Equations, Transformations Möbius

# Sumário

1	Introdução	14
2	As Equações do Terceiro Grau	15
2.1	A contribuição de Bombelli . . . . .	17
3	O Corpo dos Números Complexos	21
3.1	Estruturas com uma Operação . . . . .	21
3.2	O Corpo: Uma Estrutura com duas Operações . . . . .	22
3.3	O Corpo dos Números Complexos . . . . .	23
3.4	Os Reais como subcorpo dos Complexos . . . . .	25
3.5	Representação dos Números Complexos por Matrizes . . . . .	27
3.6	Números Complexos como Classes de Resto . . . . .	28
3.6.1	Soma de Duas Classes . . . . .	29
3.6.2	Produto de Duas Classes . . . . .	30
3.7	Forma Algébrica e Representações Geométricas . . . . .	32
3.8	Forma Trigonométrica . . . . .	33
3.8.1	Argumento . . . . .	33
3.9	Operações na Forma Trigonométrica . . . . .	34
3.10	Forma Exponencial de $z$ . . . . .	36
3.11	Transformação de Möbius . . . . .	36
3.11.1	Função Complexa . . . . .	36
3.11.2	Transformação de Möbius . . . . .	37
3.11.3	Matriz Associada à Transformação de Möbius . . . . .	38
3.11.4	Translação . . . . .	38
3.11.5	Dilatação ou Contração . . . . .	39
3.11.6	A Unidade Imaginária $i$ como Operadora de Rotação . . . . .	39
3.11.7	A inversão $\frac{1}{z}$ . . . . .	41
4	Considerações Finais	46

# 1 Introdução

No contato diário com alunos de Ensino Médio muitas vezes notamos uma estranheza quando abordamos o tema Números Complexos. A utilização de expressões como solução não-real ou imaginária para uma equação que durante quase toda a formação colegial do aluno não tinha solução, deve vir acompanhada do convencimento de que estes são termos técnicos, para não lançar dúvidas em relação à existência e autenticidade destes números. Este trabalho tem o propósito de contribuir com o entendimento deste tópico, apresentando os complexos, realmente como conjunto numérico.

No capítulo 2, contaremos um pouco da história dos números complexos, lembrando que a necessidade de buscar uma extensão para o conjunto dos números reais, foi devido à busca de soluções para equações de terceiro grau e não para as equações do segundo grau, como geralmente é abordado. Mostraremos como se deu o surgimento da representação  $\sqrt{-1}$  por volta do século XVI, na Europa, especialmente na Itália, com a grande contribuição dos matemáticos Scipione, Cardano, Tartaglia e Bombelli.

No capítulo 3, apresentaremos as cinco condições para uma estrutura algébrica ser definida como conjunto numérico. Mostramos que o conjunto dos números complexos formam um corpo, onde está imerso o conjunto dos números reais, chegando então à conclusão de que todo número real é também um número complexo.

Talvez a baixa aceitação por parte de alguns alunos dos complexos como números, resida no fato destes elementos não estarem associados à contagem. Com o intuito de diminuir essa possível rejeição, ainda no capítulo 3, representaremos o conjunto dos números complexos como matrizes de ordem dois e como classes de restos de polinômios. Em seguida apresentaremos as operações na forma algébrica, trigonométrica e a forma exponencial de um número complexo, pouco utilizada na educação básica.

Ainda capítulo 3, definiremos o que é uma função complexa e apresentaremos a Transformação de Möbius, uma função complexa que gera transformações geométricas, com uma atenção especial para a inversão.

## 2 As Equações do Terceiro Grau

Historicamente, o surgimento de um novo conjunto numérico deve-se à necessidade da extensão de outro conjunto já existente, uma vez que o desenvolvimento da ciência e do pensamento humano exigem novos conhecimentos. É comum que pessoas associem a origem dos números complexos à resolução de equações do segundo grau que não possuíam raízes reais. Porém a verdadeira origem dos complexos está diretamente ligada às resoluções das equações cúbicas. O contexto desta origem se dá na Itália renascentista no século XVI, tendo como segundo plano, uma história de disputas e intrigas intelectuais envolvendo matemáticos como Scipione, Fiori, Tartaglia e Cardano e, posteriormente com as observações e notações criadas por Bombelli.

Um dos primeiros livros relevantes de álgebra do século XV foi o “Summa de arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita” (1494) de Luca Pacioli. Em sua obra, Pacioli afirmava que a solução de uma equação cúbica era tão impossível quanto o problema da quadratura do círculo, proposto pelos antigos geômetras gregos. Ao mesmo tempo que tal afirmação afastou grandes estudiosos na busca pelas soluções das cúbicas, estimulava outros.

O Precursor na resolução de uma cúbica foi Scipione Del Ferro (1465-1526), no ano de 1505, quando resolveu o caso restrito da equação  $x^3 + px = q$ , com  $p$  e  $q$  positivos, guardando a solução para si e divulgando-a apenas para um grupo restrito de alunos, entre eles Antônio Maria Fiore. De acordo com [5], tal prática era comum aos matemáticos da época, pois os mesmos tinham o hábito de propor questões inéditas aos colegas, em forma de desafios, buscando o reconhecimento da superioridade intelectual.

Em 1535, Nicolo de Bréscia (1499-1557), professor de matemática, mais conhecido por Tartaglia (“o gago” devido a uma limitação na fala), encontrou um método de resolução para a equação do tipo  $x^3 + px^2 = q$ , mantendo-o em segredo. Tartaglia sabia que Fiore tinha sido aluno de Scipione, já falecido, e também era sabedor da solução da cúbica desenvolvida por seu mestre. Marcou-se então um duelo entre os dois, onde cada um deveria resolver problemas associados às respectivas equações que o outro dominava. Tartaglia saiu vencedor, pois temendo pela derrota, empenhou-se na resolução da equação do adversário obtendo sucesso dez dias antes do confronto, enquanto Fiore não conseguiu resolver os problemas propostos por Tartaglia que envolviam as equações do tipo  $x^3 + px^2 = q$ , especialidade de seu adversário.

Tartaglia, dedicando-se ao estudo das cúbicas, descobriu uma solução geral para equações do tipo  $x^3 \pm px = q$ , mantendo-a mais uma vez em segredo, afirmando que num momento oportuno publicaria suas realizações no campo da álgebra. Sua fama correu toda a Itália chegando ao conhecimento de Girolamo Cardano (1501-1576), um genial e arrogante professor de matemática e praticante de medicina em Milão. Cardano estava escrevendo o seu *Ars Magna* e desejava enriquecer o seu trabalho com as tão desejadas soluções de cúbicas.

Em 1539, após muita insistência e um juramento de não revelá-las, e escrevê-las apenas em código, Cardano conseguiu de Tartaglia a revelação de seu segredo, sob a forma de um poema de vinte e cinco versos [6], dos quais os nove primeiros diziam respeito à equação  $x^3 + px = q$ .

Porém, para desespero de Tartaglia, que tinha a esperança de dar ao mundo um trabalho imortal, Cardano quebrou sua promessa e, em 1545, publicou no *Ars Magna* a solução de Tartaglia para equações cúbicas. Utilizando termos algébricos atuais, podemos reescrever como se segue o desenvolvimento e a regra para a resolução de uma equação cúbica reduzida ao tipo  $x^3 + px = q$ , apresentada por Cardano ficando assim conhecida como fórmula Cardano-Tartaglia.

Para chegarmos a esta fórmula vamos considerar a identidade

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3,$$

válida para quaisquer  $a$  e  $b$ . Comparando com a equação  $x^3 + px = q$  temos as equivalências  $x = a - b$ ,  $p = 3ab$  e  $q = a^3 - b^3$  de onde obtemos as expressões

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27}$$

e

$$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2.$$

Adicionando os termos de cada membro destas duas últimas equações, obtemos as expressões

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27}, (a^3 + b^3)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27},$$

$$|a^3 + b^3| = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \Rightarrow a^3 + b^3 = \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}.$$

De  $a^3 + b^3 = \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$  e  $a^3 - b^3 = q$ , segue:

$$a^3 = \frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

e analogamente,

$$b^3 = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}.$$

Para o caso  $a^3 = \frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$  temos

$$a^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$



e

$$b = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Como a solução desejada é  $x = a - b$ , temos que

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Em *Ars Magna*, Cardano chama as raízes negativas de uma equação como fictícias e as raízes positivas de reais. Aborda de certa forma o número de raízes associadas ao grau da equação e a relação entre os coeficientes. As raízes de números negativos são tratadas por ele como sofisticas [4] e, embora não totalmente desprezadas por ele, há um prejuízo no avanço de seus estudos, uma vez que suas soluções e demonstrações tinham por base argumentos geométricos, influenciados ainda pelos métodos encontrados nos elementos de Euclides.

Cardano introduziu em *Ars Magna* a transformação de uma equação cúbica completa em outra equação sem o termo de segundo grau, isto é, escreve a equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  na forma  $y^3 + py = q$ , onde  $y = x + \frac{a}{3}$ , como visto em [10].

#### Exemplo 2.1

Vamos eliminar o termo quadrático da equação  $x^3 + 6x^2 + x + 2 = 0$ . Fazendo  $x = y - 2$ , com  $a = 6$ ,  $b = 1$  e  $c = 2$  obtemos a equação

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + (y - 2) + 2 = 0,$$

ou

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + y - 2 + 2 = 0$$

ou

$$y^3 - 11y + 16 = 0.$$

Tal equação pode ser resolvida pelo método de Tartaglia.

## 2.1 A contribuição de Bombelli

A fórmula de Cardano-Tartaglia só era válida se  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$ , pois ainda havia o problema de extrair raízes quadradas de números negativos. Cardano se esquivava de problemas, chamados à época de *casus irreducibilis*, que inviabilizam a sua fórmula. Ainda assim ele teve o mérito de apresentar em *Ars Magna* o problema de determinar dois números cujo produto é 40 e cuja soma seja 10, encontrando por resultado as expressões  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ , mas não dando significado para tais expressões e classificando-as como uma “tortura mental”.

Graficamente as interseções da parábola de equação  $y = x^2 - 15$  com a hipérbole  $y = \frac{4}{x}$  estão representadas na figura 1.

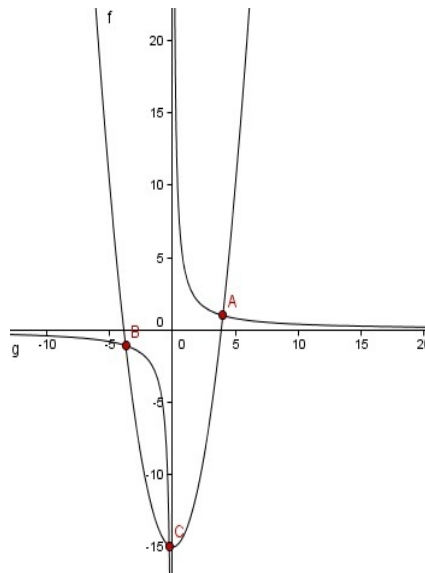


Figura 1: As soluções da equação apresentada são as abscissas das interseções das curvas.

Observa-se que existem três números reais que possibilitam esta interseção. Algebricamente, a equação  $x^3 = 15x + 4$  conhecida como equação de Bombelli (Rafael Bombelli, 1526 -1572), que representa tal situação, não tem a característica necessária para utilizar o método de Cardano, portanto, a fórmula não se aplica a este caso. A tentativa de aplicar a fórmula conduz a

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Percebe-se então que algebricamente a equação não possui solução real, uma vez não existir a raiz quadrada de -121. Isto intrigava Bombelli, pois é fácil de verificar que 4 é uma solução real. Então estava posto um novo desafio: Como chegar a esta raiz operando com aquilo que não existe? Em 1572, trabalhando com as expressões desta forma, utilizando as mesmas operações para os números reais e considerando a igualdade  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ , Bombelli conjecturou que os possíveis valores complexos dos radicais  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  deveriam ser relacionados com os próprios radicais, ou seja, eles deveriam diferir apenas no sinal [4]. Isto o motivou a utilizar  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$ , com  $a > 0$  e  $b > 0$  a serem determinados.

Sendo assim temos que as igualdades

$$2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3,$$

$$2 - \sqrt{-121} = (a - b\sqrt{-1})^3 = a^3 - 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 - b^3(\sqrt{-1})^3.$$

De onde segue que  $a(a^2 - 3b^2) = 2$  e  $b(3a^2 - b^2) = 11$  .

Se as soluções forem inteiras, a primeira dessas condições nos diz que  $a$  deve ser igual a 1 ou 2, e a segunda condição assegura que  $b$  tem valor 1 ou 11. Como apenas as opções  $a = 2$  e  $b = 1$  satisfazem a ambas simultaneamente, obtemos as igualdades

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3$$

e

$$2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3.$$

Bombelli concluiu então que uma das soluções para a equação cúbica  $x^3 = 15x + 4$  é

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3},$$

$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \Rightarrow x = 4.$$

Por este método ele consegue provar a realidade das raízes da cúbica através da fórmula de Cardano e utilizando as operações de adição, subtração e multiplicação dos números reais. Em particular destaca-se aqui o fato notável mostrado por ele que números reais poderiam ser obtidos através de operações com expressões contendo números desconhecidos até então, ajudando a desmistificar estes números, ainda que a plena aceitação destes seja obtida apenas no século XIX com os trabalhos de Wessel, Argand e, sobretudo, Gauss.

Outra admirável contribuição de Bombelli foi a larga e renovadora notação, empregando símbolos em suas expressões matemáticas como Rc (raiz cúbica) e Rq (raiz quadrada), como mostra o quadro (figura 2). Em seguida, um trecho da sua obra *Algebra*.

Trecho do livro *Algebra* [3]

*"Encontrei uma outra espécie de R.c (raiz cúbica), legado muito diferente dos outros, que surge no Capítulo de cubo igual a tanto e número, quando o cubo da terça parte do tanto é maior do que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, a dita espécie de R.q (raiz quadrada) tem no seu algoritmo operações diferentes das outras e nome diferente porque quando o cubo da terça parte do tanto é maior do que o quadrado da metade do número, não se pode chamar nem mais, nem menos, pelo que o chamarei ?mais de menos?, quando ele deva ser acrescentado, e, quando deva ser diminuído chamarei ?menos de menos? e esta operação é muito necessária, mais do que a outra R. c. L. (raiz cúbica da expressão entre parêntesis) (...)"*

Após Bombelli os estudos das resoluções das cúbicas estacionaram por quase duzentos anos, mas neste período vários matemáticos contribuíram para a construção e fundamentação da teoria dos números complexos. Os

Notação Moderna	Publicado por Bombelli	Escrito por Bombelli
$5x$	$\downarrow_5$	$\downarrow_5$
$5x^2$	$\downarrow_5^2$	$\downarrow_5^2$
$\sqrt{4 + \sqrt{6}}$	Rq[4pRq6]	R[4pR6]
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}}$	Rc[2pRq[0m121]]	R <sup>3</sup> [2pR[0m121]]

Figura 2: Notações utilizadas por Bombelli.

termos real e imaginário foram introduzidos por René Descartes em 1637. Carl F. Gauss foi o primeiro a utilizar a expressão *números complexos*, em 1831, sendo que Euler em 1777 já utilizava o símbolo  $i = \sqrt{-1}$ .

A representação geométrica surgiu graças a três matemáticos que, de maneira independente e em momentos distintos, desenvolveram seus trabalhos, sendo eles: Caspar Wessel, Jean Robert Argand e Carl F. Gauss. Embora Wessel tenha sido o precursor da representação, o mérito coube aos dois últimos gerando a denominação Plano de Argand-Gauss ao plano complexo.

Com esta abordagem inicial da história dos números complexos, partiremos nos próximos capítulos para a sua estruturação algébrica como um corpo, bem como, outras alternativas para suas representações.

### 3 O Corpo dos Números Complexos

Um corpo algébrico é um conceito fundamental da álgebra e para entendê-lo devemos primeiro abordar algumas definições encontradas em [2].

#### *Definição 3.1*

*Uma operação binária definida em um conjunto não vazio  $A = \{a, b, c, \dots\}$  é toda operação  $(*)$  que associa cada par ordenado  $(a, b)$  de elementos pertencente a  $A$ , a um elemento do próprio conjunto  $A$ . A condição de que o elemento obtido através da operação  $(*)$  esteja também em  $A$ , é denominada *Condição de Fechamento*.*

#### Operação Binária

$$(*) : A * A \rightarrow A$$

#### Exemplo 3.1

A aplicação  $f : \mathbb{N} * \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(a, b) = a + b$  é uma operação binária, onde  $(+)$  é a adição usual e  $\mathbb{N}$  o conjuntos dos naturais.

#### Exemplo 3.2

A aplicação  $f : \mathbb{N} * \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $f(a, b) = a - b$ , onde  $(-)$  é a subtração usual não é uma operação binária, pois nem sempre a subtração de dois números naturais resultará em outro número natural.

#### *Definição 3.2*

*Tem-se que um elemento  $x \in \mathbb{A}$  é denominado elemento idempotente quando  $x * x = x$  e um elemento  $z \in \mathbb{A}$  é denominado elemento neutro quando para todo  $x \in \mathbb{A}$ ,  $z * x = x * z = x$ .*

### 3.1 Estruturas com uma Operação

#### *Definição 3.3*

*Um grupóide é um par  $(A, *)$  formado por um conjunto  $A$  e uma operação binária definida em  $A$ .*

#### *Definição 3.4*

*Uma operação binária  $(*)$  em  $\mathbb{A}$  é dita comutativa se para todo  $x, y \in \mathbb{A}$ ,  $x * y = y * x$ . Sempre que a operação binária  $(*)$  for comutativa, a classificação passa a ser: semigrupo, monóide, grupo comutativo ou abeliano.*

#### *Definição 3.5*

*Uma operação binária  $(*)$  em  $\mathbb{A}$  é dita associativa se para todo  $x, y, z \in \mathbb{A}$ ,  $(x * y) * z = x * (y * z)$ . Neste caso a estrutura  $(\mathbb{A}, *)$  é um semigrupo.*

#### *Definição 3.6*

*Um semigrupo  $(\mathbb{A}, *)$  será um monóide caso possua um elemento neutro [2].*

### Definição 3.7

Seja  $(\mathbb{A}, *)$  uma estrutura algébrica e  $x \in \mathbb{A}$  o seu elemento neutro. Diz-se que  $y$  é o oposto ou simétrico de  $z$ , com  $y$  e  $z \in \mathbb{A}$ , se  $y * z = z * y = x$ .

### Definição 3.8

Um monóide  $(\mathbb{A}, *)$  é definido como grupo se todo elemento de  $\mathbb{A}$  possui elemento oposto, isto é, para todo  $x \in \mathbb{A}$  existe  $y \in \mathbb{A}$  tal que  $x * y = y * x = z$ , onde  $z$  é o elemento neutro de  $\mathbb{A}$ . Como já dito anteriormente, se  $(*)$  for comutativa, então  $(\mathbb{A}, *)$  é um grupo abeliano.

## 3.2 O Corpo: Uma Estrutura com duas Operações

### Definição 3.9

Seja  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$  um estrutura algébrica com duas operações,  $\oplus$  definida como adição e  $\odot$  definida como multiplicação. Esta estrutura será chamada de corpo se são válidas as seguintes propriedades:

- i)  $(\mathbb{A}, \oplus)$  é um grupo abeliano,
- ii)  $(\mathbb{A} - \{0\}, \odot)$ , é um grupo abeliano,
- iii) A multiplicação  $\odot$  é distributiva em relação a adição  $\oplus$ .

### Adição

No corpo  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$  a adição  $\oplus$  satisfaz as propriedades:

- A1) Associativa,
- A2) Admite elemento neutro, que definiremos como 0,
- A3) Todo elemento do conjunto  $\mathbb{A}$  possui um simétrico, ou seja, se  $x \in \mathbb{A}$  existe  $y \in \mathbb{A}$  tal que  $x + y = 0$ . Denominamos o simétrico de  $x$  por  $-x$  e
- A4) Comutativa.

### Multiplicação

No corpo  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$  a multiplicação  $\odot$  satisfaz as propriedades:

- M1) Associativa,
- M2) Admite elemento neutro, que definiremos como 1,
- M3) Todo elemento não nulo de  $\mathbb{A}$  é inversível, ou seja, se  $x \in \mathbb{A}$  existe  $y \in \mathbb{A}$  tal que  $x.y = 1$ . Denominamos o inverso de  $x$  por  $x^{-1}$ ,
- M4) Comutativa,
- M5) Distributiva em relação à adição  $\oplus$ .

Os grupos abelianos  $(\mathbb{A}, \oplus)$  e  $(\mathbb{A}, \odot)$  chamam-se, respectivamente, grupo aditivo e grupo multiplicativo do corpo  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$ .

### Exemplo 3.3

A estrutura  $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ , onde  $\mathbb{Q}$  é o conjunto dos números racionais e  $\oplus$  e  $\odot$  são as operações usuais de adição e multiplicação, representa um corpo.

#### Exemplo 3.4

A estrutura  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ , onde  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos números inteiros e  $\oplus$  e  $\odot$  são as operações usuais de adição e multiplicação, não representa um corpo, pois fica claro que a propriedade M3 não é satisfeita.

### 3.3 O Corpo dos Números Complexos

#### Definição 3.10

O conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos é representado por todos os pares ordenados pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ , onde  $\mathbb{R}$  é o corpo dos números reais, munido de duas operações a adição  $\oplus$  e a multiplicação  $\odot$ .

Sejam  $z = (a, b)$  e  $w = (c, d)$  pertencentes a  $\mathbb{C}$ . A operação de adição é definida por

$$z + w = (a + c, b + d),$$

e a multiplicação de números complexos definida por

$$z.w = (ac - bd, ad + bc).$$

#### Observações

*i)* Considere o par  $(x, 0)$  como sendo o número real  $x$  e o par  $(0, 1)$  representado pelo símbolo  $i$ , como unidade imaginária.

*ii)* A multiplicação por escalar é a usual, sendo assim  $a(x, y) = (ax, ay)$

*iii)* Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais, então a expressão  $x + yi$  pode ser assim representada:

$$x + yi = (x, 0) + (y, 0).(0, 1) = (x, 0) + (y.0 - 1.0, y.1 + 0.0),$$

$$x + yi = (x, 0) + (0, y) = (x, y).$$

Todo par ordenado  $(x, y)$  de números reais será representado no campo dos complexos pela expressão  $x + yi$ , denominada *forma algébrica*, sendo  $x$  a parte real do número e  $y$  a parte imaginária. A forma algébrica do número complexo  $(2, 3)$  será portanto  $2 + 3i$ , cuja parte real é 2 e a parte imaginária 3.

*iv)* No desenvolvimento das expressões com números complexos substitua-se o termo  $i^2$  pelo número real -1.

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

*v)* Dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  são iguais se, e somente se,  $a = c$  e  $b = d$ .

*vi)* Seja  $z = (x, y)$  um número complexo. Definiremos o oposto de  $z$  como sendo o número  $-z = (-x, -y)$ .

vii) O número complexo nulo será o número cujo par ordenado associado é  $(0, 0)$ .

**Teorema 3.1**

O conjunto dos números complexos munido das operações adição  $\oplus$  e multiplicação  $\odot$  é um corpo.

**Demonstração**

Devemos verificar que a estrutura algébrica dos números complexos satisfaz as quatro propriedades para a adição e as cinco para a multiplicação aqui definidas. Utilizaremos os complexos  $z = (a, b)$ ,  $w = (c, d)$  e  $k = (e, f)$ , para fazer tal verificação.

Para a adição temos as seguintes propriedades:

A1) A adição é associativa.

$$(z + w) + k = z + (w + k).$$

De fato,

$$(z+w)+k = (a+c, b+d)+(e, f) = (a+c+e, b+d+f) = (a+(c+e), b+(d+f)) = z+(w+k).$$

A2) A adição admite elemento neutro.

Para qualquer complexo  $z = (a, b)$  basta tomar  $0 = (0, 0)$  e teremos  $z+0 = z$ .

A3) Existência do simétrico.

Para todo  $z = (a, b)$  existe o número  $-z = (-a, -b)$  tal que  $z+(-z) = (0, 0)$ .

A4) A adição é comutativa

$$z + w = w + z$$

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = w + z.$$

Para a multiplicação temos as seguintes propriedades:

M1) A multiplicação é associativa, isto é

$$(z.w).k = z.(w.k).$$

Realmente,

$$(z.w).k = (ac - bd, ad + bc).(e, f) = ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd).f + (ad + bc)e),$$

$$(z.w).k = (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf),$$

$$(z.w).k = (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)),$$

$$(z.w).k = (a, b)(ce - df, cf + de) = z.(w.k).$$

M3) Admite elemento neutro, dado por

$$(1, 0) \equiv 1.$$

Realmente,

$$z.(1, 0) = (a, b)(1, 0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a, b) = z.$$



M4) Todo número complexo não nulo é inversível, ou seja, se  $z \in \mathbb{C}^*$ , existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z.w = 1$ , isto é

$$z.w = (1, 0),$$

$$(a, b).(c, d) = (1, 0) \Rightarrow (ac - bd, ad + bc) = (1, 0).$$

Temos então que  $ac - bd = 1$  e  $ad + bc = 0$ , resolvendo este sistema encontraremos

$c = \frac{a}{a^2+b^2}$  e  $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$ . O inverso multiplicativo de  $z \neq 0$  será denotado por  $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ .

M5) Comutativa, isto é

$$z.w = w.z.$$

Realmente,

$$z.w = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + ad) = w.z.$$

M6) Distributiva em relação à adição, isto é

$$z.(w + k) = z.w + z.k$$

Realmente,

$$z.(w + k) = (a, b).(c + e, d + f),$$

$$z.(w + k) = (a.(c + e) - b.(d + f), a.(d + f) + b.(c + e)),$$

$$z.(w + k) = (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) = z.w + z.k.$$

Assim os números complexos munidos desta estrutura é um corpo algébrico.

### 3.4 Os Reais como subcorpo dos Complexos

#### *Definição 3.11*

Um conjunto não vazio  $\mathbb{B}$  de um corpo  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$  é um subcorpo de  $\mathbb{A}$  se, e somente se,  $(\mathbb{B}, \oplus, \odot)$  é um corpo.

#### *Teorema 3.1*

O conjunto dos números complexos da forma  $(x, 0)$  é um subcorpo de  $\mathbb{C}$ .

#### *Demonstração*

Seja  $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C}, z = (x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ . Agora vamos verificar o fechamento para a adição e a multiplicação em  $\mathbb{A}$ .

Para  $z = (x, 0)$  e  $w = (y, 0), z, w \in \mathbb{A}$  temos,

i)  $z + w = (x + y, 0) \in \mathbb{A}$ .

ii)  $z.w = (x.y - 0.0, x.0 + 0.y) = (xy, 0) \in \mathbb{A}$ .

Como todo número  $z \in \mathbb{A}$  é um número complexo, necessariamente todas as propriedades das operações contidas na definição de corpo estão contempladas, de onde concluímos que  $\mathbb{A}$  é um subcorpo dos números complexos.

Entre o subcorpo dos complexos  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$  e o corpo  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  dos números reais pode ser estabelecida uma correspondência biunívoca, onde cada elemento  $(x, 0)$  de  $\mathbb{A}$  está associado a um número real, e reciprocamente, a cada número real associa-se um elemento complexo  $(x, 0)$ . Com estas condições e com o fato dos dois corpos terem mesmo comportamento em relação à adição e multiplicação, eles são definidos como corpos isomorfos [8], havendo diferença apenas na notação das operações adição e multiplicação.

Adição e multiplicação em  $(\mathbb{A}, \oplus, \odot)$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0).$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Adição e multiplicação em  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$

$$a + b = a + b.$$

$$a \cdot b = ab.$$

Dizemos então que o conjunto dos reais está imerso no conjunto dos números complexos, preservando todas as suas propriedades. Portanto todo número real é um número complexo e pode ser representado pelo par  $(x, 0)$ , ou seja, é um número complexo cuja parte imaginária é igual a zero.

Vimos que com o interesse inicial das resoluções de equações algébricas de terceiro grau, chegou-se a uma nova estrutura algébrica, diferente das já existentes, que na verdade é uma extensão dos números reais: o conjunto dos números complexos. Assim como expandiu-se os números naturais a um novo conjunto (os inteiros) afim de novas soluções para novos problemas, temos agora um conjunto que nos permite responder, qual o número que multiplicado por ele mesmo resulta em  $-1$ . O desafio agora é o convencimento que o par  $(0, 1)$  é realmente um número, o que não é de fácil compreensão aos nossos estudantes.

No uso diário a palavra número remete à ideia de um símbolo, associado à medição ou à contagem. Talvez este seja um dos motivos para uma pouca aceitação inicial dos números complexos como conjunto numérico. Tentando minimizar esta dificuldade de compreensão, mostraremos agora uma definição mais ampla para conjunto numérico, sem associar necessariamente seus elementos aos números cardinais. Em seguida construiremos duas formas distintas de representação para o conjunto dos complexos: a forma matricial e as classes de restos de polinômios.

### *Definição 3.12*

*Um conjunto numérico é uma coleção de objetos munida de duas operações binárias, a adição e a multiplicação, ambas comutativas e associativas e a multiplicação distributiva em relação à adição [1].*

Para  $a$  e  $b$  dois elementos de um conjunto temos

i)  $a + b = b + a.$

ii)  $a + (b + c) = (a + b) + c.$

iii)  $a \cdot b = b \cdot a.$

- iv)  $a.(b.c) = (a.b).c$   
v)  $a.(b + c) = a.b + a.c.$

Não há aqui qualquer referência à contagem ou à medição, mas somente de que maneira os elementos do conjunto devem relacionar-se uns com os outros. Está estabelecida aqui uma independência para a ideia de conjunto numérico, podendo agora estender o conceito de número aos elementos de uma estrutura algébrica que satisfaça as relações acima. Esta definição é um passo importante para a compreensão de que o conjunto dos números complexos é um conjunto numérico. A seguir mostraremos duas formas distintas para representarmos o conjunto dos números complexos.

### 3.5 Representação dos Números Complexos por Matrizes

Em [1] observamos que podemos utilizar um subconjunto de matrizes de ordem  $2 \times 2$  para representar números complexos. Um número complexo escrito na forma algébrica  $z = a + bi$ , pode ser representado pela matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , cujo determinante é  $a^2 + b^2$  que corresponde ao quadrado do módulo de  $z$ . Sendo assim os números  $2 + 3i$ ,  $1 + i$  e  $-1 + 2i$  são representados, respectivamente pelas matrizes  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Por se tratar da construção de um novo conjunto numérico, temos que a multiplicação na forma como é definida deve ser comutativa. Tal característica não ocorre no conjunto das matrizes de ordem  $2 \times 2$ , mas pode ocorrer para um subconjunto destas matrizes. Vamos verificar a comutatividade da multiplicação para o caso específico  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - db & cb + da \\ -da - cb & -db + ca \end{pmatrix}.$$

Observando os elementos correspondentes, confirmamos a igualdade e consequentemente a comutatividade da multiplicação para este subconjunto de matrizes. O que devemos fazer aqui é provar que este conjunto de matrizes é isomorfo ao conjunto dos complexos. Para tanto estabelecemos a bijeção

$$a + bi = (a, b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Desta forma podemos escrever  $(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(1,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $(0,1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Devemos agora mostrar que esta aplicação preserva as operações de adição e multiplicação.

**Adição**

A adição dos pares  $(a,b)$  e  $(c,d)$  resulta em  $(a+c, b+d)$ . Utilizando as imagens destes pares na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = (a+c, b+d),$$

mostrando que a soma das imagens é a imagem da soma.

**Multiplicação**

A multiplicação dos pares ordenados  $(a,b)$  e  $(c,d)$  é por definição  $(ac-bd, ad+bc)$ . Utilizando as imagens destes pares na forma matricial e efetuando o produto, temos a igualdade

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix},$$

que é a imagem do par ordenado  $(ac-bd, ad+bc)$ , o que nos leva a concluir que o produto das imagens é a imagem do produto e que o subconjunto das matrizes do tipo  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  é uma forma de representação dos números complexos. As matrizes  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ , representam respectivamente, os números reais e os números imaginários.

Sendo  $i$  a unidade imaginária, temos que  $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Verificamos então que

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1,$$

como já esperávamos.

Mostramos nesta seção que podemos utilizar matrizes quadradas de ordem 2 para representarmos números complexos. A seguir, fazendo uso de polinômios com coeficientes reais, buscaremos uma outra representação para este conjunto.

### 3.6 Números Complexos como Classes de Resto

Consideremos agora o conjunto de polinômios  $P(x)$  com coeficientes reais, munido das operações usuais de adição, multiplicação e divisão, sendo a

multiplicação e adição comutativas e associativas e a multiplicação distributiva em relação à adição.

O elemento neutro para a adição é o polinômio identicamente nulo e para a multiplicação o elemento neutro é o polinômio constante 1. Vamos buscar a partir do conjunto de todos esses polinômios, um subconjunto onde seja possível resolver a equação  $x^2 + 1 = 0$ , que possui solução não real.

O grau de um polinômio  $P(x)$ , que aqui representaremos por  $Gr(P)$ , corresponde ao valor da maior potência de  $x$  com coeficiente não nulo. Sendo assim, para o polinômio  $P(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4$ , por exemplo, temos que  $Gr(P) = 5$ .

Sejam  $A(x), B(x), Q(x)$  e  $R(x)$ , o dividendo, divisor, quociente e o resto em uma divisão de polinômios. Sobre o grau destes polinômios podemos fazer as seguintes considerações:

a) Se  $Gr(A) > Gr(B)$ , então  $Gr(Q) = Gr(A) - Gr(B)$  e  $Gr(R) < Gr(B)$ .

b) Se  $Gr(A) < Gr(B)$ , então  $Q(x) = 0$  e  $R(x) = A(x)$ .

#### Exemplo 3.5

Na divisão de  $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$  por  $B(x) = x^2 + 1$ , temos  $Q(x) = 2x - 3$  e  $R(x) = 2x - 2$ .

#### Exemplo 3.6

Na divisão de  $A(x) = x$  por  $B(x) = x^2 + 1$ , temos  $Q(x) = 0$  e  $R(x) = x = A(x)$ .

Observa-se então que o grau do resto na divisão de dois polinômios é sempre menor que o grau do divisor. Sendo assim, ao dividirmos qualquer polinômio  $A(x)$  por  $B(x) = x^2 + 1$  formaremos, a partir de todos os restos possíveis, um subconjunto de polinômios da forma  $R(x) = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  reais.

Vamos separar agora todos os polinômios  $A(x)$  em subconjuntos, chamados de classes de restos, formados por polinômios que deixam o mesmo resto na divisão por  $x^2 + 1$ . Desta forma os polinômios  $0, x^2 + 1$  e  $x^4 + 3x^2 + 2$  pertencem a uma mesma classe, pois deixam resto zero na divisão por  $x^2 + 1$ .

Representaremos cada classe de resto por  $C_p$ , onde  $p$  é um polinômio pertencente à classe. Fica claro que ao dividirmos um número real  $a$  por  $x^2 + 1$  teremos como resto o próprio número real, ou seja, dois números reais jamais pertencerão à mesma classe. Observamos também que ao dividirmos qualquer polinômio do tipo  $ax + b$  por  $x^2 + 1$  teremos por resto o polinômio  $R(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , indicando que uma classe pode ter por representante, o próprio resto comum aos seus elementos.

### 3.6.1 Soma de Duas Classes

Sejam  $C_A$  e  $C_B$  duas classes de resto. Os polinômios da classe  $C_A$  podem ser escritos como  $A(x) = (x^2 + 1)Q_A(x) + R_A(x)$  e os da classe  $C_B$  como  $B(x) = (x^2 + 1)Q_B(x) + R_B(x)$ .

A soma de um polinômio da classe  $C_A$  com outro da classe  $C_B$  resulta em polinômios do tipo:  $S(x) = (x^2 + 1).(Q_A(x) + Q_B(x)) + R_A(x) + R_B(x)$ , que pertencem à classe  $C_{R_A+R_B}$ , igual a soma das duas classes anteriores.

### Exemplo 3.7

Na divisão do polinômio  $A(x) = x^2 + 4x + 1$  por  $x^2 + 1$ , obtemos resto  $R_A = 4x$ , enquanto na divisão de  $B(x) = 3x + 1$  por  $x^2 + 1$  teremos resto  $R_B = 3x + 1$ . Ao efetuarmos a adição dos polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$ , teremos a igualdade

$$A(x) + B(x) = x^2 + 7x + 2,$$

que na divisão por  $x^2 + 1$  deixará resto  $R_{A+B} = 7x + 1$ , mostrando que

$$C_A + C_B = C_{A+B}.$$

De maneira análoga podemos afirmar que  $C_2 + C_3 = C_5$  ou que  $C_{3x} + C_1 = C_{3x+1}$ .

### 3.6.2 Produto de Duas Classes

Consideremos duas classes  $C_A$  e  $C_B$ , da forma  $A(x) = (x^2 + 1).Q_A(x) + R_A(x)$  e  $B(x) = (x^2 + 1).Q_B(x) + R_B(x)$ , respectivamente. Ao efetuarmos o produto  $A(x).B(x)$ , teremos o polinômio

$$P(x) = [(x^2 + 1).Q_A(x) + R_A(x)][(x^2 + 1).Q_B(x) + R_B(x)].$$

Desenvolvendo este produto e organizando os seus termos obtemos a expressão

$$P(x) = (x^2 + 1).[(x^2 + 1).Q_A.Q_B + Q_A.R_B + R_A.Q_B] + R_A.R_B.$$

Todos os polinômios  $P(x)$ , pertencem à classe  $C_{R_A.R_B}$ , que é igual ao produto das duas classes.

### Exemplo 3.8

Vamos considerar novamente os polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$  que pertencem respectivamente, às classes  $C_{4x}$  e  $C_{3x+1}$ , do exemplo anterior. Temos que

$$A(x).B(x) = 3x^3 + 13x^2 + 7x + 1.$$

Na divisão deste polinômio por  $x^2 + 1$  obtemos resto igual a  $4x - 12$ , ou seja,  $A(x).B(x) \in C_{4x-12}$ . Mas  $4x.(3x + 1) = 12x^2 + 4x$  que também pertence à classe  $C_{4x-12}$ , mostrando que

$$C_A.C_B = C_{A.B}.$$

Demaneira análoga podemos afirmar que  $C_2.C_3 = C_6$  e  $C_{3x}.C_{3x+3} = C_{9x^2+9x} = C_{9x-9}$ .

Fazer operações com classes de restos é o mesmo que fazer operações entre os seus polinômios representantes, portanto o conjunto das classes de

restos tem a estrutura de um conjunto numérico. Dentro deste conjunto há um subconjunto formado por todas as classes do tipo  $C_k$ , onde  $k$  é um número real.

Como dois números reais nunca pertencem a uma mesma classe, temos que

- i)  $k \Leftrightarrow C_k$  é uma bijeção e, se  $k$  e  $m$  são dois números reais, suas imagens são, respectivamente  $C_k$  e  $C_m$ .
- ii)  $C_k + C_m = C_{k+m}$ , a soma das imagens é a imagem da soma.
- iii)  $C_k \cdot C_m = C_{k \cdot m}$ , o produto das imagens é a imagem do produto.

Podemos então afirmar que o subconjunto das classes  $C_k$  é isomorfo ao conjunto dos números reais. Como conjuntos isomorfos são na prática um mesmo conjunto, podemos utilizar a mesma notação para representá-los. Desta maneira utilizaremos o próprio número real para indicar a classe a qual ele pertence. Assim 0 representará a classe  $C_0$ , 1 representará a classe  $C_1$  e o número real  $k$  representará a classe  $C_k$ .

O subconjunto das classes de restos, geradas na divisão por  $x^2 + 1$  é uma extensão do conjunto dos números reais. Para chegarmos ao conjunto dos números complexos, devemos mostrar que nesta nova representação existe um elemento que é solução da equação  $x^2 + 1 = 0$ . O polinômio  $x^2 + 1 = 0$  deixa resto zero quando dividido por ele mesmo, portanto

$$C_{x^2+1} = C_0 \Rightarrow C_{x^2} + C_1 = C_0 \Rightarrow C_x \cdot C_x + 1 = 0,$$

$$(C_x)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (C_x)^2 = -1 \Rightarrow C_x = \sqrt{-1}.$$

A classe  $C_x$  tem a mesma característica do número complexo  $i$ , podendo representar a raiz quadrada de um número negativo.

Aplicando as regras da adição e multiplicação para as classes de restos, temos que

$$C_{a+bx} = C_a + C_{bx} \Rightarrow C_{a+bx} = C_a + C_b \cdot C_x \Rightarrow C_{a+bx} = a + b \cdot C_x.$$

A classe de resto  $C_{a+bx}$  é, portanto, uma outra forma de representação para um número complexo da forma  $a + bi$ , o que nos leva à conclusão de que o conjunto de classes de resto módulo  $x^2 + 1$  é isomorfo ao corpo dos números complexos.

### 3.7 Forma Algébrica e Representações Geométricas

Vimos no capítulo 2 que um número complexo é um par ordenado de números reais  $(a, b)$ , então podemos dizer que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto  $\mathbb{C}$  e o conjunto dos pontos do plano. A forma algébrica de um número complexo é  $z = a + bi$ , deste modo, a cada número estamos associando um único ponto  $P$  do plano, que denominaremos afixo ou imagem do número complexo  $z$ .

O plano que contém as imagens de todos os complexos é chamado de Plano de Argand-Gauss, que será representado por dois eixos perpendiculares, o eixo real e o eixo imaginário, conforme o gráfico (fig.3).

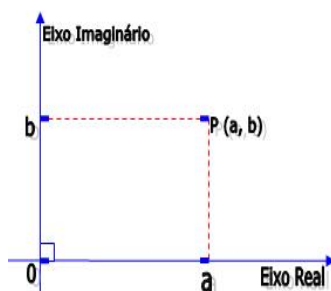


Figura 3: Representação geométrica de  $z = a + bi$ .

Assim as imagens dos números da forma  $(x, 0)$  estão sobre o eixo real e as imagens dos números da forma  $(0, y)$  pertencem ao eixo imaginário. O conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  será representado por  $\bar{z} = a - bi$  e o seu posicionamento em relação ao complexo  $z$  é de simetria em relação ao eixo real, como vemos no gráfico abaixo (fig.4).

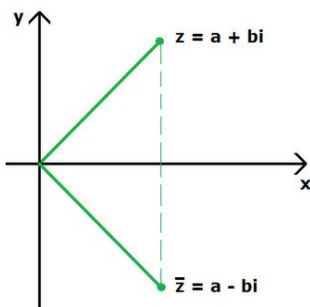


Figura 4: Representação geométrica de  $\bar{z} = a - bi$ .

Dado o número complexo  $z = a + bi$ , em que  $a, b \in \mathbb{R}$ , chama-se módulo de  $z$  e indica-se por  $|z|$  ou pela letra grega  $\rho$ , o número real não negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho,$$



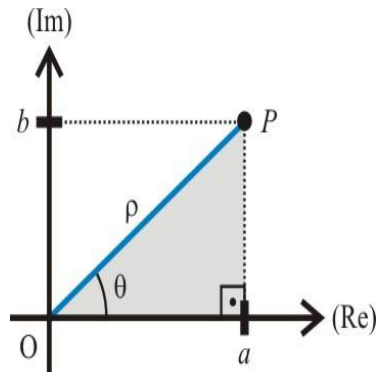


Figura 5: Representação geométrica de  $\rho = |z|$ .

que representa o valor real da medida da distância do afixo P à origem do plano de Argand-Gauss.

No plano de Argand-Gauss a imagem do número complexo  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  é o ponto P, representado no gráfico (fig.5).

#### Algumas Propriedades

- i) Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = |\bar{z}|$ .
- ii) Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ .
- iii) Para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .
- iv) Para  $z = x + iy$ ,  $\frac{\bar{z} + z}{2} = x$  e  $\frac{z - \bar{z}}{2} = y$ .

### 3.8 Forma Trigonométrica

#### 3.8.1 Argumento

Ao marcarmos a imagem do número  $z = a + bi$  no Plano de Argand-Gauss, destacamos alguns elementos. Como já vimos, a distância do afixo à origem é igual a  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

O argumento principal do número complexo  $z$  ( $argz$ ) é o ângulo  $\theta$ , com  $0 \leq \theta < 2\pi$ , compreendido entre o eixo real  $OX$  e o segmento  $\overline{OP}$  (fig.5). Se  $z$  é um complexo não nulo cujo argumento principal é  $\theta_0$ , então todos os ângulos congruentes a  $\theta_0$  serão argumentos de  $z$ , ou seja,

$$\theta = argz \Rightarrow \theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

#### Forma Polar ou Trigonométrica

Para  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , verificamos as condições:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos\theta,$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Fazendo as substituições em  $z = a + bi$ , obtemos o que chamamos de *forma polar* ou *forma trigonométrica* do número complexo  $z$ , representada por

$$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

### 3.9 Operações na Forma Trigonométrica

#### Multiplicação

Dados os complexos  $z = \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$  e  $w = \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$  temos que

$$z.w = [\rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)].[\rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)]$$

ou

$$z.w = \rho_1.\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)],$$

assim

$$z.w = \rho_1.\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

#### Potenciação

O resultado da multiplicação pode ser generalizado para obtermos uma relação para a potenciação de um número complexo, como segue,

$$z_1.z_2\dots z_n = \rho_1.\rho_2\dots\rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots\theta_n)].$$

Consequentemente,

$$z^n = \underbrace{\rho.\dots\rho}_{n \text{ vezes}} . [\underbrace{\cos(\theta + \dots + \theta)}_{n \text{ vezes}} + i\underbrace{\operatorname{sen}(\theta + \dots + \theta)}_{n \text{ vezes}}],$$

que nos leva à expressão

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)],$$

também denominada *Primeira Fórmula de Moivre*.

#### Divisão

Enquanto na mutiplicação de dois números complexos multiplicamos os módulos e somamos os seus argumentos, de maneira análoga, na divisão de dois números complexos, dividimos os seus módulos e subtraímos os seus argumentos, chegando à relação

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], z_2 \neq 0.$$

### Radiciação

Dado um número complexo  $w$ , dizemos que outro complexo  $z$  é raiz  $n$ -ésima de  $w$  se, e somente se,  $z^n = w$ . Assim, de  $z = \rho_z(\cos\theta_z + i\text{sen}\theta_z)$  e  $w = \rho_w(\cos\theta_w + i\text{sen}\theta_w)$  dois números complexos na forma polar, teremos a equivalência

$$z = \sqrt[n]{w} \Leftrightarrow z^n = w.$$

Observando a regra da potenciação e igualando as duas expressões temos

$$\rho_z^n[\cos(n\theta_z) + i\text{sen}(n\theta_z)] = \rho_w(\cos\theta_w + i\text{sen}\theta_w).$$

Mas dois números complexos são iguais se, e somente se, os seus módulos são iguais e os seus argumentos forem congruentes, onde concluímos que

$$\rho_z^n = \rho_w \Rightarrow \rho_z = \sqrt[n]{\rho_w}$$

e

$$n\theta_z = \theta_w + 2k\pi \Rightarrow \theta_z = \frac{\theta_w}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Isto nos leva a expressão final para a radiciação

$$z_k = \sqrt[n]{\rho_w} \left[ \cos\left(\frac{\theta_w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta_w}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right],$$

denominada de *Segunda fórmula de Moivre*.

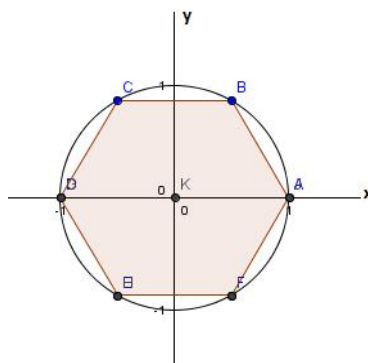


Figura 6: *Hexágono regular formado a partir das raízes sextas da unidade.*

É importante observar que todas as raízes tem o mesmo módulo o que implica que as suas imagens estão sobre uma mesma circunferência de raio igual a  $\sqrt[n]{\rho_w}$ . Os argumentos de cada uma das raízes estão em progressão aritmética de razão igual a  $\frac{2\pi}{n}$ , formando assim um polígono regular de  $n$  lados. Na fig.6 estão representadas as raízes sextas da unidade, formando um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio unitário.

### 3.10 Forma Exponencial de $z$

Nas disciplinas de Cálculo, a expansão em uma série de Taylor para  $e^t$  é

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

Admitindo que podemos substituir,  $t$  por  $iy$ , obtemos as expressões

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots,$$
$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right).$$

Estas duas séries são as expansões na série de Taylor para  $\cos y$  e  $\sin y$ , consequentemente

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Sendo assim, para um complexo  $z = x + yi$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi},$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

A expressão  $e^z$ , muitas vezes é substituída pela notação  $\exp z$  e para  $x = 0$ , a relação  $e^{iy} = \cos y + i\sin y$  é chamada de **fórmula de Euler**. Desta maneira podemos escrever o complexo  $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$  na forma  $z = \rho e^{i\theta}$ .

Vejamos alguns exemplos:

i)  $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$

ii)  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$

iii)  $3e^{i\frac{3\pi}{2}} = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -3i.$

Para  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$  tem-se

$$e^z e^w = [e^a(\cos b + i\sin b)][e^c(\cos d + i\sin d)],$$

$$e^{a+c}[\cos(b+d) + i\sin(b+d)],$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

### 3.11 Transformação de Möbius

#### 3.11.1 Função Complexa

Em [9] e [11] vemos que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  é denominada função de uma variável complexa e que para  $z = x + iy \in D$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos a expressão

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

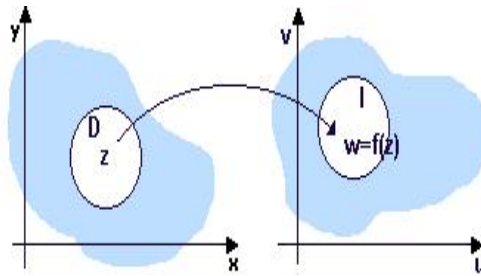


Figura 7:  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ .

sendo  $u(x, y)$  e  $v(x, y) \in \mathbb{R}$  respectivamente, a parte real e imaginária da imagem  $f(z) \in \mathbb{C}$ .

### Exemplo 3.9

Consideremos a função  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$ ,  $z = x + iy$ . Seja  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $w = f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ . Portanto  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = 2xy$  são, respectivamente, a parte real e imaginária da imagem de  $z$  em  $\mathbb{C}$ . O ponto  $P(1, 1)$  em  $\mathbb{D}$  tem imagem  $Q(0, 2)$  em  $\mathbb{C}$ .

### 3.11.2 Transformação de Möbius

Uma transformação de Möbius [11], apresentada por August Ferdinand Möbius(1790-1868), é uma função complexa na forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc \neq 0$ .

Esta última condição  $ad - bc \neq 0$  é uma garantia para que a função  $f(z)$  não seja constante, pois se  $ad - bc = 0$  ( $ad = bc$ ) teremos as seguintes possibilidades para  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ :

i) se  $b = \frac{ad}{c}$ , com  $c \neq 0$  temos  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)}{cz+d} = \frac{a}{c}$ .

ii) para a existência da função complexa  $f(z)$ , as constantes  $c$  e  $d$  não podem ser simultaneamente nulas. Com  $c = 0$  e  $ad = bc$ , temos  $d \neq 0$  e  $f(z) = \frac{b}{d}$ .

Observamos que em ambos os casos em que  $ad - bc = 0$ , a função  $f(z)$  é uma constante, o que a descaracteriza como uma função de transformação, daí a necessidade da condição acima.

### 3.11.3 Matriz Associada à Transformação de Möbius

Com  $z \in \mathbb{C}$ , sejam  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}$ , duas matrizes. Ao multiplicarmos estas matrizes obtemos a matriz  $\begin{pmatrix} az+b & cz+d \end{pmatrix}$  e dividindo o primeiro elemento pelo segundo, chegamos à expressão  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Portanto definimos a matriz  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  como sendo a matriz associada à Transformação de Möbius,

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad-bc \neq 0$ . A inversa desta matriz é  $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

#### Proposição

Se  $f(z)$  é uma transformação de Möbius,  $f$  é uma composição de um número finito de translações, dilatações (contrações) e inversões.

#### Demonstração

(a) Se  $c = 0$ ,  $f(z) = f_2 \circ f_1(z)$ , sendo  $f_1(z) = \frac{a}{d}z$  que é uma dilatação ou contração e  $f_2(z) = z + \frac{b}{d}$ , uma translação.

(b) Se  $c \neq 0$ , neste caso  $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ , sendo  $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{z}$ ,  $f_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$  e  $f_4(z) = z + \frac{a}{c}$ .

Vamos analisar agora as transformações de translação, dilatação (contração), rotação e analisaremos um caso especial de inversão. Para facilitar as representações em todos os casos utilizaremos  $c = 0$  nas matrizes e faremos as transformações sobre triângulos.

### 3.11.4 Translação

Uma translação preserva ângulos e distâncias, assim ao aplicarmos este tipo de transformação em um triângulo, teremos um novo triângulo congruente ao primeiro. A matriz utilizada aqui é do tipo  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ , com  $b \in \mathbb{C}$ , deste modo,  $f(z) = z + b$ .

#### Exemplo 3.10

Sejam  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  e  $z_3 = 3 + 2i$ , três números complexos, com suas imagens sendo vértices de um triângulo e  $b = 2 + 2i$ . Consideremos a função  $f(z_k) = z_k + b$ , com  $k = 1, 2, 3$ , assim

$$w_1 = f(z_1) = 3 + 4i,$$

$$w_2 = f(z_2) = 4 + 5i,$$

e

$$w_3 = f(z_3) = 5 + 4i,$$

causando assim uma translação (fig.8).

Cada vértice do triângulo sofreu um deslocamento igual a  $2\sqrt{2}$ , que corresponde ao módulo do complexo  $b = 2 + 2i$ .

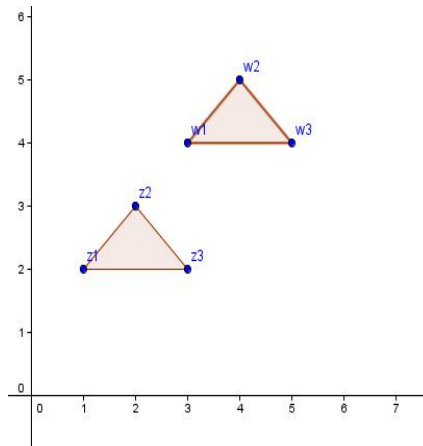


Figura 8: Translação do triângulo com vértices em  $z_1, z_2$  e  $z_3$ .

### 3.11.5 Dilatação ou Contração

Ao utilizarmos matrizes do tipo  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , teremos uma função de transformação  $f(z) = \frac{a}{d}z$ , que aplicadas a um triângulo, podem gerar uma contração ou dilatação, de acordo com o coeficiente  $\frac{a}{d}$ .

*i)* Para  $|\frac{a}{d}| > 1$ , teremos um efeito de dilatação e o novo triângulo terá medidas maiores que as medidas do triângulo inicial, preservando os ângulos internos, sendo portanto triângulos semelhantes com razão  $|\frac{a}{d}|$ .

*ii)* Para  $0 < |\frac{a}{d}| < 1$  teremos um efeito de contração com o novo triângulo com medidas menores que as medidas do primeiro triângulo e, da mesma forma que o caso anterior, triângulos semelhantes com razão  $|\frac{a}{d}|$ .

#### Exemplo 3.11

Sejam  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = -2 + i$  e  $z_3 = 3i$ , três números complexos, com suas imagens sendo vértices de um triângulo. Considerando  $a = 2$  e  $d = 1$  em  $f(z) = \frac{a}{d}z$  temos  $f(z_k) = 2z_k$ , com  $k = 1, 2, 3$ . Assim,

$$w_1 = f(z_1) = 2 + 2i,$$

$$w_2 = f(z_2) = -4 + 2i,$$

$$w_3 = f(z_3) = 6i.$$

causando a dilatação (fig.9).

### 3.11.6 A Unidade Imaginária $i$ como Operadora de Rotação

Vimos anteriormente que a forma trigonométrica do número complexo  $z = a + bi$  é dada pela expressão  $z = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ , onde  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\theta =$

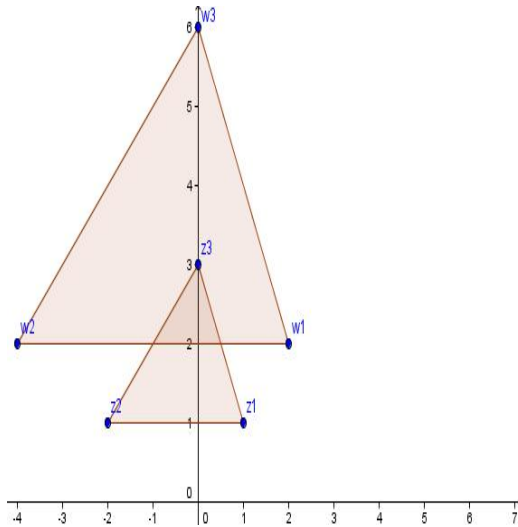


Figura 9: Dilatação do triângulo com vértices em  $z_1, z_2$  e  $z_3$ .

$\arctan \frac{b}{a}$  e  $\theta = 90^\circ$  para  $a = 0$ . Dados os complexos  $z = \rho_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$  e  $w = \rho_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$  temos a igualdade

$$z.w = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Vamos agora analisar duas situações:

i) A forma trigonométrica de  $w = i$  é  $w = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{2})$ .

Para  $z.w$ , temos a igualdade

$$z.w = \rho [\cos(\theta_z + \frac{\pi}{2}) + i\text{sen}(\theta_z + \frac{\pi}{2})].$$

ii) A forma trigonométrica de  $w = -i$  é  $w = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\text{sen}(\frac{3\pi}{2})$

Para  $z.w$ , temos a igualdade

$$z.w = \rho \left[ \cos(\theta_z + \frac{3\pi}{2}) + i\text{sen}(\theta_z + \frac{3\pi}{2}) \right].$$

Observando estes dois casos, podemos concluir que ao multiplicarmos um número complexo  $z$  por  $i$  teremos o número  $zi$ , obtido por uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário sobre o complexo  $z$ , assim como, ao multiplicarmos o número  $z$  por  $-i$  teremos o número  $-zi$ , obtido por uma rotação  $\frac{3\pi}{2}$  sobre  $z$ , também no sentido anti-horário.

As matrizes associadas a esta transformação são do tipo  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , com  $d = \pm i$  e geram a função  $f(z) = \frac{z}{d}$ . As rotações são isometrias, isto é, funções do plano que preservam distâncias.

**Exemplo 3.12**



Sejam  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = -1 - i$  e  $z_3 = 2i$ , três números complexos, com suas imagens sendo vértices de um triângulo. Para  $d = i$  temos aqui uma função  $f(z_k) = \frac{z_k}{i}$ , com  $k = 1, 2, 3$ . Deste modo,

$$w_1 = f(z_1) = 1 - 2i,$$

$$w_2 = f(z_2) = -1 + i,$$

$$w_3 = f(z_3) = 2.$$

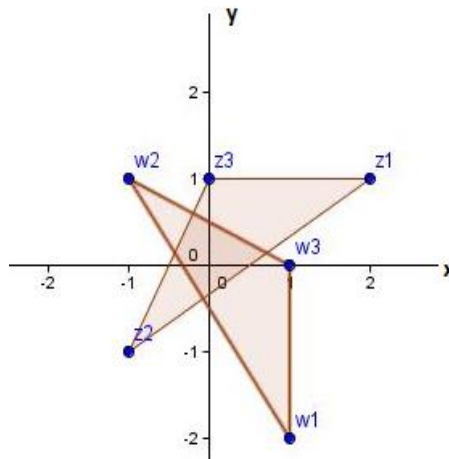


Figura 10: Rotação de  $\frac{\pi}{2}$  do triângulo de vértices  $z_1, z_2$  e  $z_3$  no sentido horário.

### 3.11.7 A inversão $\frac{1}{z}$

Num domínio complexo  $\mathbb{D}^*$ , a inversão é uma transformação obtida através da função  $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $f(z) = \frac{1}{z}$ . A matriz associada a esta transformação é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para  $z = x + iy \in \mathbb{D}^*$  e  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ , temos

$$w = f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = u + iv.$$

Portanto,

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

A translação, rotação e dilatação transformam um triângulo em outro triângulo semelhante ou congruente ao primeiro. Se forem aplicadas sobre uma circunferência ou uma reta, preservarão estas formas geométricas. A

inversão tem a particularidade de modificar algumas curvas, podendo transformar, por exemplo, circunferências em retas, como veremos a seguir.

Dado um conjunto  $K = \{z \in \mathbb{C}; z = x+iy : a(x^2+y^2)+bx+cy+d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

tem-se que:

- i) Se  $a \neq 0$ ,  $K$  será uma circunferência ou um conjunto vazio.
- ii) Se  $a = 0$ ,  $K$  será uma reta ou um conjunto vazio.

Para  $z = x + iy$ , temos que  $z + \bar{z} = 2x$ ,  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$  e  $z - \bar{z} = 2iy$ . Podemos então escrever

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : az\bar{z} + \frac{b}{2}(z + \bar{z}) + \frac{c}{2i}(z - \bar{z}) + d = 0 \right\}.$$

Aplicando a inversão sobre  $K$  com  $z = \frac{1}{w}$  e  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ , obtemos a imagem dada por

$$f(K) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{a}{w\bar{w}} + \frac{b}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) + \frac{c}{2i} \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + d = 0 \right\}.$$

Multiplicando todos termos por  $w \cdot \bar{w}$ , obtemos a expressão

$$f(K) = \left\{ w \in \mathbb{C} : a + \frac{b}{2}(\bar{w} + w) + \frac{c}{2i}(\bar{w} + w) + dw\bar{w} = 0 \right\}.$$

Substituindo  $w$  por  $u + iv$ , obtemos o conjunto

$$f(K) = \{w \in \mathbb{C}; w = u + iv : d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0\}.$$

Observando as expressões das curvas  $K$  e  $f(K)$ , vimos que a inversão transforma :

- i) uma circunferência que passa pela origem ( $d = 0$  e  $a \neq 0$ ) em uma reta que não passa pela origem.
- ii) uma circunferência que não passa pela origem ( $d \neq 0$  e  $a \neq 0$ ) em uma circunferência que não passa pela origem.
- iii) uma reta que não passa pela origem ( $a = 0$  e  $d \neq 0$ ) em uma circunferência que passa pela origem.
- iv) uma reta que passa pela origem ( $a = 0$  e  $d = 0$ ) em uma reta que passa pela origem.

### Exemplo 3.13

A curva  $K : x^2 + y^2 = 4$  é uma circunferência de centro  $(0, 0)$  raio 2, não passando na origem. Como  $a = 1 \neq 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  e  $d = -4$ , a imagem  $f(K)$  desta curva será

$$f(K) = \{w \in \mathbb{C}, w = u + iv; -4(u^2 + v^2) + 1 = 0\},$$

$$f(K) = \{w \in \mathbb{C}, w = u + iv; u^2 + v^2 = \frac{1}{4}\},$$

Uma circunferência que não passa pela origem e tem raio  $\frac{1}{2}$ .

### Exemplo 3.14

A curva  $K : x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  é uma circunferência de raio 1 e centro  $A = (2, 0)$ , não passando pela origem. Como  $a = 1 \neq 0$ ,  $b = -4$ ,  $c = 0$  e  $d = 3 \neq 0$  a imagem  $f(K)$  será

$$f(K) = \{w \in \mathbb{C}, w = u + iv; 3(u^2 + v^2) - 4u + 1 = 0\},$$

onde

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - \frac{4}{3}u + \frac{1}{3} &= 0, \\ \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + v^2 - \frac{4}{9} + \frac{1}{3} &= 0, \\ \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + v^2 &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Portanto  $f(K)$  é uma circunferência de centro  $B = (\frac{2}{3}, 0)$  e raio  $\frac{1}{3}$ , que também não passa pela origem. No gráfico (fig.11) o ponto  $C=(1,0)$  é denominado ponto fixo da transformação, pois  $f(C)=C$ .

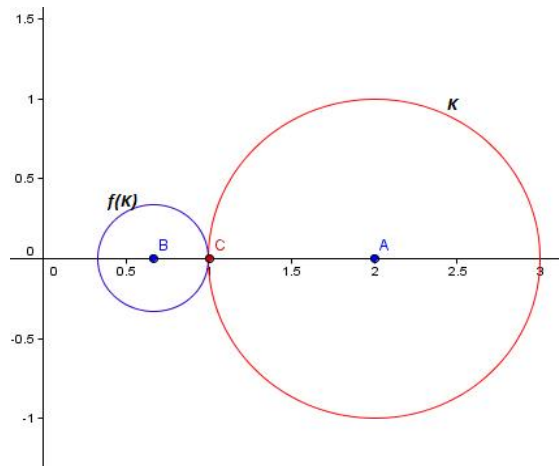


Figura 11: ponto fixo  $C=(1,0)$

### Exemplo 3.15

A curva  $K : 2x - 4y + 1 = 0$  é uma reta que não passa pela origem. Como  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $c = -4$  e  $d = 1$ , a imagem  $f(K)$  desta curva será

$$\begin{aligned} f(K) &= \{w \in \mathbb{C}, w = u + iv; u^2 + v^2 + 2u + 4v = 0\}, \\ f(K) &= \{w \in \mathbb{C}, w = u + iv; (u + 1)^2 + (v + 2)^2 = 5\}, \end{aligned}$$

uma circunferência que passa pela origem.

### Exemplo 3.16

Seja a hipérbole  $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 - y^2 = 1\}$  representada no gráfico(fig.12). Fazendo  $x = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2$  e  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , obtemos o conjunto

$$H : \left\{ z \in \mathbb{C} : \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right]^2 = 1 \right\}.$$

Aplicando a inversão  $w = f(z) = \frac{1}{z}$  temos

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\bar{w} + w}{w\bar{w}}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{w} - w}{w\bar{w}}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{1}{4} (\bar{w} + w)^2 + \frac{1}{4} (\bar{w} - w)^2 = (w\bar{w})^2,$$

$$\frac{1}{2} \bar{w}^2 + \frac{1}{2} w^2 = (w\bar{w})^2.$$

Fazendo as substituições  $w = u + iv$  e  $\bar{w} = u - iv$ ,

$$f(H) : \{u + iv \in \mathbb{C} : u^2 - v^2 = (u^2 + v^2)^2\}.$$

Cujo gráfico é uma *lemniscata* (fig.13) justamente definida como o inverso geométrico da hipérbole.

Para a construção de tal gráfico fazamos  $u = r \cos \theta$  e  $v = r \sin \theta$ . Desta forma temos

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2,$$

$$r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = [r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)]^2,$$

$$r^2 \cos 2\theta = r^4 \Rightarrow r^2 = \cos 2\theta.$$

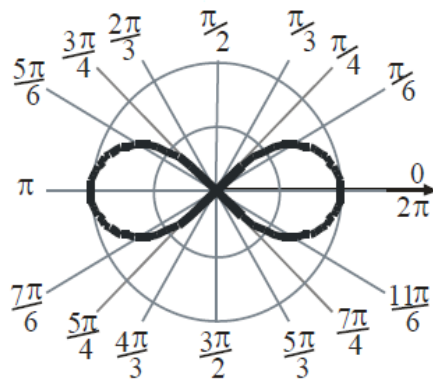


Figura 12: Construção do gráfico da Lemniscata  $r^2 = \cos 2\theta$ .

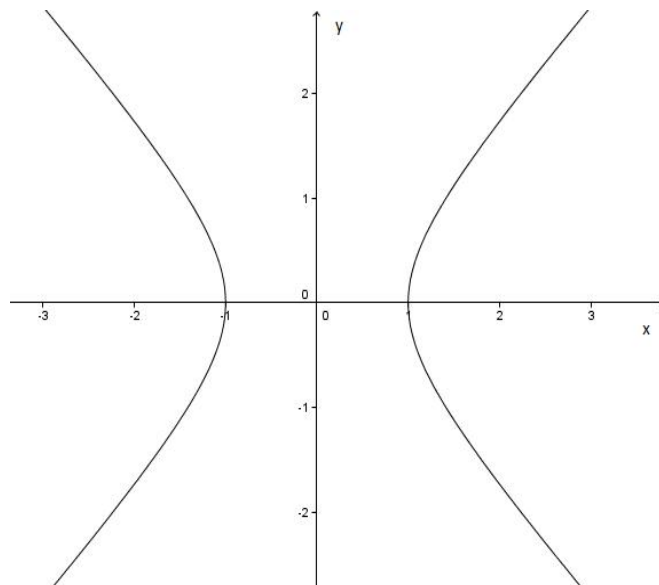


Figura 13: Gráfico da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$ .

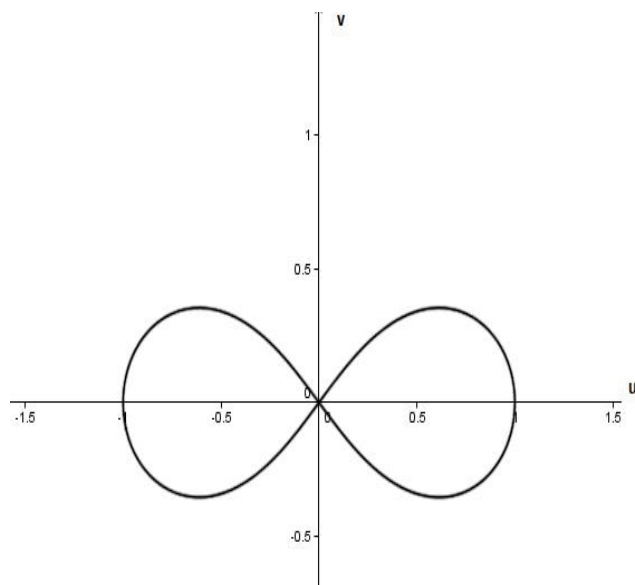


Figura 14: *Lemniscata*.

## 4 Considerações Finais

Buscamos aqui criar um pequeno elo entre a forma com que os números complexos são trabalhados no terceiro ano do ensino médio com a linguagem mais formal dos cursos superiores. Assim acreditamos ser possível minimizar possíveis dificuldades de nossos alunos num reencontro futuro com este conjunto.

Mostramos também que em alguns momentos da história, as representações numéricas existentes já não eram suficientes para atender as demandas do desenvolvimento científico. Em um caso específico, na ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais foi necessário o uso de toda a reta real. Para a extensão do conjunto real, partimos para todo o plano, criando novos números, agora pares ordenados.

Devemos mostrar aos alunos que um possível equívoco histórico na denominação inicial dos números imaginários, não pode estar associado à dúvida da autenticidade deste conjunto. Com o objetivo de consolidar que os *números imaginários* são mesmo *reais*, verificamos ser possível escrever um número complexo como um ponto no plano, um vetor, uma matriz quadrada de ordem dois ou mesmo uma classe de restos na divisão de polinômios.

Ao trabalharmos com a transformação de Möbius, descrevemos com uma linguagem acessível, uma função complexa associada às transformações geométricas no plano, utilizando matrizes para representar esta função. Transformar uma reta em círculo, ou percorrer o caminho de volta, através da inversão, encanta visualmente e pode ser um reforço para despertar em nossos alunos o interesse por novos descobrimentos.



## Referências

- [1] Adler, Irving. Iniciação à Matemática de Hoje. Ao livro técnico, 1972.
- [2] Alencar Filho, Edgard. Elementos de Álgebra Abstrata. Nobel, São Paulo, 1980.
- [3] Bombelli, R. (1966). L Algebra. U. Forti e E. Bortolotti (Eds.). Milano: Feltrinelli.
- [4] Boyer, Carl B. História da Matemática. Edhar Blucher, São Paulo, 1974.
- [5] Cajori, Florian. Uma História da Matemática. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.
- [6] Eves, Howard. Introdução à História da Matemática. Editora da Unicamp, Campinas 2005.
- [7] Hidalgo, Rubén A. Transformaciones de Mobius: Una Introducion. Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile, 2012.
- [8] Lang, Serge. Estruturas Algébricas. Ao Livro Técnico, Brasília, 1972.
- [9] Medeiros, L. Adauto da J. Introdução às Funções Complexas. McGraw-Hill do Brasil, Sao Paulo, 1972.
- [10] Santos, J.C. Transformadas de Mobius e Equações do Terceiro Grau. Bol. Soc. Port. Mat., 2005.
- [11] Spiegel, M. Ralph. Variáveis Complexas com uma Introdução às Transformações Conformes e suas Aplicações. McGraw-Hill do Brasil, Brasília, 1973. .