Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Departamento De Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UESC

ENEXANDRO NOBRE DUTRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

UMA PROPOSTA PARA O SEU ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA COM ÊNFASE NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

ILHÉUS-BA
2014

ENEXANDRO NOBRE DUTRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

UMA PROPOSTA PARA O SEU ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA COM ÊNFASE NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional da Universidade Estadual de Santa Cruz e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Afonso Henriques

ILHÉUS-BA
2014

D978 Dutra, Enexandro Nobre.

Análise combinatória: uma proposta para o seu ensino na educação básica com ênfase no princípio da contagem / Enexandro Nobre Dutra. – Ilhéus, BA: UESC, 2014.

78f. : il.

Orientador: Afonso Henriques.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Análise combinatória. 2. Contagem. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

CDD 511.6

ENEXANDRO NOBRE DUTRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA
UMA PROPOSTA PARA O SEU ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA COM ÊNFASE NO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Ilhéus-BA, 15/08/2014

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Afonso Henriques
UESC
(Orientador)

Prof^{a}. Dr^{a}. Fernanda Gonzalves de Paula
UESC

Prof. Dr. Fabíolo Moraes Amaral
IFBA

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

À Deus por ter me guiado e hoje poder estar aqui deixando, um pouco, de conhecimento e amor pela matemática.

Ao meu orientador, professor Dr. Afonso Henriques, pela atenção, paciência e dedicação; suas contribuições teóricas e além de tudo por sua amizade que corre entre os bastidores desde a minha especialização. Registro aqui minha admiração pelo profissional e pessoa que é.

A todos os professores do PROFMAT, pela dedicação e os ensinamentos que contribuiram de forma direta e/ou indireta, durante todo o curso, por mais esta conquista pessoal.

A minha família pelo apoio, carinho e paciência que tiveram comigo nos últimos meses, agradeço verdadeiramente a minha mãe, Rita de Cássia, pelo amor incondicional, ao meu filho, Sandro Vitor, por me alegrar nas horas difíceis, e a minha noiva, Caroline, por me proporcionar conforto com suas palavras, sua preocupação de sempre me vê sorrindo e por ter me dado colo nos momentos mais fatigantes. Aos meus amigos que entenderam a minha ausência e me apoiaram, e, incentivaram, nesse período difícil de esforços e correria, para não correr o risco de injustiças agradeço a todos eles no geral.

À Capes pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

A professora Drª. Fernanda Gonzalves de Paula e ao professor Dr. Fabíolo Moraes Amaral que compõe a banca juntamente com meu orientador, por aceitarem a participar deste momento importante para mim e toda minha família. Fernanda por trazer suas contribuições para este trabalho e Fabíolo um colega do IFBA que admiro e sempre me apoiou, demonstrando a satisfação em participar deste momento.

Todo o processo, desde o desenvolvimento à conclusão do Mestrado foi um marco interessante na minha vida profissional e essencial para realização pessoal, pois foi um momento de reflexão, decisão e mudanças onde tive que aprender a administrar a ansiedade, o nervosismo e o cansaço, mas com perseverança, força e foco, hoje, só tenho a agradecer.

"Dedico este trabalho a todas as pessoas que me apoiaram e torceram por essa conquista."

ANÁLISE COMBINATÓRIA
Uma proposta para o seu ensino na Educação Básica com ênfase no Princípio Fundamental da Contagem

RESUMO

O ensino de matemática praticado atualmente sob a perspectiva de enfatizar o uso de fórmulas tem-se mostrado um obstáculo de difícil transposição para assimilação de conteúdos por alunos. Esta prática é comum no trabalho de professores do Ensino Médio que, apoiados em livros didáticos e nas experiências vividas em suas formações, apresentam uma matemática fora do contexto do aluno enquanto indivíduo dotado de conhecimentos pré-concebidos, níveis de cognição e imaginação. Geralmente é neste contexto que o ensino de Análise Combinatória (AC) é apresentado na escola da Educação Básica, com aplicação de fórmulas sem significado para os alunos, que através de um trabalho mecânico simplesmente as decoram e procuram utilizá-las para resolver questões que geralmente podem ser resolvidas com aplicação direta das referidas fórmulas. O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é citado apenas no início do estudo de AC para em seguida enunciar e aplicar as fórmulas de Arranjo, permutação e Combinação. Assim, no presente trabalho, realizamos um estudo teórico acerca de alguns trabalhos desenvolvidos em torno do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória e apresentamos uma proposta de ensino, capaz de permitir a participação efetiva do aluno na construção dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, valorizando o PFC na resolução de problemas, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) na sua vertente praxeológica.

Palavras-chave: Resolução de problemas, Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Permutação, Combinação, Teoria Antropológica do Didático.

PROFMAT - UESC

ABSTRACT

Mathematics education is currently practiced from the perspective of emphasizing the use of formulas has been a difficult obstacle to overcome for assimilation of content by students. This practice is common in the work of high school teachers who, supported by textbooks and the lived experiences in their formations, presents a mathematical outside the context of the student as an individual endowed with preconceived knowledge, levels of cognition and imagination. Usually is in this context that Combinatorial analysis education is presented in basic education schools, with the application of Meaningless formulas for students, which through a mechanical word, simply, decorate and seek to use them to solve issues that can usually be solved with direct application of these formulas. The fundamental principle of counting is quoted at the beginning of the study of combinatorial analysis to enunciate and then alipply formulas of Arrangement, permutation and combination.Hence, in this work we performed a theoretical study about some developed works on the teaching-learning of Combinatorial analysis and we present a proposal of education, able to provide an effective student participation in the construction of the concepts of arrangement, permutation, and combination, valuing the fundamental principle of counting in problems resolution, from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics in its praxeological aspect.

Keywords:problems resolution, fundamental principle of counting,Arrangement, permutation, combination, Anthropological Theory of Didactics

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste essencialmente no estudo teórico e apresentação de uma proposta de ensino de Análise Combinatória (AC), utilizando como metodologia a resolução de problemas sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) na sua vertente praxeológica, priorizando a praxeologia modelada (Henriques, 2013), onde os conceitos/conhecimentos são desenvolvidos partindo-se do bloco praxes ao bloco logos. Isto é, da prática à teoria. Neste âmbito, abordamos situações problemas de Análise Combinatória tendo como principal técnica o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), verificando a potencialidade de um trabalho de investigação, sem depender de fórmulas previamente determinadas. Com efeito, analisamos os processos de formação de agrupamentos, permitindo ao aluno buscar soluções próprias através de técnicas de contagem como enumeração e construção da árvore de possibilidades, bem como desenvolver o raciocínio combinatório para a formalização posterior.

Assim, como já sublinhado na metodologia adotada na proposta de ensino em sala de aula, um dado problema matemático é o ponto de partida e, durante sua resolução, são construídos conceitos inerentes, visando a participação ativo-efetiva dos alunos e não apenas memorização e aplicação de fórmulas.

Segundo Carraher (1986),

> Os problemas de Matemática, dos quais o aluno tem que utilizar precisamente as fórmulas que acabou de estudar, não são verdadeiros problemas que exijam reflexão, mas, sim, exercícios que exigem apenas memória; não lhe é exigida compreensão dos conceitos matemáticos, nem que faça relações entre o que já aprendeu e a possível solução do problema. Nestes casos, os problemas são tratados mecanicamente, sem que, muitas vezes, o aluno compreenda o que está fazendo. Esta abordagem não exige estímulo do raciocínio do aluno.

Concordando com este autor em relação ao uso de fórmulas como ponto de partida na resolução de problemas de AC, Sturm (1999) expõe também em sua pesquisa uma abordagem alternativa, na qual as fórmulas apresentam-se como decorrência da experiência do aluno, inseridas em um processo de resolução de problemas de contagem. Assim o autor afirma:

> [...] o ensino de Análise combinatória deve se dar através de situações – problemas. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação. (STURM, 1999, p.3)

É exatamente em relação à abordagem dos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação no ensino de AC com o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório, que os Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio (PCNEM) trazem a seguinte orientação:

> A contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (p.126)

Neste contexto o papel do professor é fundamental, na medida em que o mesmo pode favorecer meios para que estas orientações se efetivem, exigindo um planejamento das aulas e busca de novas metodologias, como por exemplo, a resolução de problemas com um olhar crítico e cuidadoso para os percursos tomados em busca do resultado final. Sendo assim, a aplicação das fórmulas prontas na resolução de problemas de contagem caracteriza uma problemática no ensino-aprendizagem de AC. Em função desta problemática colocamo-nos a seguinte indagação:

> A resolução de problemas no ensino sob a ótica da praxeologia modelada, priorizando o Princípio Fundamental da Contagem como técnica, motiva uma participação ativo-efetiva do aluno e sua aprendizagem da Análise Combinatória?

Para tratarmos desta questão optamos por fazer uma analise institucional em torno do ensino e aprendizagem de Análise Combinatória (AC). Em seguida apresentamos uma sequência didática [1](SD) com uma proposta para o ensino de AC baseada na resolução de problemas sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) na sua vertente praxeológica, conforme Figura 1, priorizando a praxeologia modelada onde os conceitos/ conhecimentos são desenvolvidos partindo-se do ambiente saber-fazer *(praxe)* para o tecnológico-teórico *(logôs)*.

Figura 1 – Esquema ilustrativo da proposta de ensino

Porém, antes de realizarmos a analise institucional e a SD apresentamos estudos realizados por alguns pesquisadores acerca do ensino e aprendizagem de AC, obtendo

[1]Uma Sequência didática (SD) é um esquema experimental formado por situações, problemas ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar em torno de um objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada sessão, problema ou tarefa constituinte de uma praxeologia. Henriques (2001)

assim uma visão inicial sobre o que vem sendo feito em torno do ensino deste objeto de estudo.

2 PESQUISAS REALIZADAS EM TORNO DO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Batanero et al. (1997) estudaram as estratégias utilizadas por estudantes nas resoluções de problemas de Análise Combinatória (AC). Os autores apresentaram um estudo sobre os processos de resolução de problemas combinatórios simples e compostos envolvendo estudantes do quinto ano de um curso de Licenciatura em Matemática como sujeitos da pesquisa que foram selecionados entre os que obtiveram maiores e menores resultados na resolução de 13 problemas combinatórios elementares apresentados a 29 estudantes.

Os resultados apontaram que os estudantes mostraram dificuldades elevadas com os problemas, inclusive concluintes de curso de Licenciatura em Matemática. Os melhores resultados foram caracterizados pela identificação na resolução dos problemas, na compreensão da ordem, na repetição no enunciado dos problemas, na generalização e identificação da operação combinatória adequada. As causas de fracasso foram: a confusão sobre o tipo de elementos que se combinam, a falta de capacidade de enumeração sistemática e falhas na conclusão final (conhecidos erros de cálculo).

Em outro trabalho, intitulado Raciocínio Combinatório em Alunos do Ensino Secundário, Batanero (1996) e seus colaboradores consideram o quanto é importante analisar as variáveis que afetam os procedimentos e os erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, mostrando como devem ser consideradas essas variáveis no aprendizado.

Os autores descreveram e classificaram os problemas combinatórios simples segundo três modelos básicos: seleção, partição e colocação. Eles realizaram o trabalho com uma amostra de 720 alunos, com idade de 14 e 15 anos, de nove escolas de Granada e Córdoba (Espanha), utilizando como instrumento de pesquisa um conjunto de 13 questões de Análise Combinatória. Dos alunos que participaram da pesquisa, 352 haviam recebido instrução acerca das operações básicas de combinatória e os outros alunos (368) não haviam tido contato com o referido assunto.

Em relação às dificuldades dos alunos na resolução de problemas combinatórios, Batanero et al. (1996) referem as seguintes: enumeração não sistemática, que consiste numa estratégia de tentativa e erro, sem qualquer procedimento recursivo que leve à formação de todas as possibilidades; uso incorreto do diagrama de árvore; erro de ordem, em que é considerada a ordem em situações em que é irrelevante ou não é considerada em situações em que é pertinente; erro de repetição, em que não é considerada a repetição dos elementos quando tal é possível ou é considerada em situações de impossibilidade; confusão quanto ao tipo de objeto, isto é, os objetos idênticos são considerados distinguíveis ou os objetos distintos são considerados indistinguíveis; e confusão quanto ao tipo de subconjunto em modelos de partição ou de distribuição, que consiste em distinguir subconjuntos idênticos ou em não diferenciar subconjuntos distinguíveis. Neste trabalho Batanero et al. (1996) afirmam ainda que o ensino de AC, usualmente, está centrado na aprendizagem de definições e fórmulas, a fim de resolver problemas que envolvem cálculos. Além disso, os autores afirmam que os professores consideram o ensino desse tema difícil e, em muitas situações, preferem não abordá-lo.

Correia e Fernandes (2007) procuraram investigar as estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de Análise Combinatória. A pesquisa foi desenvolvida com 27 alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade, de uma escola secundária com 3º ciclo do ensino básico de uma cidade do distrito de Braga, em Portugal. Os autores empenharam-se em responder duas questões: Que estratégias utilizam os alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas combinatórios? Qual a influência dos fatores: operação combinatória, número de elementos envolvidos na operação combinatória e desempenho em Matemática com a experiência de aprendizado em combinatória?

Para Correia e Fernandes (2007), os alunos quando resolvem os problemas de combinatória utilizam com maior frequência a enumeração (contagem direta) como estratégia, seguida do uso da árvore de possibilidade. As fórmulas de AC foram utilizadas por 18% dos alunos consultados. Os autores observaram também que, quando ocorre nos problemas um aumento no tamanho da amostra dos elementos, as estratégias mais utilizadas pelos alunos passam a ser a menos usada, diminuindo, assim, a eficácia nas respostas corretas dos alunos. No geral, a pesquisa desenvolvida por eles revelou que o maior fracasso dos alunos foi na resolução dos problemas de combinação simples. Nesses problemas, a dificuldade dos alunos residiu no fato de considerarem a ordem, tal como tinham resolvido os problemas de arranjos.

Procurando investigar os erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais no campo da Análise Combinatória, Pacheco (2001) desenvolveu um trabalho dentro de uma abordagem qualitativa, com uma inspiração na análise cognitiva das produções escritas dos estudantes da terceira série do Ensino Médio, com idade entre 17 e 23 anos. Os alunos, sujeitos da pesquisa, ainda não haviam estudado Análise Combinatória. A pesquisadora desenvolveu aulas expositivas acerca do assunto e proporcionou aos mesmos que tivessem acesso a uma bibliografia diversificada do assunto.

O objetivo do trabalho realizado por Pacheco (2001) foi confrontar as abordagens dos estudantes em diferentes tipos de problemas e buscar algumas explicações para possíveis performances nos diferentes casos e para os possíveis erros apresentados. Foram problemas do tipo simbólicos não verbais e verbais, todos de Análise Combinatória.

A questão central da pesquisa que Pacheco (2001) se propôs a resolver foi: Em que tipo de problema, simbólico não verbal, modelagem e verbal, e em que extensão, os estudantes apresentam performances mais adequadas?

Em suas conclusões, a pesquisadora aponta que existe uma relação direta entre o uso da fórmula e a inversão da natureza combinatória, isto é, todos os alunos que apresentaram essa inversão adotaram como estratégia o uso de fórmulas.

Ao comparar seu trabalho com o de Medeiros (1992), a autora sublinha:

> Diferentemente dos resultados obtidos no estudo realizado por Medeiros onde os adolescentes utilizaram bem mais a estratégia da listagem, tabelas e busca de padrões, a estratégia mais adotada pelos sujeitos desta pesquisa foi a do uso de fórmulas, tanto nas abordagens bem sucedidas como insatisfatórias (MEDEIROS apud PACHECO, 2001, p.230)

A pesquisa apontou que os alunos apresentaram êxito nas abordagens dos problemas do tipo não verbal. Entretanto, isso não implicou um desempenho mais adequado nos problemas do tipo verbal. A autora acredita que uma boa habilidade com o uso de fórmulas não é suficiente para a resolução de problemas verbais que relacionam os conceitos de arranjo e de combinação com situações do dia-a-dia. É necessário que o aluno tenha desenvolvido uma boa formação dos conceitos de arranjo e combinação para que saiba usar corretamente as fórmulas.

Os trabalhos acima citados estão centrados nas dificuldades e nas estratégias dos alunos ao resolverem problemas de AC. Observamos, de uma forma geral, que os alunos apresentam acentuadas dificuldades em resolver os problemas de combinatória, mas o fato de não saber diferenciar os problemas de combinação dos problemas de arranjo é a principal de todas as dificuldades. Essa questão nos faz refletir o quanto é importante uma aula destinada somente a fazer o aluno perceber a diferença entre os conceitos de arranjo e combinação.

No que tange à questão das estratégias, entendemos, por meio dos resultados das pesquisas, que o uso da contagem direta dos agrupamentos e da árvore de possibilidades representa uma boa sugestão para iniciar uma aula de AC, mas mantendo a vigilância acerca do tamanho da amostra. Essa questão referente ao tamanho da amostra remete ao uso das fórmulas, pois, em casos que a amostra é muito grande, será interessante utilizar a fórmula. Sendo assim, passamos a acreditar na importância de desenvolver uma aula em que o aluno participe intensamente da construção das fórmulas de arranjo e de combinação.

Nessa perspectiva, uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas com ênfase no PFC se enquadra como uma possibilidade de ensino de AC sob uma abordagem diferente das abordagens tradicionais, também chamada por Sturm de uma abordagem alternativa.

Sturm (1999) procurou investigar as possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa. O autor considera como alternativa uma abordagem de ensino que é desenvolvida diferentemente das abordagens tradicionais, que valorizam a definição do conceito, seguido de exemplos, exercícios e o uso excessivo de fórmulas. Os objetivos descritos pelo autor foram: analisar uma proposta de ensino de análise combinatória e sua experimentação em sala de aula; identificar as possibilidades e limites com relação ao ensino-aprendizagem da proposta no sentido de colaborar em futuras investigações sobre análise combinatória e contribuir para o trabalho de professores de matemática do Ensino Médio que buscam aprimorar sua formação em relação ao ensino-aprendizagem de análise combinatória.

A proposta elaborada por Sturm (1999) abordou os seguintes tópicos: arranjo, permutação e a combinação, sem repetição de elementos. Foi desenvolvida por meio de resolução de problemas, com 33 alunos de uma escola particular da rede privada de ensino da cidade de ITU-SP. As aulas se diferenciaram do método tradicional pelo fato de as definições não serem apresentadas inicialmente. No entanto, o professor apresentou e resolveu os problemas propondo uma estratégia didática centrada na interação dos alunos com a resolução dos mesmos, que, a princípio, eram resolvidos pelo próprio professor.

Em suas conclusões, Sturm (1999) considerou que a proposta teve um efeito positivo e destacou alguns aspectos, tais como: os alunos trabalhavam durante todo o dia e mesmo assim participavam intensamente da pesquisa; os alunos demonstraram ter compreendido a potencialidade do PFC na resolução de problemas combinatórios; os alunos passaram a ver as fórmulas de arranjo e permutação como apenas mais um auxílio na resolução dos problemas, pois os mesmos perceberam que as fórmulas decorrem do modo direto do Princípio Multiplicativo ou PFC.

No trabalho de Rocha (2002), a autora procurou investigar um processo de resolução de problemas de Análise Combinatória apoiando-se essencialmente na aplicação do princípio multiplicativo. Esse processo de resolução de problemas centrou-se na análise da evolução do aprendizado dos alunos em relação à resolução de problemas de Análise Combinatória, à luz de influências de um método de ensino desenvolvido segundo pressupostos construtivistas. A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa de estudo de casos, desenvolvida junto a alunos do Ensino Médio das redes públicas e particulares de ensino, onde a pesquisadora atuava como professora da turma. A autora propõe o uso do PFC na resolução de problemas para a apresentação das definições e fórmulas como consequência das discussões e argumentações desenvolvidas nas aulas.

O método de ensino de Combinatória proposto por Rocha (2002) seguiu as seguintes etapas:

Primeira Etapa: apresentar aos alunos problemas básicos de contagem direcionados a fatos relacionados com o cotidiano e que podem ser resolvidos a partir do conhecimento prévio dos mesmos, sem formalização.

Segunda Etapa: apresentar aos alunos problemas mais complexos que envolvem os conceitos de Análise Combinatória.

Terceira Etapa: solicitar aos alunos que criassem e resolvessem seus próprios problemas referentes à contagem.

Quarta Etapa: partir do uso do princípio fundamental da contagem e resolver problemas de permutação, arranjo ou combinação e em seguida deduzir as respectivas fórmulas.

Quinta Etapa: submeter os alunos a uma avaliação formal que deve ser corrigida respeitando os diversos métodos de resolução apresentados pelos mesmos.

O trabalho de campo foi desenvolvido com alunos de duas escolas: uma pública, Escola Técnica Estadual, com as turmas do curso de Eletrônica, em 1998 e 2000, e a outra uma escola particular, com uma turma do Ensino Médio, em 2001. A autora utilizou como material de apoio os livros didáticos adotados pelas escolas e a mesma apresentou as fórmulas de arranjo e combinação aos alunos após ter percebido que eles estavam em condições de acompanhá-la na construção da fórmula. Em seguida retomou os procedimentos de resolução de um problema resolvido pelo princípio multiplicativo e seguiu expondo aos alunos a forma como o fatorial pode surgir na resolução dada e depois apresentou a resolução toda na forma de fatorial. A última etapa foi a substituição dos valores numéricos na forma de fatorial pelas letras n e p. A letra n, para representar o número de elementos da amostra e p, para representar as etapas do problema. De modo análogo foi apresentada a fórmula da combinação simples.

Tendo como referência a relação aluno-conteúdo, a interação professor-aluno e as contribuições do uso do PFC na resolução de problemas, Rocha (2002) enumerou os seguintes resultados: a necessidade de negociação de significados em sala de aula, a possibilidade dos alunos interagirem com o conteúdo, a importância do papel mediador do professor como representante do conhecimento, a importância e função da linguagem na formação de conceitos de contagem e a implementação do ensino de AC de forma produtiva e significativa.

Comparando o trabalho desenvolvido por Rocha (2002) e Sturm (1999), observamos que ambos potencializam o PFC como a principal ferramenta para resolver problemas de AC no ensino Médio. No método de Sturm (1999), as fórmulas foram apresentadas de maneira direta pelo professor, sem uma construção significativa, diferentemente do método desenvolvido por Rocha (2002) que propôs condições para que os alunos pudessem acompanhá-la na construção das fórmulas básicas da AC.

Para finalizarmos a análise de alguns trabalhos desenvolvidos em torno de AC, consideramos o trabalho de Esteves (2001) que construiu duas sequências de ensino centralizadas na formação dos conceitos básicos de AC. Esteves acredita que o estudo de AC deveria ser iniciado no Ensino Fundamental de forma significativa, sem apresentação de fórmulas, e que no Ensino Médio, o aluno poderia ter esse conceito institucionalizado, apresentando as fórmulas de maneira significativa, e não apenas como algoritmo que o leve a mecanizar e associar palavras-chave. Ainda em relação ao uso de fórmulas, Esteves afirma que, se as fórmulas são apresentadas após ligeira abordagem e apresentação formal da definição de cada agrupamento, isto pode gerar dificuldade por parte do aluno em reconhecer o tipo de agrupamento envolvido no problema e, consequentemente, em que fórmula se deve utilizar. Com isso, o aluno estaria sendo induzido ao domínio da técnica, sem se preocupar com a interpretação do problema, o que na AC é fundamental. A pesquisa de Esteves (2001) nos fez refletir sobre a importância de realizar um trabalho que busque a todo o momento, maior envolvimento dos alunos. Podemos constatar na seguinte citação:

> Durante a sequência, pudemos observar que os alunos evoluíram passo a passo com as representações das resoluções e com as discussões relativas aos processos de resolução usados. Acreditamos que a mudança na forma de se trabalhar com o conteúdo seguindo uma abordagem que procurou envolver o aluno através de situações reais, além do trabalho desenvolvido em duplas criou um ambiente favorável para tal comportamento (ESTEVES, 2001, p. 184)

As nossas inquietações e consequentemente a nossa proposta de ensino vêm concordar com tal afirmação na medida em que nos interessamos com a resolução de problemas sob a ótica da praxeologia modelada visando favorecer a compreensão do funcionamento, da potencialidade e das aplicações do PFC.

Com o propósito de apresentar uma análise institucional e uma Sequência Didática visando o ensino e aprendizagem de AC no 2º ano do Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática do Instituto Federal da Bahia (IFBA), Campus Eunápolis, consideramos as seguintes questões:

Qual é a proposta institucional sobre o ensino e aprendizagem de AC? Qual é a praxeologia relativa à Análise Combinatória nesta instituição? É possível, a partir dessa praxeologia, propor um ensino de AC diferenciado, que possa complementar ou favorecer a aprendizagem dos alunos a partir da resolução de problemas? Se sim, como? Caso contrário, por quê?

Para respondermos estas questões analisamos os seguintes elementos institucionais: Plano do Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática do Instituto Federal da Bahia (Campus Eunápolis) e o livro didático, com fundamentação na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard, que apresentamos a seguir.

3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) representa uma importante contribuição para a Didática Matemática e Matemática, pois permite analisar como os conhecimentos matemáticos estão relacionados e como essas relações podem objetivar o ensino de um determinado conteúdo.

Chevallard (1999) afirma que a TAD estuda o homem frente ao saber matemático e mais especificamente, frente a situações matemáticas. O postulado básico da TAD afirma que qualquer atividade humana pode ser descrita por um modelo, o qual se denomina *"praxeologia"*.

Nessa perspectiva, encaramos o ato de ensinar e aprender Matemática como sendo um resultado de atividades humanas descritas a partir de uma organização praxeológica, nesse caso uma organização matemática, com o objetivo de analisar, estudar e explicar de que forma essa ação se realiza.

Segundo Almouloud (2007), a palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, práxis e logos, que significam, respectivamente, prática e razão. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido de um **logôs** que justifica, acompanha e dá razão para tal prática.

Para Chevallard (1999), [Calcular o número de anagramas da palavra PAI] é uma *tarefa*, pois apresenta um objetivo relativamente preciso, mas observando apenas o verbo calcular, tem-se o que ele nomeia como gênero, que caracteriza algo não preciso.

Uma praxeologia relativa a uma *tarefa* determina uma maneira ou caminho de como realizá-la. Esta maneira de fazer uma determinada *tarefa* é chamada, segundo Chevallard (1999) de *técnica* (do grego, *tekhnikós*: relativo à arte, à ciência ou ao saber, ao conhecimento ou à prática de uma profissão).

Para exemplificar o sentido do termo *técnica* vamos analisar a seguinte *tarefa*: Calcular o número de anagramas da palavra PAI.

Para realizar esta *tarefa* podemos utilizar a Enumeração, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou a árvore de possibilidades como *técnicas*. Por Enumeração, devemos mudar a posição de cada letra da palavra PAI, obtendo assim, os elementos (anagramas) que representamos no esquema da Figura 2.

Assim, por simples contagem, podemos concluir que temos seis anagramas da

Figura 2 – O número de anagramas da palavra PAI

palavra PAI. Sublinhamos que a ordem apresentada abaixo é irrelevante, ou seja, podemos iniciar a Enumeração com qualquer outro anagrama da palavra PAI, e apresentar não necessariamente agrupada em sequência. O grupo pode ser representado de forma aleatória como mostra a Figura 3.

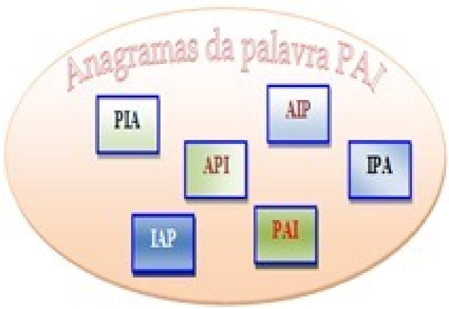


Figura 3 – Representação aleatória dos anagramas da palavra PAI

O PFC consiste na multiplicação do número de possibilidades de cada etapa identificada no problema. De acordo com o problema temos:

1ª Etapa: Determinar a primeira letra do anagrama. Na tarefa em análise temos três possibilidades (P, A ou I).

2ª Etapa: Determinar a segunda letra do anagrama. Neste caso temos duas possibilidades, pois uma letra já foi utilizada na 1ª Etapa.

3ª Etapa: Determinar a última letra do anagrama, tendo, portanto, uma única possibilidade, pois neste caso já foram utilizadas duas letras para as etapas anteriores.

Assim, utilizando o PFC que consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada etapa, neste caso que temos três etapas, temos três possibilidades para a 1ª Etapa, duas para 2ª Etapa e uma para a 3ª Etapa. Desta forma temos 3.2.1, o que resulta em seis anagramas como mostra a operação (Op1).

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \quad (Op1) \tag{1}$$

Portanto, nesse problema o PFC ou a Enumeração caracterizam-se como maneiras distintas (técnicas disponíveis) para realização da *tarefa* determinada pelo problema. Esta *técnica* foi muito utilizada e valorizada nos trabalhos acima citados para o ensino de AC, e consiste na principal *técnica* que utilizamos na nossa proposta.

Chevallard (1999) considera que, em principio, uma praxeologia relativa a algum tipo de *tarefa* contém, pelo menos, uma determinada *técnica*. Esta combinação *tarefa-técnica* é denominada pelo autor, como bloco *praxe* [prático-técnico] que se identifica com o saber fazer. O autor afirma ainda que em uma determinada instituição, existe um número restrito de *técnicas* que são institucionalmente reconhecidas. Contudo, as mesmas *técnicas* podem não ser reconhecidas em outra instituição. Um bom exemplo é que no Ensino Médio o aluno pode utilizar a fórmula de Arranjo para determinar a resposta do problema acima citado, mas essa *técnica* não é reconhecida para um aluno do Ensino Fundamental, pois seria comum observar esse aluno enumerando as possíveis soluções do mesmo problema acima. Neste contexto o autor deixa claro que instituição não se refere apenas a diferentes escolas, pode estar relacionada, também, como por exemplo, a países com diferentes culturas ou a diferentes salas de aulas da mesma escola. Ou seja, as *técnicas* podem ser reconhecidas, ou não, como um possível "caminho" para a resolução de determinada *tarefa*.

A fim de justificar o uso de uma determinada *técnica* em uma instituição, Chevallard et al. (2001) desenvolvem uma significação especifica para o termo *tecnologia*.

> Para que uma técnica possa ser utilizada de maneira normalizada, deve aparecer como algo ao mesmo tempo correto, compreensível e justificado. A existência de uma técnica supõe, também, a existência subjacente de um discurso interpretativo e justificado da técnica e de âmbito de aplicabilidade e validade. Chamaremos a esse discurso sobre a técnica de uma tecnologia. (CHEVALLARD et al.,2001, p.125)

A *tecnologia* é um discurso racional com o objetivo de justificar e demonstrar as *técnicas* utilizadas para uma determinada *tarefa* ou gênero de *tarefas*. Este discurso racional varia no espaço institucional, ou seja, um discurso que possui certa racionalidade em uma determinada instituição poderá parecer pouco racional, ou até, sem significação em outro espaço institucional.

Assim, segundo Chevallard, podemos caracterizar a demonstração da fórmula de Arranjo Simples, como a *tecnologia* utilizada, ou seja, como o discurso tecnológico que valida o uso desta *técnica* na resolução de problemas de contagem. Portanto, nessa situação, a demonstração da fórmula é a justificativa para o uso da *técnica* (emprego da fórmula) na realização de uma *tarefa* determinada. Por fim, ele afirma que em uma instituição, qualquer que seja o tipo de *tarefa*, a *técnica* relativa a esta *tarefa* estará sempre associada a uma *tecnologia* que assume a função de explicar, esclarecer e expor porque a *técnica* escolhida tem êxito na forma como foi desenvolvida.

Em uma organização matemática, é comum lançarmos mão de processos demonstrativos a fim de explicar e tornar compreensível uma determinada *técnica*. Assim, as demonstrações de teoremas denotam a *tecnologia* que justifica a *técnica* utilizada.

Por exemplo, o PFC caracteriza-se como uma *técnica* disponível, a fim de determinar um caminho para resolução de problemas de contagem que possuem duas etapas sucessivas e independentes. Por outro lado, essa *técnica* pode ser aplicada a problemas que envolvem mais de duas etapas. Para justificar esse resultado, necessitamos demonstrá-lo. Assim, essa demonstração representa a *tecnologia* que exercerá a função de esclarecer e justificar o uso do PFC em problemas que envolvam mais de duas etapas (apresentamos a demonstração do PFC mais adiante).

Quanto à relação entre *técnica* e *tecnologia*, Chevallard afirma que a existência de uma *tecnologia* é uma das condições necessárias para a existência de uma *técnica*; por essa razão, a *tecnologia* tem também a função de reproduzir *técnicas*.

Toda *tecnologia*, por sua vez, precisa de uma justificativa que, segundo Chevallard, se denomina *Teoria* da *técnica*. O discurso tecnológico descrito com rigor, precisão e efetivamente formalizado apresenta um nível superior de justificação, explicação e produção, ou seja, o nível da *Teoria*.

Na demonstração (*tecnologia*) do PFC (*técnica*) em problemas que envolvem mais de duas etapas, identificamos Álgebra como sendo a *Teoria* que justifica o uso da *tecnologia*. Assim, no campo da Álgebra, podemos utilizar da Teoria dos Números e do Princípio da Indução Finita para justificar a *tecnologia*, ou seja, a demonstração do PFC para problemas que envolvem mais de duas etapas.

Para Chevallard et al. (2001), toda obra matemática tem sua gênese com base na solução de algum tipo de *tarefa* problemática. Desta *tarefa*, surgem *técnicas* com o proposito de resolvê-la, que por sua vez, torna-se necessário um discurso racional que justifique essas *técnicas*, ou seja, discurso tecnológico. Por fim, a formalização desse discurso tecnológico, com precisão e rigor, fundamenta-se no campo da *Teoria*.

Sendo assim, notamos que em torno de uma determinada *tarefa*, encontramos um tripé formado por uma *técnica*, uma *tecnologia* e uma *teoria*. As quatro noções: *tarefa, técnica, tecnologia e teoria*, descrevem uma organização praxeológica completa, que se decompõe em dois blocos: o bloco [prático –técnico] que constitui o saber fazer [*praxe*] e o bloco [tecnológico – teórico] que representa o saber [*logôs*]. E assim, podemos afirmar que produzir, ensinar e aprender matemática são ações humanas institucionais que podem ser descritas conforme o modelo praxeológico. Nesse sentido, a organização praxeológica relativa às atividades matemáticas é uma organização matemática.

Podemos notar que não é possível para um professor de matemática, ou mesmo, um aluno atuar matematicamente sem compreender o que está fazendo. Por exemplo, no estudo de AC decorar as fórmulas para utilizar na resolução de problemas de contagem sem ao menos compreendê-las. Por outro lado, não se pode entender uma organização matemática, sem uma prática matemática eficaz, ou seja, não há *práxis* sem *logôs*, como também não há *logôs* sem *práxis*.

Torna-se necessário e imprescindível que o professor aproprie-se do conhecimento matemático, como também observe este conhecimento, como uma organização praxeológica, na qual o desenvolvimento dos conceitos matemáticos está permeado pelos blocos [prático-técnico], o fazer matemática e o bloco [tecnológico-teórico], o compreender matemática.

Vale ressaltar que a TAD possibilita fazer uma análise praxeológica de livros didáticos que apresentam uma organização matemática do objeto de estudo, verificando se o livro didático analisado apresenta uma praxeologia usual, que parte da apresentação teórica dos conteúdos, bloco *logôs* para o bloco *praxe* ou uma praxeologia modelada onde os conceitos/conhecimentos são desenvolvidos partindo-se do bloco *praxe* ao bloco *logôs*.

Salientamos que, em nosso trabalho, desenvolvemos uma sequência didática considerando três momentos fundamentais: análise preliminar (ou institucional), organização do dispositivo experimental (DE) e análise a priori. Na análise institucional consideramos o 2º ano do Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática do Instituto Federal da Bahia, Campus Eunápolis, como a instituição de referência, onde escolhemos o livro didático enquanto elemento institucional para conhecermos uma praxeologia de referência visando o ensino de AC. A nossa proposta de ensino (dispositivo experimental) revela uma praxeologia inversa da usual (praxeologia modelada). Nessa praxeologia, a evolução dos estudos é motivada por resolução de problemas (*tarefas*) relativos aos conceitos de AC, principalmente a *técnica* do PFC.

4 ANÁLISE INSTITUCIONAL EM TORNO DE AC

Para apresentarmos esta parte do nosso trabalho, recorremos ao artigo publicado por Henriques, Nagamine, Nagamine (2012), quando os autores, apoiados nos trabalhos de Chevallard sobre a TAD, sublinham:

> as pesquisas no ensino, em particular da Matemática, requerem do pesquisador conhecimentos detalhados, não apenas de saberes matemáticos envolvidos na pesquisa, mas, também, do referencial capaz de dar um suporte teórico no trabalho pretendido. A abstração das condições particulares que dão sentido e sistematização dos saberes envolvido, bem como seus efeitos no processo ensino/aprendizagem, são aspectos indispensáveis no sistema educativo.

Referindo-se a esse sistema, Chevallard (1992), ressalta que nele intervêm diversos elementos constituintes do sistema social do ensino, doravante denominado *Noosfera* que envolve: o Ministério da Educação, os políticos, a proposta curricular do estado ou de um curso, os administradores, os professores, os livros didáticos, os parentes de estudantes, a mídia (rádio, jornal, TV, revistas, computadores, softwares, internet etc.) que designam, dentre todos os conhecimentos historicamente acumulados, aqueles que são pertinentes para a formação do cidadão que ingressa na instituição. Além desses, outros elementos são também relevantes nesse sistema, tais como o tipo da sociedade, sua administração, suas práticas, seu desenvolvimento tecnológico, a formação de professores e de autores de livros didáticos. Esses elementos constituem-se em dados institucionais e se fundam em objetos de investigação na Educação.

Assim, quando os autores falam sobre instituição estão se referindo à *Noosfera* constituída, dentre outros *elementos institucionais* possíveis, que eles apresentam na Figura 4.

Figura 4 – Elementos constituintes de uma instituição (Henriques, Nagamine, Nagamine (2012, p. 1263))

Uma *instituição de referência* é correspondente à instituição de realização e/ou aplicação da pesquisa em questão, seja de ensino ou não. A explicitação dessa instituição pelo pesquisador deve satisfazer, pelo menos, um desses elementos. Em geral, no desenvolvimento de uma pesquisa em Educação, pensamos em uma instituição constituída, no mínimo, com um dos elementos institucionais apresentados na Figura 4. Mesmo que o pesquisador não explicite ou não use o termo instituição, seu trabalho está sempre inserido em uma instituição.

Como podemos ver na Figura 5, a Educação Básica, como um todo, é uma instituição, as suas partes (primeiro segmento da educação, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, Ensino Médio etc.) também o são, podendo ser caracterizadas como *instituições de referência* e/ou de aplicação.

Figura 5 – Educação Básica e suas partes enquanto instituições (Henriques, Nagamine, Nagamine (2012))

O termo referência é sugestivo, na medida em que identifica o local institucional da realização/aplicação da pesquisa. O Instituto Federal da Bahia, por sua natureza é uma instituição no contexto descrito acima. As suas partes, tais como os cursos, também são instituições. Com efeito, podemos falar sobre relações e reconhecimento de objetos nas instituições, no contexto descrito por Chevallard (1989), na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Para o autor um objeto (O) do saber é institucionalizado ou reconhecido institucionalmente, se existe a relação institucional denotada por R(I,O) da instituição I com o objeto O. Para Henriques (2011), esse reconhecimento passa pelos registros de documentos oficiais da instituição, tais como Projetos Acadêmicos Curriculares (PAC) no caso das Instituições de Ensino Superior ou Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) tratando-se da Educação Básica. A relação institucional é, particularmente, ligada às atividades institucionais que são solicitadas aos estudantes, e é de certa maneira, caracterizada por diferentes tipos de *tarefas* que os estudantes devem efetuar e por razões que justificam tais tipos de *tarefas*. A relação institucional com um objeto R(I,O) é descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição, envolvendo esse objeto do saber.

Além disso, como as instituições admitem pessoas, Chevallard (1992) versa também sobre relações pessoais, de um indivíduo X com um objeto O da instituição denotado por R(X,O) e afirma que essa relação só pode ser estabelecida quando X

entra na instituição I onde vive O com certas finalidades, por exemplo, realizar um determinado curso, que reconhece esse objeto.

O estudo da relação R(X,O) é frequente nas pesquisas em Educação Matemática e consiste, naturalmente, no estudo das práticas efetivas de indivíduos de determinadas *instituições de referências*. Por exemplo, investigar o que os estudantes aprendem na referida instituição em torno de O, tal como Análise Combinatória. Assim, Henriques (2011) afirma que "R(X,O) é uma relação de grande interesse em pesquisas na Educação, e pode ser analisada utilizando-se uma *Sequência Didática* (SD) organizada com base nas praxeologias desenvolvidas em torno de um objeto O na instituição de aplicação.

Análise institucional é, portanto,um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias desses objetos que intervém no processo ensino/aprendizagem.

Assim, a *análise institucional* passa pelo estudo das organizações, das práticas que se desenvolvem na *instituição de referência* em torno de objetos da aprendizagem e das relações institucionais e pessoais com esses objetos.

Na *instituição de referência* deste trabalho,nos interessamos, particularmente, na análise do livro didático, enquanto elemento institucional. Com essa escolha, focalizamos a análise no estudo de Análise Combinatória (objeto matemático de nosso interesse). O objetivo é destacar a *praxeologia* desse objeto a partir do livro didático utilizado no seu ensino/aprendizagem nesta instituição.

Henriques (2011) destaca que um professor, enquanto indivíduo da instituição quando vai organizar o assunto que pretende ensinar, uma das suas referências primordiais é a ementa ou programa da disciplina proposto no PAC ou no PPP da instituição de referência. O PAC ou PPP revela a relação institucional $R(I,O)$ da instituição I com o objeto O que o professor deve ensinar. Assim, seria interessante, em uma análise institucional, realizar um estudo, ou ao menos destacar, o PAC/PPP que permite revelar a relação institucional com o objeto O, assim como as exigências institucionais.

4.1 ORGANIZAÇÃO CURRICULAR DA INSTITUIÇÃO DE REFERÊNCIA

A organização curricular da nossa instituição de referência (2º Ano do Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática, do IFBA Eunápolis) observa as determinações legais presentes nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e Educação Profissional de nível Técnico, nos Referenciais Curriculares Nacionais da Educação Profissional de Nível Técnico e no Decreto nº 5154/04, na Lei 9394/96, no Parecer CNE/CEB 39/2002, bem como nas diretrizes definidas no Projeto Político Pedagógico do IF-BAHIA.

Observamos que o Plano do Curso de Nível Médio Integrado em Informática está estruturado com uma carga horária de 4.534 horas/aulas, assim construído:

a. Um núcleo comum que integra disciplinas das três áreas de conhecimentos do Ensino Médio (Linguagem e Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias e Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias), totalizando 2772 horas/aulas;

b. Um núcleo de integração entre as disciplinas gerais do conhecimento e as disciplinas de formação profissional do Técnico em Nível Médio Integrado em Informática, totalizando 648 horas/aulas;

c. Um núcleo de formação profissional, que integra as disciplinas da área profissional de Técnico em Informática totalizando 864 horas/aulas e mais 240 horas de estágio supervisionado.

A estrutura curricular proposta inclui quatro séries: 1ª Série, 2ª Série, 3ª Série e 4ª série. E para o 2º ano ou 2ª Série traz a Ementa para a disciplina de Matemática apresentada na Figura 6.

Identificamos ainda que, para o desenvolvimento dos estudos de objetos propostos nesse ementário, o Ministério da Educação (MEC) através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) encaminha uma relação de livros que podem ser utilizados na instituição de ensino. Dentre a relação encaminhada, a nossa instituição faz uma escolha promovida a cada ciclo trienal.

O livro didático, enquanto elemento institucional, pode favorecer o desenvolvimento das competências apresentadas na Ementa da disciplina, tornando assim, indispensável que o professor analise a organização praxeológica do objeto que pretende ensinar.

INSTITUTO FEDEREAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA Campus Eunápolis Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática	
Área Profissional: Informática	
Disciplina: MATEMÁTICA	
Série: 2ª	Carga Horária: 90 HORAS – 108 h/a
COMPETÊNCIAS E HABILIDADES	

- Ler e interpretar textos em matemática;
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagrama, formulas, etc) e vice versa;
- Exprimir se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta;
- Produzir textos matemáticos adequados;
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho;
- Identificar problemas do contexto da realidade e traduzi-los para a linguagem a matemática (compreender enunciados, formular questões);
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática à interpretação e intervenção no real;
- Aplicar métodos e conhecimentos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

BASES CIENTIFICO-TECNOLOGICAS (CONTEUDOS)

- Unidade I
  - TRIGONOMETRIA
  - Semelhança de triângulos, trigonometria do triângulo retângulo, triângulos quaisquer.
  - Ciclo trigonométrico, arco de circunferência, grau, radiano.
  - Função seno e co-seno
- Unidade II
  - Função tangente
  - Relações entre as funções
  - Identidades Trigonométricas
  - Transformações
  - Equações e Inequações
- Unidade III
  - 1.1Matrizes
  - 1.2. Determinantes
  - Sistemas Lineares
- Unidade IV
  - Análise Combinatória: Principio fundamental da contagem, permutações, combinações.
  - Probabilidade: espaço amostral, eventos, probabilidade clássica, probabilidade condicional, distribuição de probabilidades.

Figura 6 – Ementa de matemática 2º Ano Informática IFBA - Eunápolis

A fim de aprofundarmos nossos conhecimentos, nos interessamos em saber quais práticas institucionais desenvolvidas em torno do estudo de Análise Combinatória, investigando, para tanto, os tipos de *tarefas*, as *técnicas* e os discursos tecnológico-teóricos, referentes a esse objeto de estudo na *instituição de referência* deste trabalho. Neste caso, analisamos o livro didático de Jackson Ribeiro intitulado: "Matemática: ciência, linguagem e tecnologia – volume 2", que é o livro adotado pela instituição.

4.2 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO

Essa análise possibilita o acesso dos elementos característicos da relação institucional com o objeto do ensino visado, bem como das exigências institucionais e das organizações propostas em torno desse objeto. Nesse contexto, Henriques, Nagamine e Nagamine (2012) propõem o modelo de análise que considera três estruturas organizacionais: *global, regional e local*.

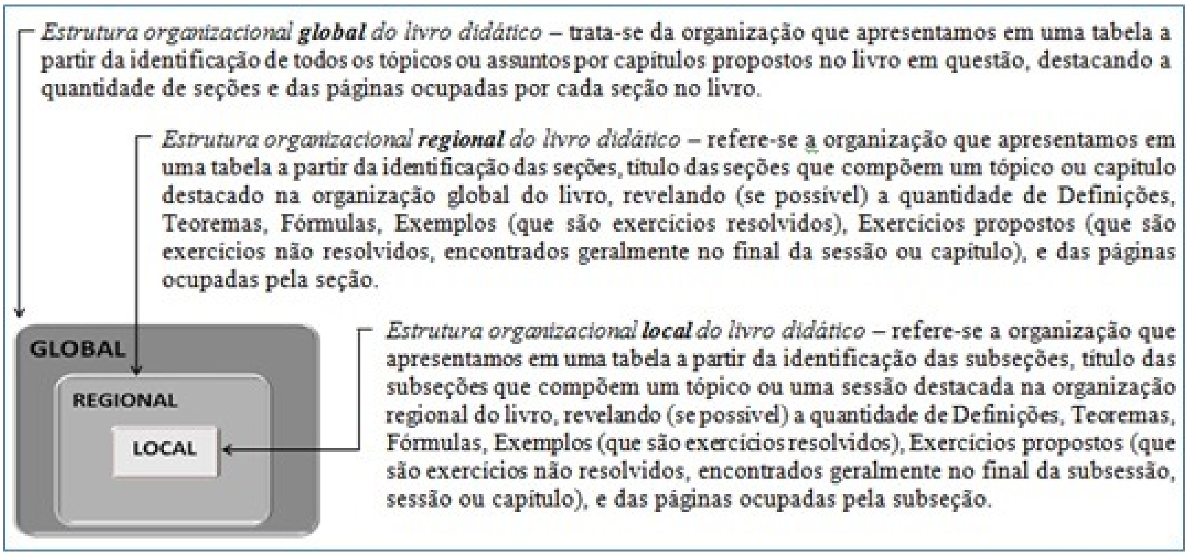


Figura 7 – Modelo de análise de livros didáticos retirado de Henriques, Nagamine, Nagamine (2012)

A *estrutura organizacional global* do livro didático refere-se a identificação de todos os tópicos ou assuntos por capítulos propostos no livro em questão, destacando a quantidade de seções e de páginas ocupadas por cada seção do livro.

A *estrutura organizacional regional* do livro didático refere-se a identificação das seções, títulos das seções que compõe um tópico ou capítulo destacado na organização global do livro, revelando (se possível) a quantidade de Definições, Teoremas, Fórmulas, Exemplos e Exercícios propostos, bem como o número de páginas ocupadas pela seção.

A *estrutura organizacional local* do livro didático refere-se a identificação das subseções, título das subseções que compõe um tópico ou uma seção destacada na organização regional do livro.

Os autores sublinham que essas estruturas ou organizações didáticas proporcionam uma visão geral dos objetos de estudo propostos no livro em análise. Dependendo do interesse do trabalho, o pesquisador pode restringir-se a uma das partes dessas estruturas. Essa restrição favorece a consolidação dos conhecimentos em torno da praxeologia correspondente, como se procede mais adiante. Com efeito, a análise de uma única sessão de um livro didático é uma análise local.

Com base neste modelo, apresentamos a seguir as estruturas do livro didático que escolhemos de analisar, o qual é adotado na instituição de referência. A tabela 1, traz a referência completa deste livro, onde P/n indica o lugar que consta a organização de AC, P indica o número de páginas ocupadas pela AC e n o número total de páginas do livro.

Referência do livro	*P/n*
Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia. RIBEIRO, Jackson. Volume 2. São Paulo: Scipione, 2010.	39/308

Tabela 1 – Um livro de Matemática do Ensino Médio com o conteúdo de Análise Combinatória

Iniciamos com a apresentação da estrutura organizacional global do livro que analisamos como segue, destacando o objeto matemático de nosso interesse no sexto capítulo.

4.2.1 ESTRUTURA ORGANIZACIONAL GLOBAL DO LIVRO DIDÁTICO

O livro didático de Jackson Ribeiro intitulado: "Matemática: ciência, linguagem e tecnologia – volume 2", é composto de 8 capítulos, divididos em 5 unidades. A Tabela 2 a seguir apresenta os 8 capítulos, com os respectivos títulos dos objetos de estudo, a quantidade de seções e de páginas ocupadas pelo assunto.

Capítulo	Assuntos	Seções	Páginas
1	Matemática Financeira	6	35
2	Funções Trigonométricas	9	43
3	Relações, equações e transformações trigonométricas	4	21
4	Matrizes e determinantes	10	45
5	Sistemas lineares	5	29
6	**Análise Combinatória e Binômio de Newton**	**9**	**39**
7	Probabilidade	6	38
8	Introdução à Estatística	5	40
Caderno de respostas		-	14
Sugestões de leitura para o aluno		-	1
Sites		-	1
Bibliografia		-	1
Siglas		-	1

Tabela 2 – Objetos de estudo abordados no livro didático

Todo capítulo apresenta um tópico inicial chamado Introdução. Nesse tópico, há situações-problema, textos referentes à história da Matemática ou situações do cotidiano relacionadas ao conteúdo, e ao final desse tópico, encontra-se a seção CONVERSANDO..., na qual são propostas questões que servem como diálogo inicial acerca do conteúdo a ser tratado e de temas e situações relacionadas ao mesmo.

Em seguida são apresentados exercícios resolvidos que servem tanto como exemplo quanto complemento da teoria abordada. Logo depois, são apresentados os exercícios propostos referentes ao conteúdo abordado no tópico do capítulo. Ao final de cada capítulo são propostos exercícios de vestibulares de diversas instituições, do Enem, entre outros (intitulada pelo autor de seção *Prepare-se*).

Assim, podemos notar que o livro segue uma organização didática clássica, onde é apresentada a parte teórica do conteúdo abordado (bloco *logôs*) e no final de cada seção são apresentados os exercícios para fixar os conhecimentos até então adquiridos. As técnicas que permitem realizar as tarefas propostas são facilmente identificadas pelo sujeito na seção em estudo. Com isso, o trabalho do sujeito se reduz a treinar as técnicas que são propostas em cada seção, ou seja, utiliza-se apenas de procedimentos mecânicos para realizar as tarefas sugeridas, restringindo-lhe, portanto, no bloco *praxe* o saber-fazer do modelo *praxeológico*.

A seguir apresentamos a organização regional do *habitat* da Análise Combinatória.

4.2.2 ESTRUTURA ORGANIZACIONAL REGIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

A organização regional permite evidenciar os objetos de estudos tratados em um determinado capítulo do livro em análise. No nosso caso, referimo-nos ao capítulo 6 do livro em análise citado, que trata do estudo de Análise Combinatória (AC) e Binômio de Newton, organizado como segue:

SEÇÃO	DESCRIÇÃO	Nº EXEMPLOS	Nº EXERCÍCIOS PROPOSTOS
1. Introdução	Apresentação de um texto com dois infográficos e uma situação-problema de contagem	1	-
2. Princípio Fundamental da Contagem	Definição do Princípio fundamental da contagem (PFC)	5	12
3. Fatorial	Definição de fatorial; Fatorial com a calculadora científica	4	20
4. Arranjo Simples	Definição de Arranjo Simples; Número de Arranjo Simples (Fórmula); Arranjo Simples com a calculadora científica	4	19
5. Permutação Simples	Definição de Permutação Simples; Número de Permutação Simples (Fórmula)	5	15
6. Combinação Simples	Definição de Combinação Simples; Número de Combinação Simples (Fórmula); Propriedade das combinações simples; Combinação Simples com a calculadora científica	6	41
7. Permutação com elementos repetidos	Definição e fórmula de Permutação com elementos repetidos	2	8
8. Triângulo de Pascal	Apresentação do Triângulo de Pascal e suas propriedades	6	24
9. Binômio de Newton	Apresentação e fórmula do Binômio de Newton	9	42

Tabela 3 – Estrutura Organizacional Regional do livro didático

Nesta organização, as *tarefas* propostas aos estudantes, que encontram-se sistematicamente no final de cada seção são, em geral, aplicações dos conceitos ou *técnicas* vistas no bloco *logôs*, caracterizando um processo mecânico para realização das *tarefas* sugeridas. A seguir apresentamos uma análise local do nosso objeto de estudo (AC) destacado na organização regional, que corresponde às seções de 1 a 7.

4.2.3 ANÁLISE LOCAL DO LIVRO DIDÁTICO

Observando a organização regional do *habitat* da Análise Combinatória, verificamos que o livro didático contém 6 (seis) definições apresentadas em seções e que a distribuição dos exercícios estão divididos nestas seções. Cada seção termina com um conjunto de exercícios propostos que, em geral, correspondem a um mesmo tipo de *tarefa* associada à *técnica* apresentada no início da seção. Seguindo está ótica, fica evidente que são exercícios de treinamento da *técnica* apresentada e não exercícios de investigação. Para introduzir o ensino de AC, o autor apresenta a seguinte definição para o **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**:

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras distintas e para cada uma dessas maneiras um evento B pode ocorrer de n maneiras distintas, então o número de possibilidades de ocorrer os eventos de A e B é dado pelo produto $m \cdot n$.

O autor argumenta que com esse princípio é possível obter a solução de certos problemas sem a necessidade de se enumerar os elementos envolvidos, e apresenta o seguinte exemplo:

Simone foi a uma concessionária comprar um carro. Para determinado modelo, ela poderia escolher entre três cores e dois tipos de motor. Quantas possibilidades diferentes ela teria para escolher esse modelo de carro nessa concessionária?

Para determinar todas as opções de Simone, o autor sugere utilizar um esquema conhecido como **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades** que ele apresenta conforme o esquema que reproduzimos na Figura 8.

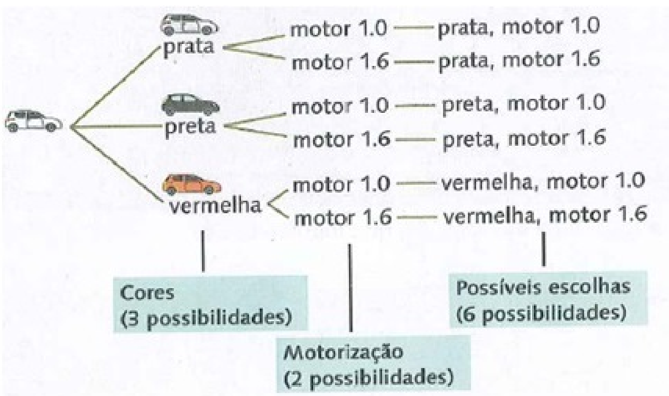


Figura 8 – Figura extraída do livro didático p.190

O autor sugere também utilizar outra maneira de representar essas possibilidades que consiste na utilização de uma tabela de dupla entrada apresentada na Figura 9.

Tanto no uso da árvore de decisão como técnica quanto no emprego de uma tabela, Simone tem 6 possibilidades para escolher um carro. Em seguida o autor estende

Cor	Motorização	
	Motor 1.0	Motor 1.6
Prata	Prata, motor 1.0	Prata, motor 1.6
Preta	Preta, motor 1.0	Preta, motor 1.6
Vermelha	Vermelha, motor 1.0	Vermelha, motor 1.6

Figura 9 – Figura extraída do livro didático p.190

o PFC para ações com mais de duas etapas sucessivas e independentes, apresentando os exemplos a seguir. Entretanto não apresenta o enunciado do PFC para mais de duas etapas.

Exemplo 1: *Uma loja de telefones oferece 3 modelos de telefone celular, e planos de tarifa e 3 formas de pagamento. Quantas possibilidades diferentes uma pessoa tem para comprar um telefone nessa loja?*

Exemplo 2: *Utilizando os algarismos 0, 1, 4, 5, 7 e 8, é possível formar quantos números com:*
a) Dois algarismos?
b) Três algarismos distintos?
c) Quatro algarismos?

Para o **Exemplo 1** o autor representa os modelos dos telefones *M1, M2* e *M3*, os planos de tarifa por *P1* e *P2* e as formas de pagamento por *F1, F2* e *F3* e apresenta árvore de possibilidades que consiste em um recorte da sua obra que apresentamos na Figura 10:

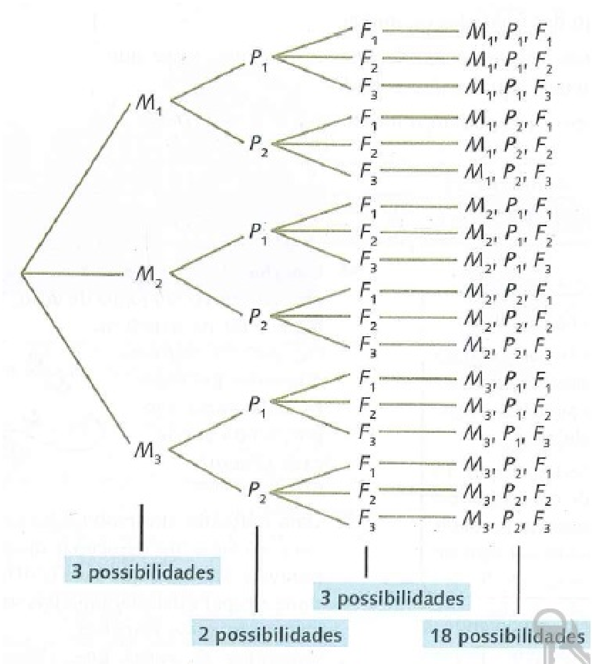


Figura 10 – Figura extraída do livro didático p.191

Para o **Exemplo 2** o autor apresenta as seguintes resoluções:

a) Dois algarismos?

O número formado terá duas ordens, ou seja, dezena e unidade.

Na ordem das dezenas, temos 5 possibilidades, isto é, 1, 4, 5, 7, 8, pois o 0 não pode ocupar essa ordem.

Na ordem das unidades, temos 6 possibilidades, pois pode haver repetição.

Dessa forma, o total de números que podemos formar é: $5 \cdot 6 = 30$.

b) Três algarismos?

O número formado terá três ordens, ou seja, centena, dezena e unidade.

Como a ordem das centenas não pode ser ocupada pelo 0, temos: 5 possibilidades para ordem das centenas; 5 possibilidades para a ordem das dezenas, visto que esse algarismo deve ser diferente daquele escolhido para ordem das centenas, mas o algarismo das dezenas pode ser 0; 4 possibilidades para ordem das unidades, visto que esse algarismo deve ser diferente daqueles já escolhidos.

Dessa forma, o total de números que podemos formar é: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

c) Quatro algarismos?

O número formado terá quatro ordens, ou seja, unidade de milhar, centena, dezena e unidade. Note que não foi dito que os algarismos devem ser distintos.

Como a ordem das unidades de milhar não pode ser ocupada pelo 0, temos:

- *5 possibilidades para ordem das unidades de milhar;*
- *6 possibilidades para ordem das centenas, dezenas e unidades, visto que esses algarismos podem ser iguais àqueles já escolhidos*

Dessa forma, o total de números que podemos formar é: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

Esta seção (seção 2, como visto na organização regional) termina com um conjunto de 12 exercícios propostos, que podem ser resolvidos com a aplicação direta do PFC, sem a necessidade de uma análise mais aprofundada por parte dos alunos. Deste modo, os problemas propostos não exploram situações que enriquecem o raciocínio combinatório e não potencializa a *técnica* apresentada. O autor nesta seção apresenta o PFC apenas para resolver problemas de contagem simples e iniciar o ensino de AC. Acreditamos que o mesmo poderia explorar problemas com um nível de complexidade maior para mostrar a importância da *técnica*.

Na seção seguinte (seção 3) o autor afirma que para resolver algumas situações envolvendo AC é preciso recorrer a cálculos em que é necessário realizar o produto entre números naturais consecutivos. Para apresentar o conceito de **fatorial**, o autor aborda a questão que reproduzimos na Figura 11.

Quantos números distintos com cinco algarismos podem ser formados usando as fichas abaixo?

Figura 11 – Figura extraída do livro didático p.194

Como vimos anteriormente, podemos responder a essa questão da seguinte maneira:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \rightarrow 120$ *números*

Esse tipo de cálculo surge com frequência em problemas envolvendo análise combinatória, e, para representá-lo, utilizamos fatorial, cuja notação é n!, que se lê: fatorial de n. No caso acima: $5! = 120$

Em seguida apresenta o seguinte conceito:

Dado um número natural n, com n > 1, definimos seu fatorial, indicado por n!, como o produto dos n números naturais consecutivos de n até 1. Utilizando símbolos, temos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definimos ainda: 1! = 1 e 0! = 1

E com exemplos traz a seguinte abordagem:

EXEMPLOS

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

De acordo, com os exemplos, podemos notar que:

- $3! = 3 \cdot 2!$
- $6! = 6 \cdot 5!$
- $10! = 10 \cdot 9!$

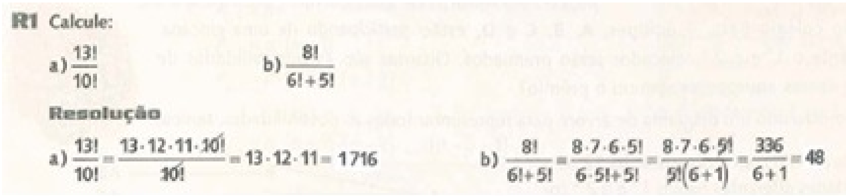
Portanto, de modo geral, temos:

$n! = n \cdot (n-1)!$

Logo depois o autor descreve os comandos para calcular 7! utilizando uma calculadora científica. Acreditamos ser interessante incentivar o uso deste dispositivo tecnológico.

Com o objetivo de reproduzir a *técnica* acima, o autor apresenta alguns exercícios resolvidos. Os recortes apresentados nas figuras 12, 13 e 14 trazem as resoluções dadas pelo autor.

Podemos, até agora, perceber que a organização apresentada pelo autor consiste numa praxeologia usual, pois, mesmo tendo encontrado uma situação problema no início, logo em seguida o autor enuncia o conceito de **fatorial** (bloco *logôs*) utilizado posteriormente na resolução dos exercícios, aplicando imediatamente o conceito que



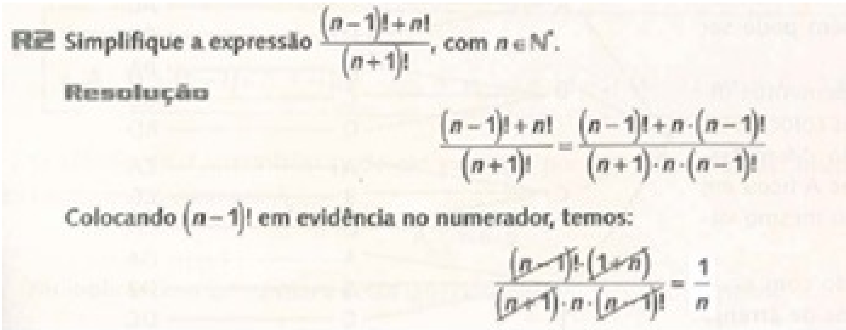
R1 Calcule:

a) $\frac{13!}{10!}$ b) $\frac{8!}{6!+5!}$

Resolução

a) $\frac{13!}{10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$ b) $\frac{8!}{6!+5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5! + 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}(6+1)} = \frac{336}{6+1} = 48$

Figura 12 – Cálculo da razão de fatoriais



R2 Simplifique a expressão $\frac{(n-1)!+n!}{(n+1)!}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

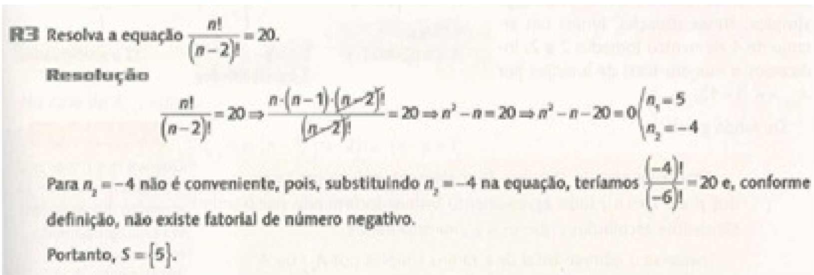
Resolução

$$\frac{(n-1)!+n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!+n \cdot (n-1)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}$$

Colocando $(n-1)!$ em evidência no numerador, temos:

$$\frac{\cancel{(n-1)!} \cdot \cancel{(1+n)}}{\cancel{(n+1)} \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{n}$$

Figura 13 – Cálculo da razão de fatoriais de expressões



R3 Resolva a equação $\frac{n!}{(n-2)!} = 20$.

Resolução

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 20 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 20 \Rightarrow n^2 - n = 20 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -4 \end{cases}$$

Para $n_2 = -4$ não é conveniente, pois, substituindo $n_2 = -4$ na equação, teríamos $\frac{(-4)!}{(-6)!} = 20$ e, conforme definição, não existe fatorial de número negativo.

Portanto, $S = \{5\}$.

Figura 14 – Cálculo da razão de fatoriais conhecendo o quociente

acabou de apresentar (favorecendo a memorização e reprodução da *técnica*). Além disso, notamos que a maioria dos enunciados dos exercícios, são "gêneros" no contexto apresentado pelo Chevallard, ao invés de tarefas completas (pois *"Calcule"* por si só não é tarefa). Isto mostra que a razão:

$$\frac{13!}{10!}$$

por exemplo, é indescritível para autor.

Para finalizar a seção que aborda a *técnica* **fatorial**, o autor Jackson Ribeiro apresenta um conjunto de 20 exercícios propostos, semelhantes aos exercícios resolvidos acima, que caracterizam o mesmo tipo de *tarefa*, onde o aluno é levado a aplicação repetitiva da *técnica* apresentada no bloco *logôs*. Acreditamos ser importante o conhecimento da *técnica*, mas que seja uma *técnica* desenvolvida de forma contextualizada com situações-problema, para o aluno visualizar a importância da *técnica* na resolução de problemas de contagem.

A seção subsequente do livro em análise (seção 4) discorre sobre os agrupamentos que recebem o nome de **Arranjo Simples**. O autor inicia esta seção com o seguinte problema:

No colégio Beta, 4 equipes, A, B, C e D, estão participando de uma gincana. Somente o 1º e o 2º colocados serão premiados. Quantas são as possibilidades de duas dessas equipes receberem o prêmio?

Para solucionar o problema o autor apresenta o diagrama da árvore (Figura 15) para representar todas as possibilidades de duas dessas equipes receberem o prêmio.

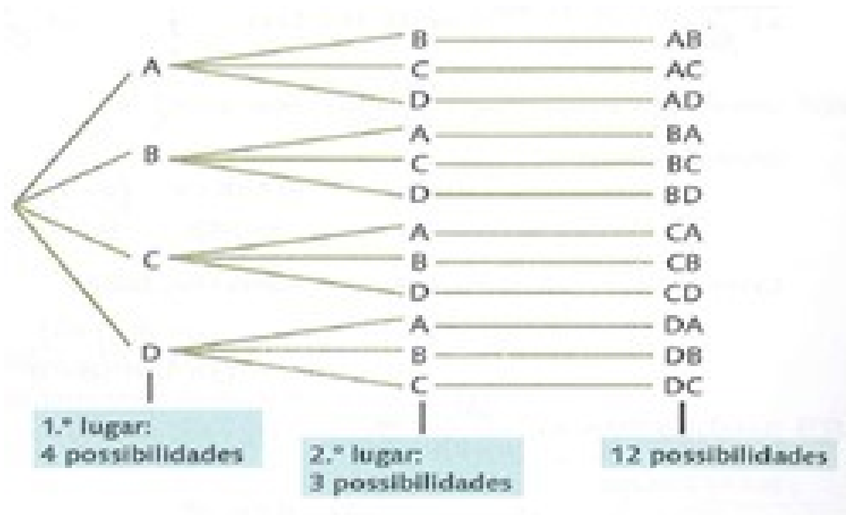


Figura 15 – Exercícios extraídos do livro didático p.196

De acordo com o diagrama, há 12 possibilidades diferentes para o 1º e o 2º colocados.
Esse número também pode ser obtido pelo PFC: $4 \cdot 3 = 12$.
Nessa situação, os agrupamentos diferem entre si pela ordem das colocações: AB e BA, por exemplo, são diferentes, pois se um caso a equipe A ficou em 1º lugar, no outro ficou em 2º, o mesmo valendo para a equipe B.
Cada agrupamento obtido com essas características recebe o nome de Arranjo Simples.
Nessa situação, temos um arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2. Indicamos o número total de arranjos por $A_{4,2}$.

Após fazer a abordagem acima, o autor apresenta a seguinte definição:

Chama-se Arranjo Simples de n elementos distintos tomados p a p ($p \leq n$)*, todo agrupamento ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados. Indica-se o número total de arranjos simples por* $A_{n,p}$ *ou* A_n^p

O autor ainda faz a observação de que, um arranjo é simples quando não há repetição dos elementos em cada agrupamento. Nesse caso, os agrupamentos de n elementos distintos diferem entre si somente pela ordem dos elementos. Mas o autor não cita nem aborda o conceito de Arranjo com repetição. Após a definição apresentada, o autor faz um estudo de como calcular o número total de agrupamentos em que n elementos são arranjados p a p, com $p \leq n$. Para isso, o livro traz a tabela apresentada na Figura 16.

Escolha	Número de possibilidades
Do 1º elemento (qualquer elemento)	*N*
Do 2º elemento (qualquer elemento menos o 1º elemento escolhido)	*n*-1
Do 3º elemento (qualquer elemento menos o 1º e o 2º elementos já escolhidos)	*n*-2
...	...
Do *p*-ésimo elemento (qualquer elemento menos os escolhidos anteriormente)	*n* – (*p*-1) ou *n* – *p* + 1

Figura 16 – Tabela extraída do livro didático p.196

E, observando a tabela, desenvolve a formalização da técnica utilizando o PFC:

$A_{n,1} = n$

$A_{n,2} = n \cdot (n-1)$

$A_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

$\ldots$

$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-p+1)}_{p\ fatores}$

Destacamos a seguir a formalização da *técnica* **Arranjo Simples** por meio de fatoriais, apresentada pelo autor do livro em análise:

O cálculo de $A_{n,p}$ também pode ser expresso por meio de fatoriais. Inicialmente tomemos como exemplo $A_{6,2}$.

$$A_{6,2} = 6 \cdot 5$$

Multiplicando o 2º membro dessa igualdade por $\frac{4!}{4!}$ temos:

$$A_{6,2} = 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

Portanto, generalizando, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, com\ p \leq n$$

Esta formalização, ou generalização, apresentada pelo autor é um discurso interpretativo e justificativo da *técnica*. Ou seja, é uma *tecnologia* no contexto praxeológico de Chevallard et al. (2001). É interessante que esta formalização seja apresentada para o aluno durante o desenvolvimento do bloco logos pelo professor, ou seja, durante a aula.

Na sequência da organização, o autor apresenta 4 (quatro) exercícios resolvidos, ou seja, quatro exemplos, que correspondem a um mesmo tipo de *tarefa*, realizados com aplicação imediata da *técnica* apresentada no bloco *logôs*. Apresentamos a seguir dois destes exemplos identificados pelo autor como **R4** e **R5**:

R4: *Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100 m rasos, na qual os 3 primeiros colocados irão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser composto?*

Resolução: *O pódio formado pelos atletas A, B e C nos 1º, 2º, e 3º lugares, respectivamente, é diferente do formado pelos mesmos atletas, porém com ordem de chegada diferente. Sendo assim, cada resultado da prova corresponde a um arranjo dos 8 competidores tomados 3 a 3.*

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 336$$

Portanto, há 336 maneiras distintas de formar o pódio.

R5: *Quantos números de quatro algarismos distintos são possíveis formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?*

Resolução: *Duas possibilidades são os números 1357 e 1573 que, apesar de possuírem os mesmos algarismos, não são iguais. Dessa forma, cada número de quatro algarismos corresponde a um arranjo de 5 algarismos tomados 4 a 4.*

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 120$$

Portanto, é possível formar 120 números.

Acreditamos que os exercícios resolvidos (exemplos) com a aplicação imediata da *técnica*, sem uma interpretação mais aprofundada, utilizando o PFC, não contribui de forma significativa para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Finalizando esta seção, o autor apresenta um conjunto de 19 (dezenove) exercícios propostos ao leitor, particularmente, o aluno. A maior parte desses exercícios é semelhante aos exercícios resolvidos acima e caracteriza o mesmo tipo de *tarefa*, onde o aluno é levado a aplicação imediata da *técnica* apresentada no bloco *logôs*, ao invés de buscar as referidas técnicas a partir da análise de situações-problema.

Na seção dos exercícios propostos, 12 (doze) dos 19 (dezenove) exercícios representam as seguintes *tarefas*: *Calcule o valor de* $A_{n,p}$ *ou simplifique as expressões com* $A_{n,p}$. Ressaltamos que se tratam de exercícios que valorizam o uso das fórmulas.

A seção 5 do capítulo em análise aborda um tipo de agrupamento chamado de **Permutação Simples**. É a menor seção do capítulo analisado, apresentando um bloco *logôs* reduzido e um bloco *praxe* composto, na sua maioria, por exercícios previamente selecionados e padronizados para serem resolvidos com aplicação imediata da *técnica* apresentada no bloco *logôs*. Mas, encontramos no bloco *praxe* algumas *tarefas* que exigem conhecimentos não apresentados no bloco *logôs*.

O autor inicia a seção 5 afirmando que a Permutação Simples é um caso particular de Arranjo Simples em que *n* = *p*, ou seja, trata-se de um arranjo de *n* elementos tomados *n a n*. Onde a quantidade total de permutações simples de *n* elementos é indicada por P_n , e pode ser obtida utilizando-se a fórmula apresentada no livro da seguinte forma:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

Portanto, $P_n = n!$ *ou* $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

De maneira formal:

Chama-se Permutação Simples todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n.

Em seguida o autor apresenta cinco exemplos. Destacamos, a seguir, dois exercícios (**R8 e R10**) e as resoluções subsequentes apresentadas pelo autor, onde podemos verificar uma aplicação imediata da fórmula (*técnica*), sem nenhum esforço interpretativo.

R8: *Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?*

Resolução: *Cada número formado é um arranjo dos cinco algarismos, tomados cinco a cinco, ou seja, uma permutação.*

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \;\; \textit{números}$$

R10: *Em uma sala há 13 pessoas. Caso fôssemos organizar essas pessoas em uma fila, quantas maneiras seriam possíveis?*

Resolução: *O número total de maneiras possíveis é dado por:*

$$P_{13} = 13! = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6227020800$$

Diferentemente das seções anteriores, encontramos nos exercícios propostos desta seção, situações-problema que necessitam de uma análise crítica e cuidadosa, para as suas realizações pelos alunos. Este tipo de situações não são abordadas nos exemplos ou exercícios resolvidos. No conjunto dos exercícios resolvidos apresentado pelo autor, o aluno é levado ao domínio da *técnica*, dando ênfase às fórmulas, em detrimento da interpretação de problemas. Acreditamos que o aluno poderá encontrar dificuldades na resolução deste tipo de exercício proposto, na medida em que, no bloco *logôs* desta praxeologia usual não é apresentada nenhuma análise crítica e cuidadosa de situações-problema. Apresentamos a seguir dois desses exercícios propostos pelo autor:

Exercício Proposto 34: *Um código de barras é formado por barras verticais pretas de três larguras diferentes. Duas barras pretas sempre são separadas por uma barra branca, também com três larguras diferentes. O código começa e termina com uma barra preta. Considere um código S, formado por uma barra preta fina, duas médias e uma grossa, separadas por barras brancas finas. Quantos códigos S diferentes podem ser assim formados?*

a) 4 b) 6 c) 12 d) 24 e) 36

Exercício Proposto 38: *As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:*

a) PROVA b) VAPOR c) RAPOV d) ROVAP e) RAOPV

Não identificamos no bloco *logôs* procedimentos, conceitos (discursos teóricos-tecnológico) ou orientações metodológicas que possibilitassem desenvolver um raciocínio para a realização destas *tarefas* (**Exercício Proposto 34, Exercício Proposto 38**).

A seção 6 do livro em análise, traz uma discussão sobre os agrupamentos que recebem o nome de **Combinação Simples**, onde o autor inicia o bloco *logôs* desta seção com o seguinte problema:

O gerente de uma empresa decidiu formar uma equipe com 2 pessoas para executar certo trabalho. Para formar a equipe, deveria escolher entre 4 pessoas: Ana, Bia, Carlos e Daniela. Quantas são as possibilidades de formar essa equipe?

Para resolver este problema o autor utiliza as letras A, B, C e D para representar Ana, Bia, Carlos e Daniela, respectivamente. Feito isto, o autor apresenta o diagrama tal como reproduzimos na Figura 17.

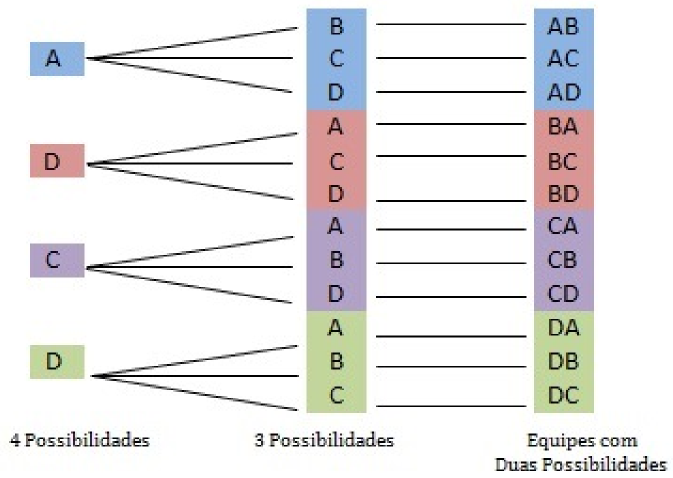


Figura 17 – Reprodução da figura da p.202 do livro didático em análise

De posse desta figura, o autor explica:

Observando o diagrama, notamos que há 12 possibilidades.
No entanto, se considerarmos todas as possibilidades dessa forma, estaremos contando duas vezes a mesma equipe, ou seja:
AB e BA, AC e CA, AD e DA, BC e CB, BD e DB, CD e DC.
Nesses casos, a ordem das pessoas que formam o mesmo grupo não importa, pois AB e BA, por exemplo, correspondem à mesma equipe. Assim, as equipes correspondem a subconjuntos de 2 elementos de um conjunto de 4 elementos.
Cada agrupamento obtido dessa forma recebe o nome de ***Combinação Simples****.*
Nessa situação, temos uma combinação de 4 elementos tomados 2 a 2. Representando por subconjuntos de 2 elementos as combinações formadas com 2 elementos do conjunto $\{A, B, C, D\}$ *temos:*
$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$
O número total de combinações é 6, e indicamos por $C_{4,2} = 6$. *Portanto o gerente tem 6 possibilidades para formar a equipe.*

Após fazer a abordagem acima descrita, o autor apresenta a definição a seguir:

Chama-se Combinação Simples de n elementos distintos tomados p a p $(p \leq n)$*, todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados.*
Indica-se o número total de combinações simples por $C_{n,p}$ *ou* C_p^n.

Apresentada a definição acima, o autor considera o conjunto $\{A, B, C, D\}$ de 4 elementos para calcular as combinações simples desses elementos tomados 3 a 3, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos. Em seguida descreve esses subconjuntos: $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}\ e\ \{B, C, D\}$, concluindo que o número total de combinações é 4, isto é, $C_{4,3} = 4$.

A fim de justificar e demonstrar a técnica de **Combinação Simples** o autor apresenta o seguinte discurso:

Considerando os subconjuntos: $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}\ e\ \{B, C, D\}$
Cada um desses subconjuntos (combinações) gera um número de arranjos. Como exemplo, vamos obter os arranjos gerados pela combinação $\{A, B, C\}$*. E para isso construímos a arvore de possibilidades abaixo:*

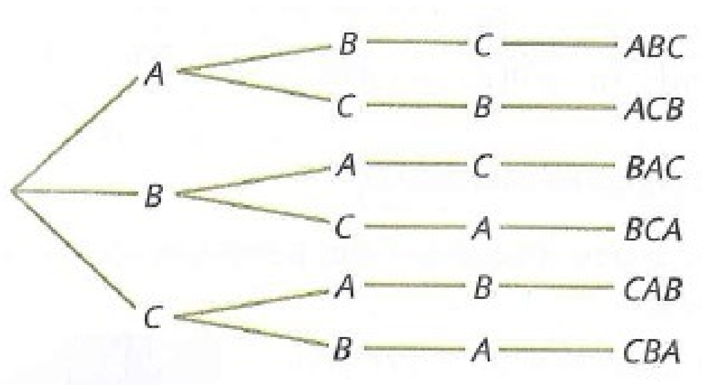


Figura 18 – Figura extraída do livro didático p.203

Tendo nesse caso um total de 6 arranjos ou 3!
Multiplicando $C_{4,3} = 4$ *por 3!, obtemos* $A_{4,3}$ *, isto é, o número total de arranjos simples de 4 elementos tomados 3 a 3:*

$$A_{4,3} = 3! \cdot C_{4,3}$$

Como 3! corresponde às permutações de cada subconjunto de 3 elementos, de $\{A, B, C\}$*, temos que* $P_3 = 3!$ *. Segue que:*

$$A_{4,3} = P_3 \cdot C_{4,3} \Longrightarrow C_{4,3} = \frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

Portanto,$C_{4,3} = 4$ *, conforme vimos anteriormente. Generalizando, temos que cada combinação de n elementos tomados p a p corresponde a p! arranjos:*

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad com\ p \leq n$$

O livro aborda também a propriedade das combinações complementares, mostrando que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$. Essa generalização feita pelo autor é importante na compreensão da *técnica* apresentada.

Logo em seguida o autor descreve os comandos que permitem calcular o número de combinações simples utilizando uma calculadora científica, incentivo este que consideramos interessante, e apresenta 6 (seis) exercícios resolvidos. Todos os exercícios resolvidos do livro apresentam uma resolução valorizando a *técnica* de Combinação Simples apresentada no bloco *logôs*, mesmo nos exercícios onde foi preciso uma análise mais criteriosa. E nesse aspecto enfatizamos a importância de buscar desenvolver o raciocínio combinatório dos alunos, fazendo com que eles cheguem aos resultados esperados sem a necessidade do trabalho mecânico e limitado do uso exclusivo de fórmulas especificas (nesse caso a *técnica* de **Combinação Simples**).

Destacamos a seguir dois desses exercícios representados pelo autor como **R11** e **R13**:

R11: *Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 16?*

Resolução: *Com 3 pessoas, é possível formar apenas uma comissão. Assim, a ordem entre as pessoas não importa. Nesse caso, temos que o número de comissões é dado por* $C_{16,3}$.

$$C_{16,3} = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3!13!} = 560$$

Portanto, 560 comissões.

R13: *Em uma empresa, uma comissão de 5 pessoas deverá ser formada por 3 funcionários do setor de produção e 2 do setor administrativo. Se há 15 funcionários no setor de produção e 6 no administrativo, de quantas formas distintas essa comissão poderá ser formada?*

Resolução: *As 3 vagas para os funcionários da produção podem ser compostas de* $C_{15,3} = 455$ *maneiras, e as 2 vagas para os funcionários do administrativo, de* $C_{6,2} = 15$ *maneiras. Pelo PFC, o número de comissões distintas é dado por:*

$$C_{15,3} \cdot C_{6,2} = 455 \cdot 15 = 6825$$

Acreditamos que o enunciado do exercício **R11** pode gerar dúvidas para o aluno, na medida em que não deixa claro que é para formar uma comissão com 3 pessoas e pretende saber quantas comissões diferentes pode ser formada. Podemos interpretar que seja para formar comissões de 3 pessoas simultaneamente, e neste caso, sempre sobraria uma pessoa. Para isso propomos que o enunciado seja: Num grupo de 16 pessoas, deseja-se formar uma comissão com 3 pessoas. Quantas comissões diferentes são possíveis formar?

Podemos verificar que esta seção é a que apresenta o maior bloco *logôs* e o maior bloco *praxe*. No bloco *praxe* existem *tarefas* que podem ser resolvidas com o uso direto da *técnica* desenvolvida no bloco *logôs*, e *tarefas* que exigem a construção de estratégias de resolução e uma interpretação mais cuidadosa. Percebemos que o autor inicia o bloco *logôs* valorizando o uso do PFC e da árvore de possibilidades. Entretanto, após a generalização da *técnica*, essa característica é deixada de lado e substituída pela aplicação imediata da *técnica*. Isso deixa supor que são mais exercícios de treinamento do que exercícios de investigação

A última seção (seção 7) que trata de AC no capítulo que analisamos discorre sobre **Permutação com elementos repetidos** (PER). O autor inicia a seção mostrando a *técnica* de **Permutação Simples** que já tinha sido abordada na seção 5 e em seguida apresenta dois exemplos com o objetivo de apresentar a *técnica* da última seção. A seguir destacamos os dois exemplos e a abordagem feita pelo autor:

Com a palavra CORPO, quantos anagramas podemos formar?

Caso todas as letras dessa palavra fossem distintas, teríamos 5! anagramas. No entanto, ao permutarmos letras iguais, não obtemos um novo anagrama. Por exemplo, se tomarmos o anagrama PORCO e trocarmos de posição as duas letras O, obteremos o mesmo anagrama: $PO_1RCO_2 = PO_2RCO_1$.
Dessa forma, como a letra O se repete 2 vezes, há outro anagrama igual em cada um dos 5! anagramas com a letra O nas mesmas posições.
Assim, para obtermos o total de anagramas, calculamos $\frac{5!}{2!}$ *, o que resulta 60 anagramas possíveis.*

O outro exemplo apresentado também é com anagramas, no caso agora da palavra PANTANAL. O autor faz uma abordagem análoga à anterior, e em seguida apresenta o seguinte conceito:

O número de permutações de n elementos com repetições, dos quais $n_1, n_2, ..., n_r$ *são as quantidades de elementos diferentes entre si é dado por:*

$$P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}, \quad com \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

E logo em seguida apresenta dois exercícios resolvidos **R16** e **R17**:

R16: *Determine o número de anagramas da palavra BANANA.*
Resolução: *Na palavra BANANA há 6 letras, sendo 3 letras iguais a A e 2 letras iguais a N.*

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = 60$$

R17:*Quantos números pares podem ser obtidos ao permutarmos os algarismos que formam o número 2 423 327?*
Resolução: *Para que uma permutação do número 2 423 327 seja par, o algarismo da unidade simples deverá ser 2 ou 4.*
Com o algarismo 2 na unidade simples:

$$P_6^{(2,2)} = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

Com o algarismo 4 na unidade simples:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

Portanto, a quantidade de números pares obtidos é dada por $180 + 60 = 240$.

O autor finaliza esta seção com 8 (oito) exercícios propostos, priorizando o uso da *técnica* apresentada no bloco *logôs*, o que caracteriza uma praxeologia usual. Este tipo de exercício não estimula o desenvolvimento do raciocínio combinatório do aluno, pois na aplicação direta da fórmula o aluno não se esforça em pensar.

A análise do livro didático desenvolvida até aqui, nos faz constatar, de modo geral, tanto na organização global do livro quanto na local, com relação ao estudo de AC, a praxeologia adotada é a usual, que parte da apresentação teórica dos conteúdos, bloco *logôs* $[\theta/\Theta]$ para o bloco *praxe* $[T/\tau]$, isto é, de fora para dentro, de acordo com modelo ilustrado por Henriques (2011) que reproduzimos na Figura 19

Nesta organização, as *tarefas* propostas aos estudantes, que se encontram sistematicamente no final de cada seção são, em geral, aplicações imediatas dos conceitos ou *técnicas* vistas no bloco *logôs*. Ora, esse processo de aplicação imediata das fórmulas na resolução de problemas de contagem caracteriza uma problemática no ensino-aprendizagem de AC, pois o aluno se prende no fazer baseado na fórmula (*técnica*), sem necessariamente saber explicar sua própria prática.

A partir dessa análise, é possível construir uma *sequência didática* (SD) constituída de, pelo menos, um dispositivo experimental composto de *tarefas* provenientes ou

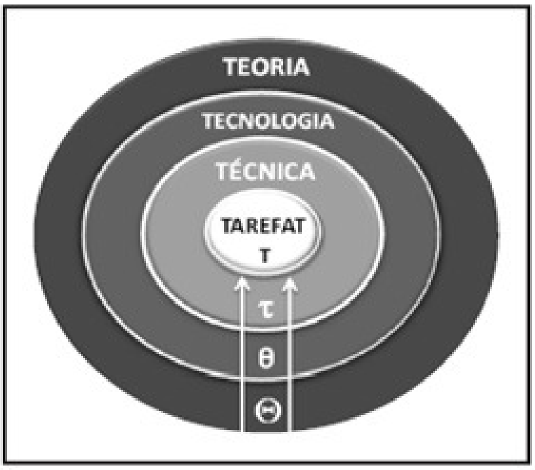


Figura 19 – Praxeologia Usual

não do livro considerado na instituição de referência. Uma SD permite inverter a praxeologia usual destacada na análise institucional. A praxeologia inversa da usual é a que Henriques (2011) denomina de praxeologia modelada esquematizada pelo autor, conforme mostra a Figura 20. Nessa praxeologia, a evolução dos estudos é motivada por resolução de problemas ou tarefas relativas aos conceitos ou objetos institucionais que se pretende ensinar. Porém, o autor chama atenção para o fato de que uma praxeologia não exclui a outra. Pelo contrário, ambas se complementam. É esta última praxeologia que colocamos em evidência neste trabalho. Ressaltamos que o livro que analisamos revela um vazio didático, no sentido de não identificar os objetos que apresentaremos a seguir.

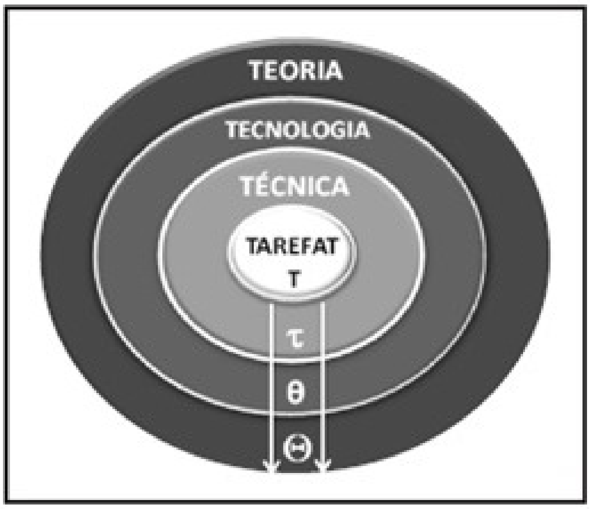


Figura 20 – Praxeologia Modelada

5 OBJETOS QUE COMPLEMENTAM A ORGANIZAÇÃO LOCAL DO ESTUDO DE AC

A análise local do livro didático que acabamos de realizar, nos leva a inferir que a Análise Combinatória (AC) se resume ao estudo das Combinações, Arranjos e Permutações, sob um aspecto mecânico que reside na aplicação direta de fórmulas, e que acreditamos ser pouco envolvente e atraente para os alunos, na medida em que os conceitos são apresentados em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise crítica e cuidadosa de cada problema. Os estudos dos trabalhos anteriores desenvolvidos em torno de AC, bem como a nossa experiência em sala de aula, alimentam a nossa concepção de que, se as fórmulas são fornecidas após ligeira abordagem e apresentação formal da definição de cada agrupamento, isto pode gerar dificuldade por parte do aluno em reconhecer o tipo de agrupamento envolvido no problema e, consequentemente, na fórmula que se deve utilizar.

Segundo Morgado at al. (1991),

> embora a Análise Combinatória disponha de diversas técnicas que permitem atacar certos tipos de problemas, a resolução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade, raciocínio, além de interpretação e compreensão do enunciado para a elaboração de estratégias para resolvê-los, o que torna a AC um objeto matemático interessante e encantador capaz de envolver e motivar uma participação ativo-efetiva do aluno nas aulas.

Neste contexto, adotar uma praxeologia modelada que permite a participação do aluno na construção dos conceitos de arranjo, permutação e combinação, pode contribuir para a aquisição de uma compreensão mais significativa, que procura dar sentido à matemática construída. Além disso, propiciar um ambiente de aprendizagem no qual todos os alunos sejam estimulados a expor suas ideias, apresentar sugestões, argumentar, questionar e refletir, transformando os alunos em agentes ativos, co-responsáveis pela própria aprendizagem.

Em tal âmbito, o papel do professor pode ser visto como fundamental para que isso se efetive, exigindo um planejamento de aulas que siga as orientações do PCNEM, que explore os conceitos primitivos da Análise Combinatória (PFC, Princípio Aditivo, árvore de possibilidades e enumeração) e que trabalhe de modo intuitivo com o aluno, descrevendo os casos possíveis, formando agrupamentos e contando-os, utilizando técnicas de contagem com objetivo geral de desenvolver o raciocínio combinatório. Sem nunca perder de vista a familiarização do aluno com problemas que envolvem contagem; a sistematização da contagem e a sistematização dos conceitos de arranjo, permutação e combinação simples.

Partindo do exposto, apresentamos a seguir 8 (oito) situações-problema a partir das quais discutiremos a construção da árvore de possibilidades e o processo de enumeração sistemática como técnicas na resolução de problemas de AC, a fim de sistematizar a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), além de justificarmos o seu uso em problemas com um número elevado de possibilidades e que exigem outras *técnicas* que surgiram do PFC.

Problema 1: Uma menina tem 3 blusas e 4 saias. De quantas maneiras distintas ela pode se vestir (escolher uma blusa e uma saia)?

Neste problema a menina possui 3 possibilidades para escolher uma blusa, sendo que a cada escolha que ela faça da blusa, terá 4 possibilidades para escolher a saia para se vestir, ou seja, para cada uma blusa escolhida possui 4 possibilidades de escolher uma saia, como ela possui 3 blusas, teremos $4 + 4 + 4 = 12$ possibilidades de se vestir. Chamando as blusas de b_1, b_2, b_3 e as saias de s_1, s_2, s_3, s_4, podemos denotar a enumeração, como uma *técnica* possível para a *tarefa* delimitada no problema, ou seja, listar "exaustivamente" todos os agrupamentos possíveis, escrevendo os elementos do conjunto: $\{b_1s_1; b_1s_2; b_1s_3; b_1s_4; b_2s_1; b_2s_2; b_2s_3; b_2s_4; b_3s_1; b_3s_2; b_3s_3; b_3s_4\}$. Assim, o número total de maneiras distintas da menina se vestir é 12.

Por outro lado, uma segunda *técnica* relacionada à resolução do problema proposto (à *tarefa* proposta) é a esquematização da enumeração por meio da árvore de possibilidades (Figura 21). Desse modo teremos:

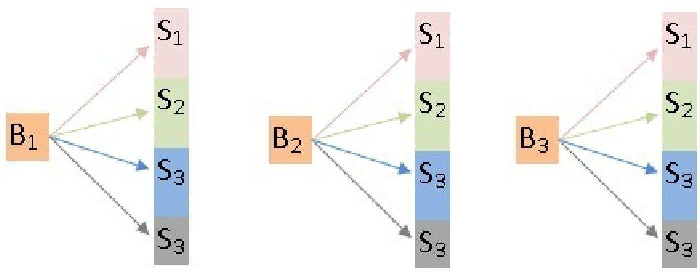


Figura 21 – Árvore de possibilidades

Um total de 12 possibilidades, encontradas ao somar todas as ramificações da árvore.

Em relação ao uso de diferentes representações no ensino de AC, Esteves (2001) afirma que incentivar o uso de diagramas, tabelas, enumerações ou árvore de possibilidades, ou seja, servir-se das diversidades de representações, são meios valorosos a fim de sistematizar a compreensão do PFC. Neste aspecto, foi possível identificar na análise do livro didático que a arvore de possibilidades foi bem utilizada no momento de apresentar as *técnicas* seguintes: *PFC, Arranjo Simples e Combinação Simples.*

Assim sendo, julgamos que utilizar de resolução de problemas sob a ótica da praxeologia modelada priorizando o PFC favorece o ensino de AC. Dessa maneira, as fórmulas, usualmente utilizadas no ensino desse objeto de estudo, surgem em decorrência do desenvolvimento dos significados construídos nas resoluções, ou seja, as fórmulas deixarão de ser ponto de partida na construção dos conhecimentos, sendo assim, uma representação do seu significado.

Chevallard et al. (2001) evidenciam que o "saber matemático" não é somente saber definições e teoremas para conhecer o momento de utilizá-los e aplicá-los, mas sim abordar os problemas com um olhar crítico e cuidadoso para os percursos tomados em busca do resultado final.

Ao considerar as *técnicas* de solução apresentadas para o *Problema 1*, podemos observar que, se o número de blusas e/ou o número de saias fosse elevado, representar todas as maneiras distintas seria um processo trabalhoso. É compreensível perceber que enumerar uma quantidade grande de possibilidades, ou mesmo, construir uma árvore de possibilidades com um número elevado de ramificações, torna-se uma técnica árdua além de, possivelmente, dispersar a atenção do aluno fazendo com que não participe de maneira ativo- efetiva das resoluções dos problemas propostos.

Para isso, discutimos uma *técnica* diferenciada das duas apresentadas no *Problema 1*, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Desse modo, entendemos que a utilização do PFC pode ser observada, como um aprimoramento da enumeração e/ou árvore de possibilidades, mostrando-se como um meio facilitador na resolução de problemas que apresentam um número elevado de soluções.

Em Morgado at al. (1991) encontramos o seguinte enunciado para o Princípio Fundamental da Contagem (PFC): *Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é x.y.*

Assim, no *Problema 1*, para a menina se vestir identificamos duas etapas: escolher uma blusa (d_1) que pode ser tomada de 3 maneiras e escolher uma saia (d_2) que pode ser tomada de 4 maneiras. Ou seja, o número de maneiras de se escolher uma blusa e uma saia é 3.4, o que resulta em 12 maneiras.

O PFC é, portanto, uma *técnica* disponível para abordar problemas de contagem com duas etapas, de acordo com o enunciado em Morgado at al. (1991). Por outro lado, essa técnica pode ser aplicada a problemas que envolvem mais de duas etapas e para justificar esse resultado, necessitamos demonstrá-lo. Assim, essa demonstração, segundo Chevallard (1999), representa a tecnologia que exercerá a função de esclarecer e justificar o uso do PFC em problemas que envolvam mais de duas etapas.

Para um problema composto por n etapas sucessivas, o Princípio Fundamental da contagem pode ser enunciado da seguinte forma:

Se um acontecimento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes para ($i = 1, 2, 3, ..., n$), então, a sequência de n acontecimentos sucessivos ($A_1, A_2, A_3, ..., A_n$) pode ocorrer de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot ... \cdot m_n$.

Para demonstrar o uso do PFC para n etapas sucessivas, utilizaremos o Princípio da Indução Finita como tecnologia que justifica a técnica. Assim a demonstração poderá ser desenvolvida da seguinte maneira:

(I) *Para n = 2, o teorema recai na definição do PFC.*

(II) *Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $n = k(k \geq 2)$, isto é, a sequência de acontecimentos sucessivos ($A_1, A_2, ..., A_k$) pode ocorrer de $m_1 \cdot m_2 \cdot ...m_k$ maneiras diferentes (hipótese de indução), e provemos que ela é verdadeira para $n = k + 1$.*

Tomemos agora uma sequência de acontecimentos sucessivos ($A_1, A_2, ..., A_k, A_{(k+1)}$), onde $A_{(k+1)}$ pode ocorrer de $m_{(k+1)}$ maneiras diferentes. Pela hipótese de indução temos que a sequência de acontecimentos ($A_1, A_2, ..., A_k$) pode ocorrer de $m_1 \cdot m_2 \cdot ...m_k$ maneiras diferentes, ou seja, a sequência x= ($A_1, A_2, ..., A_k$) pode ser determinada de $m = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ maneiras diferentes. Daí, tomando x como um acontecimento com m maneiras diferentes de ocorrer e o acontecimento $A_{(k+1)}$ com $m_{(k+1)}$ maneiras diferentes de ocorrer, temos pela definição do PFC que o número de maneiras de ocorrer x seguido de $A_{(k+1)}$ é $m \cdot m_{(k+1)}$, demostrando por indução, que o número de maneiras diferentes de ocorrer à sequência de acontecimentos sucessivos $(x, A_{(k+1)}) = (A_1, A_2, ..., A_k, A_{(k+1)})$ é igual ao produto $m \cdot m_{(k+1)} = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k \cdot m_{(k+1)}$.

Com relação à demonstração do PFC para n etapas, Costa (2003) entende que, em geral, não deve ser objetivo principal do trabalho do professor com os alunos do Ensino Fundamental e Médio. Entretanto, considera que esse saber deve estar integrado aos saberes do professor, pois este deve observar as demonstrações como um discurso racional com o objetivo de justificar, validar e explicar as técnicas ensinadas.

A seguir apresentamos o segundo problema, dentre os oitos que nos propomos abordar nesta parte complementar de estudos de AC, utilizando o PFC, com o objetivo de discutir e desenvolver a noção de *Permutação Simples*, ou seja, a permutação com elementos distintos.

Uma *Permutação Simples* de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses n objetos.

Problema 2: De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 5 alunos numa fila composta de cinco cadeiras numa sala de aula?

De acordo com o PFC podemos interpretar o problema como tendo 5 etapas ou acontecimentos sucessivos. Escolher um dos 5 alunos para sentar na 1ª cadeira (1ª etapa), em seguida escolher um dos 4 alunos restantes para sentar na 2ª cadeira (2ª etapa); em seguida escolher um dos 3 alunos que sobraram para sentar na 3ª cadeira e assim sucessivamente até colocar o quinto aluno na última cadeira. Ou seja, para distribuir 5 alunos numa fila composta de cinco cadeiras temos 5.4.3.2.1, o que resulta em 120 maneiras diferentes. Podemos concluir que tínhamos 5 objetos distintos (alunos) e que qualquer agrupamento ordenado desses 5 objetos é uma *Permutação Simples*.

Buscando desenvolver um processo de generalização da *Permutação Simples* de n objetos, abordaremos problema a seguir:

Problema 3: Anagramas são palavras formadas pela reordenação das letras de uma outra palavra. Sendo assim, calcule o número de anagramas da palavra AMOR?

Como a palavra AMOR tem quatro letras, então, a quantidade de anagramas são todas as permutações formadas com as letras da referida palavra. Podemos considerar que o problema acima apresenta a seguinte tarefa composta por quatro etapas (ou acontecimentos) sucessivas: Dado um conjunto com quatro elementos, quantas sequências distintas pode se formar utilizando todos os elementos do conjunto em cada sequência formada?

Nesta tarefa temos quatro possibilidades para escolher a primeira letra no conjunto $\{A, M, O, R\}$, escolhida a primeira letra teremos 3 possibilidades para escolher a segunda letra, depois duas possibilidades e em seguida uma possibilidade para a última letra. Ou seja, utilizando o PFC como técnica, podemos afirmar que será possível formar 4.3.2.1, totalizando 24 anagramas.

O conjunto constituído de n elementos distintos no qual desejamos formar todas as sequências diferentes contendo n elementos caracteriza uma *Permutação Simples*. Para escolhermos o 1º elemento da sequência temos n possibilidades no conjunto, para escolher o 2º elemento da sequência temos *(n-1)* possibilidades no conjunto, para escolher o 3º elemento da sequência temos *(n-2)* e assim sucessivamente até o último elemento da sequência com apenas uma possibilidade, já que cada sequência precisa ter n elementos. Com base no PFC, multiplicamos o número de possibilidades de cada etapa para obter o total de sequências distintas que podemos formar. Sendo assim, de acordo com o diagrama apresentado na Figura 22, temos que, a *Permutação* de n objetos distintos que denotaremos por P_n será dada por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Onde $n!$ é definido como fatorial de n , $P_0 = 1$ e $P_1 = 1$.

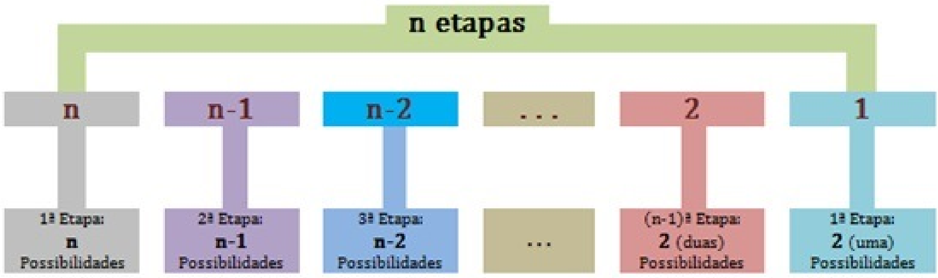


Figura 22 – Diagrama de possibilidades

Vale salientarmos que generalizar não significa demonstrar e sim através da interpretação de casos particulares (problemas abordados), ampliar e compreender o que acontece para uma situação geral.

Por outro lado, observamos que a generalização mostra-se como um discurso racional que explica e justifica a utilização de uma determinada *técnica*, neste caso o uso do PFC para a *permutação* de *n* elementos. Desta forma a generalização apresenta-se como o discurso tecnológico para a *tarefa* descrita.

Temos ainda duas situações que configuram permutações, porém com alguns detalhes especiais que devem ser corretamente analisados, que são as *Permutações com Repetições* e as *Permutações Circulares*. Na análise do livro didático identificamos a ausência de uma *técnica* para *Permutações Circulares*, não contendo problemas com tais características.

Quando permutamos os elementos de um conjunto que possui elementos repetidos, é importante notar que, caso não sejam tomadas as devidas providências, algumas possibilidades serão contadas repetidas vezes. Esta situação caracteriza uma permutação com elementos repetidos. Por exemplo, a palavra TAPA possui 4 letras, permutando-as, teremos $P_4 = 4.3.2.1 = 24$ anagramas. Porém a palavra possui duas letras repetidas e quando permutamos apenas as letras repetidas, encontramos dois anagramas iguais que foram contabilizados como distintos dentro dos 24 anagramas acima citado. Ou seja, dos 24 anagramas apenas 12 são realmente distintos (por exemplo, TA_1PA_2 e TA_2PA_1 foram contabilizados em P_4 e são iguais), portanto devemos dividir o resultado por 2, pois cada anagrama foi contado duas vezes, ou seja, a palavra TAPA tem apenas 12 anagramas distintos.

Imaginemos agora a palavra MATEMÁTICA (desconsiderando o acento). Aplicando a *técnica* acima discutida teremos $P_{10} = 10! = 3628800$ anagramas. Entretanto, temos a letra A aparecendo 3 vezes, a letra T aparecendo duas vezes e a letra M aparecendo duas vezes. Analisemos primeiramente as letras A mudando de posição entre elas, o que não torna os anagramas distintos, tendo uma permutação de 3 elementos ou seja $P_3 = 3! = 6$ possibilidades. Isso faz com que na contagem de $P_{10} = 10!$ tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes, 3! vezes precisamente, por isso devemos dividir o resultado de P_{10} por 6. Em seguida devemos proceder da mesma forma para as letras T e M, onde teremos duas permutações de dois elementos. Desta maneira para encontrarmos o número de anagramas distintos da palavra MATEMÁTICA devemos aplicar a *técnica* da permutação para 10 objetos distintos e dividir o resultado pelas permutações P_3, P_2 e P_2, ou seja:

$$\frac{P_{10}}{P_3P_2P_2} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{3628800}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 151200$$

teremos 151200 anagramas distintos.

Assim sendo, o total de anagramas distintos que se pode construir com base nas palavras que apresentam letras repetidas, será a permutação de todas as letras que compõe a palavra, dividido pelo produto das permutações das letras que se repetem.

De maneira geral, podemos verificar que a *Permutação com Repetição* refere-se ao número de sequências distintas que podem ser formadas com *n* elementos nos quais pelo menos um deles ocorre mais de uma vez. A *Permutação* de *n* elementos, com a_1 se repetindo α_1 vezes, a_2 se repetindo α_2 vezes, ... , a_k se repetindo α_k vezes pode ser calculada pela expressão (*técnica*).

$$P_n^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$$

Já os problemas envolvendo *Permutações Circulares* são aqueles nos quais desejamos calcular de quantas maneiras distintas podemos organizar elementos dispostos em círculo. Porém, quando elementos são dispostos ao redor de um círculo, duas disposições só são consideradas distintas se, e somente se, ao percorrermos a circunferência, em sentido horário ou anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontrarmos elementos que formam sequências distintas. Por exemplo: *De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?*

À primeira vista parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $5! = 120$ modos. Entretanto, as rodas ABCDE e EABCD são iguais (Figura 23), pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda ABCDE pode ser "girada" na roda EABCD. E seguindo o raciocínio, sempre tendo a letra A como início, ainda teríamos as sequências (D, E, A, B, C), (C, D, E, A, B) e (B, C, D, E, A) que representam rodas iguais às iniciais.

Como cada roda pode ser "girada" de cinco modos, a nossa contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes. Portanto a resposta é $\frac{5!}{5} = \frac{120}{5} = 24$.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o

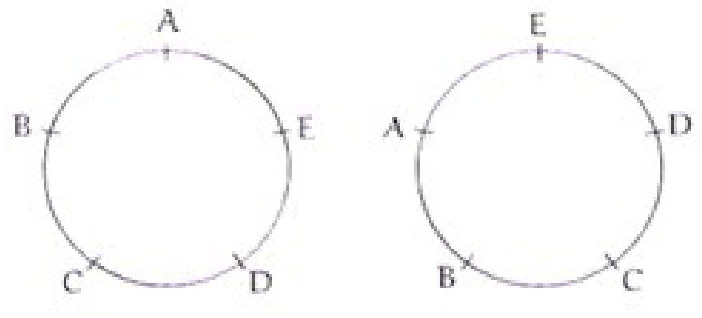


Figura 23 – Representações que caracterizam a mesma roda

número de permutações circulares de *n* objetos é

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

A seguir abordaremos uma situação-problema de contagem com o objetivo de apresentar, discutir e desenvolver a noção de *Arranjo*, uma *técnica* de contagem onde a escolha dos elementos, bem como a ordem dos elementos selecionados, influencia na contagem. Um *Arranjo Simples* de classe *p* dos *n* objetos dados é uma seleção de *p* $(0 < p \leq n)$ objetos distintos que diferem entre si pela ordem de colocação ou pela natureza de cada um, isto é, o que importa é quem participa ou o lugar que ocupa. Denotaremos por $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de classe *p* de *n* objetos. Consideremos o seguinte problema:

Problema 4: De quantos modos 2 pessoas podem sentar se em 5 cadeiras que estão em fila?

Utilizando o PFC para interpretar o *Problema 4* podemos descrevê-lo como tendo duas etapas. A 1ª etapa seria a primeira pessoa escolher uma das cinco cadeiras em fila. Logo em seguida, após sentar a primeira pessoa, a 2ª etapa seria a segunda pessoa escolher uma das quatro cadeiras vazias que restaram. Algo importante a se constatar nesse problema é a questão da disposição das duas pessoas na fila, ou seja, a ordem que eles se posicionam. Pois escolhidas as duas cadeiras para assentar as duas pessoas, a ordem que eles vierem a se sentar nessas cadeiras determina uma disposição diferente em fila. Além disso, como são 5 cadeiras para se sentar duas pessoas, uma disposição em fila irá diferir da outra porque foi escolhida uma cadeira diferente, já que sempre ficarão três cadeiras vazias. Podemos então chegar ao número de filas distintas utilizando apenas o PFC (multiplicando as possibilidades de cada etapa), tendo, portanto 5.4 = 20 modos distintos de sentar essas duas pessoas nessas cinco cadeiras.

Fazendo uma interpretação com o uso do fatorial teremos uma permutação das cinco cadeiras $P_5 = 5!$, sendo que em cada fila utilizamos apenas duas cadeiras e por isso devemos excluir a permutação das cadeiras que ficaram vazias que foram 3, sendo $P_3 = 3!$. Mas para fazer essa exclusão devemos realizar a operação de divisão como vimos na *Permutação com Repetição* discutida anteriormente. Finalmente, teremos $\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ modos distintos, como foi descrito utilizando o PFC.

Concordando com a noção de *Arranjo Simples* apresentada no livro didático e nesta seção que apresentamos, segue que este problema é equivalente a achar o número total de arranjos de classe 2 de 5 objetos, correspondendo as 5 cadeiras aos 5 objetos e as duas pessoas indicando a ordem do arranjo. O que nos leva a conjecturar que:

O número de arranjos simples de classe p de n objetos dados pode ser calculado pela razão entre a permutação dos n objetos dados e a permutação dos (n – p) objetos não utilizados na seleção.

$$A_{n,p} = \frac{P_n}{P_{(n-p)}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Na análise do livro didático identificamos que a *técnica* de *Arranjo Simples* é apresentada primeiro que a *técnica* de *Permutação*, não apresentando, portanto, a conjectura acima. Além disso, a *Permutação Simples* é um caso particular de *Arranjo Simples* em que *n* = *p*, ou seja, $P_n = A_{n,n}$.

Notamos também que o livro não faz uma abordagem de problemas do tipo:

Problema 5: Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?

Neste problema podemos verificar que para cada uma das 10 questões existem 5 possibilidades para marcar uma alternativa e que o gabarito é uma sequência das alternativas corretas, ou seja, a ordem das alternativas marcadas influencia na contagem dos gabaritos possíveis, tendo portanto 5^{10} gabaritos possíveis de acordo com o PFC (5 possibilidades para cada etapa e 10 etapas). Este problema caracteriza um Arranjo com repetição, técnica ausente no livro didático analisado e nem ao menos citada. O que pode levar o aluno a se perguntar: Não existe arranjo com elementos repetidos?

Conjecturando assim, podemos imaginar que um arranjo com repetição é dado pela fórmula n^P , sendo *n:* o número de elementos disponíveis e *p:* a quantidade de elementos solicitada para formar os agrupamentos. Notação: $AR_{n,p} = n^p$.

Na análise do livro didático vimos que a técnica de *Combinação Simples* foi apresentada inicialmente com um problema que foi resolvido através da árvore de possibilidades e em seguida um estudo de como calcular o número total de agrupamentos em que *n* elementos são combinados *p* a *p*, com $p \leq n$, isto é, $C_{n,p}$. Nesse estudo o autor traz para o aluno a *técnica* de *Combinação Simples* de n elementos tomados p a p como sendo a razão entre o *Arranjo Simples* de n elementos tomados p a p e a *Permutação Simples* de p elementos distintos, concluindo com a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Consideramos este estudo importante no ensino de Análise Combinatória (AC), pois relacionam as três *técnicas* mais utilizadas na resolução de problemas de AC no ensino médio, possibilitando fazer uma discussão em torno das suas semelhanças e diferenças, principalmente no que diz respeito à ordem e a natureza dos elementos. Entretanto, se o ensino desses conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, restringe o estudo de AC somente a memorização, manipulação e aplicação de fórmulas, o que caracteriza uma problemática no seu ensino-aprendizagem.

Sendo assim, ensinar AC a partir da aplicação de fórmulas não torna a aprendizagem mais eficiente. O aluno pode até conseguir resolver alguns problemas mais simples, entretanto, provavelmente, terá dificuldades em situações onde os agrupamentos têm alguma particularidade. Buscando uma maior compreensão da *técnica* de *Combinação Simples* e atribuindo significado à fórmula que está sendo apresentada ao aluno, abordaremos algumas situações-problemas utilizando o PFC e a *Permutação Simples* que é uma *técnica* que surge como consequência direta do PFC. Tomemos, portanto, o problema a seguir:

Problema 6: De quantas formas podemos dividir um grupo de 7 pessoas em um grupo de quatro e outro de três?

Um processo de fazer a divisão é colocar as sete pessoas em fila; as quatro primeiras da fila formam o grupo de quatro pessoas e as 3 últimas formam o grupo de 3 pessoas. E utilizando o PFC temos: 7 possibilidades para escolher a 1ª pessoa da fila; 6 possibilidades para escolher a 2ª pessoa da fila e assim decrescendo em uma unidade até o último da fila. Portanto temos uma $P_7 = 7!$ maneiras distintas de formar esta fila com 7 pessoas. Entretanto, as primeiras quatro pessoas mudando de posição entre elas representam o mesmo grupo ($P_4 = 4!$), bem como as três últimas mudando de posição entre elas também representam o mesmo grupo ($P_3 = 3!$). Desta forma, precisamos excluir todas essas possibilidades que representam o mesmo grupo e para isso devemos dividir o resultado de $P_7 = 7!$ por ($P_4 \cdot P_3$), ou seja, temos:

$$\frac{P_7}{P_4 \cdot P_3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35$$

Portanto, temos 35 maneiras diferentes de dividir 7 pessoas em um grupo de quatro e outro de três pessoas. O que na praxeologia usual, equivale a manipular a seguinte fórmula:

$$C_{7,3} = C_{7,4} = \frac{7!}{4!3!}$$

Podemos interpretar o problema de outra maneira, das 7 pessoas do grupo inicial escolhemos três para o grupo de três pessoas. E para cada uma dessas escolhas o outro grupo de quatro pessoas é automaticamente determinado. Desta forma, temos 7 possibilidades para escolher a 1ª pessoa, 6 possibilidades para escolher a 2ª pessoa e 5 possibilidades para escolher a 3ª pessoa, ou seja, 7.6.5, o que resulta 210 possibilidades. Mas na utilização direta do PFC a ordem influencia na contagem, ou seja, para cada três pessoas escolhida para formar o grupo é possível muda-las de posição 3! Vezes (o que representa o mesmo grupo). Portanto, nas 210 possibilidades cada grupo de três pessoas foram contabilizados $3! = 6$ vezes, daí devemos dividir as 210 possibilidades por 6, resultando finalmente nas 35 maneiras possíveis. E para generalizar tal situação de *Combinação simples* tomamos o problema a seguir:

Problema 7: De quantos modos podemos selecionar p (com $p \leq n$) objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Neste problema temos que cada seleção de *p* objetos é chamada de uma *Combinação Simples* de classe *p* dos *n* objetos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a, b, c, d, e são $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$.

Representamos todas essas possibilidades por $C_{5,3} = 10$ modos de selecionar 3 objetos distintos entre 10 objetos distintos dados. Para compreender tal problema basta notar que selecionar *p* objetos entre os *n* objetos equivale a dividir os *n* objetos em um grupo de *p* objetos, que são selecionados, e um grupo de *(n – p)* objetos que são os não selecionados. De maneira análoga ao problema anterior, teremos *n!* possibilidades para formar uma fila com *n* objetos distintos. Os *p* objetos mudando de posição entre eles não alteram o grupo dos objetos selecionados (*p!* possibilidades) e os *(n – p)* objetos restantes mudando de posição entre eles não altera o grupo dos objetos não selecionados, sendo *(n – p)!* possibilidades. Fazendo a exclusão das repetições através da operação de divisão obtemos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Uma combinação simples de classe *p* dos *n* objetos dados é uma seleção de *p* objetos distintos entre estes que diferem entre si apenas pela natureza de cada um, isto é, o que importa é simplesmente quem participa no grupo selecionado. E a abordagem feita do *problema 7* nos leva a conjecturar que:

O número de combinações simples de classe p de n objetos dados pode ser calculado pela razão entre a permutação dos n objetos dados e o produto da permutação dos p objetos selecionados com a permutação dos (n – p) objetos não utilizados na seleção.

A seguir iremos abordar uma *técnica* que não se encontra no livro didático analisado, uma *técnica* que muitas vezes não é abordada na praxeologia usual de AC no ensino médio. Seguindo a proposta do nosso trabalho apresentamos uma situação problema para tratarmos das *Combinações Completas*.

Problema 8: De quantos modos é possível comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 5 sabores?

Normalmente os alunos após terem estudado a técnica da *Combinação Simples* são levados a responder que a solução é $C_{5,3}$. Esta resposta não está correta. Ela estaria certa, caso a pergunta fosse: De quantos modos podemos escolher 3 sorvetes diferentes, em uma loja que os oferece em 5 sabores? Essas 10 possibilidades representam as combinações simples de 5 elementos, tomados 3 a 3.

No problema apresentado, a resposta correta seria $CR_{5,3}$, que é uma *técnica* para calcular as combinações completas de 5 elementos, tomados 3 a 3, ou seja, nesse caso admitiríamos a hipótese da pessoa escolher sabores repetidos. O cálculo da *Combinação Completa ou com Repetição*, que veremos a seguir, seguirá um raciocínio que já abordamos anteriormente, ao estudarmos as permutações com elementos repetidos.

Para que possamos entender melhor o *Problema 8*, vamos supor que a loja oferecesse os sabores: manga, abacaxi, goiaba, cereja e cajá. Nas *combinações simples*, desses 5 sabores, tomados 3 a 3, teríamos 10 possibilidades sendo algumas dessas combinações:$\{manga, abacaxi, goiaba\}$; $\{goiaba, cereja, caja\}$; $\{abacaxi, goiaba, caja\}$. A combinação $\{manga, manga, goiaba\}$, por exemplo, não seria contabilizada. Como se pode perceber, essa opção de repetição dos elementos nas combinações completas dará um resultado maior que 10 possibilidades de escolha.

Podemos encarar a solução do problema das combinações completas da escolha de 3 objetos (distintos ou não), num total de 5 objetos como opções de escolha, como sendo as soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

Temos, portanto, 5 variáveis que representam a quantidade comprada, de cada um dos sabores oferecidos. E de modo geral, temos que as soluções inteiras e não

negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ pode ser representada por $CR_{n,p}$. E para determinarmos o valor de $CR_{n,p}$, vamos representar cada solução da equação por uma fila composta pelos símbolos • e |.
Em nossa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de bolinhas (•) indica o valor de cada incógnita. Por exemplo, para a equação $x+y+z = 5$, as soluções (2, 2, 1) e (5, 0, 0) seriam representadas por • • | • • | • e • • • • • | |, respectivamente. E permutando esses símbolos obtemos todas as soluções inteiras e não negativas da equação, sendo permutações com elementos repetidos.

Para equação:

$$CR_{n,p} = C(n-1+p), p = P^{(n-1),p}_{(n-1+p)} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! \cdot p!}$$

cada solução seria representada por uma fila com *(n-1)* barras para separar as *n* incógnitas, pois para separar *n* incógnitas usamos *(n-1)* barras | e *p* bolinhas • . Ora, para formar uma fila com *(n-1)* barras | e *p* bolinhas •, basta escolher dos *(n - 1+ p)* lugares da fila os *p* lugares onde serão colocadas as bolinhas •, o que pode ser calculado com a *técnica de Combinação Simples*, representado por $C_{(n-1+p),p}$. Podemos interpretar a *Combinação Completa* de *n* elementos tomados *p* a *p*, como sendo uma *Permutação com Repetição*. Dos *(n - 1+ p)* símbolos que serão permutados, ou seja, *(n - 1+ p)!* possibilidades de permutá-los, $(n-1)!$ possibilidades das barras permutarem entre si e *p!* possibilidades das bolinhas permutarem entre si precisam ser excluídas, por não representarem soluções diferentes.

Esperamos que os problemas que acabamos discutir contribuam na praxeologia usual dos estudos de AC, complementando assim, a organização praxeológica do ensino deste objeto de conhecimentos matemáticos.

Baseados nos estudos que realizamos até este momento, apresentamos a seguir, a nossa proposta de ensino de Análise Combinatória.

6 PROPOSTA DE ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresentaremos a nossa proposta de ensino de AC, constituída de quatro dispositivos experimentais organizados no contexto de *Sequência Didática*, utilizando a praxeologia modelada sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD). O foco estratégico é o estudo das *técnicas* de resolução de problemas de contagem que possibilitam classificá-los e dividí-los em agrupamentos denominados: *Arranjo, Permutação e Combinação,* valorizando os princípios básicos da AC. Explorar o processo de contagem e o conceito de padrão, onde os alunos possam construir seus conceitos sem precisar fazer o uso mecânico de fórmulas, buscando utilizar sempre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

As orientações educacionais apresentadas nos PCNEM para o estudo de AC revelam que as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos, e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Além disso, o estudo de AC deve ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril.

Cada dispositivo experimental que organizamos corresponde uma sessão que contém 4 (quatro) situações-problemas. Em função do nosso foco, a primeira sessão é dedicada a familiarização do PFC e ao desenvolvimento de competência em torno do estudo de *Arranjo*, a segunda é destinada ao estudo de *Permutação*, a terceira ao estudo de *Combinação*, e a última sessão consiste no desenvolvimento conjunto de situações que envolvem os conhecimentos dos três conceitos trabalhados nas sessões anteriores.

6.1 DISPOSITIVOS EXPERIMENTAIS

Na aplicação destes dispositivos em sala de aula como instrumento determinante da liberdade do aluno no desenvolvimento de seus conhecimentos e competências, apresentaremos inicialmente a Sessão I, e deixaremos um tempo de 50 minutos (1hora aula) para os alunos discutirem e apresentarem uma solução para cada problema, utilizando as *técnicas* de enumeração sistemática, árvore de possibilidades ou qualquer raciocínio prévio dos alunos, buscando envolvê-los o máximo possível, para apresentar uma solução sem o uso de fórmulas preestabelecidas. Em seguida, conduziremos a resolução de cada problema, evitando apresentar respostas prontas, fazendo questionamentos sobre os aspectos do problema, tentando mostrar que um problema deve ser visto de distintas perspectivas enquanto buscamos compreendê-lo. É importante construir todo o processo juntamente com eles, de modo que, efetivamente, compreendam cada ação realizada, refletindo a respeito do problema e analisando a melhor estratégia para resolvê-lo.

Nas sessões II, III e IV seguiremos o mesmo procedimento descrito anteriormente, entretanto o tempo para os alunos discutirem os problemas será de aproximadamente 100 minutos (Duas horas aulas).

Os problemas iniciais (Sessão I) podem ser elaborados com poucos elementos, através da solução intuitiva e da contagem direta, para destacar quantas e quais são as possibilidades nesse tipo de abordagem. Os alunos poderão observar que a contagem direta é impraticável na maioria dos casos e constatarão que é preciso perceber certas regularidades para desenvolverem técnicas de contagem apropriadas, que generalizem as soluções. Eles perceberão que, ao contar ou fazer os agrupamentos através das técnicas de contagem, estes se diferenciam pela ordem e/ou natureza dos elementos dados no problema e entenderão a necessidade do uso de fórmulas, chegando à solução de modo mais rápido, quando o número de elementos envolvidos nos agrupamentos for grande.Apresentamos então, a **Sessão I**.

Sessão I

Esta sessão tem por objetivo iniciar o estudo de AC introduzindo os conceitos de enumeração sistemática, PFC, árvore de possibilidades, bem como desenvolver o conceito de Arranjo Simples, considerando o dispositivo experimental representado na Figura 24.

A seguir apresentamos a análise a priori de cada subtarefa proposta nesse dispositivo .

Problema 1: *Em uma sala de aula, há três meninos e quatro meninas. De quantos modos poderemos selecionar um casal composto de um menino e uma menina?*

Análise a priori de P1:

Este problema caracteriza, de uma forma bem simples e direta, o PFC, pois é um problema composto por duas etapas ou decisões: uma etapa ou decisão1 (d_1) escolher um menino dentre três e outra etapa ou decisão 2 (d_2) escolher uma menina dentre quatro meninas. Portanto, o número de maneiras de se formar um casal (tomar as decisões d_1 e d_2) é $3 \cdot 4 = 12$ possibilidades. Além disso, incentivar a construção da árvore de possibilidades como fizemos no *Problema 1* apresentado na seção deste trabalho denominada Objetos que complementam a organização local do estudo de AC.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dispositivo experimental aplicado no ___ ano do Ensino Médio para o desenvolvimento e análise de práticas dos alunos na resolução de problemas que requerem conhecimentos de análise combinatória.	
Professor da turma (opcional):	
Nome do aluno (opcional):	Data: __/__/____
Em cada situação-problema abaixo, utilizar os conceitos matemáticos inerentes, descrevendo e justificando suas estratégias de resolução.	
Sessão I	
P1	*Em uma sala de aula, há três meninos e quatro meninas. De quantos modos poderemos selecionar um casal composto de um menino e uma menina?*
P2	*Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas disponibilizando para isso 7 cores diferentes de tintas. De quantos modos distintos pode-se pintar essa bandeira, pintando cada listra com uma cor diferente das demais?*
P3	*Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores: amarelo, branco e cinza. Não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?*
P4	*Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?*

Figura 24 – Dispositivo Experimental- Sessão I

Problema 2: *Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas disponibilizando para isso 7 cores diferentes de tintas. De quantos modos distintos pode-se pintar essa bandeira, pintando cada listra com uma cor diferente das demais?*

Análise a priori de P2:

Neste problema podemos destacar o quanto seria trabalhoso enumerar todas as possibilidades ou construir a árvore de possibilidades, além de discutir a questão da ordem das 4 cores escolhidas para pintar as listras, se a mesma influencia ou não na contagem (uma ideia inicial de Arranjo simples).

Ainda assim, em relação ao uso de diferentes representações no ensino de AC, Esteves (2001) afirma que incentivar o uso de diagramas, tabelas, enumerações ou a árvore de possibilidades, é de fundamental importância para sistematizar a compreensão do PFC.

O objetivo deste problema é introduzir o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e mostrar que tal princípio é uma técnica facilitadora na resolução de problemas de contagem que possui um número elevado de possibilidades. Utilizando o PFC para resolver esta tarefa temos:

- Listra 1: Temos 7 possibilidades de cores

- Listra 2: Temos 6 possibilidades de cores (já que não pode repetir cores)
- Listra 3: Temos 5 possibilidades de cores
- Listra 4: Temos 4 possibilidades de cores

Portanto, pelo PFC temos um problema com 4 etapas, com $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ possibilidades, o que resulta 840 modos distintos de pintar essa bandeira.

Com o objetivo de gerar discussões sobre as diferentes abordagens de resoluções e evidenciar a importância de aspectos como a ordenação e repetição dos elementos, apresentaremos outros problemas.

Problema 3: *Uma bandeira é formada por quatro listras, que devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?*

Análise a priori de P3:

Neste problema podemos destacar a necessidade de repetição da cor, já que temos menos cores que listras, além da condição imposta pelo problema de não ter listras adjacentes com a mesma cor. Acreditamos que na resolução deste problema seja interessante fazer uma interpretação em torno de algumas possibilidades construídas através da enumeração ou árvore de possibilidades, com o objetivo de aplicar em seguida o PFC, além, de enfatizar que o uso de fórmulas para resolução de problemas como este que possui algumas restrições, sem uma interpretação do problema e das técnicas disponíveis para resolvê-los, pode levar a um resultado errôneo.

Para a 1ª listra temos 3 possibilidades (amarelo, branco e cinza), para a 2ª listra temos 2 possibilidades, pois não podemos utilizar a cor da 1ª listra (condição das listras adjacentes terem cores distintas); para a 3ª listra temos 2 possibilidades novamente, pois apenas a cor da 2ª listra não é permitida e finalmente para 4ª listra temos 2 possibilidades, não podendo a cor da 3ª listra apenas. Portanto utilizando o PFC como *técnica* para resolver esta *tarefa*, temos $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ modos distintos de pintar essa bandeira.

Problema 4: *Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?*

Análise a priori de P4:

Nesse problema podemos destacar as possibilidades da casa das centenas, que não pode usar o zero, além de discutir a seguinte recomendação dada em Morgado (1991): *"Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar"*. Tem como objetivo utilizar o PFC para interpretar as possibilidades fixando o zero na casa das centenas e depois retirando do total de possibilidades, bem como mostrar a resolução do problema seguindo a recomendação de Morgado (1991). Além disso, propor e discutir outros problemas com enunciados semelhantes como: Quantos números naturais de três algarismos (na base 10) existem? Quantos números naturais pares de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Como na casa das centenas não é possível ter o zero, temos então 9 possibilidades (1 ao 9) para esta etapa, em seguida na casa das dezenas teremos 9 possibilidades novamente, de 0 a 9 tiramos apenas o número que foi utilizado nas centenas; na casa das unidades teremos 8 possibilidades, de 0 a 9 não podemos utilizar os dois números que foram utilizados anteriormente. Portanto, temos $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números naturais de três algarismos distintos.

A seguir apresentamos a Sessão II.

Sessão II

Esta sessão tem por objetivo utilizar o PFC como técnica para o estudo de Permutações, discutir e compreender os conceitos em torno desse tipo de agrupamento, bem como aplicar os conceitos discutidos na sessão anterior, considerando o dispositivo experimental representado na Figura 25.

PROFMAT

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM

Dispositivo experimental aplicado no ___ ano do Ensino Médio para o desenvolvimento e análise de práticas dos alunos na resolução de problemas que requerem conhecimentos de análise combinatória.	
Professor da turma (opcional):	
Nome do aluno (opcional):	Data: __ /__/____
Em cada situação-problema abaixo, utilizar os conceitos matemáticos inerentes, descrevendo e justificando suas estratégias de resolução.	
Sessão II	
P5	*De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro moças num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas moças?*
P6	*Quantos são os anagramas da palavra Escola? E quanto desses anagramas começam e terminam em vogal?*
P7	*Seis amigos vão participar de um evento e devem formar três duplas, de modo que, em cada dupla, haja um líder e um auxiliar. Calcule o número de maneiras diferentes de os seis amigos poderem organizar-se com os devidos cargos.*
P8	*De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?*

Figura 25 – Dispositivo Experimental- Sessão II

A seguir apresentamos a análise a *priori* de cada subtarefa proposta nesse dispositivo.

Problema 5: *De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro moças num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas moças?*

Análise a priori de P5:

Devemos observar neste problema que a ordem influencia na contagem e a arrumação deve-se começar com uma moça, pois temos 4 moças e 3 rapazes que deverão ser colocados alternadamente com as moças.

$1^{\underline{a}}$ moça: 4 possibilidades	$1^{\underline{a}}$ rapaz: 3 possibilidades
$2^{\underline{a}}$ moça: 3 possibilidades	$2^{\underline{a}}$ rapaz: 2 possibilidades
$3^{\underline{a}}$ moça: 2 possibilidades	$3^{\underline{a}}$ rapaz: 1 possibilidade
$4^{\underline{a}}$ moça: 1 possibilidade	

Ou seja, podemos considerar o problema contendo 7 etapas, onde multiplicando as possibilidades de cada etapa teremos: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$ possibilidades distintas. Podemos discutir com esse problema o conceito de permutação simples e de fatorial de um número natural "n" (técnicas apresentadas na organização local do livro didático analisado). Podendo ser interpretado também em duas etapas:

- *1ª etapa:* Posicionar as moças, onde temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades de ordená-las, ou seja, 4! possibilidades.

- *2ª etapa:* Posicionar os rapazes nos três lugares entre as moças, onde temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades, ou seja, 3! possibilidades.

E utilizando o PFC (multiplicando as possibilidades de cada etapa) temos $24 \cdot 6 = 144$ possibilidades.

Problema 6: *Quantos são os anagramas da palavra Escola? E quanto desses anagramas começam e terminam em vogal?*

Análise a priori de P6:

Temos por objetivo calcular todas as permutações da palavra Escola. Podemos interpretar o problema como tendo 6 etapas, sendo 6 possibilidades para a escolha da 1ª letra do anagrama (E, S, C, O, L ou A); 5 possibilidades para a 2ª letra; 4 possibilidades para a 3ª letra e assim sucessivamente, ou seja, utilizando a técnica do PFC temos $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades, o que resulta 720 anagramas diferentes da palavra Escola, que corresponde ao fatorial do número 6. Sendo possível também nesta situação, construir a árvore de possibilidades, mesmo que seja uma parte da árvore, para ilustrar essa situação e facilitar a sua compreensão.

E para calcular o número de anagramas da palavra Escola que começam e terminam em vogal, podemos tomar como as duas primeiras etapas a 1ª letra do anagrama e a 6ª letra do anagrama, pois para estas etapas, não podemos colocar uma consoante, ou seja, temos três possibilidades para uma dessas etapas (3 vogais) e duas possibilidades para outra (2 vogais restantes). Após escolhidas as vogais das extremidades, as letras restantes formamos todas as sequências com 4 letras (permutação). Apresentamos na Figura 26 uma ilustração para abordar este problema.

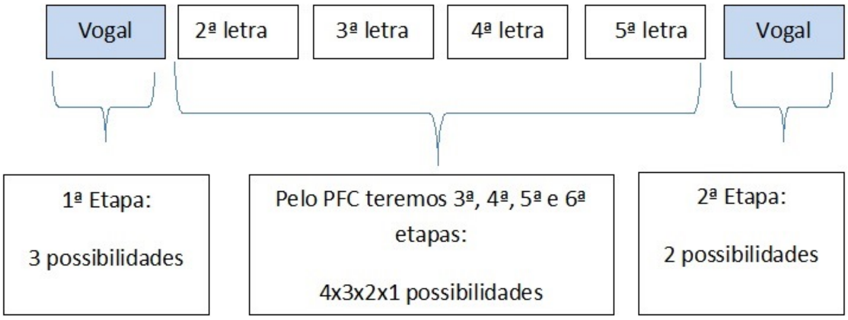


Figura 26 – Ilustração das etapas e possibilidades do problema 6

Multiplicando o número de possibilidades de cada etapa, de acordo com o PFC teremos $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, o que resulta 144 possibilidades ou anagramas distintos.

Podemos abordar este problema utilizando também a *técnica* de *permutação simples* e apresentar a seguinte resolução:

$$3 \cdot 2 \cdot P_4 = 6 \cdot 4! = 144$$

Problema 7: *Seis amigos vão participar de um evento e devem formar três duplas, de modo que, em cada dupla, haja um líder e um auxiliar. Calcule o número de maneiras diferentes de os seis amigos poderem organizar-se com os devidos cargos.*

Análise a priori de P7:

Com o objetivo de calcular todas as possibilidades dos seis amigos se organizarem podemos interpretar o problema tendo três etapas:

- *Etapa 1:* Escolher dois amigos para formar a 1ª dupla. Essa etapa pode ser dividida em duas etapas: escolher o 1º amigo (6 possibilidades) e em seguida escolher o 2º amigo no meio dos 5 amigos restantes (5 possibilidades). Portanto, pelo PFC temos 6.5 = 30 possibilidades. Podemos perceber que a ordem que os dois amigos são escolhidos influencia na contagem, pois podemos ter o amigo A sendo líder e o amigo B sendo auxiliar ou o amigo A sendo auxiliar e o amigo B sendo líder.

- *Etapa 2:* Escolher dois amigos para formar a 2ª dupla sabendo-se que já foram escolhidos dois amigos para a 1ª dupla. Assim como na 1ª dupla, essa etapa pode ser dividida em duas etapas: escolher o 1º amigo (4 possibilidades) e em seguida escolher o 2º amigo (3 possibilidades). Portanto, pelo PFC temos 4.3 = 12 possibilidades.

- *Etapa 3:* Escolher dois amigos para formar a 3ª dupla sabendo-se que já foram escolhidos quatro amigos para as duas primeiras duplas. Assim, seguindo o mesmo raciocínio das etapas anteriores temos 2 possibilidades para o 1º amigo e em seguida uma possibilidade para o 2º amigo da última dupla. Portanto, pelo PFC temos 2.1 = 2 possibilidades.

Por fim, multiplicando as possibilidades de cada etapa (PFC), temos $30 \cdot 12 \cdot 2$, resultando em 720 maneiras.

Podemos interpretar o problema também como tendo 6 etapas, pois podemos arrumar os seis amigos em uma fila e qualquer mudança de posição entre eles irá representar uma mudança de cargo ou de dupla formada. E utilizando o PFC teremos $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades, que resulta em 720 maneiras.

O problema acima abordado permite fazer uma discussão em torno dos agrupamentos: Arranjo Simples e Permutação Simples.

Problema 8: *De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?*

Análise a priori de P8:

Com o objetivo de calcular o número de maneiras distintas de dividir 8 pessoas em dois grupos com 4 pessoas cada, podemos utilizar as seguintes técnicas: PFC e Permutação.

A divisão pode ser feita colocando as 8 pessoas em fila e dividindo-as de modo que um dos grupos seja formado pelas 4 primeiras pessoas e o outro pelas 4 últimas. E utilizando o PFC, temos 8 possibilidades para escolher a 1ª pessoa da fila, 7 possibilidades para escolher a 2ª pessoa, e assim sucessivamente. Multiplicando as possibilidades de cada etapa temos 8! possibilidades (Permutação de 8 elementos), que resulta em 40320 modos. Entretanto, a divisão *abcd/efgh* é idêntica à divisão *efgh/abcd* (os grupos formados são os mesmos: um grupo é $\{a, b, c, d\}$ e o outro é $\{e, f, g, h\}$. Não obstante, na nossa contagem de 8! possibilidades, essas divisões foram contadas como se fossem distintas. Além disso, divisões como *abcd/efgh* e *cadb/efgh*, que diferem pela ordem dos elementos em cada grupo, apesar de idênticas foram contadas como se fossem distintas. Ou seja, cada divisão foi contada $2 \cdot 4! \cdot 4!$ vezes (2 por causa da ordem dos grupos; 4! por causa da ordem dos elementos no 1º grupo e 4! por causa da ordem dos elementos no 2º grupo).

Se contamos 8! divisões possíveis e cada divisão foi contada 2.4!.4! vezes, então o número de divisões possíveis é $\frac{8!}{2 \cdot 4! \cdot 4!}$, o que resulta 35 divisões(importante chamar atenção para a operação de divisão realizada para excluir as repetições e não subtração).

A seguir apresentamos a Sessão III.

Sessão III

Esta sessão tem por objetivo utilizar o PFC como técnica para o estudo das Combinações, aplicar a técnica de Combinação Simples e os conceitos discutidos nas sessões anteriores, considerando o dispositivo experimental representado na Figura 27:

PROFMAT
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM

Dispositivo experimental aplicado no ___ ano do Ensino Médio para o desenvolvimento e análise de práticas dos alunos na resolução de problemas que requerem conhecimentos de análise combinatória.

Professor da turma (opcional):

Nome do aluno (opcional): Data: __ /__/____

Em cada situação-problema abaixo, utilizar os conceitos matemáticos inerentes, descrevendo e justificando suas estratégias de resolução.

Sessão III	
P09	*De quantas maneiras distintas podemos formar um grupo de três pessoas escolhidas no meio de 5 pessoas numa sala?*
P10	*Numa prova, um estudante deve responder exatamente 7 questões de um total de 10 questões. Quantas escolhas ele tem? Quantas escolhas ele tem se entre as 7questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões?*
P11	*Para seleção brasileira foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?*
P12	*Uma fila de cadeiras numa sala tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?*

Figura 27 – Dispositivo Experimental- Sessão III

A seguir apresentamos a análise a priori de cada subtarefa proposta nesse dispositivo.

Problema 09: *De quantas maneiras distintas podemos formar um grupo de três pessoas escolhidas no meio de 5 pessoas numa sala?*

Análise a priori de P9:

Com esse problema iniciaremos uma discussão sobre um tipo de agrupamento onde a ordem dos elementos escolhidos não influencia na contagem. É de fundamental importância argumentar que, o que devemos formar, é um subconjunto de três elementos escolhidos de um conjunto formado por 5 elementos. Além disso, deixaremos um tempo para os alunos analisarem e compreenderem o problema, decidir sobre estratégias e tentar apresentar uma solução. Em seguida, faremos uma abordagem do problema utilizando diferentes representações como a enumeração, diagramas, árvore das possibilidades e por fim o PFC. Nesse contexto, Esteves (2001) afirma que incentivar o uso das diversas formas de representações na resolução de problemas facilita a sistematização e compreensão do PFC.

Com o objetivo de calcular todas as maneiras de formar um grupo com 3 pessoas escolhidas no meio de 5 pessoas podemos constatar que a escolha da 1ª pessoa pode ser feita de 5 modos; a da 2ª pessoa de 4 modos, pois já foi escolhida uma pessoa; a da 3ª pessoa de 3 modos, pois já foram escolhidas duas pessoas; e pelo PFC temos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneiras. Entretanto, nesse problema, tomando como exemplo João (J), Paulo (P) e Marcos (M), verificamos que os subconjuntos: $\{J, P, M\}$, $\{J, M, P\}$, $\{P, J, M\}$, $\{P, M, J\}$,$\{M, P, J\}$, $\{M, J, P\}$, são todos idênticos e utilizando o PFC foram considerados como sendo diferentes. Com efeito, se dissemos que há 5 possibilidades para a escolha da 1ª pessoa é porque estamos considerando, por exemplo, as escolhas J e P como diferentes e portanto estamos contando $\{J, P, M\}$ como diferente de $\{P, J, M\}$. Em suma, na resposta 60 maneiras, estamos contando cada subconjunto de três elementos 6 vezes, que nada mais é que os três elementos escolhidos mudando de posição entre eles ($P_3 = 3!$ ou de acordo com o PFC, $3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades de mudanças no mesmo subconjunto). Logo, a resposta é $\frac{60}{6} = 10$ maneiras.

Outra abordagem do problema, para o melhor entendimento desse tipo de agrupamento, que é chamado de Combinação Simples é:

Consideremos que as pessoas serão ordenadas em uma fila, e que as três primeiras pessoas da fila serão as escolhidas para formar o grupo.

Dispondo as pessoas numa fila, Teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneiras distintas de ordená-las. Fixada uma ordenação das 120 maneiras de ordenar as pessoas, temos 6 maneiras distintas de ordenar as três primeiras pessoas entre si, que serão as escolhidas (pois utilizando o PFC teremos $3 \cdot 2 \cdot 1$ maneiras) e 2 maneiras distintas de ordenar as pessoas não escolhidas entre si, que são as duas últimas. Essas alterações não influenciam na contagem dos grupos, pois não mudam os elementos do subconjunto dos escolhidos e nem os elementos do subconjunto dos não escolhidos. Logo, a resposta é $\frac{120}{12} = 10$ maneiras. Mostraremos uma ilustração de filas:

$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$3^{\underline{a}}$	$4^{\underline{a}}$	$5^{\underline{a}}$
Pessoa A	Pessoa B	Pessoa C	Pessoa D	Pessoa E
Pessoa B	Pessoa A	Pessoa C	Pessoa D	Pessoa E
Pessoa A	Pessoa B	Pessoa C	Pessoa E	Pessoa D
Pessoa C	Pessoa B	Pessoa A	Pessoa E	Pessoa D

Essa ilustração mostra exemplos de ordenações (filas) que representam o mesmo subconjunto dos escolhidos e dos não escolhidos.

Segue abaixo um exemplo de ordenação que representa um subconjunto dos escolhidos diferente dos anteriores

$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$3^{\underline{a}}$	$4^{\underline{a}}$	$5^{\underline{a}}$
Pessoa A	Pessoa B	Pessoa D	Pessoa C	Pessoa E

O problema acima abordado permite fazer uma discussão em torno dos agrupamentos: Combinação Simples, Permutação Simples e Permutação com repetição

De acordo com a *técnica* para *Combinação simples* apresentada no livro didático e discutida na seção objetos que complementam a organização local do estudo de AC, podemos concluir que 10 maneiras (resposta encontrada acima) é o resultado de $C_{5,3}$.

Problema 10: *Numa prova, um estudante deve responder exatamente 7 questões de um total de 10 questões. Quantas escolhas ele tem? Quantas escolhas ele tem se entre as 7 questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões?*

Análise a priori de P10:

Com o objetivo de calcular o número total de escolhas que o estudante tem, podemos verificar que, ao escolhermos as três questões que ele não irá responder, estaremos automaticamente escolhendo as sete que irá responder. Para isso, devemos montar um subconjunto com 3 elementos escolhidos de um conjunto com 10 elementos. Teremos 10 possibilidades para escolher o primeiro elemento, 9 possibilidades para o segundo e 8 possibilidades para o terceiro elemento. Pelo PFC, teremos $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ escolhas diferentes. Entretanto, cada grupo de três elementos dessas 720 escolhas foi contado como sendo grupo diferente $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ vezes, que representa os três elementos escolhido mudando de posição entre eles. Logo, devemos dividir o resultado acima por 6, encontrando a resposta 720/6 = 120 escolhas possiveis.

No caso em que entre as 7 questões deve responder pelo menos 3 das primeiras 5 questões, o estudante possui três opções (disjuntas):

- Escolher exatamente 3 questões das cinco primeiras e 4 questões das cinco últimas.
- Escolher exatamente 4 questões das cinco primeiras e 3 questões das cinco últimas.
- Escolher as cinco primeiras questões e 2 questões das cinco últimas.

Devemos interpretar cada uma dessas opções utilizando o PFC, para em seguida, discutirmos o que fazer com os resultados de cada opção, no que se refere a somar ou multiplicar os resultados encontrados. Nesse problema podemos utilizar também o Princípio Aditivo, o qual Morgado (1991) enuncia da seguinte maneira:

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos".

Ou seja, somar as possibilidades de cada opção, pois são acontecimentos disjuntos (um ou o outro ocorre).

Como já vimos no problema anterior, para montar um subconjunto de 3 elementos escolhidos de um conjunto com 5 elementos, temos 10 maneiras distintas, resultado de $C_{5,3}$. Escolher 4 questões das 5 últimas é a mesma coisa que retirar uma das 5 últimas, o que nos dá 5 possibilidades ($C_{5,4} = C_{5,1}$). E aplicando o PFC na primeira opção, temos 10.5 possibilidades, o que resulta em 50 maneiras; na segunda opção temos 50 maneiras também, pois $C_{5,4} = 5$ e $C_{5,3} = 10$ (é válido chamar a atenção para verificar essas igualdades utilizando o PFC). Na última opção, para escolher as cinco primeiras questões no meio das cinco primeiras, temos uma única possibilidade, e para escolher duas questões das cinco últimas questões temos 10 possibilidades. Logo, somando o resultado das três opções (50, 50 e 10), teremos 110 escolhas para esta situação.

Problema 11: *Para seleção brasileira foram convocados dois goleiros, 5 zagueiros, 6 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?*

Análise a priori de P11:

Com o objetivo de calcular o número de escalações diferentes da seleção brasileira, sendo 1 goleiro escolhido dentre 2 goleiros, 4 zagueiros escolhidos dentre 5 zagueiros, 4 meios de campo escolhidos dentre 6 e 2 atacantes escolhidos dentre 4, podemos dividir o problema em 4 etapas e utilizar a técnica de Combinação Simples com a função de simplificar os cálculos e em seguida aplicar o PFC, como apresentamos abaixo:

- Etapa 1: Escolher 1 goleiro no meio dos 2 convocados, temos uma combinação simples de 2 elementos tomados um a um, ou seja: $C_{2,1} = 1$
- Etapa 2: Escolher 4 zagueiros no meio dos 5 convocados, temos uma combinação simples de 5 elementos tomados quatro a quatro, ou seja: $C_{5,4} = 5$

- Etapa 3: Escolher 4 meios de campo no meio de seis convocados, temos uma combinação simples de 6 elementos tomados quatro a quatro, ou seja:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

- Etapa 4: Escolher 2 atacantes no meio de quatro convocados, temos uma combinação simples de 4 elementos tomados 2, de ou seja:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

Nas etapas acima utilizamos a *técnica* de *Combinação Simples*, mas sempre com um olhar voltado para o PFC, pois é uma *técnica* que permite construir um modelo simplificado e explicativo da situação-problema. Em seguida multiplicamos as possibilidades de cada etapa (PFC), pois temos um único acontecimento que é montar uma seleção com 11 jogadores dividido em 4 etapas, desta forma temos $2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 6$, o que resulta em 900 modos distintos de escalar a seleção.

Problema 12: *Uma fila de cadeiras numa sala tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?*

Análise a priori de P12:

Com o objetivo de calcular o número de maneiras distintas que 3 casais podem se sentar numa sala com 10 poltronas sendo que o marido e sua esposa fiquem sempre juntos utilizaremos as seguintes técnicas: PFC, fatorial e Combinação Simples.

Para arrumar os casais precisamos de 6 poltronas, o que deixa 4 poltronas vazias. Podemos organizar uma fila com as 4 poltronas vazias e os 3 casais (considerando duas poltronas como um único elemento que representa um casal). Para escolhermos 4 elementos (4 poltronas vazias) no meio de 7 elementos (4 poltronas vazias e 3 casais, cada casal ocupando duas poltronas juntas), podemos realizar uma combinação de 7 elementos tomados 4 a 4 (escolha dos espaços vazios). Feita as escolhas dos lugares vazios, teremos 3 possibilidades (cada uma com duas poltronas para o casal) para arrumar os 3 casais, que nesse caso teremos $3 \cdot 2 \cdot 1$ maneiras para arrumá-los pois a ordem como eles se sentam influência na contagem (justificado pelo PFC) ou seja 3! maneiras. Após distribuir os 3 casais e os lugares vazios, a ordem de cada casal pode ser escolhida por 2^3modos distintos (2 possibilidades para cada casal, sendo 3 casais, utilizando o PFC). Finalmente, multiplicamos as possibilidades das três etapas:

- 1ª Etapa: Combinação de 7 elementos tomados 4 a 4, para escolhermos as 4 poltronas vazias no meio de 7 poltronas, utilizando a *técnica* de Combinação

Simples temos:

$$C_{7,4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

- 2ª Etapa: Teremos $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras para arrumar os casais nas poltronas que restaram.

- 3ª Etapa: Teremos 2^3 modos distintos para escolher a ordem de cada casal.

Teremos $35 \cdot 6 \cdot 8$ possibilidades, o que resulta em 1680 maneiras distintas de arrumar os 3 casais, obedecendo o que se pede no problema.

Outra interpretação para resolver este problema seria ordenar os 7 elementos (4 poltronas vazias e 3 casais que ocupam seis poltronas) numa fila e calcular o número de possibilidades distintas para formar esta fila, o que resultaria em $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades aplicando o PFC, mas trocar as cadeiras vazias de posição entre elas não representa filas diferentes, e foram contadas como distintas no produto acima. Por isso, devemos dividir o resultado encontrado por $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, que é o número de maneiras diferentes de ordenar as cadeiras vazias. O que nos daria:

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 35 \cdot 6$$

Após ordenar as cadeiras vazias e os casais ($35 \cdot 6$ possibilidades como apresentado na igualdade acima), verificamos as possibilidades de ordem de cada casal, que já vimos que é 2^3. Por fim, multiplicando os valores encontrados (pois estamos descrevendo um único acontecimento dividido em etapas), chegaremos ao mesmo resultado de 1680 maneiras distintas.

A seguir apresentamos a Sessão IV.

Sessão IV

Esta sessão tem por objetivo utilizar as *técnicas* abordadas nas sessões anteriores para uma melhor compreensão de problemas de contagem, buscando aprimorar o uso dessas técnicas de forma contextualizada e significativa. Para tanto consideramos o dispositivo experimental representado na Figura 28.

A seguir apresentamos a análise a priori de cada subtarefa proposta nesse dispositivo.

Problema 13: *De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo, que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?*

Análise a priori de P13:

Com o objetivo de formar uma roda de ciranda onde duas determinadas crianças (indicamos por B e C) não fiquem juntas. Primeiramente calculamos o número de rodas

PROFMAT

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ – UESC
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGICAS

SBM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dispositivo experimental aplicado no ___ ano do Ensino Médio para o desenvolvimento e análise de práticas dos alunos na resolução de problemas que requerem conhecimentos de análise combinatória.

Professor da turma (opcional):

Nome do aluno (opcional): Data: __ /__/____

Em cada situação-problema abaixo, utilizar os conceitos matemáticos inerentes, descrevendo e justificando suas estratégias de resolução.

Sessão IV	
P13	*De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças, de modo, que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?*
P14	*João e Maria vão sentar-se na mesma fila de cinema. A fila tem 5 cadeiras, todas vazias. Como não querem sentar-se em cadeiras vizinhas, de quantas maneiras poderão sentar-se?*
P15	*Em um concurso, há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. Determine de quantos modos os votos podem ser distribuídos,* *a) levando-se em conta a sequência de votação dos examinadores.* *b) se importa apenas o número de votos que cada candidato recebe.*
P16	*No elevador de um edifício entram seis pessoas. De quantas maneiras essas seis pessoas podem saltar no primeiro, segundo e terceiro andares, de forma que salte pelo menos uma pessoa em cada um desses andares?*

Figura 28 – Dispositivo Experimental- Sessão IV

distintas que se pode formar com as outras cinco crianças, em seguida analisamos quantas possibilidades existem para as crianças B e C entrarem. Para essa tarefa, utilizamos o PFC, pois temos: 5 possibilidades para a 1ª criança ocupar a 1ª vaga; 4 possibilidades para a 2ª criança ocupar a 2ª vaga na roda; 3 possibilidades para a 3ª criança ocupar a 3ª vaga na roda; 2 possibilidades para a 4ª criança ocupar a 4ª vaga na roda e uma possibilidade para a quinta criança ocupar a última vaga. Multiplicando as possibilidades de cada etapa temos, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, o que resulta em 5!. No entanto, temos 5 disposições de roda que coincidem entre si numa rotação (giro no sentido horário ou anti-horário) para cada uma criança que tomemos como referencia. Por isso devemos dividir o resultado por 5, e assim, obtemos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades, ou seja, 4! possibilidades para montar a roda com as cinco crianças. Utilizando a *técnica* de *Permutação Circular* obtemos o mesmo valor, sem um olhar mais investigativo do problema:

$$(PC)_5 = (5-1)! = 4!$$

Em seguida analisamos as possibilidades para as duas crianças (B e C) entrarem na roda. A primeira criança, que chamamos de B, tem 5 possibilidades para entrar na roda, que são os cinco espaços entre as que já estam na roda, conforme podemos verificar na Figura 29.

Por fim, a outra criança C tem 4 espaços para entrar já que não pode entrar no mesmo espaço que B entrou.Portanto, utilizando o PFC temos: $5 \cdot 4 \cdot 4! = 480$ maneiras

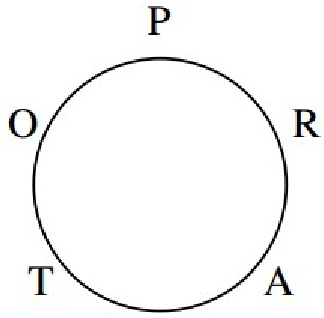


Figura 29 – Ilustração de uma roda de ciranda com 5 elementos

de formar uma roda de ciranda com 7 crianças e duas determinadas crianças não juntas.

Problema 14: *João e Maria vão sentar-se na mesma fila de cinema. A fila tem 5 cadeiras, todas vazias. Como não querem sentar-se em cadeiras vizinhas, de quantas maneiras poderão sentar-se?*

Análise a priori de P14:

Neste problema devemos calcular o número de subconjuntos formados por duas cadeiras não consecutivas para em seguida arrumar João e Maria nessas cadeiras. Devemos, portanto, escolher as duas cadeiras não consecutivas, em seguida arrumar essas duas pessoas. Para isso escrevemos um conjunto com 5 elementos representando as cadeiras, seja S = $\{C_1; C_2; C_3; C_4; C_5\}$. Podemos enumerar todos os subconjuntos, pois temos poucas possibilidades:
$\{C_1; C_3\}$ $\{C_1; C_4\}$ $\{C_1; C_5\}$ $\{C_2; C_4\}$ $\{C_2; C_5\}$ $\{C_3; C_5\}$ Para cada subconjunto temos duas possibilidades para arrumar João e Maria.

Utilizando o PFC, podemos compreender o acontecimento como tendo duas etapas, uma escolher as duas cadeiras não consecutivas e a outra arrumar João e Maria nas duas cadeiras escolhidas. Temos $2 \cdot 6$ maneiras, resultando em 12 possibilidades.

Uma representação interessante para compreender o uso das técnicas estudadas nesse tipo de problema é representar as cadeiras vazias com os sinais de (-) (no caso teremos 3 cadeiras vazias) e colocar entre eles os sinais de (+) que representam as cadeiras que deverão sentar João e Maria. Nesta configuração existem quatro posições entre os sinais de (-) onde os sinais de (+) podem ser colocados. Por exemplo, o subconjunto $\{C_1; C_3\}$ é representado por $(+; -; +; -; -)$ e o subconjunto $\{C_2; C_4\}$ é representado por $(-; +; -; +; -)$. E fixando os sinais de (-) temos $(\ , -, \ , -, \ , -, \ )$ quatro possibilidades de distribuir os sinais de (+).

O nosso objetivo é escolher duas cadeiras não consecutivas que constituirão o subconjunto. Para isso, basta fixar os sinais (-) e colocar entre eles os dois sinais de

(+) que representam as duas cadeiras não consecutivas. Desta forma, teremos uma combinação de quatro elementos tomados dois a dois, $C_{4,2} = 6$. O resultado encontrado com o uso da *técnica* de Combinação Simples, pode ser justificado utilizando o PFC, onde temos 4 possibilidades para escolher o primeiro espaço vazio, 3 possibilidades para escolher o segundo. Como a ordem não influencia, pois estamos nos referindo a subconjuntos,devemos dividir o resultado por 2, que é justamente desconsiderando a ordem dos dois espaços vazios escolhidos. Após escolhida as duas cadeiras não consecutivas, temos que arrumar João e Maria nessas duas cadeiras, o que pode ser feito de duas maneiras. Logo, o número de maneiras que eles podem se sentar é 12, resultado do produto $6 \cdot 2$. A técnica para resolução desse tipo de *tarefa* se chama *Primeiro Lema de Kaplansky* [1], uma técnica que não é muito estudada no Ensino médio, entretanto é possivel justificá-la com a técnica de Combinação Simples e uma interpretação por meio dos sinais de (-) para representar os elementos que não queremos escolher e os sinais(+) para representar os elementos que queremos escolher.

Problema 15: *Em um concurso, há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. Determine de quantos modos os votos podem ser distribuídos,*

a) levando-se em conta a sequência de votação dos examinadores.

b) se importa apenas o número de votos que cada candidato recebe.

Análise a priori de P15:

Na subtarefa que leva-se em consideração a sequência da votação dos examinadores, utilizando o PFC conseguimos encontrar a solução rapidamente. Tomamos como etapas o voto dado por cada examinador, ou seja, o 1º examinador tem 3 possibilidades de voto (três candidatos); o 2º examinador tem 3 possibilidades; o 3º examinador tem 3 possibilidades e assim até o quinto. Logo, multiplicando as possibilidades de cada etapa (PFC) temos $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ modos de distribuir os votos. Enfatizamos nessa situação que são sequências de votação dos examinadores, ou seja, a ordem é levada em consideração. Utilizamos também a árvore de possibilidades (mesmo que incompleta) para representar esta situação, conforme ilustração na Figura 30.

Podemos observar na árvore de possibilidades acima que, para cada ramificação C_1, C_2 e C_3 temos 81 possibilidades, e por ser sequências de votação, não teremos situações iguais ao completarmos a árvore, o que nos fornece o resultado de 243 modos. Sendo aqui um bom momento para argumentar a construção da fórmula de Arranjo com repetição. Que denotamos por$AR_{n,p} = n^p$, e nesta situação temos,$AR_{3,5} = 3^5 = 243$.

No (item b) o problema não leva em consideração a ordem da votação dos exami-

[1] *O Primeiro Lema de Kaplansky* nos fornecerá o número *F(n,p)* de subconjuntos de p elementos de $\{1, 2, 3, ..., n\}$ nos quais não há números consecutivos. Sendo $F(n, p) = C_{(n-p+1),p}$.

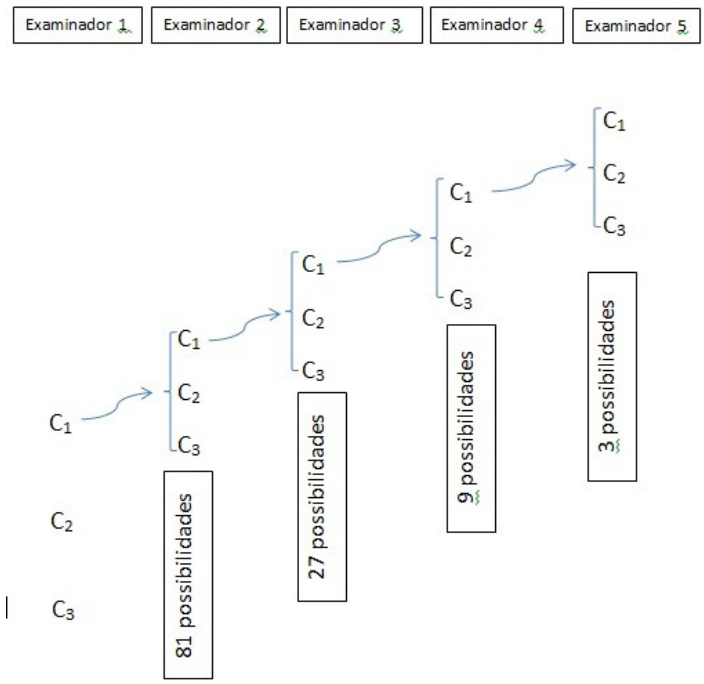


Figura 30 – árvore de possibilidades incompleta - problema 15

nadores e sim a quantidade de votos recebida por cada candidato. E como um mesmo candidato pode receber o voto de um ou mais examinadores, bem como não receber voto algum, temos um agrupamento que recebe o nome de Combinação Completa. Esse tipo de problema não é muito abordado no ensino médio com essa definição. Mas como existe uma infinidade de situações que podem ser modeladas com esses agrupamentos iremos fazer uma interpretação desse problema da seguinte maneira:

Para um examinador votar, ele precisa escolher um e apenas um dos três candidatos, além disso, cada examinador pode votar em qualquer um dos três candidatos, ou seja, o fato de um candidato já ter recebido um voto de algum examinador não o impede de receber o voto de outro examinador. Vamos então considerar que C_1 é o número de votos que o candidato 1 recebeu, C_2 é o número de votos que o candidato 2 recebeu e C_3 é o número de votos que o candidato 3 recebeu. Temos que a soma de todos os votos deve ser igual a 5, pois temos 5 examinadores. Desta forma temos que calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação $C_1 + C_2 + C_3 = 5$. E para isso vamos lançar mão de uma representação com bolinhas $\bullet$ e traços $|$ para mostrar algumas das soluções. Onde $\bullet$ representa voto e $|$ é usado para separar as incógnitas C_1, C_2 e C_3 :

$C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$\bullet\bullet\bullet \;|\; \bullet \;|\; \bullet$

$\bullet\bullet| \;\bullet\; \bullet \;|\; \bullet$

$\bullet|\bullet \;\bullet\; \bullet \;|\; \bullet$

Podemos verificar, ao movimentar os traços | e as bolinhas • (7 símbolos), que podemos representar todas as soluções inteiras não negativas da equação $C_1+C_2+C_3=5$. Entretanto, ao mudar os traços entre eles não altera a solução, o mesmo ocorrendo ao mudar as bolinhas entre elas. Portanto, seguindo o mesmo raciocínio do problema 9,temos $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}$ soluções distintas para a equação e assim todos os modos de realizar a votação. Onde $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ é o total de possibilidades de ordenação dos 7 símbolos. Tomando uma dessas ordenações acima, as mudanças das bolinhas entre elas $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneiras e as mudanças dos traços entre eles $2 \cdot 1 = 2$ maneiras não representa uma solução diferente e foram contadas como distintas para chegar ao resultado 5040. Por isso devemos dividir esse resultado de 5040 por 240, que é o número de vezes que cada ordenação diferente das demais foi repetida. Ou seja, temos 21 soluções distintas.

Problema 16: *No elevador de um edifício entram seis pessoas. De quantas maneiras essas seis pessoas podem saltar no primeiro, segundo e terceiro andares, de forma que salte pelo menos uma pessoa em cada um desses andares?*

Análise a priori de P16:

Para resolver a *tarefa* proposta deste problema optamos inicialmente por fazer uma interpretação (uma investigação) da situação-problema através de algumas representações:

I - Temos 3 andares, onde deve saltar no mínimo uma pessoa em cada andar. Ou seja, indicando x_1, x_2 e x_3 como as quantidades de pessoas que descem respectivamente no 1º andar, 2º e 3º andar, temos que estes valores pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

II- Podemos verificar que a ordem em que essas pessoas descem em relação ao andares influencia na contagem.

Desta forma dividimos o problema em duas partes:

1ª Parte: Calcular todas as possibilidades de distribuição das quantidades de pessoas por andar. Para isso recorremos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

E como não pode ficar sem descer uma pessoa ao menos em um andar, fizemos a seguinte substituição:

$x_1 = a + 1$, $x_2 = b + 1$ e $x_3 = c + 1$.

Daí obtemos a igualdade: $a+b+c = 3$, onde os valores de a,b e c são inteiros não-negativos. Utilizamos então a técnica que apresentamos no problema 8 da seção **Objetos que Complementam a Organização Local do estudo de AC**, a técnica de Combinação Completa ou uma interpretação por Permutação com Repetição. Desta forma temos:

$$(CR)_{3,3} = P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Portanto temos 10 possibilidades de distribuição das quantidades de pessoas por andar.

2º Parte: Analisamos todas as possibilidades para a trinca de valores x_1, x_2 e x_3, chegando à conclusão que os subconjuntos possíveis são: $\{1,1,4\}$, $\{2,2,2\}$ e $\{1,2,3\}$. Mas, tomando por exemplo o subconjunto $\{1,1,4\}$, temos três possibilidades de sequência por andar: (1, 1, 4), (1, 4, 1) e (4, 1, 1). E para cada uma dessas situações temos a ordem das pessoas por andar, que influencia na contagem. Por isso utilizamos a técnica de Permutação com Repetição para descrever os casos abaixo:

Para $\{1,1,4\}$ temos 3 possibilidades de distribuição das quantidades por andar, tendo cada uma:

$$P_6^{1,1,4} = \frac{6!}{4!1!1!} = 30$$

trinta maneiras distintas, considerando a ordem das pessoas em relação aos andares. Como são três, temos então 90 possibilidades ao todo, seguindo esse padrão.

Para $\{2,2,2\}$ temos apenas uma possibilidade com 90 maneiras distintas, considerando a ordem em que as pessoas saltam em relação aos andares, de acordo com os cálculos abaixo:

$$P_6^{2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

E por último, para em$\{1,2,3\}$ temos $3! = 6$ possibilidades de distribuição das quantidades, onde cada uma tem:

$$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

Ou, seja, 60 maneiras distintas considerando a ordem.

Logo, podemos concluir que o total de maneiras dessas seis pessoas saltarem no primeiro, segundo e terceiro andares de forma que salte pelo menos uma pessoa em cada um desses andares é:

$30 \cdot 3 + 90 + 6 \cdot 60 = 540$ maneiras.

Na apresentação desses problemas buscamos ao máximo generalizar o contexto requerido em cada problema discutido, utilizando as técnicas apresentadas no livro didático e na seção Objetos que Complementam Organização Local do estudo de AC, potencializando o uso do PFC, com um olhar crítico para os problemas de contagem com o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório. Com isso esperamos que este trabalho venha despertar o interesse, não só dos alunos, mas também daqueles profissionais que queiram desenvolver as habilidades matemática no âmbito de Análise Combinatória.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho realizamos um estudo teórico acerca de pesquisas desenvolvidas por alguns pesquisadores que citamos nesta dissertação, em torno do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, e apresentamos uma proposta de ensino, visando a participação efetiva dos alunos na construção dos conceitos e técnicas de cálculos de arranjo, permutação e combinação, valorizando o Princípio Fundamenta da Contagem (PFC) na resolução de problemas, sob a ótica praxeológica. Para isso, consideramos o 2º ano do Curso Técnico de Nível Médio Integrado em Informática do Instituto Federal da Bahia (IFBA), Campus de Eunápolis como instituição de referência. Escolhemos, nesta instituição, analisarmos o livro didático indicado para o ensino de Análise Combinatória, onde destacamos uma praxeologia usual que valoriza as aplicações diretas de fórmulas, tanto nos exemplos, quanto nos exercícios propostos. Identificamos um vazio didático nesta praxeologia, que tentamos controlar com o desenvolvimento do estudo que chamamos de "Objetos que Complementam a Organização Local do Estudo de AC" constituído de 8 (oito) problemas que julgamos fundamentais no estudo de AC, tendo o PFC como a ferramenta primordial para introduzir os conceitos de arranjo, permutação e combinação.

A partir destes estudos, organizamos uma SD composta de 4 (quatro) sessões. Cada sessão se constitui de um dispositivo experimental tendo 4 problemas que analisamos, valorizando assim, a Praxeologia Modelada e o PFC.

Acreditamos que a resolução de problemas de AC é fonte de motivação à aprendizagem, pois, se apresenta como um dos pilares de uma aprendizagem significativa da matemática.

Assim sendo, julgamos que utilizar a resolução de problemas como modalidade didática para ensinar AC, é um dos caminhos que apresenta significado e contextualização dos conceitos abordados no campo da AC. Além disso, o uso predominante do PFC nestas resoluções torna o uso das fórmulas de Arranjo, Combinação e Permutação uma ferramenta que favorece a mobilização e aquisição de conhecimentos significativos neste domínio. Com efeito, o aluno pode participar da construção das fórmulas e perceber que o uso das mesmas não é um conhecimento mecânico, e sim, requer do sujeito desenvolver competências necessárias para alcançar os resultados esperados a partir dos cálculos, passando pela interpretação dos problemas considerando, se necessário, diversas representações (por tabelas, enumeração, árvore de possibilidades, etc.) favorecendo, por conseguinte, a construção do raciocínio combinatório.

Além disso, uma questão muito importante refere-se à relação existente entre a Didática da Matemática e a formação inicial dos professores de Matemática. Para Varizo (2006), a necessidade de tornar o conhecimento matemático acessível às novas gerações faz com que os estudos referentes à Didática da Matemática sejam inseridos nos currículos dos cursos de licenciatura.

Sendo assim, entendemos que nosso estudo e os trabalhos que foram descritos nesta Dissertação, apresentam um vasto campo de discussão acerca do objeto matemático em questão e podem contribuir para a formação inicial de professores de Matemática. O nosso foco é expandir os estudos em AC, e aplicar a proposta apresentada neste trabalho nas turmas do Ensino Integrado que possui AC na sua matriz curricular.

Consideramos importante a presença da Análise Combinatória no ensino de Matemática. Contudo, para que o seu ensino dissemine o envolvimento dos alunos e a aprendizagem, é necessário que o professor faça uma escolha da metodologia apropriada, tal como da resolução de problemas engajando os alunos em situações - problemas do seu cotidiano, influenciando desta forma no desenvolvimento do seu modo de pensar matemático. Esperamos assim com este trabalho, contribuir com a prática efetiva do professor que ensina Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.
Acesso: 20 de janeiro de 2014

SOUZA, A.C.P. Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP – Rio Claro. Disponível em: < http: //www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/analucia.pdf
Acesso: 18 de janeiro de 2014

MORGADO, A., PITOMBEIRA DE CARVALHO, J. , PINTO DE CARVALHO, P. & FERNANDEZ, P. Análise combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro, SBM, 1991.

ROCHA, J. C. O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas. São Paulo, 2002, 96 p. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de educação, Universidade de São Paulo.

SÁ, P. F. A resolução de problemas: concepção e sugestões para aula de Matemática. Traço: revista do centro de ciências exatas e tecnologia. Belém: UNAMA, v.7, n.16, p. 63-77, 2005.

Lima, Tereza Raquel Couto. Ensinando e aprendendo análise combinatória através da leitura e resolução de problemas e da construção de enunciados. Belo Horizonte, 2012. Disponível em: < www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?view=vtls000383650>

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, dez. 2012.

HENRIQUES, A. Reflexões sobre análises institucionais e sequências didáticas: o caso do estudo de integrais múltiplas. Disponível em:< https://sites.google.com/site/gpemac/artigos >
Último acesso: 23 de junho de 2014.

HENRIQUES, A.; PALMEIRA, E; BENEVIDES, P. Extensão do teorema de Pitágoras em três dimensões: modelagem de edifícios por paralelepípedos usando Cabri 3D.

HENRIQUES, A. Serôdio, R. Intervenção de Tecnologias e Noções de Registros de Representação no Estudo de Integrais Múltiplas na Licenciatura em Matemática. Anais do VI HTEM - São Carlos-SP. 2013.

ESTEVES, I. Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental. São Paulo, 2001, 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. O ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema. Belém, 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará. Disponível em: < www.livrosgratis.com.br /arquivos livros/cp 099937.pdf >
Acesso: 14 de janeiro 2014.

PACHECO, A.B. Uma investigação sobre erros apresentados por estudantes na resolução de problemas verbais e não-verbais no campo da Análise Combinatória. Recife, 2001, 257 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Dezso, Ricardo S. Saberes Docentes: A Análise Combinatória no Ensino Médio. São Paulo, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: < http://www.livrosgratis.com.br/arquivos livros/cp137890.pdf >

CARRAHER, DAVID. Educação Tradicional e Educação Moderna. Em: Carraher, Terezinha Nunes (Org.). Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis: Vozes, 1986.

STURM, Wilton. As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa. Campinas, 1999, 132 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia – Volume 2. São Paulo: Scipione, 2010.