Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A chuva e o para-brisa

Hoseano Costa da Silva

Relatório para o Exame Geral de Qualificação apresentado ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador
Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

2014

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

A chuva e o para-brisa

Hoseano Costa da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Me. Mário Gomes dos Santos

2014

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processamento Técnico

S586c Silva, Hoseano Costa da
A chuva e o para-brisa / Hoseano Costa da Silva. - 2014.
39 f: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.
Orientação: Prof. Me. Mário Gomes dos Santos.

1. Geometria Analítica Sólida. 2. Lugar Geométrico. 3. Velocidade Relativa. I. Título

CDD: 516.33

TERMO DE APROVAÇÃO

Hoseano Costa da Silva

A chuva e o para-brisa

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela seguinte banca examinadora:

Prof. Me. Mário Gomes dos Santos
Orientador

Prof. Dr. Ezequias Matos Esteves
Matemática - IFPI

Prof.Dr. Jurandir de Oliveira Lopes
Matemática - UFPI

Teresina, 18 de Agosto de 2014

Dedico esse trabalho à minha mãe Maria José e a minha esposa Charlene.
Ao meu pai Francisco de Assis e ao meu irmão Maurício (In Memorian).

Agradecimentos

A DEUS, pela vida e por ter me guiado pelo caminho certo.

À MINHA FAMÍLIA, em especial a minha mãe (Maria José) e a minha esposa (Charlene).

AOS AMIGOS DE MESTRADO Milton, Chico, Evandro e Wylson pois foram de grande importância em meu sucesso no PROFMAT.

AO COLEGA DE TRABALHO Antônio Carlos, pois me ajudou muito com dicas e suportes para que eu pudesse seguir em frente.

AO MEU ORIENTADOR, Me. Mário Gomes, um agradecimento de coração.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

“É bom ter dinheiro e as coisas que o dinheiro pode comprar. Mas é bom também verificar de vez em quando se não estamos perdendo as coisas que o dinheiro não pode comprar”

George Horace Lorimer

Resumo

Este trabalho mostra como determinar o lugar geométrico das gotas de chuva, que caem em um para-brisa de um automóvel, formando um ângulo θ ($0 \leq \theta \leq 90°$) com a vertical. Após determinar esse lugar, será calculado seu volume. Para isso, serão apresentados alguns tópicos, que servirão de ferramentas para resolução do problema; tais como: definição e exemplos de lugares geométricos, como calcular o volume de um prisma, componentes de um vetor e velocidade relativa.

Palavras-chave: Lugar Geométrico, Velocidade relativa, Volume.

Abstract

This paper shows how to determine the locus of raindrops, falling on a windshield of an automobile, at an angle of θ $(0 \leq \theta \leq 90°)$ from the vertical. After determining this place, its volume will be calculated. For this, some topics that will serve as tools for problem solving will be presented; such as the definition and examples of loci, such as calculating the volume of a prism vector components and relative speed.

Keywords: Locus, relative speed, Volume.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Na revista do professor de matemática nº 18 (RPM), foi publicado o artigo *a chuva e o para-brisa*, cujo autor é Ney Carmona junior. O artigo mostra como calcular o volume de chuva que incide verticalmente no para-brisa de um automóvel. A solução desse problema foi feita usando ferramentas do ensino médio tais como: *Geometria, Trigonometria, Funções, Velocidade relativa.*

No final do artigo o autor sugeriu que fosse feito uma generalização do trabalho dele; isto é, solucionasse o problema para um caso mais geral. Em se tratando de um problema cujo resultado é um modelo matemático simples, mas que desperta curiosidade, resolvi trabalhar o problema.

Para entender o que é um modelo matemático segue-se a definição: Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado [1].

1.1 O problema para um caso mais geral

O problema agora, consiste em calcular o volume total de chuva que incide, formando um ângulo θ com a vertical, no para-brisa de um carro durante um intervalo de tempo considerado; sendo que a chuva e o carro possuem velocidades constantes.

1.2 Modelagem do problema

Para modelagem da situação, representamos o para-brisa por uma área plana e fechada B, cujo plano forma um ângulo α com a horizontal e que se desloca horizontalmente a uma velocidade constante V_p por um intervalo de tempo com amplitude T. Enquanto isto, na região de deslocamento e no intervalo considerado, ocorre uma chuva contínua que se precipita formando um ângulo θ, com θ variando no intervalo $0 \leq \theta \leq 90°$ com a vertical a uma velocidade constante V_g. Como mostra a figura 1.1.

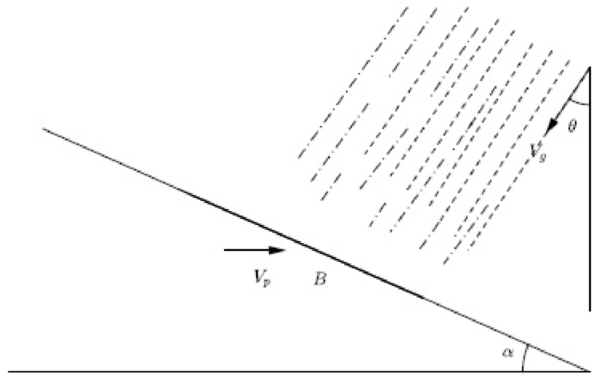

Figura 1.1: Chuva fazendo um ângulo θ com a vertical.

Este trabalho tem como objetivo calcular, num intervalo de tempo T, o volume de chuva que cai com velocidade constante V_g fomando um ângulo θ com a vertical, em um para-brisa de um carro, que anda com uma velocidade constante V_p. Para isso, esse trabalho possui a seguinte estrutura: uma introdução, que conceitua e mostra a importância do ramo da modelagem matemática. Logo após, estão expostos os resultados preliminares, nele discorrem os principais resultados que serão utilizados na resolução do problema. Logo na sequência vem a resolução do problema; e a estrutura do trabalho é finalizada com as considerações finais e referências bibliográficas.

2 Resultados preliminares

2.1 Lugar Geométrico

Definição 2.1. *Lugar Geométrico é o conjunto infinito de pontos do plano ou do espaço que gozam de uma mesma propriedade.*

Exemplo 2.1. O disco D de centro $A = (a, b)$ e raio r é formado pelos pontos $P = (x, y)$ cuja distância ao ponto A é menor ou igual a r. Isto é:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

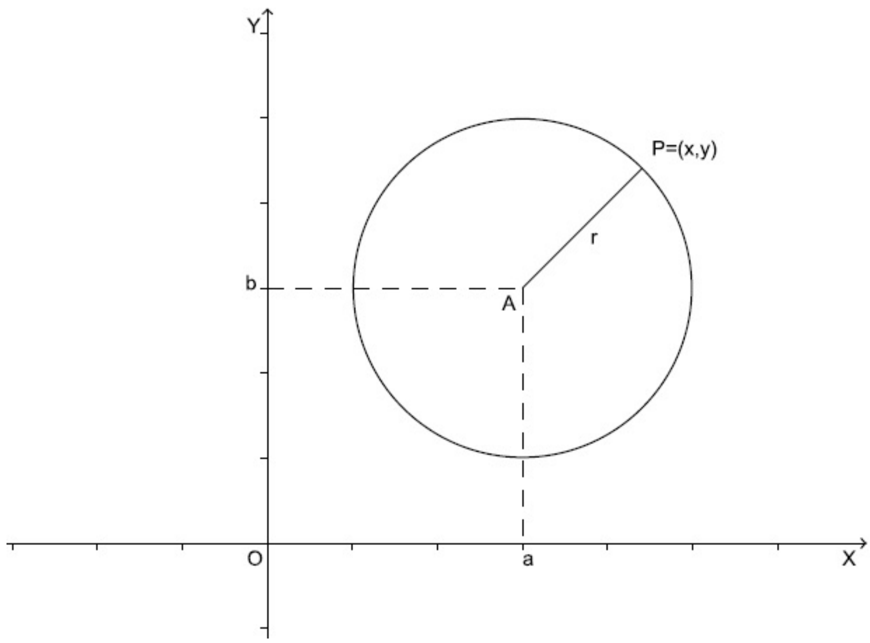

Figura 2.1: Disco de centro A e raio r.

Exemplo 2.2. Plano mediador. É o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos A e B.

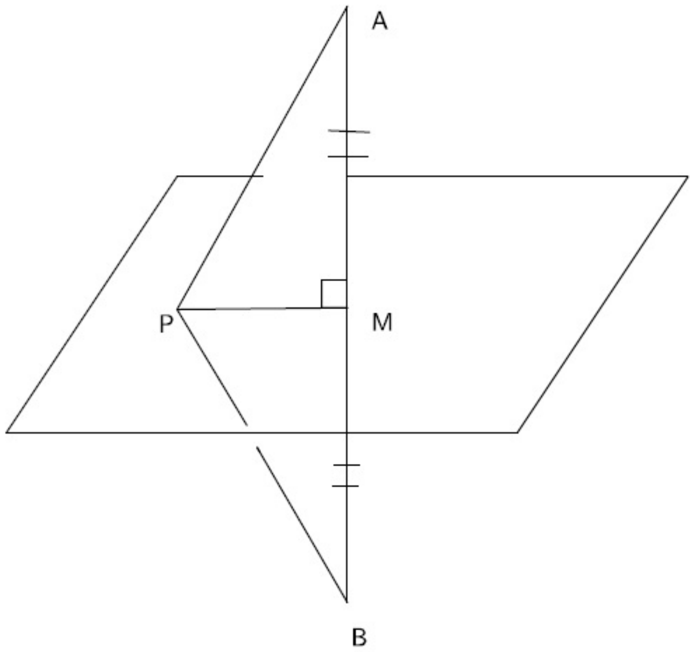

Figura 2.2: O plano mediador.

2.2 Teorema de Pitágoras

Teorema 2.1. *Num triângulo retângulo de catetos a, b; o quadrado da hipotenusa c é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Para demonstração considere a figura 2.3.

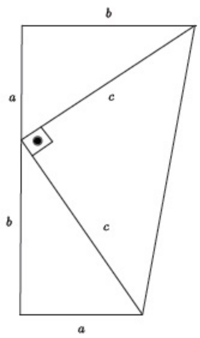

Figura 2.3: Trapézio.

Demonstração. A àrea do trapézio com bases a, b, e altura $a+b$ é igual a metade da soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas dos três triângulos retângulos. Isto é:

$$\frac{a+b}{2}.(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2};$$

desenvolvendo o primeiro membro obtemos

$$\frac{a^2}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}\Rightarrow\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{c^2}{2}\Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

como queríamos mostrar.

$\square$

2.3 Trigonometria no triângulo retângulo

Considere o triângulo ABC, retângulo em A:

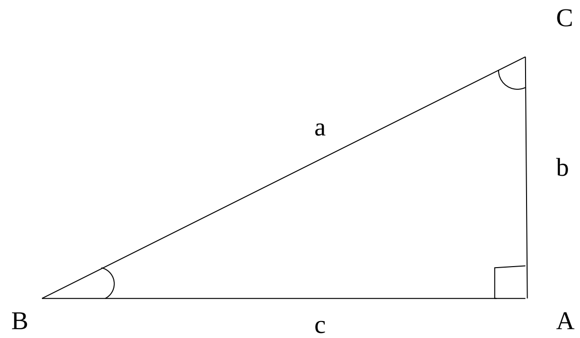

Figura 2.4: Triângulo retângulo.

O segmento BC de medida a, oposto ao ângulo reto $\widehat{A}$, é chamado de **hipotenusa**; os segmentos CA e AB, de medidas b e c, respectivamente, são chamados de **catetos**. Nesse triângulo, estão definidas as seguintes relações para o ângulo agudo $\widehat{B}$.

- $sen\widehat{B}=\frac{b}{a}$
- $cos\widehat{B}=\frac{c}{a}$
- $tg\widehat{B}=\frac{b}{c}$

De modo análogo, encontra-se as relações para o ângulo agudo $\widehat{C}$.

2.4 Prisma

Considere um polígono **P**, convexo, contido em um plano α e um seguimento AB com apenas uma de suas extremidades pertencente a α, como mostra a figura 2.5.

Definição 2.2. *Chama-se prisma a união de todos os seguimentos paralelos e congruentes a AB, com uma de suas extremidades em **P** e contido no mesmo semiespaço em que está contido o seguimento AB.*

Axioma(Princípio de cavalieri)

São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área,então esses sólidos têm mesmo volume.

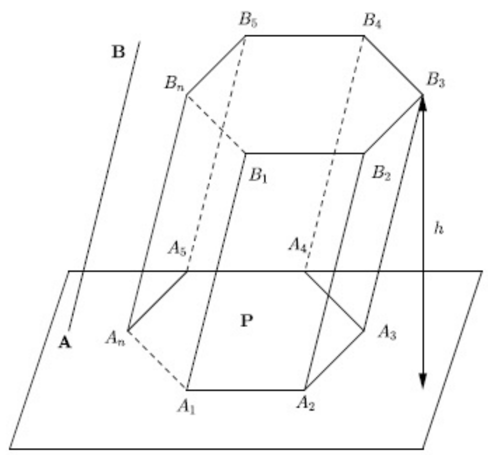

Figura 2.5: Prisma Oblíquo de base P e altura h.

2.4.1 Volume

Com o princípio de Cavalieri, podemos obter o volume de um prisma. Considere um prisma de altura h, cuja base seja um polígono **P** de área A contido num plano horizontal. Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo com mesma altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A. Agora suponha que os dois sólidos sejam cortados por outro plano horizontal, que produz secções de áreas A_1 e A_2 no prisma e paralelepípedo, respectivamente. Mas o paralelepípedo é também um prisma e, sabemos que em todo prisma, uma secção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo princípio de cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é $A.h$, o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

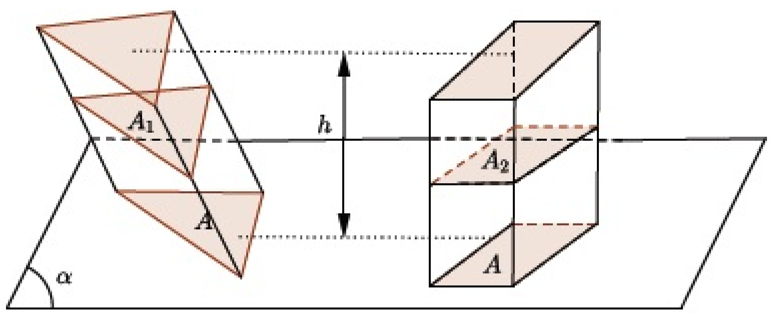

Figura 2.6: Sólidos cortados por um plano horizontal.

2.5 Vetor

Definição 2.3. *Vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados de mesma direção, de mesmo sentido e de mesmo módulo.*

A figura 2.7 está representado um vetor $\vec{v}$.

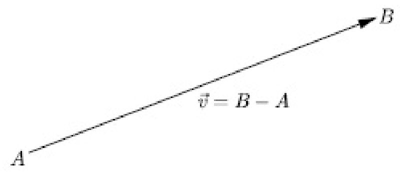

Figura 2.7: Vetor $\vec{v} = B - A$.

2.5.1 Vetor oposto

Definição 2.4. *Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$ o seu oposto é o vetor $\overrightarrow{BA}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$. O vetor oposto de um vetor $\vec{v}$ é representado por $-\vec{v}$.*

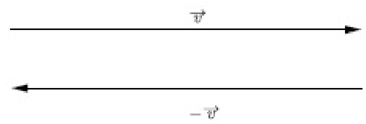

Figura 2.8: Vetores opostos.

2.5.2 Módulo de um vetor

Definição 2.5. *É o número não negativo que indica o comprimento do vetor.*

O módulo de um vetor $\vec{u}$ é indicado por $||\vec{u}||$.

2.5.3 Paralelismo de vetores

Definição 2.6. *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos paralelos quando possuirem a mesma direção.*

Quando dois vetores forem paralelos suas imagens geométricas podem ser representados numa mesma reta

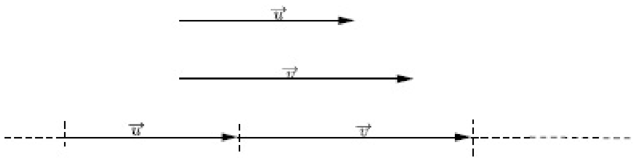

Figura 2.9: Vetores paralelos.

2.5.4 Componentes de um vetor em relação ao sistema de coordenadas cartesianas

Seja $\vec{u}$ um vetor qualquer. Tomamos a origem de $\vec{u}$ no ponto 0. Chama-se componentes de $\vec{u}$ segundo os eixos $0x$ e $0y$ as projeções u_x e u_y de $\vec{u}$ sobre esses eixos.

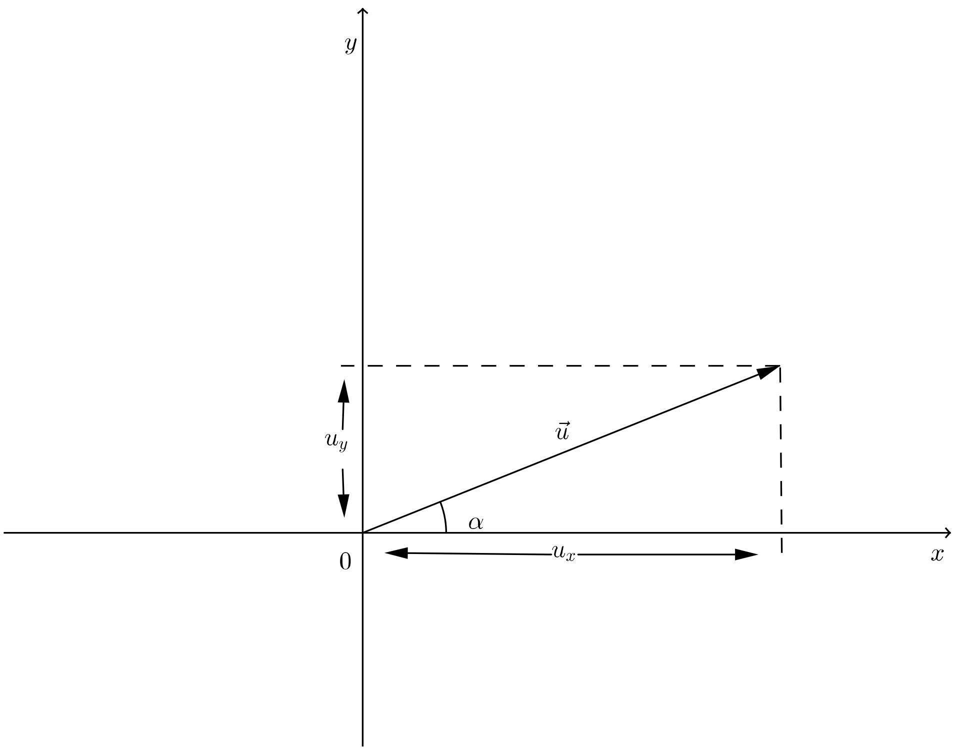

Figura 2.10: Componentes de um vetor.

- **O módulo ou comprimento de $\vec{u}$ é dado por**:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

- **Sendo α o ângulo entre $\vec{u}$ e O_x, tem se**

$$\begin{cases} u_x = ||\vec{u}||.cos\alpha \\ u_y = ||\vec{u}||.sen\alpha \end{cases}$$

2.5.5 Velocidade Relativa

Definição 2.7. *O módulo da velocidade relativa de um corpo A em relação ao corpo B que se movem respectivamente com velocidades V_A e V_B de mesma direção e sentidos opostos é dado por $||V_{AB}|| = ||V_A|| + ||V_B||$*

Exemplo 2.3. Na figura acima 2.11. Se os cospos **A** e **B** se deslocam com velocidades de módulo $||V_A|| = 10m/s$ e $||V_B|| = 5m/s$, então a velocidade relativa do corpo **A** em relação ao corpo **B** é dada por: $||V_{AB}|| = 10 + 5 = 15m/s$.

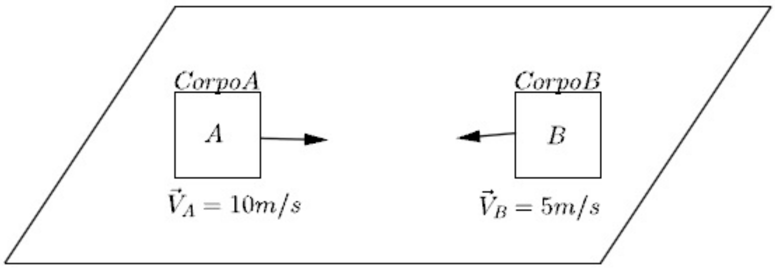

Figura 2.11: Corpos em movimentos de mesma direção e sentidos opostos.

3 A resolução do problema

Para um melhor entendimento, a resolução será divididada em duas partes:

Primeira parte

Nessa primeira parte, será determinado em $t = 0$ o lugar geométrico de todas as gotas de chuva que tocarão a superfície B, em algum instante t do intervalo $(0, T]$.

Para isso, tomemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem O fixa e qualquer, na superfície **B** coerente com as direções horizontal e vertical do lugar. Como mostra a figura 3.1.

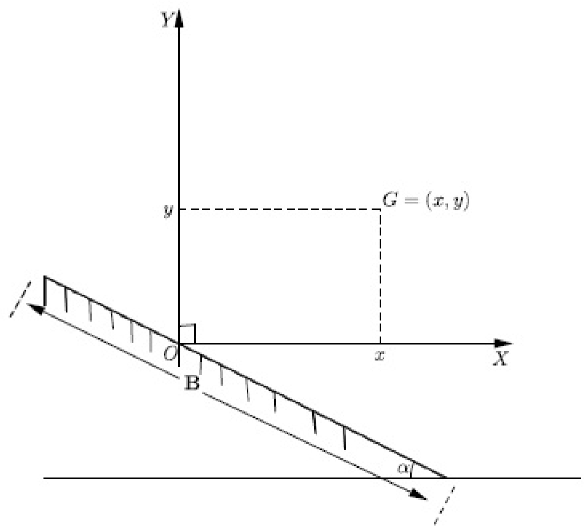

Figura 3.1: Sistema de coordenadas cartesianas.

Para um melhor entendimento da resolução inicial do problema, vamos ter como referência visual a figura 3.2.

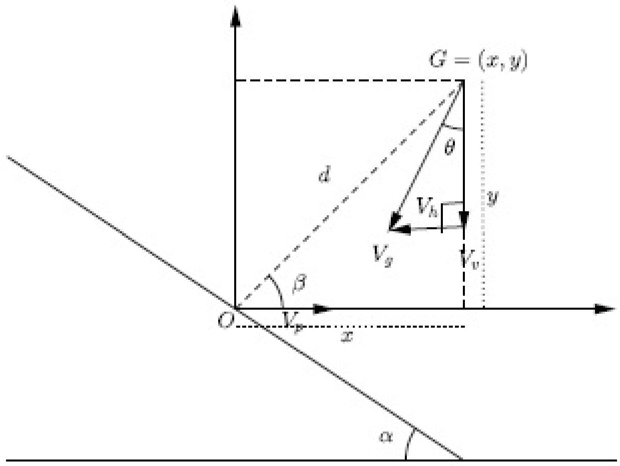

Figura 3.2: Infinidades de gotas com ponto futuro em O.

- α é o ângulo de inclinção do para-brisa com a horizontal;
- β é o ângulo de inclinação da distância d com o eixo x;
- θ é o ângulo de inclinação da chuva com a vertical;
- V_g é a velocidade da chuva;
- V_p é a velocidade do ponto O;
- V_v é a componente na direção vertical da velocidade V_g;
- V_h é a componente na direção horizontal da velocidade V_g.

O ponto O será ponto futuro de uma infinidade de gotas do lugar geométrico. Portanto, para que uma gota que se encontra no ponto $G = (x, y) \in XOY$ esteja no ponto $O \in XOY$ após um tempo t é necessário e suficiente que o tempo t_g gasto pela gota para percorrer verticalmente a distância y seja igual ao tempo t_p gasto pelo ponto O para percorrer horizontalmente a distância x com uma velocidade relativa horizontal V_H em relação a gota G, Com $0 < t_g = t_p \leq T$. Isto é;

$$t_g = t_p$$

Pela definição (2.7) a velocidade relativa horizontal do ponto O em relação a gota G é dada por

$$||V_H|| = ||V_p|| + ||V_h||$$

e se

$$||V_v|| = \frac{y}{t_g} \quad \text{e} \quad ||V_H|| = \frac{x}{t_p}$$

então $\frac{y}{||V_v||} = \frac{x}{||V_H||}$. Portanto

$$y = \left(\frac{||V_v||}{||V_H||} \right) x. \tag{3.1}$$

Mas as componentes de V_g nas direções vertical e horizontal, são dadas respectivamente por:

$$||V_v|| = ||V_g||.cos\theta \quad \text{e} \quad ||V_h|| = ||V_g||.sen\theta. \tag{3.2}$$

Das equações (3.1) e (3.2), resulta em

$$y = \left(\frac{||V_g||.cos\theta}{||V_p|| + ||V_g||.sen\theta} \right) x. \tag{3.3}$$

A igualdade acima é uma interpretação analítica da semi-reta de origem O. A partir dela deduz-se que, as gotas $G = (x, y)$ com ponto futuro O, em algum instante $t \in (0, T]$, se situam, em $t = 0$, sobre o segmento OO' da semi reta de origem O e taxa de variação $\dfrac{||V_g||cos\theta}{||V_p|| + ||V_g||.sen\theta}$.

Agora vamos calcular o valor de d. Para isso veja a figura 3.3.

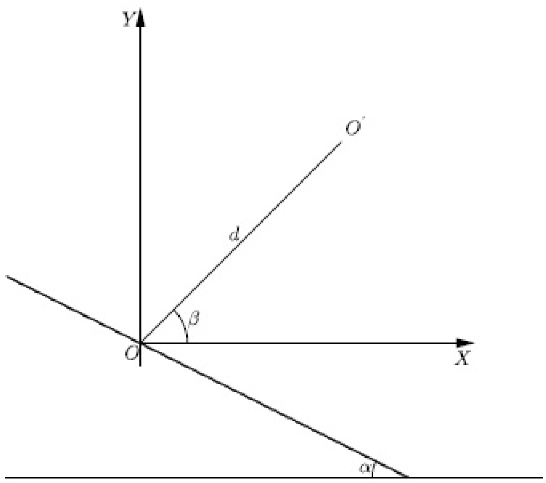

Figura 3.3: Segmento OO'.

O comprimento d do seguimento OO' pode ser calculado com o auxílio do teorema de Pitágoras e considerando que a gota na posição O' é gota que atinge o ponto O da superfície **B** após um tempo $t = T$. Por Pitágoras temos que:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e como} \quad x = (||V_p|| + ||V_g||.sen\theta).T \quad \text{e} \quad y = ||V_g||cos\theta.T$$

segue-se que

$$d = \sqrt{[(||V_p|| + ||V_g||.sen\theta).T]^2 + (||V_g||cos\theta.T)^2};$$

que desenvolvida resulta em

$$d = T.\sqrt{||V_p||^2 + ||V_g||^2 + 2.||V_p||.||V_g||.sen\theta}. \tag{3.4}$$

Como o ponto **O** de **B** é qualquer segue-se que o lugar geométrico das gotas com ponto futuro em **B** se constitui em um prisma oblíquo de base **B** e arestas laterais de comprimento **d** e inclinação

$$\beta = arctg\left(\frac{||V_g||}{||V_p|| + ||V_g||.sen\theta}cos\theta\right); \tag{3.5}$$

em relação a horizontal. Para visualizar esse prisma, vejam a figura 3.4.

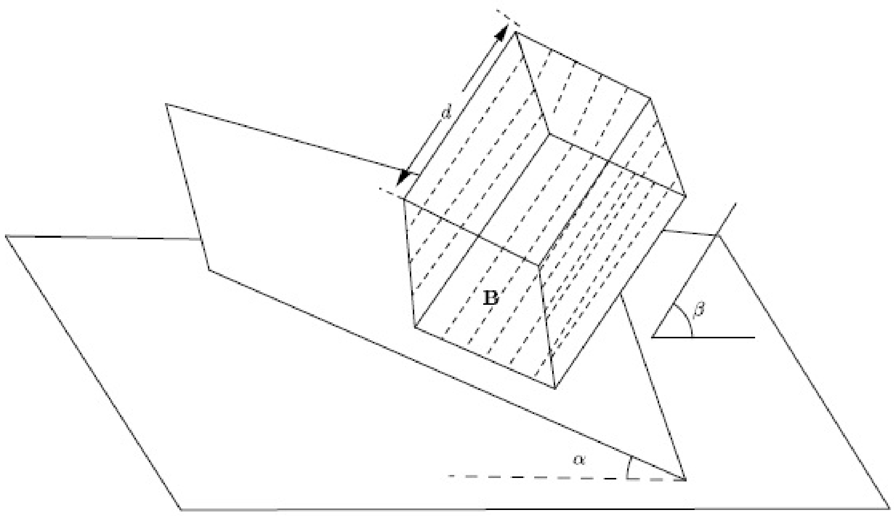

Figura 3.4: Lugar geométrico das gotas com ponto futuro em B.

Fazendo $\theta = 0$ nas equações (3.4) e (3.5) cai no caso particular do artigo que motivou essa dissertação.

Segunda parte

Cálculo do volume do lugar geométrico.

De um lado, se o lugar geométrico das gotas com ponto futuro em B é um prisma de base **B** e aresta lateral **d**, então seu volume será dado por:

$$V = A(B).h; \tag{3.6}$$

onde $A(B)$ é a área da base B e h sua altura. Por outro lado, esse volume é, exatamente, o volume da chuva incidente no para-brisa durante o intervalo de tempo considerado.

O problema agora consiste em encontrar sua altuta h, para isso observemos a figura 3.5.

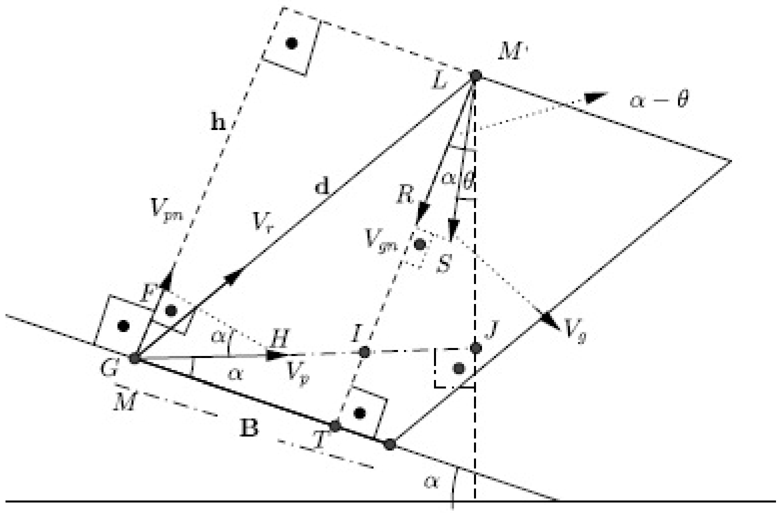

Figura 3.5: Vista lateral do prisma de base B e altura h.

Elementos que compõem a figura 3.5.

- α é o ângulo de inclinção do para-brisa com a horizontal;
- B é a base do prisma;
- θ é o ângulo de inclinação da chuva com a vertical;
- V_g é a velocidade da chuva;
- V_p é a velocidade do ponto O;
- V_{gn} é o módulo da componente normal ao plano de B da velocidade V_g;
- V_{pn} é o módulo da componente normal ao plano de B da velocidade V_p;
- h é a altura do prisma.

Na figura 3.5 saja M o ponto de B que está mais distante do plano horizontal, e seja M' a gota de chuva que em $t = T$ estará sobre M em B.

Sendo V_r a velocidade relativa de M em relação a M' e V_{rn} a sua componente na direção normal a B, então a altura h do prisma é a distância que um móvel percorre com velocidade V_{rn} em T unidades de tempo.

Com mais detalhes vejamos a figura 3.6.

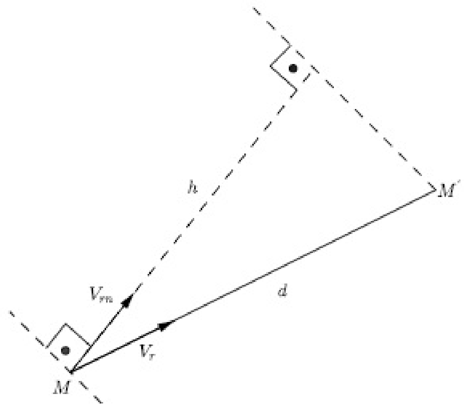

Figura 3.6: Deslocamento h de um móvel, com velocidade V_{rn} em T unidades de tempo.

A altura h é um cateto do triângulo retânguro que tem como hipotenusa d, aresta do prisma. Se o tempo que a gota M' leva para percorrer a distância d com velocidade relativa V_r é T, então sua componente V_{rn} com o mesmo tempo T percorrerá uma distância h. Diante disso, a altura do prisma será dada por:

$$h = T.||V_{rn}|| \tag{3.7}$$

onde pela definição (2.7), o módulo de V_{rn} é dado pela soma dos módulos das componentes normais ao plano de B das velocidades $M(V_p)$ e M'(V_g).

Cálculo dos módulos das componentes normais ao plano de B das velocidades $M(V_p)$ e M'(V_g).

Para isso, serão feitas algumas justificativas, de algumas medidas da figura 3.5.

Primeira justificativa

No triângulo GTI, o ângulo $I\widehat{G}T = \alpha$, pois V_p tem direção horizontal.

Segunda justificativa

Agora considere o triângulo GHF, reto em F, onde $||GF|| = ||V_{pn}||$ é o módulo da componente de V_p na direção normal a B. Nesse triângulo temos que:

$$F\hat{G}H = 90^\circ - \alpha \quad \text{e} \quad F\hat{G}H + G\hat{H}F + H\hat{F}G = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha + G\hat{H}F + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow G\hat{H}F = \alpha$$

Terceira justificativa

Os triângulos GTI e LJI são semelhantes, portanto o ângulo $J\widehat{L}I = T\widehat{G}I = \alpha$; além do mais, o ângulo $S\widehat{L}R = \alpha - \theta$; do triângulo retângulo LRS.

De posse dessas justificativas temos que:

$$sen\alpha = \frac{||V_{pn}||}{||V_p||} \Rightarrow ||V_{pn}|| = ||V_p||.sen\alpha \quad \text{e} \quad cos(\alpha - \theta) = \frac{||V_{gn}||}{||V_g||} \Rightarrow ||V_{gn}|| = ||V_g||.cos(\alpha - \theta) \tag{3.8}$$

Como V_{pn} e V_{gn} posui a mesma direção, e sentidos opostos o módulo de V_{rn} será

$$||V_{rn}|| = ||V_p||.sen\alpha + ||V_g||.cos(\alpha - \theta) \quad (3.9)$$

Das equações (3.7) e (3.9) resultam em

$$h = T.[||V_p||.sen\alpha + ||V_g||.cos(\alpha - \theta)] \quad (3.10)$$

Pelas equações (3.6) e (3.10) conclui-se que o volume procurado é

$$V = A(B).h = A(B).T[||V_p||.sen\alpha + ||V_g||.cos(\alpha - \theta)]$$

Assim como foi feito para as equações (3.4) e (3.5), fazendo $\theta = 0$, na equação acima, chegamos em um caso particular do problema.

4 Considerações finais

O trabalho teve como objetivo calcular o volume de chuva incidente no para-brisa de um automóvel, num intervalo de tempo fixo, com velocidade de deslocamento constante e com velocidade das gotas de chuva constante.

Para isso, a resolução do problema foi feita em duas partes.

A primeira parte, concluiu-se que o lugar geométrico da chuva que incide no para-brisa de um automóvel é um prisma oblíquo.

A segunda parte, foi calculado o volume do prisma e conclui-se que ele é dependente de alguns parâmetros tais como: O tempo considerado de percurso, os ângulos de inclinação da chuva com relação à vertical e do para-brisa com relação à horizontal, e das velocidades da chuva e do automóvel.

Portanto, para trabalhos futuros neste mesmo problema; pode ser feito um estudo sobre as possibilidades de inclinações do prisma, ou um estudo sobre como maximizar ou minimizar a aresta e o volume do prisma. Com isso, estamos maximizando ou minimizando o volume de chuva incidente no para brisa de um automóvel, em um percurso, durante determinado intervalo de tempo.

Referências

[1] R.C.BASSANEZI. *ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

[2] N.C.JúNIOR. A chuva e o para-brisa. *Revista do Professor de Matemática*, v. 18, p. 32–36, 1995.

[3] H.M.NUSSENZVEIG. *Curso de Física Básica - Volume 1*. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

[4] E.L.LIMA et al. *A matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] E.L.LIMA et al. *A matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] E.L.LIMA. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] CARMO, M.; E.WAGNER; A.C.MORGADO. *Trigonometria e Números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] P.C.P.CARVALHO. *Introdução à Geometria Espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[9] CAMARGO, I.; P.BOULOS. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.

Referências

[1] R.C.BASSANEZI. *ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

[2] N.C.JúNIOR. A chuva e o para-brisa. *Revista do Professor de Matemática*, v. 18, p. 32–36, 1995.

[3] H.M.NUSSENZVEIG. *Curso de Física Básica - Volume 1*. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

[4] E.L.LIMA et al. *A matemática do Ensino Médio - Volume 1*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] E.L.LIMA et al. *A matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] E.L.LIMA. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] CARMO, M.; E.WAGNER; A.C.MORGADO. *Trigonometria e Números complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] P.C.P.CARVALHO. *Introdução à Geometria Espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[9] CAMARGO, I.; P.BOULOS. *Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2005.