



ADRIANA DE SOUSA SABINO MELO

**ABORDAGENS CONTEXTUALIZADAS E ESTUDO
ANALÍTICO NO ENSINO MÉDIO: ENFOQUE EM
ELIPSE**

LAVRAS - MG

2013

ADRIANA DE SOUSA SABINO MELO

**ABORDAGENS CONTEXTUALIZADAS E ESTUDO ANALÍTICO NO
ENSINO MÉDIO: ENFOQUE EM ELIPSE**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Federal
de Lavras, como parte das exigên-
cias do Programa de Pós-Graduação
Profissional em Matemática, área
de concentração em Matemática,
para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Agnaldo José Ferrari

LAVRAS - MG

2013

ADRIANA DE SOUSA SABINO MELO

**ABORDAGENS CONTEXTUALIZADAS E ESTUDO ANALÍTICO NO
ENSINO MÉDIO: ENFOQUE EM ELIPSE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADO em 13 de março de 2013.

Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa - UFLA.

Dra. Grasielle Cristiane Jorge - UNICAMP.

Dr. Agnaldo José Ferrari
Orientador

LAVRAS - MG

2013

A minha filha Yasmim, a quem tanto amo;
Ao Fernando, meu marido, pela força e pelo companheirismo;
Aos meus familiares, pela admiração e confiança em minha pessoa.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A minha filha Yasmim, que é a razão da minha vida;

Ao meu marido Fernando que muito me apoia;

Aos meus pais, Mauri e Aparecida, e a minha irmã, Ariana, que me ajudaram muito nessa caminhada;

A toda minha família, pela paciência, companheirismo e amor a mim dedicados;

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Ciências Exatas (DEXG), pela oportunidade concedida para a realização do mestrado;

Aos professores do Departamento de exatas da UFLA, pelos ensinamentos transmitidos;

Aos professores Dr. Agnaldo José Ferrari, pela orientação, pela paciência, pela amizade e pela dedicação. Os conhecimentos e experiências por ele repassados foram de grande valia no cumprimento desta etapa e para o meu crescimento profissional;

Às professoras; Dra. Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa e Dra. Grazielle Cristiane Jorge, pela disposição em servir; Aos amigos Gisele, pela amizade, companheirismo e atenção em toda a caminhada;

Aos meus amigos do mestrado, em especial a Neder, Rodnei, Elisângela, Amanda e Lúcia;

Aos diretores da Escola Municipal “Otaviano Alvarenga” Maria Aparecida C. Fernandes e Jaqueline Mesquitados Santos e da Escola Estadual “João Melo Gomide” Sebastião Hélio dos Santos, pela paciência e compreensão.

RESUMO

As cônicas são utilizadas atualmente em astronomia, engenharia, arquitetura, física e em várias outras áreas. Porém, o estudo das cônicas fica restringido ao Ensino Médio, e na maioria dos casos, nem no Ensino Médio é trabalhado. Em muitos livros didáticos encontrados nas escolas, o ensino das cônicas se restringe a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos por trás delas. Apolônio foi o primeiro a se aprofundar no estudo das cônicas. Kepler estabeleceu que as órbitas dos planetas fossem elípticas, e desde então a elipse ganhou importância na astronomia. Ela também é utilizada para construção de alguns tipos de refletores e nas câmaras de sussurros, que utilizam suas propriedades de reflexão nos focos. No método de navegação LORAN (long-range navigation) e na descrição da trajetória de uma partícula-alfa sujeita ao campo elétrico gerado por um núcleo atômico é utilizado o modelo da hipérbole. Na fabricação de antenas parabólicas, faróis de automóveis, refletores, entre outros, são utilizados a parábola. As parábolas são modelos de vários tipos de movimentos e é vastamente utilizada na física. Sugere-se para o ensino de cônicas deve-se tratá-las de forma que seja mais fácil a visualização, utilizando material concreto e por meio daí partir para as definições. Para isso foram trazidas algumas atividades interessantes para se trabalhar na sala de aula. Para o capítulo 5 também foi trazido uma parte sobre transformações de coordenadas mais voltada para cursos de graduação. Deseja-se com isso levar o aluno do Ensino Médio a se interessar e entender as cônicas.

Palavras-chave: Foco. Coordenadas Polares. Cone. Proposta de abordagem.

ABSTRACT

Conics are currently used in astronomy, engineering, architecture, physics and many other areas. However, the study of conics is restricted to high school and, in most cases, not even then. Conics are taught, in many textbooks, only by memorizing formulas, without understanding the properties and concepts behind them. Apollonius was the first to deepen in the study of conics. Kepler established that the planets' orbits were elliptical and, since then, ellipses have gained importance in astronomy. It is also used in the construction of reflectors and whispering chambers, which use its properties of reflection in the focus. The hyperbole method is used in the LORAN navigation method (long-range navigation) and in the description of an alpha-particle subject to an electrical field generated by an atomic nucleus. The parabola is used in the fabrication of satellite dishes, head lights, reflectors, among others. The parabolas are models of various types of movements and are vastly used in physics. We suggest that conics must be taught in a manner of easier visualization using concrete material and, after this, teach the definitions. In order to do this, we bring some interesting activities to work with in the classroom. We also bring, in chapter 5, a portion on coordinate transformations focusing on graduate courses. With this we aim at leading the high school student to be interested in and understand conics.

Key-words: : Focus. Polar coordinate. Cone. Approach proposal.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Órbitas elípticas dos planetas em torno do sol	23
Figura 2	Cones cortados pelo plano α	23
Figura 3	Intersecção do cone com o plano α	24
Figura 4	Elipse	24
Figura 5	Elementos da elipse	25
Figura 6	Esboço da elipse paralela ao eixo das abscissas	27
Figura 7	Esboço da elipse paralela ao eixo das ordenadas	27
Figura 8	Elipse paralela ao eixo das abscissas e centro na origem	28
Figura 9	Elipse paralela ao eixo das ordenadas e centro na origem	29
Figura 10	Construção da elipse 1	32
Figura 11	Construção da elipse 2	32
Figura 12	Mesa de bilhar elíptica	33
Figura 13	Elipse feita no papel milimetrado	35
Figura 14	Corte do cone	36
Figura 15	Cortes do cone de isopor	37
Figura 16	Propriedade da elipse	39
Figura 17	Esboço da trajetória do ponto genérico T formando a elipse	39
Figura 18	Elementos da elipse	41
Figura 19	Esboço rudimentar da elipse	42
Figura 20	Excentricidade da elipse	43
Figura 21	Elipses com um foco comum e semieixo maior iguais	43
Figura 22	Excentricidade no espaço	44
Figura 23	Excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra	45
Figura 24	Esboço da elipse	49
Figura 25	Propriedade de reflexão da elipse	50
Figura 26	Espelho do dentista	51
Figura 27	Primeira lei de Kepler	52
Figura 28	Segunda lei de Kepler	53
Figura 29	Terceira lei de Kepler	53
Figura 30	Esboço da elipse	54

Figura 31 Órbitas planetárias	55
Figura 32 Coordenadas polares	56
Figura 33 Pontos em coordenadas polares	57
Figura 34 Alguns pontos marcados em coordenadas polares	57
Figura 35 Coordenadas polares	58
Figura 36 Elipse em coordenadas cartesianas	60
Figura 37 Parábola em coordenadas cartesianas	62
Figura 38 Hipérbole em coordenadas cartesianas	63
Figura 39 Equação polar das cônicas	65
Figura 40 Elipse	66
Figura 41 Hipérbole	67
Figura 42 Esboço rudimentar da elipse	68
Figura 43 Translação de eixos	69
Figura 44 Rotação de eixos	71
Figura 45 Eixos com rotação	72
Figura 46 Rotação de eixos da elipse	74
Figura 47 Esboço da elipse	81
Figura 48 Esboço da elipse	83

ANEXOS

Figura 1 Elipse feita pelo jardineiro	90
Figura 2 Órbita de um planeta em torno do sol	91
Figura 3 Porta colonial	91
Figura 4 Logotipo	92
Figura 5 Satélite em torno da terra	93
Figura 6 Pregos e barbante	93
Figura 7 Lápis esticando o cordão	94
Figura 8 Piscina elíptica	95
Figura 9 Corte do cilindro e elipsoide	97
Figura 10 Melancia	98
Figura 11 Ambiente elíptico	99
Figura 12 Órbita do planeta em torno do sol	101

Figura 13 Elipses.....	102
Figura 14 Circunferência inscrita na elipse.....	102
Figura 15 Elipse com os novos eixos coordenados.....	103
Figura 16 Órbita do cometa Halley.....	105
Figura 17 Superfície lunar.....	105
Figura 18 Planeta júpiter.....	107

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA	14
3	ELIPSE, DEFINIÇÕES E ABORDAGEM USUAL	22
4	PROPOSTAS DE ABORDAGENS.....	30
4.1	A Elipse	30
4.2	Dedução da fórmula da elipse.....	40
4.3	Aplicações da elipse	49
4.4	Coordenadas polares	55
4.4.1	Cônicas em coordenadas cartesianas	60
4.4.2	Cônicas em coordenadas polares	64
5	TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS	69
5.1	Translação de eixos coordenados	73
5.2	Rotação dos eixos coordenados.....	70
5.3	A equação geral do 2 ^o grau em \mathbb{R}^2	75
5.4	Rotação de eixos usando a álgebra linear	77
6	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	86
	ANEXO.....	90

1 INTRODUÇÃO

Os professores da atualidade têm um grande desafio, que é o de ensinar a matemática em um mundo dominado pela alta tecnologia. Portanto, devem modificar suas ações e técnicas para que possam ensinar matemática de forma que ela fique mais interessante para os alunos.

As cônicas são curvas especiais em que se podem destacar a elipse, a parábola e a hipérbole. Elas foram estudadas a fundo no século III pelo matemático grego Apolônio. Atualmente elas são aplicadas na geometria, astronomia, por meio dos movimentos elípticos dos planetas, na física, na óptica, por meio de telescópios espaciais, na engenharia, na arquitetura e nas novas tecnologias, por meio de antenas parabólicas ou hiperbólicas.

No ensino básico, as cônicas só aparecem no terceiro ano do Ensino Médio, sendo quase sempre trabalhadas somente com centro na origem, esquecendo-se assim das cônicas com centros em outros pontos e que as cônicas também podem estar rotacionadas. As elipses e as hipérbolas são trabalhadas por meio dos parâmetros a , b e c e as parábolas do parâmetro p . No ensino superior elas voltam a ser estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço, em geometria analítica, com enfoque nas equações analíticas e álgebra linear, onde é feita uma ligação delas com vetores e matrizes.

Objetiva-se com este estudo despertar o gosto pela matemática, tornando-a real e mais simples para os alunos, utilizando materiais concretos e de interesse dos mesmos. Quer-se com isso explorar as cônicas e suas aplicações partindo de materiais concretos e chegando às suas equações. Para tanto, foi elaborado um material didático que pode oferecer alternativas para professores de matemática da educação básica, podendo se estender até a graduação.

Este trabalho está dividido em três partes. As elipses são tratadas por Adriana de Sousa Sabino Melo, as hipérbolas por Neder do Carmo Pereira Habib, e eu trato neste texto as parábolas. Os três trabalhos têm algumas partes comuns, que serão citadas abaixo.

O segundo capítulo traz um histórico das cônicas comum aos três trabalhos.

O terceiro capítulo traz como as cônicas são comumente trabalhadas no Ensino Médio. Essa parte é individual e cada trabalho traz somente a cônica específica.

O quarto capítulo começa com propostas de abordagens e atividades contextualizadas para o ensino de cada cônica, que é individual para cada trabalho. No fim do capítulo mostrou-se um pouco sobre coordenadas polares, parte esta que é comum aos três trabalhos.

O quinto capítulo, comum aos três trabalhos, vem com a parte de transformações de coordenadas usando a geometria analítica e a álgebra linear. Este capítulo é destinado aos cursos de graduação, já que os alunos do Ensino Médio não têm pré-requisitos para esse capítulo. Em anexo segue um banco de questões como material para professores na elaboração de suas aulas.

2 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

Neste capítulo será feito um relato da história das cônicas por meio dos séculos mostrando o desenvolvimento do estudo das mesmas.

Egípcios e babilônios, há mais de 3000 anos, utilizavam a geometria nas regiões inundáveis dos vales do Nilo, Tigre e Eufrates, na demarcação das terras a fim de organizar o plantio e facilitar a cobrança de impostos. Durante o período Helênico (400 a.C. - 476 d.C), Alexandre Magno construiu Alexandria em 331 a.C., que em pouco tempo transformou-se no centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo. Depois da morte de Alexandre, o império se dividiu em três impérios. Ptolomeu ficou com o governo do Egito, escolheu Alexandria como sua capital e lá construiu a Universidade de Alexandria para atrair homens de saber, cabendo a Euclides o Departamento de Matemática. Apolônio, que foi um dos maiores estudiosos das cônicas, nasceu em Perga e estudou em Alexandria onde ficou por um bom tempo (RODRIGUES FILHO, 2007).

Para Youssef (2005), Menaecmus, astrônomo e geômetra grego foi o primeiro a utilizar duas curvas: a parábola e a hipérbole. No século IV a.C., ele solucionou o problema da “duplicação do cubo” que consistia em encontrar um cubo cujo seu volume fosse igual a dois, utilizando-se dessas duas curvas. Consequentemente, a elipse surgiu mais tarde quando se seccionou uma superfície cônica perpendicularmente a sua geratriz. Por isso o nome secções cônicas.

Segundo Lopes (2011), para alguns historiadores a origem do estudo das cônicas não é muito clara, mas tudo leva a crer que elas originaram-se no problema da duplicação do cubo.

Hipócrates de Chios (470 - 410 a.C.) mostrou que esse problema (a duplicação do cubo) se reduzia em encontrar curvas com propriedades expressas na proporção contínua entre dois segmentos. Esse processo consistia em determinar médias proporcionais entre duas grandezas dadas, ou seja, dados os segmentos a e b , encontrar dois outros x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Hipócrates afirmou que para $b = 2a$, a proporção contínua traduzia a solução do problema da duplicação do cubo, pois isolando e eliminando y , conclui-se que $x^3 = 2a^3$. Isto equivale, na notação atual, resolver simultaneamente quaisquer duas das três equações $x^2 = ay$; $y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$ que representam parábolas nos dois primeiros casos e hipérbole no terceiro.

Mas a descoberta dessas curvas se deu por Menaechmus (380 - 320 a.C.) por volta de 360 ou 350 a.C.. Ele construiu as curvas com essas propriedades algébricas e conseqüentemente mostrou que o ponto de interseção delas daria as médias proporcionais desejadas. A descoberta da elipse parece ter sido feita também por ele como um simples subproduto dessa sua pesquisa (LOPES, 2011, p. 33-34).

Para Venturi (1949), foi Apolônio quem introduziu os nomes elipse e hipérbole. Já a parábola, provavelmente, foi nomeada por Arquimedes.

As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. [...] O tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os Rivais no campo das secções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides (BOYER, 2010, p. 99).

De acordo com Boyer (2010), Apolônio foi o primeiro a mostrar que as três secções não eram obtidas necessariamente de três cones diferentes, mas poderiam ser encontradas variando o ângulo de inclinação do plano da secção. Esse fato foi relevante para identificar e relacionar os três tipos de curvas. Apolônio também provou que o cone pode ser oblíquo ou escaleno, não precisando ser reto e que as propriedades das curvas não se modificam de acordo com o cone de origem.

Ainda para Boyer (2010), Apolônio poderia ter partido de qualquer cone e ter obtido as mesmas curvas, ou seja, qualquer seção plana de qualquer cone poderia servir de curva base em sua definição.

Menaecmus afirmava que cada secção cônica era encontrada em um formato diferente de cone. Assim, as cônicas eram tratadas de forma separada. Somente com Apolônio houve a unificação das mesmas (BORDALLO, 2011).

De acordo com Quaranta (2008), Arquimedes classifica os cones como reto ou de revolução (retângulo) quando o ângulo formado entre as geratrizes que pertencem a um dado plano que passa pelo vértice do cone e pelo centro da circunferência da base é reto; obtusângulo, quando este ângulo é obtuso e acutângulo, quando é agudo. Arquimedes deu nomes de “Orthotome” para parábola, que surgia do cone retângulo, “Oxythome” para a elipse, que surgia do cone acutângulo e “Amblythome” para a hipérbole que surgia do cone obtusângulo.

Segundo Youssef (2005), Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.) escreveu um importante documento sobre as cônicas. Neste documento, acrescentou aos estudos de Menaecmus várias proposições, mas de forma puramente geométrica. Pode-se destacar uma proposição sobre a posição do plano secante em relação ao eixo de rotação ou à geratriz de uma superfície cônica de revolução.

Para Boyer (2010), o cone de duas folhas surgiu quando Apolônio fez uma reta de comprimento indefinido que passava por um ponto fixo mover-se sobre uma circunferência de um círculo que não é coplanar ao ponto de origem, passando por todos os pontos dessa circunferência, a reta móvel dará origem à superfície de um cone duplo. Com isso surge o segundo ramo da hipérbole.

Apolônio foi o autor que mais contribuiu para o estudo das cônicas. Ele escreveu oito livros, dos quais os quatro primeiros apresentam resultados de outros matemáticos anteriores e os quatro últimos apresentam resultados desenvolvidos por ele mesmo. Apolônio é o primeiro a unificar as secções cônicas e afirmar que elas poderiam ser obtidas a partir de um único cone. Ele também duplicou o cone e daí a hipérbole passa a ter duas folhas (QUARANTA, 2008).

Segundo Bordallo (2011), Pappus fez um comentário sobre todos os matemáticos gregos de seu tempo em sua obra “Coleção Matemática”. Ele contribuiu para o estudo das cônicas com seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. E de acordo com a variação da excentricidade ele define cada curva.

Boyer (2010, p. 101) afirma as cônicas eram conhecidas como “lugares sólidos”, pois as cônicas não eram definidas como seções planas, mas seções de

figuras tridimensionais. Apolônio usava o cone para obter as cônicas, mas o dispensou logo que possível. A partir do cone ele desenvolveu uma propriedade plana fundamental (*symptome*) para a secção e a partir daí iniciou um estudo somente no plano, baseado nessa propriedade.

Seja ABC uma secção triangular de um cone circular oblíquo (Fig.9.3) e seja P qualquer ponto sobre uma secção HPK cortando todos os elementos do cone. Prolongue HK até encontrar BC em G e por P passa-se um plano horizontal que corta o cone no círculo DPE e o plano HPK na reta PM . Trace-se DME , um diâmetro do círculo perpendicular a PM . Então a semelhança dos triângulos MEK e KCG tem-se $\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$. Agora, da propriedade do círculo tem-se $PM^2 = DM \cdot ME$; logo $PM^2 = \left(\frac{HM \cdot BG}{HG}\right) \left(\frac{MK \cdot CG}{KG}\right)$. Se $PM = y$, $HM = x$ e $HK = 2a$, a propriedade na sentença precedente equivale à equação $y^2 = kx \cdot (2a - x)$, que reconhecemos a equação de uma elipse com H como vértice e HK como eixo maior. De modo semelhante, Apolônio obteve para a hipérbole o equivalente da equação $y^2 = kx(x + 2a)$. Essas formas são facilmente redutíveis às formas de nome acima, bastando tomar $k = \frac{b^2}{a^2}$ e $l = \frac{2b^2}{a}$.

Depois de Apolônio ter obtido de um estudo esteriométrico do cone a relação básica entre o que chamaríamos hoje as coordenadas planas um ponto da curva - dadas pelas três equações $y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$, $y^2 = 1x$ e $y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$ obteve outras propriedades a partir das equações no plano, sem mais referência ao cone. Em particular, Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, dadas para a hipérbole equilátera, pela equação $xy = c^2$. Não podia saber, é claro, que um dia essa relação, equivalente à lei de Boyle, seria fundamental no estudo dos gases, ou que seu estudo da elipse seria essencial para a moderna astronomia (BOYER, 2010, p. 101-102).

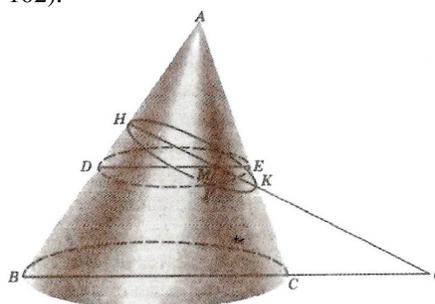


Figura 9.3 Cortes no cone

Ainda para Boyer (2010), Apolônio provou que quando um ramo de uma hipérbole intersecta os dois ramos de outra hipérbole, o outro ramo da primeira hipérbole não intersectará nenhum dos ramos da segunda em dois pontos, também se uma hipérbole encontra uma segunda hipérbole com sua concavidade em sentido oposto em um único ponto, o outro ramo da primeira não encontrará o outro ramo da segunda.

De acordo com Venturi (1949, p. 20), Kepler foi fortemente influenciado pelo livro “As Cônicas” de Apolônio. Em 1609 ele mostra uma fundamental lei da Astronomia: os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos. Kepler também introduziu a palavra foco, que vem do latim focus que significa fogo, lareira. O livro “As Cônicas” também traz outra aplicação em que Galileu (1632) desprezando a resistência do ar diz que a trajetória de um projétil é uma parábola.

Para Quaranta (2008), Kepler (1571 - 1630) também apresenta as cônicas de forma unificada usando a hipérbole para medições do fenômeno de reflexão. Ele também mostra pela primeira vez a parábola como limite de uma elipse ou hipérbole. Na construção da parábola ele utiliza a mesma distância dos pontos até o foco e até a diretriz. Ele também afirma que a parábola tem o segundo foco no infinito, que até então não era utilizado na geometria.

Apolônio em “As Cônicas” não trata de aspectos que atualmente nos parecem tão fundamentais. Por exemplo, ela trata dos focos das cônicas apenas indiretamente e nem tinha nomes para os mesmos (BOYER, 2010).

Segundo Youssef (2005), Apolônio também investigou o movimento dos planetas e baseado nos egípcios, acreditava que os planetas giravam em torno do sol em órbitas circulares. Somente em 1609, Kepler conclui que os planetas giram em órbitas elípticas. Apolônio nunca poderia imaginar que as cônicas estudadas por ele seriam utilizadas 1800 anos depois para descrever as órbitas planetárias e nem que belos projetos arquitetônicos teriam esses formatos.

Afirma Boyer (2010, p. 104) que Apolônio diz que “o assunto é um daqueles que parecem dignos de estudos por si mesmos”. Ele sequer imaginava que futuramente seus estudos seriam importantes na dinâmica terrestre e mecânica celeste, e que eles possibilitariam a viagem de ida e volta à lua.

No pensamento de Boyer (2010), os estudos de Apolônio eram tão semelhantes aos atuais que muitas vezes ele antecipa a Geometria Analítica de Descartes. Seus métodos não são diferentes do uso de sistemas de coordenadas. Nos estudos gregos as equações são determinadas pelas curvas, mas as curvas não eram determinadas por equações. Para os gregos, as equações não eram suficientes, eram necessárias construções.

Para Bordallo (2011), Fermat e Descartes, no século XVII criam separadamente a Geometria analítica, que é mais utilizada atualmente. Com a chegada da Geometria analítica surge uma nova opção, na qual alguns optaram por ela, outros não, e ainda alguns utilizaram as duas concepções em conjunto. O estudo sintético das cônicas, sem a utilização da Geometria analítica contribuiu para a Geometria projetiva. A contribuição de Fermat às cônicas é encontrada principalmente no seu tratado *Ad locos Planos et Solidos Isagoge*, onde Fermat utilizou mudanças

de coordenadas para descobrir que tipo de lugar correspondia a uma equação de primeira ou segunda ordem. Ele também mostrou que equação do segundo grau corresponde a uma cônica, um par de retas ou uma reta contada duas vezes.

Segundo Quaranta (2008), Descartes inicia uma nova forma de classificação das curvas por meio de equações. Conhecendo as propriedades geométricas de uma curva, ele representava todos os pontos da mesma por meio de equações. A caracterização bifocal, que permite as construções das cônicas, começa a ganhar força a partir do século XVI, com Kepler, Descartes e Van Schooten, que utilizam construções mecânicas dessas curvas. Também por meio de retas, da geometria projetiva e por meio de equações analíticas surgem outras caracterizações. Para o ensino das cônicas os métodos mais utilizados são a caracterização analítica e o uso dos focos, além da usual obtida por meio do cone.

De acordo com Venturi (1949), o marco zero da geometria analítica é o tratado de Fermat. Foi Fermat quem descobriu as equações da reta, da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Para simplificar as equações do 2º grau ele utilizava a rotação dos eixos. Ele também descobriu que se a equação envolve três incógnitas, ela não pode ser de um ponto ou uma curva, mas sim de uma superfície.

Segundo Bordallo (2011), Philippe de La Hire, no século XVII, tornou a fragmentar as cônicas, dando o primeiro passo na direção ao tratamento puramente focal que é presente no ensino das cônicas atualmente, em seu livro *Nouvelle méthode en géometrie pour lessection setles superficies coniques* de 1673. Ele começa o seu trabalho tratando cada curva separadamente, introduzindo as propriedades características e sua definição focal. Dandelin, no século XIX, tentou unificar as cônicas novamente, mostrando que as seções do cone que geram cada cônica coincidem com a definição focal.

O estudo das curvas feito pelos gregos fica em posição desfavorável em relação à flexibilidade e extensão do tratamento moderno. Os antigos não tinham noção da utilização dessas curvas no mundo que os cercava. Os inventores modernos da geometria analítica tinham à sua disposição a álgebra da Renascença, enquanto que Apolônio manejava a álgebra geométrica trabalhando com o instrumento mais rigoroso e menos manejável (BOYER, 2010).

As cônicas estudadas desde a antiguidade estão presentes, no mundo atual, em vários ramos do dia-a-dia. Apesar das várias caracterizações discutidas pelos autores, mal sabiam seus inventores da importância que elas teriam futuramente.

3 ELIPSE, DEFINIÇÕES E ABORDAGEM USUAL

Neste capítulo será apresentada uma análise de como as elipses são abordadas nos livros didáticos de Ensino Médio, na maioria dos casos de forma bem resumida e apenas manipulando fórmulas.

A partir de um cone duplo reto e a intersecção de um plano α , determinamos algumas curvas chamadas cônicas, entre elas a elipse, a hipérbole e a parábola.

Para Quaranta et al. (2007), apesar de sua importância histórica o ensino das cônicas ficou restrito ao Ensino Médio por uma abordagem puramente analítica sendo trabalhada somente com manipulação e memorização de fórmulas. Por isso esse é um conteúdo que tem certo desprezo pelos alunos e muitas vezes até pelos professores. Fica difícil, então, transmitir esses conhecimentos e sua importância.

Carneiro et al.(2007) apresenta um estudo de cônicas no terceiro ano do Ensino Médio dentro do eixo temático IX: Geometria e medidas, tema 23: Geometria Analítica, tópico 48: Elipse, hipérbole e parábola.As elipses são tratadas nas habilidades 48.1. Equação cartesiana da elipse e 48.5. Reconhecer a elipse como um lugar geométrico e relacioná-la com as leis de Kepler.

Por meio de uma pesquisa feita em vários livros didáticos verifica-se que a maioria deles apresenta um pequeno resumo histórico e depois tratam as cônicas de forma analítica e resumindo-se a simples manipulação de fórmulas.

O livro didático Matemática: Ensino Médio de Kátia Cristina Stocco Smole começa o estudo das cônicas dessa forma:

Durante muito tempo, aproximadamente 18 séculos, não houve estudos detalhados de aplicações das cônicas no mundo físico. No entanto, pesquisas de físicos, astrônomos e projetistas foram mostrando aplicações do estudo de Apolônio no mundo em que vivemos. A elipse, por exemplo, está associada à órbita dos planetas em torno do sol (SMOLE et al., 2010, p.119).

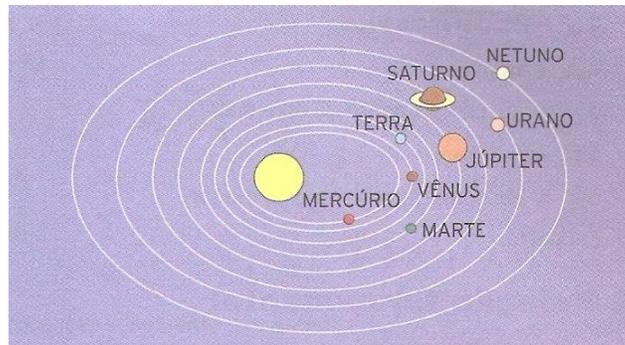


Figura 1 Órbitas elípticas dos planetas em torno do sol
 Fonte: (SMOLE et al., 2010).

Segundo Giovanni et al. (2005), de acordo com o ângulo que se secciona o cone circular reto, a superfície obtida pode ser uma circunferência, uma elipse ou uma parábola. A elipse é quando o plano é oblíquo ao eixo, não passa pelo vértice e não é paralela a nenhuma geratriz do cone.

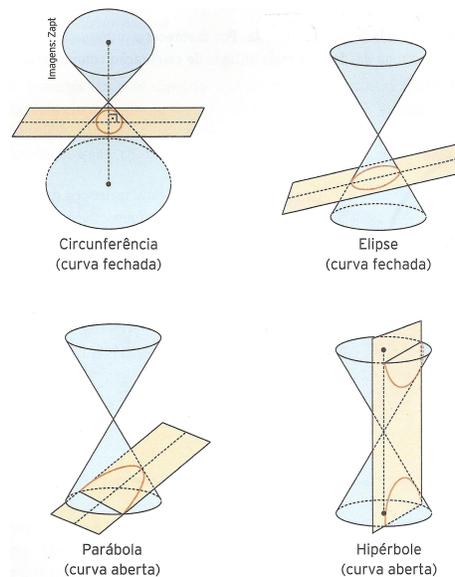


Figura 2 Cones cortados pelo plano α
 Fonte: (SMOLE et al., 2010).

A elipse é obtida por meio da intersecção de um plano α , que não passa pelo vértice do cone e não é paralela a geratriz do mesmo.

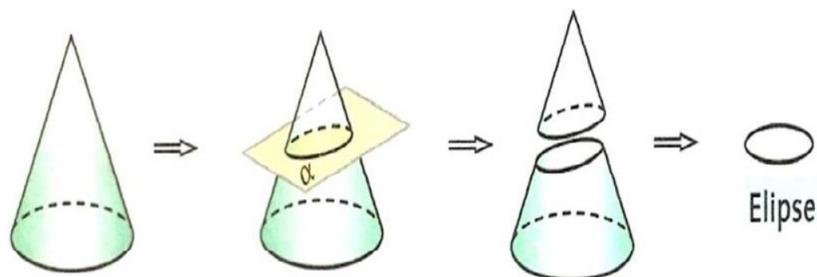


Figura 3 Intersecção do cone com o plano α
Fonte: (RIBEIRO, 2010).

Para Youssef (2005), se todos os pontos de uma figura possuem a mesma propriedade e não existe outra figura que possui tal propriedade, essa figura é chamada lugar geométrico.

Então dados dois pontos F_1 e F_2 no plano α , denominados focos da elipse, cuja distância entre eles é igual a $2c$, definimos a elipse como sendo o lugar geométrico dos pontos de α tal que a soma das distâncias de cada um desses pontos a F_1 e F_2 é igual a um valor fixo $2a$, que é maior que $2c$, onde $2c$ é a distância entre F_1 e F_2 .

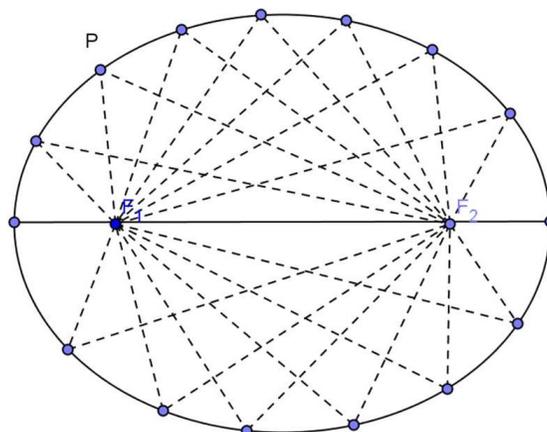


Figura 4 Elipse

Logo, em toda elipse tem-se:

$$PF_1 + PF_2 = 2a > 2c$$

Alguns poucos livros trazem o desenvolvimento da fórmula da elipse, e muitas vezes o professor não a repassa para os alunos. Nesse capítulo as informações estão como na maioria dos livros didáticos, sem demonstrações e maiores explicações. Essas informações estarão no capítulo 4 onde serão demonstradas as fórmulas.

Os principais elementos da elipse são:

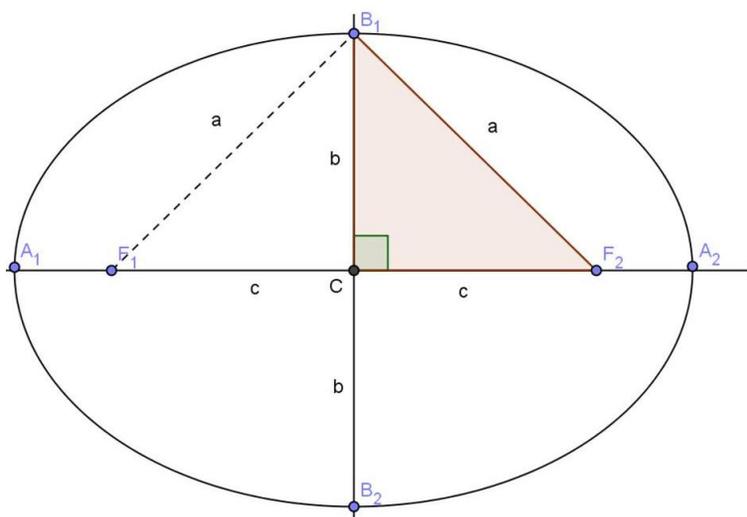


Figura 5 Elementos da elipse

- a) Os focos F_1 e F_2 , cuja distância entre eles é $2c$.
- b) Os vértices sobre o eixo maior, A_1 e A_2 , cuja distância entre eles é igual a $2a$.
- c) Os vértices sobre o eixo menor, B_1 e B_2 , cuja distância entre eles é $2b$.
- d) O ponto C , ponto médio entre F_1 e F_2 e intersecção dos eixos perpendiculares, é o centro.

e) Por meio do Teorema de Pitágoras tem-se a relação

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração: De acordo com a Figura 5 tem-se que os triângulos B_1F_1C e B_1F_2C são retângulos e congruentes o que implica que $B_1F_1 = B_1F_2$. Isso aliado ao fato de $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$, chega-se a conclusão de que $B_1F_1 = B_1F_2 = a$ e por isso vale a relação do Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.

Chama-se excentricidade de uma elipse ao número real positivo que é definido como o quociente entre a metade da distância focal e a metade da medida do eixo maior da elipse, ou seja:

$$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$$

Como, na elipse $a > c > 0$, então o quociente e sempre será um número compreendido entre 0 e 1.

$$(0 < e < 1)$$

No que se segue serão apresentados alguns casos especiais:

(1) **Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo das abscissas.** Se o centro é $C(x_0, y_0)$ e a distância focal $2c$, tem-se o esboço da elipse.

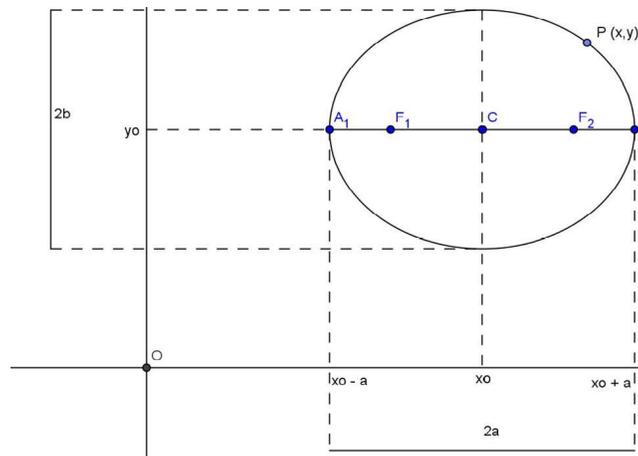


Figura 6 Esboço da elipse paralela ao eixo das abscissas

A equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(2) Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo das ordenadas.

Se o centro é $C(x_0, y_0)$ e a distância focal $2c$, tem-se o seguinte esboço:

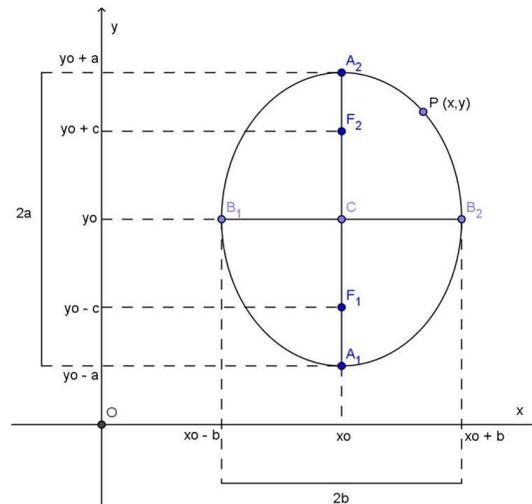


Figura 7 Esboço da elipse paralela ao eixo das ordenadas

A equação da elipse é dada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

(3) Quando o centro C da elipse é a própria origem $O(0, 0)$.

As equações são:

(i) Quando a elipse é paralela ao eixo das abscissas:

$$\frac{(x - 0)^2}{a^2} + \frac{(y - 0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

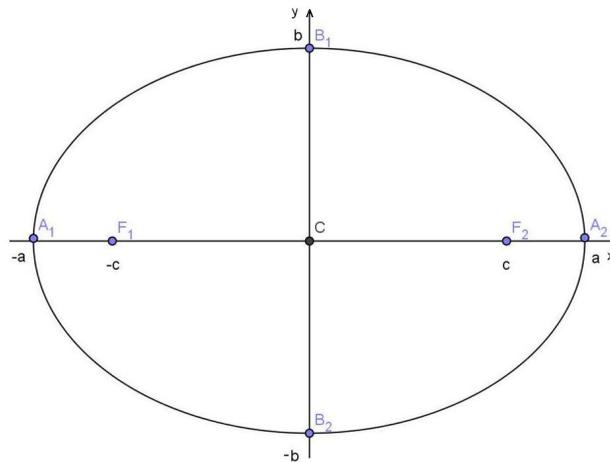


Figura 8 Elipse paralela ao eixo das abscissas e centro na origem

(ii) Quando a elipse é paralela ao eixo das ordenadas:

$$\frac{(y-0)^2}{a^2} + \frac{(x-0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

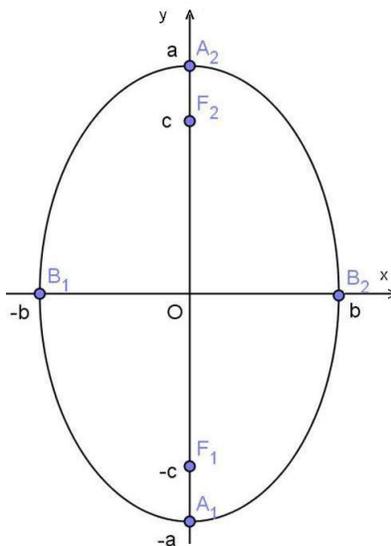


Figura 9 Elipse paralela ao eixo das ordenadas e centro na origem

Após a explanação do conteúdo segue, na maioria dos livros didáticos, uma lista de exercícios explorando as equações e os elementos fundamentais da elipse.

Alguns livros trazem, no fim do capítulo sobre cônicas, um resumo sobre as leis de Kepler, que na maioria das vezes nem é explorada pelos professores.

4 PROPOSTAS DE ABORDAGENS

4.1 A elipse

Neste capítulo será apresentada uma proposta para o ensino da elipse, utilizando materiais concretos e demonstrando as fórmulas. Traz-se também, no fim do capítulo, uma parte sobre coordenadas polares que pode ser importante no estudo das elipses.

No Ensino Médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza (BRASIL, 2006, p. 111).

Carneiro et al. (2007) ressalta que nos ensinos Fundamental e Médio é importante que se ministrem atividades que desenvolva a criatividade dos alunos e que sempre se tenha espaço nas aulas para a exposição das dúvidas, observações e relato dos alunos sobre as atividades propostas, tanto de forma oral como escrita.

Para melhorar o ensino de cônicas, segundo Quaranta et al.(2007), deve-se sanar as deficiências na formação dos professores e a melhoria do acesso a bibliografias de apoio adequada ao seu nível e também uma valorização dos aspectos geométricos que embasam os conhecimentos matemáticos. A aprendizagem de matemática deve passar pelas etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas.

Por esses motivos deve-se estar atento à forma como deve transmitir os conteúdos aos nossos alunos, pois uma abordagem geométrica por meio de defini-

ções, axiomas, postulados e fórmulas podem causar uma barreira para os alunos. A mudança de abordagem dos conteúdos pode fazer toda a diferença.

Como uma boa motivação para o estudo da elipse, Mendes (2012) cita a mesa de bilhar elíptica, criada pelos técnicos da empresa Atractor. A borda dessa mesa é uma elipse. Nela coloca-se uma caçapa em um dos focos e uma marca bem visível no outro foco. Quando o jogador atira uma bola a partir da marca do foco em direção à caçapa (que está no outro foco), ela irá direto para a caçapa. Caso o jogador jogue em outra direção a bola baterá na tabela (elipse) e irá direto para a caçapa.

Proposta 1: Construção da mesa de bilhar elíptica

Objetivos: Confeção de uma “mesa” de bilhar com borda em formato de elipse para uma abordagem prática da propriedade de reflexão.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Materiais necessários para o molde: Cartolina ou Kraft, dois percevejos, pedaço de barbante.

Materiais necessários para a mesa: A “mesa” de bilhar com borda em formato de elipse pode ser confeccionada com materiais distintos à escolha do grupo de alunos, como por exemplo, papelão, madeira, MDF, isopor, e nos mais diferentes tamanhos, podendo uma bola de gude, por exemplo, fazer o papel de bola de bilhar. Pano de algodão ou feltro para cobrir a mesa. Para a borda da “mesa” pode-se usar o emborrachado conhecido por EVA ou madeirite.

Recomendações metodológicas: Pode ser indicado como trabalho em grupo. Discussão com os alunos sobre como confeccionar a “mesa”. Caso a mesa for feita de madeira, ou MDF recomenda-se que o professor já leve o molde cortado e furado para não precisar levar materiais perigosos para os alunos.

Dificuldades previstas: Desenho e corte preciso da mesa.

Construção:

1) Molde da elipse:

Para construção da mesa de bilhar, primeiramente, deve-se aprender a desenhar a elipse para fazer um molde. Uma forma bem simples para a construção da elipse é colocar, sobre um plano, dois percevejos nos pontos onde seriam os focos F_1 e F_2 da mesma. Amarra-se um barbante de tamanho $2a$, (que é o comprimento da distância entre os dois vértices no eixo focal), maior que a distância entre os focos nos dois percevejos, como mostra a figura.

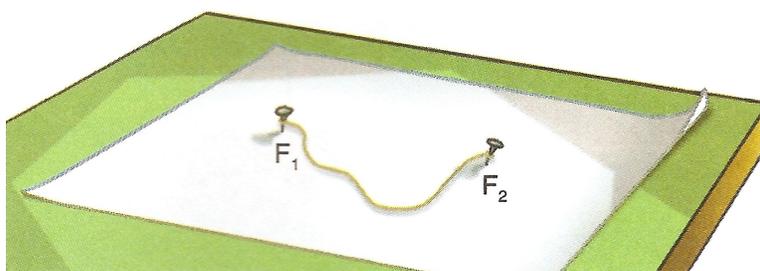


Figura 10 Construção da elipse 1
Fonte: (GIOVANNI et al., 2005).

A partir daí, estique o barbante com um lápis. Movendo o lápis com o barbante bem esticado, traçaremos uma curva que é chamada de elipse.

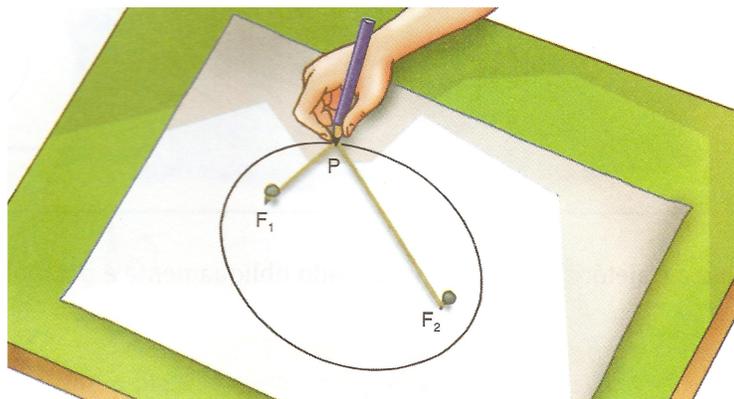


Figura 11 Construção da elipse 2
Fonte: (GIOVANNI et al., 2005).

Como a medida do barbante não se modificou, tem-se que a soma entre as distâncias entre qualquer ponto da elipse e os focos é constante e igual ao compri-

mento do barbante, que no caso é a medida $2a$.

2) Construção da mesa de bilhar:

Aproveita-se o desenho da elipse feito com percevejos e barbante para a construção da mesa de sinuca elíptica. Com uma elipse desenhada num papel, de um tamanho adequado, se pega um pedaço de MDF (ou isopor, papelão) e transfere-se o desenho da elipse para ele. Corta-se o MDF (isopor, papelão) com a serra e fura-se um dos focos com a furadeira. Cobre-se o MDF com um tecido de algodão verde. Com madeirite (ou EVA), faz-se uma parede em volta da elipse desenhada. Em um dos focos fica a caçapa já furada anteriormente e no outro foco apenas marque com tinta. Quando, com um taco, se lança a bola em qualquer direção contra a parede da mesa, a bola seguirá em direção ao outro foco, onde está a caçapa. Logo, a bola sempre cairá.

Como nem sempre as aulas de matemática são suficientes para abranger todo o conteúdo, poder-se-ia trabalhar em conjunto com as aulas de artes, na qual poderia ser feita a mesa de sinuca.



Figura 12 Mesa de bilhar elíptica
Fonte: : (MENDES, 2012).

De acordo com Lehmann (1966), uma elipse é um lugar geométrico de um ponto que se move em um plano de tal maneira que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos desse plano é sempre igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos.

Lugar geométrico é definido como:

Definição: O conjunto dos pontos, e somente daqueles pontos cujas coordenadas satisfaçam uma equação do tipo $f(x, y) = 0$, se chama gráfico da equação ou lugar geométrico. (Lehmann, 1966)

Como as coordenadas dos pontos de um lugar geométrico estão restringidas por sua equação, tais pontos estão localizados, em geral, em posições tais que, tomadas em conjunto, formam um traço definido chamado curva e gráfico.

Com essa definição pode-se também incentivar os alunos por meio do desenho da elipse por simples marcação de pontos pertencentes à equação da mesma.

Proposta 2: Esboço da elipse por meio da marcação de pontos no plano cartesiano.

Objetivos: Mostrar o gráfico da elipse por meio de pontos que pertencem a sua equação.

Público alvo: Alunos do terceiro ano do ensino médio.

Pré-requisitos: Equação da elipse.

Materiais necessários: Papel milimetrado e lápis.

Recomendações metodológicas: Entregar aos alunos a equação e alguns valores de x e y para que eles percebam se eles pertencem ou não à equação.

Dificuldades previstas: Alguns alunos podem ter dificuldade em trabalhar com o papel milimetrado.

Construção:

Dando uma equação inicial, faz-se uma tabela de valores para x ou para y e com a equação ele calculará a outra incógnita e a partir desses pontos ele construirá o esboço da elipse no plano cartesiano.

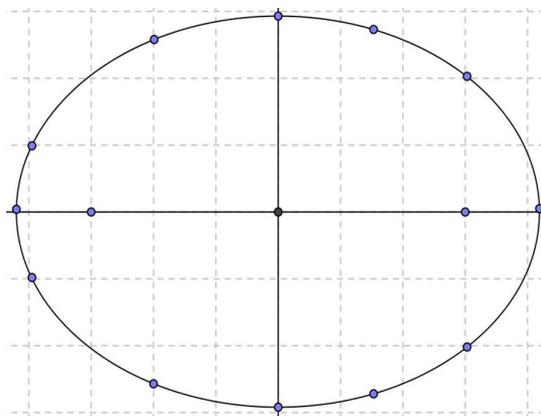


Figura 13 Elipse feita no papel milimetrado

Quaranta et al.(2007) acreditam que com múltiplos enfoques o aluno desperta uma motivação legítima, além de tornar o conteúdo mais abrangente e aumentar a compreensão das definições e conceitos geométricos envolvidos no estudo.

Para facilitar a visualização das propriedades da elipse deve-se trabalhar com material concreto, utilizando planificações e cortes do cone. Talvez, se já no Ensino Fundamental fossem trabalhadas as figuras da elipse, da parábola e da hipérbole quando se apresentam as formas geométricas básicas, o aluno não estranharia quando lá no Ensino Médio fossem apresentadas as cônicas.

Proposta 3: Obtenção da elipse a partir do cone de papel.

Objetivos: Desenvolver a visão espacial do aluno, bem como ampliar o raciocínio lógico, dando mais significado ao conteúdo.

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Materiais necessários: Planificação do cone, tesoura, cola e régua.

Recomendações metodológicas: Deve-se trabalhar em grupo, entregando para cada um a planificação do cone, ressaltando as características da elipse. Utilizando o cone, mostre as curvas por meio dos cortes feitos no mesmo. Durante o trabalho faça algumas perguntas relacionando as cônicas, relacionando-as com conteúdos estudados anteriormente. Deixe também que os alunos dêem suas opiniões, interferindo se necessário e tirando as dúvidas que forem surgindo.

Dificuldades previstas: Alguns alunos podem não ter muita habilidade para montar o cone.

Construção:

Com a planificação em mãos, os alunos deverão montar o cone. Depois deverão achatá-lo e fazerem um risco com a régua que não seja paralelo a base e não passe pelo vértice e cortar o cone no risco. Ao voltar o cone a sua forma normal eles verão a elipse no corte.

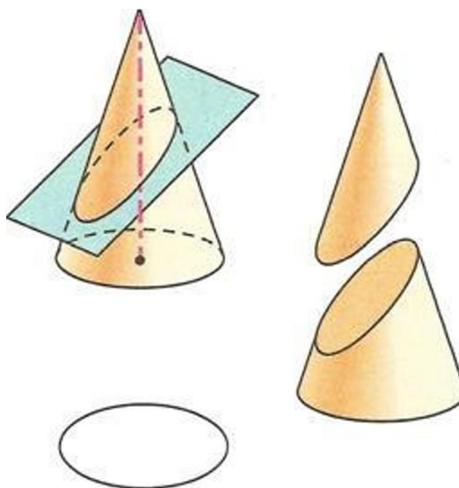


Figura 14 Cortes no cone

Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

Além da planificação do cone pode-se trabalhar também com cones de isopor e cortá-los em ângulos diferentes de modo que o aluno visualize as três cônicas.

Proposta 4: Obtenção da elipse através do cone de isopor.

Objetivos: Desenvolver a visão espacial do aluno, bem como ampliar o raciocínio lógico, dando mais significado ao conteúdo.

Público alvo: Alunos do ensino fundamental.

Materiais necessários: Cone de isopor e lâmina.

Recomendações metodológicas: O professor deve cortar o cone para evitar ferimentos nos alunos. Faça perguntas relacionadas ao conteúdo e deixe que os alunos dêem suas opiniões.

Dificuldades previstas: Nenhuma.

Construção:

O professor deve pegar o cone e cortá-lo de modo que o corte não seja paralelo a base e não passe pelo vértice. No corte aparecerá a elipse.



Figura 15 Cortes do cone de isopor

Souza (2008) apresenta outra forma de construir a elipse utilizando régua e compasso que determina qualquer ponto da elipse a partir dos focos e uma constante k .

Proposta 5: Construção da elipse usando régua e compasso.

Objetivo: Fazer um esboço da elipse.

Público alvo: Alunos do ensino médio.

Pré-requisitos: Conceito de mediatriz.

Materiais necessários: Folha de papel, régua, compasso e lápis.

Recomendações metodológicas: Trabalhar em grupos.

Dificuldades previstas: Alguns alunos não terão habilidade suficiente para trabalhar com compasso e régua.

Construção:

Considere F_1 e F_2 os focos da elipse. Trace uma circunferência (C_1) de centro F_1 e raio k (k deve ser maior que a distância entre F_1 e F_2) e pegamos um ponto P , qualquer sobre C_1 . Ligamos P a F_2 com um segmento de reta e traça-se também uma reta r passando por P e F_1 . Trace também a mediatriz m , de PF_2 . Considerando $r = T$, tem-se que T pertence à elipse, pois $F_1T + TP = k$ (raio da circunferência) como $TP = TF_2$ (por construção, já que m é mediatriz do segmento PF_2 e divide o triângulo PTF_2 em dois triângulos congruentes) tem-se que $F_1T + TF_2 = k$. (que é constante). Portanto, $T \in E(\text{elipse})$.

Percorrendo todos os pontos P da circunferência C_1 traça-se a elipse E .

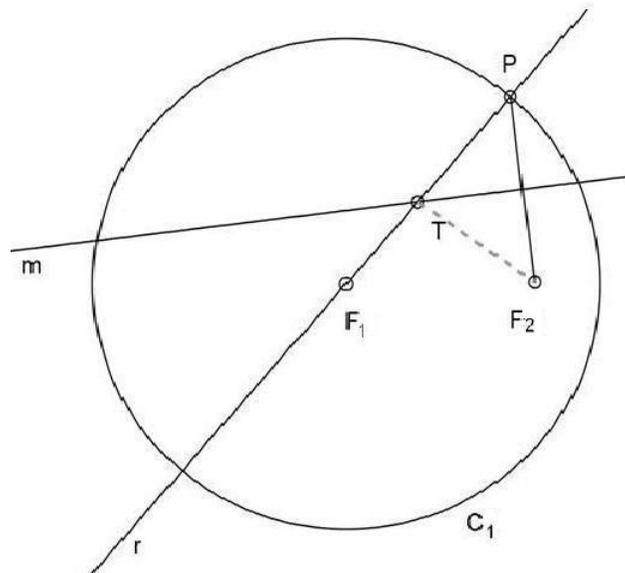


Figura 16 Propriedade da elipse
Fonte: (SOUZA, 2008)

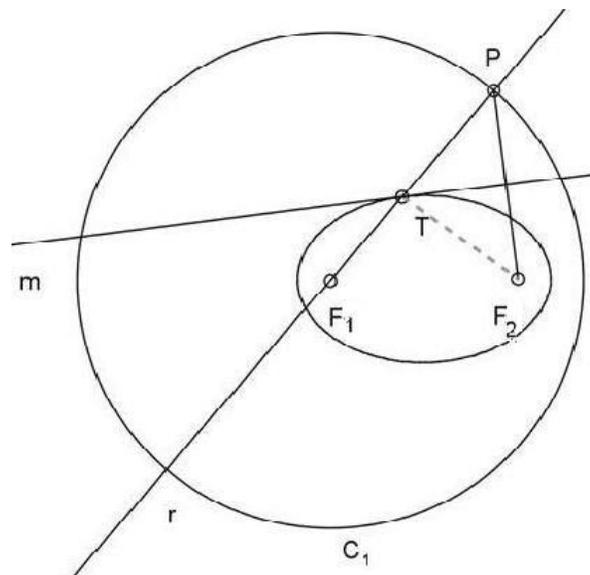


Figura 17 Esboço da trajetória do ponto genérico T formando a elipse
Fonte: (SOUZA, 2008)

4.2 Dedução da fórmula da elipse

É importante também demonstrar a fórmula para os alunos como será feito a seguir e não somente apresentá-la de forma pronta.

Sabe-se que a propriedade fundamental da elipse é que a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos dois focos é constante e igual a $2a$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto da elipse, $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 - c, y_0)$ os focos da elipse, tem-se:

$$PF_1 = \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2}$$

e,

$$PF_2 = \sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2},$$

como $PF_1 + PF_2 = 2a$, segue que:

$$\sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

assim,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} \right)^2 \\ [(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} + \\ &\quad [(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2 \\ (x - x_0)^2 - 2c(x - x_0) + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} + \\ &\quad (x - x_0)^2 + 2c(x - x_0) + c^2 \\ 4a\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} &= 4a^2 + 4c(x - x_0) \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por 4 e elevando ao quadrado, temos:

$$\left(a\sqrt{[(x-x_0)+c]^2+(y-y_0)^2} \right)^2 = [a^2+c(x-x_0)]^2,$$

logo,

$$\begin{aligned} a^2[(x-x_0)^2+2c(x-x_0)+c^2+(y-y_0)^2] &= a^4+2a^2c(x-x_0)+c^2(x-x_0)^2 \\ a^2(x-x_0)^2+2a^2c(x-x_0)+a^2c^2+a^2(y-y_0)^2 &= a^4+2a^2c(x-x_0)+c^2(x-x_0)^2 \\ a^2(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2-c^2(x-x_0)^2 &= a^4-a^2c^2 \\ (a^2-c^2)(x-x_0)^2+a^2(y-y_0)^2 &= a^2(a^2-c^2) \quad (1) \end{aligned}$$

Vimos que em uma elipse, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$ (demonstração logo abaixo).

Substituindo b^2 em (i): $b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$.

Como $ab \neq 0$, dividiu-se ambos os membros por a^2b^2 :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

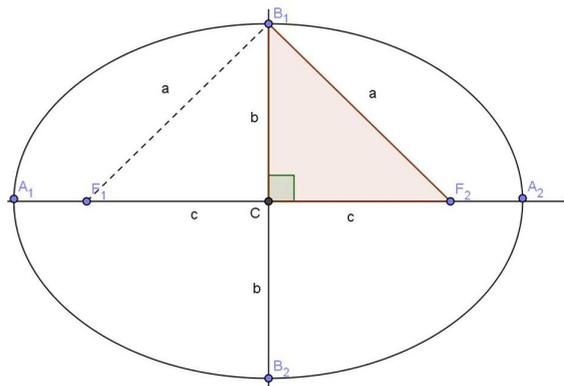


Figura 18 Elementos da elipse

Depois de deduzir as fórmulas das elipses é importante ressaltar toda a parte que já é ensinada de elipse, tratando de seus elementos principais e suas principais propriedades, além de ensinar os alunos a esboçar a elipse.

Uma boa forma para esboçar a elipse paralela aos eixos coordenados é, segundo Anton et al.(2000), seguindo os seguintes passos:

a) Determinar onde está o eixo maior, se é paralelo ao eixo x ou ao eixo y . Uma boa forma para se determinar onde está o eixo maior é observar o maior denominador. Se o maior denominador estiver sob o x^2 ela é paralela ao eixo x , e se ele estiver sobre y^2 a elipse é paralela ao eixo y , Se forem iguais a elipse é uma circunferência.

b) Depois de encontrados os valores de a e b , construa um retângulo de comprimento $2a$ centrado na origem ao longo do eixo maior e altura $2b$ ao longo de eixo menor.

A partir do retângulo, esboce a elipse de modo que o seu centro fique na origem e toca os lados do retângulo onde os lados intersectam os eixos maiores e menores da elipse.

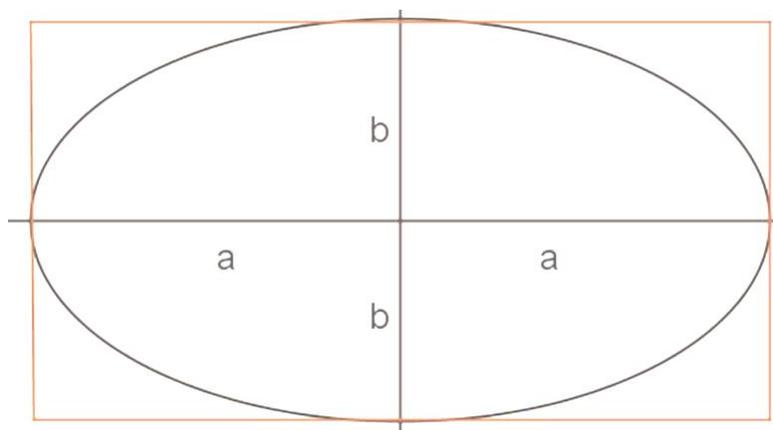


Figura 19 Esboço rudimentar da elipse

A excentricidade da elipse é o número $e = \frac{c}{a}$, que mede o seu achatamento, em que $0 < e < 1$. Quanto mais próxima de zero, mais arredondada a elipse é e quanto mais próxima de um, mais achatada ela é.

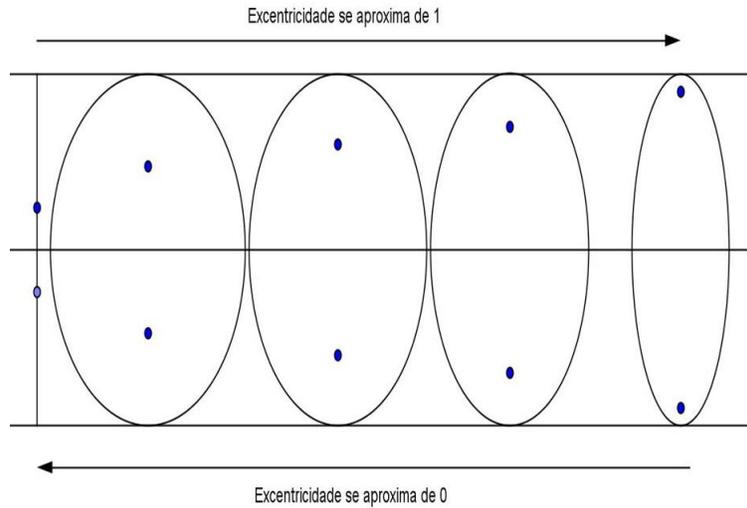


Figura 20 Excentricidade da elipse

A explicação para tal fato é que quando e se aproxima de zero é porque a distância c entre os focos está se aproximando de zero e elipse se torna cada vez mais próxima de uma circunferência. Quando e se aproxima de 1 é porque o valor de c se aproxima do valor de a , então tem-se valores de b que se aproximam de zero e então a elipse se torna mais achatada.

Na tabela abaixo vê-se as excentricidades das órbitas planetárias e vê-se que algumas delas são quase circulares.

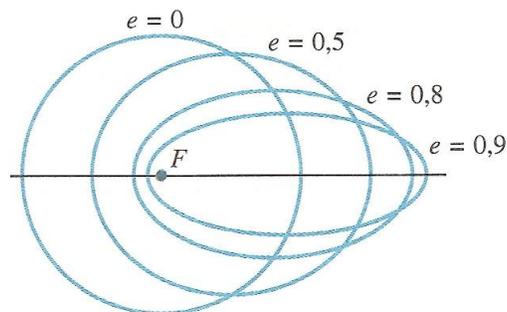


Figura 21 Elipses com um foco comum e semieixo maior iguais

Fonte: (ANTON et al., 2000)

Tabela 1: Excentricidade das órbitas dos planetas.

Corpo celeste	Excentricidade
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Netuno	0,010
Plutão	0,249
Cometa Halley	0,970



Figura 22 Excentricidade no espaço
 Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

Segundo Giovanni et al. (2005), as órbitas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra são elipses com excentricidades bem próximas de zero (respectivamente 0,016 e 0,054). Logo, as elipses são quase circunferências.

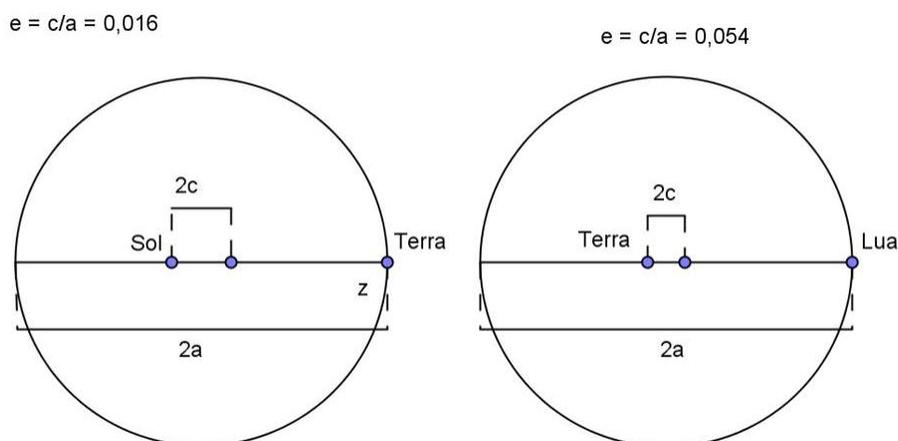


Figura 23 Excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra

É importante ressaltar aos alunos a respeito da excentricidade, pois é por meio dela que eles entenderão porque as elipses são diferentes, umas são mais arredondadas e outras mais achatadas.

É importante também mostrar aos alunos que nem sempre as elipses estão na forma padrão (paralelas aos eixos x ou y). Como os alunos do Ensino Médio não têm pré-requisitos para trabalhar com a rotação dos eixos, pode-se trabalhar com equações de retas, distâncias, teorema de Pitágoras e outros conceitos já vistos anteriormente. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo: Considere a elipse de centro $(1, 1)$, foco $(3, 2)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Determine:

- As coordenadas dos vértices e o outro foco da elipse.
- A equação cartesiana da elipse e faça um esboço.

Solução: (a) Para encontrar o outro foco, basta usar o fato de que o centro é o ponto médio entre os dois focos. Sendo $F_1 = (3, 2)$, $F_2 = (x, y)$ e $C = (1, 1)$. Logo:

$$\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2} \right) = (1, 1)$$

Então, tem-se $F_2 = (-1, 0)$

$$CF_1 = c = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Como $e = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{c}{a}$, segue que $a = 3$.

Na elipse tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$, logo:

$$\begin{aligned} 3^2 &= b^2 + (\sqrt{5})^2 \\ b^2 &= 9 - 5 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Seja $y = px + qa$ equação da reta focal da elipse que passa pelo centro e pelos focos. Como a reta passa por $C = (1, 1)$ e $F_1 = (3, 2)$, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= p \cdot 1 + q \Rightarrow p + q = 1 \\ 2 &= p \cdot 3 + q \Rightarrow 3p + q = 2 \end{aligned}$$

Das equações acima obteremos $p = q = \frac{1}{2}$
Logo, a equação da reta focal l é $y = \frac{x+1}{2}$.

Sabendo que A_1 e A_2 (vértices sobre a reta focal) pertencem a l tem-se:

$$CA_1 + CA_2 = a,$$

logo, se (x, y) é um dos vértices, tem-se:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 3$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e substituindo $y = \frac{x+1}{2}$ e resolvendo, obtemos

$$x = \frac{5 \pm 6\sqrt{5}}{5}$$

Assim, teremos:

$$A_1 = \left(\frac{5 + 6\sqrt{5}}{5}, \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5} \right),$$

e,

$$A_2 = \left(\frac{5 - 6\sqrt{5}}{5}, \frac{5 - 3\sqrt{5}}{5} \right).$$

Para calcular os vértices sobre a reta não focal l' , será preciso calcular a equação da reta perpendicular a reta focal l , que passa pelo centro C . Para isso se usará o fato de que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares é -1.

Considerando $l : y = \frac{x+1}{2}$ e $l' : y = mx + n$, tem-se $m = -2$ e como $C \in l'$ obtemos $n = 3$. Portanto, $l' : y = -2x + 3$

Como B_1 e B_2 (vértices sobre a reta não focal) pertencem a l' e sabe-se que:

$$CB_1 = CB_2 = b.$$

Se (x,y) é um dos vértices, tem-se:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e substituindo $y = -2x + 3$ e resolvendo, obtemos:

$$x = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Assim, teremos

$$B_1 = \left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}, \frac{5 - 4\sqrt{5}}{5} \right),$$

e,

$$B_2 = \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}, \frac{5 + 4\sqrt{5}}{5} \right).$$

(b) Se $P = (x, y)$ é um ponto qualquer da elipse, tem-se:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

isto é,

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado tem-se:

$$12\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 8x + 4y + 24$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado tem-se:

$$144.(x^2 + 2x + 1 + y^2) = 64x^2 + 16y^2 + 64xy + 384x + 192y + 576$$

Simplificando e dividindo por 16 obtemos:

$$5x^2 + 8y^2 - 6x - 12y - 4xy - 27 = 0$$

que é a equação da elipse.

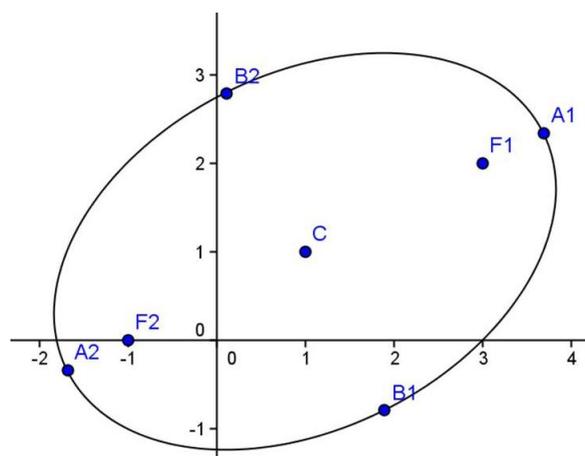


Figura 24 Esboço da elipse

A partir das definições e construções mostradas anteriormente, devê-se aplicar atividades interessantes para que os nossos alunos aprendam e fixem as ideias já apresentadas. Algumas atividades estão na parte do Banco de Questões.

4.3 Aplicações da elipse

Outra coisa a ser mostrada para os alunos são as aplicações da elipse.

“**Teorema:** (propriedade de reflexão da elipse). Uma reta tangente a uma elipse em ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos” (ANTON et al., 2000, p. 160).

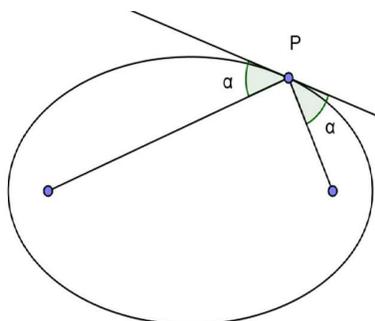


Figura 25 Propriedade de reflexão da elipse

(1) Salas de sussurros

Ainda para Anton et al. (2000, p. 160) várias salas do Capitólio dos Estados Unidos e da Catedral de São Paulo em Roma tem “galerias de sussurros”, nas quais pessoas em lados opostos da sala podem ouvir umas às outras perfeitamente mesmo que às outras estejam sussurrando. Essas salas têm secções transversais elípticas com os mesmos focos, assim quando uma pessoa fala em um dos focos, o som é refletido diretamente ao outro foco por meio do teto elíptico.

(2) Espelhos dos dentistas

Souza (2008) afirma que graças às propriedades refletoras e bissetoras da elipse, o espelho do dentista, que tem forma elíptica, faz com que os raios de luz incidam sobre o dente que será tratado, facilitando a visão do odontólogo, e não ofuscando a visão do paciente pelo feixe de luz.



Figura 26 Espelho do dentista

(3) Tratamentos radioterápicos

Souza (2008) diz que também graças a essas propriedades da elipse, nos tratamentos radioterápicos, as células doentes são eliminadas sem afetar as células saudáveis que estão ao redor.

A propriedade refletora nada mais é que a explicação de uma característica das elipses, que diz que a soma das distâncias a cada um dos focos a qualquer ponto localizado na superfície da elipse é constante. Isto faz com que todas as ondas, sonoras ou luminosas, percorram a mesma distância e por tanto gastem o mesmo intervalo de tempo para saírem de um foco e cheguem ao mesmo tempo ao outro, independentemente da direção tomada, além da segunda propriedade descrita seguir(SOUZA, 2008, p.16).

(4) Leis de Kepler

Outra aplicação importante da elipse são as leis de Kepler, que é um dos conteúdos a serem estudados no terceiro ano do Ensino Médio como é mostrado por Carneiro et al. (2007, p.59) tópico 48, habilidade 48.5. Reconhecer a elipse como um lugar geométrico e relacioná-la com as leis de Kepler.

Anton et al.(2000) traz que em 1609 Johannes Kepler (1571 - 1630), astrônomo e físico alemão, publicou um livro conhecido como Astronomia Nova, onde ele traz as três leis das órbitas planetárias:

Primeira lei: (Lei das órbitas) Cada planeta move-se em órbita elíptica com o Sol em um de seus focos;

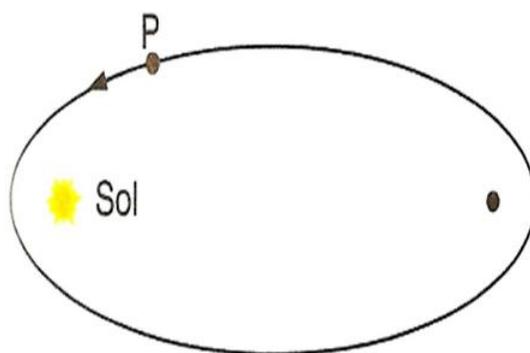


Figura 27 Primeira lei de Kepler

Fonte: (SILVA et al., 2005)

Segunda lei: (Lei das áreas) O raio que sai do centro do Sol e vai até o centro do planeta, varre áreas iguais em tempos iguais;

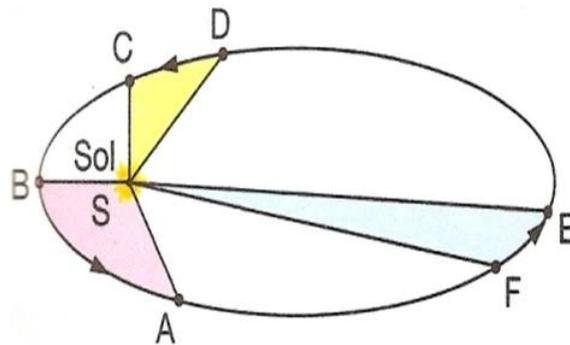


Figura 28 Segunda lei de Kepler

Fonte: (SILVA et al., 2005)

Terceira lei: (Lei dos períodos) O quadrado do tempo que um planeta leva para dar uma volta em torno do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita. Com isso pode-se dizer que essa lei pode ser expressa Assim,: $T = a^{\frac{3}{2}}$.

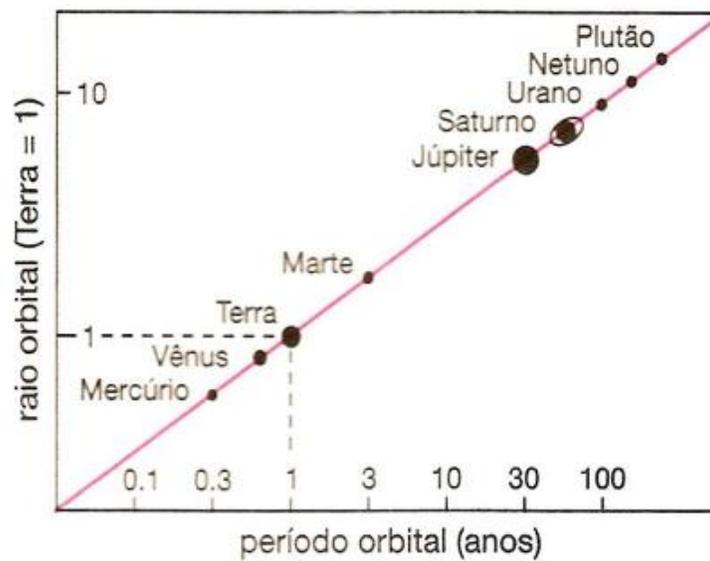


Figura 29 Terceira lei de Kepler

Fonte: (SILVA et al., 2005)

Ainda segundo Anton et al.(2000) as leis planetárias se aplicam a qualquer corpo celeste que está sujeito a uma só força gravitacional. Em uma órbita elíptica, o lugar mais afastado do foco chama-se perigeu e o mais próximo chama-se apogeu (no caso das órbitas ao redor do Sol costuma-se chamar periélio e afélio). As formas elípticas são frequentemente especificadas por meio da excentricidade e do tamanho do semieixo maior a . Para isso, representar a equação da elipse na forma polar é bem útil. Sabendo, a partir da excentricidade, que $c = ea$, implica que a distância d entre o foco e a diretriz é $d = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ea = \frac{a(1 - e^2)}{e}$, da qual tem-se que $ed = a(1 - e^2)$. Então, dependendo da orientação da elipse, suas fórmulas, em coordenadas polares (que serão tratadas com mais detalhes mais adiante) expressas em termos de a e e , são: $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \theta}$, positiva quando a diretriz está à direita do pólo, e negativa quando a diretriz está a esquerda do pólo e $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \sin \theta}$, positiva quando a diretriz está acima do pólo e negativa quando a diretriz está abaixo do pólo. E, além disso, a distância do foco aos vértices mais próximo e mais afastado respectivamente são $r_0 = a - ea = a(1 - e)$ e $r_1 = a + ea = a(1 + e)$.

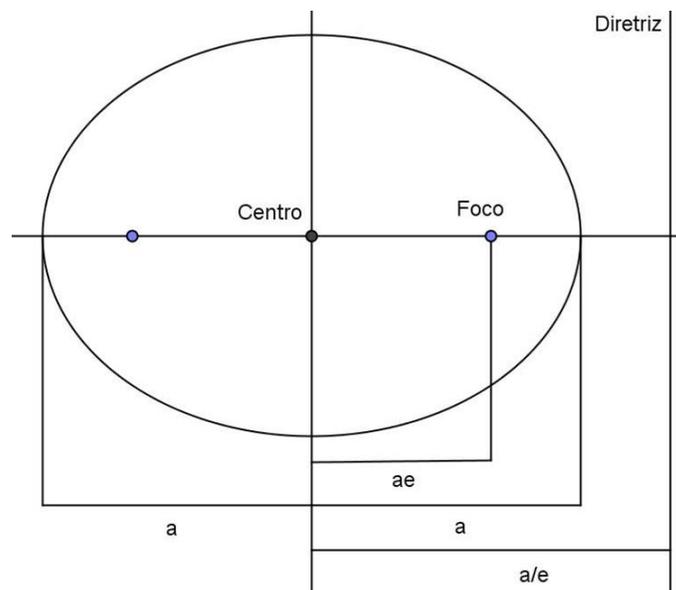


Figura 30 Esboço da elipse

De acordo com Silva et al. (2005), todos os planetas do sistema solar, menos Plutão descrevem elipses que estão num mesmo plano, tendo o Sol como um dos focos.

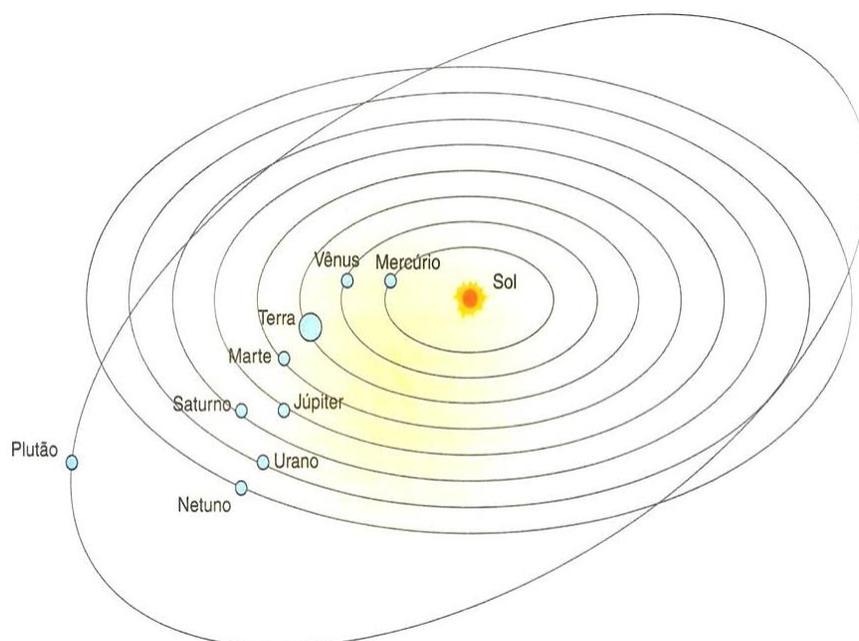


Figura 31 Órbitas planetárias
Fonte: (SILVA et al., 2005)

4.4 Coordenadas polares

Em geral, os alunos do Ensino Médio utilizam somente o sistema de coordenadas cartesianas. Deve-se introduzir outros sistemas de coordenadas no Ensino Médio, entre eles o sistema de coordenadas polares. Para alguns, pode parecer desnecessário considerar outro sistema diferente do sistema cartesiano. Mas em muitos casos o uso dessas coordenadas representa muitas vantagens sobre as coordenadas cartesianas.

Segundo Kindle (1976), para determinar a posição de um ponto P ao invés de usar como referência dois eixos ortogonais, às vezes é mais fácil localizá-lo em função da distância dele a um ponto fixo O e do ângulo que a direção OP forma

com uma reta fixa que passa por O as coordenadas desse sistema denominam-se coordenadas polares.

Para Lehmann (1966), trace o segmento OP e designe sua longitude por r (Figura 47). Considerando um segmento AO , onde A é um ponto qualquer do plano, chamemos θ ao ângulo AOP . Evidentemente a posição do ponto P com relação ao eixo polar e ao pólo é determinada quando se conhecem r e θ . Em particular r se chama vetor raio e θ ângulo polar, ângulo vetorial ou argumento de P . As coordenadas polares de P se escrevem (r, θ) .

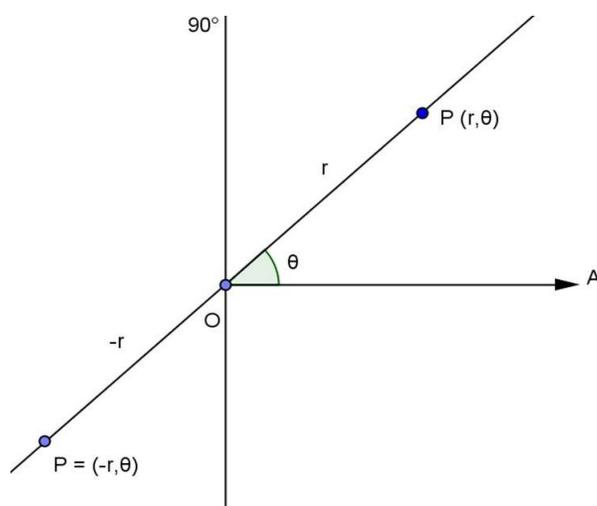


Figura 32 Coordenadas polares

Chama-se r de coordenada radial de P e θ de coordenada angular (ou ângulo polar) de P (ANTON et al., 2000).

De acordo com Júnior (1973) chamaremos de θ o menor ângulo positivo medido no sentido anti-horário em graus ou em radianos de AO para OB , e de r a distância orientada positivamente, OP . Mas às vezes é preciso que r e θ tenham valores positivos ou negativos. Se θ é negativo e r é positivo, traçamos o ângulo $\theta = AB$, medidos a partir de OA , no sentido horário e marcamos P sobre OB de modo que $OP = r$. Se r é negativo construímos $\theta = AB$, prolongando OB até o pólo B' e marcamos P sobre OB' a uma distância $\|r\|$ de O . Um par de coordenadas polares determina somente um ponto, mas um ponto pode ser determinado de várias ma-

neiras. Outra forma de representar é $(r, \theta + 2\pi n)$ onde θ está dado em radianos e n é um número inteiro ou $(-r, \theta + \pi n)$ onde n é um número inteiro ímpar qualquer.

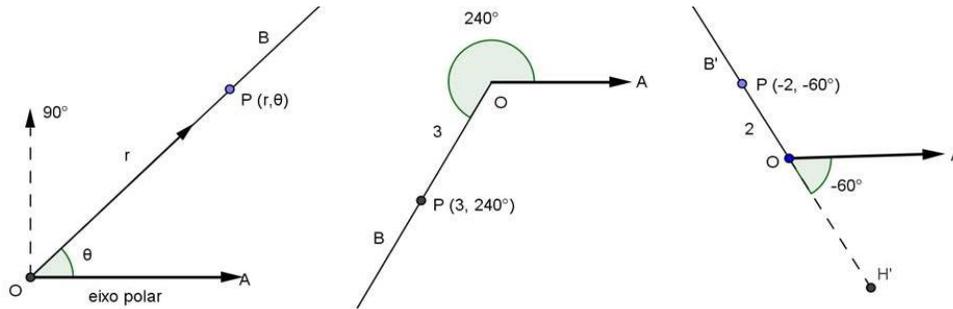


Figura 33 Pontos em coordenadas polares

Lehmann (1966) traz um exemplo de pontos em coordenadas polares está representado na figura 52, onde estão traçados os pontos $P_1(4, \frac{\pi}{6})$, $P_2(6, 2)$, $P_3(-7, 75^\circ)$ e $P_4(5, \frac{7\pi}{4})$. O ângulo polar 2 (em P_2) significa 2 radianos que equivale a $114^\circ 35,5'$ (aproximadamente).

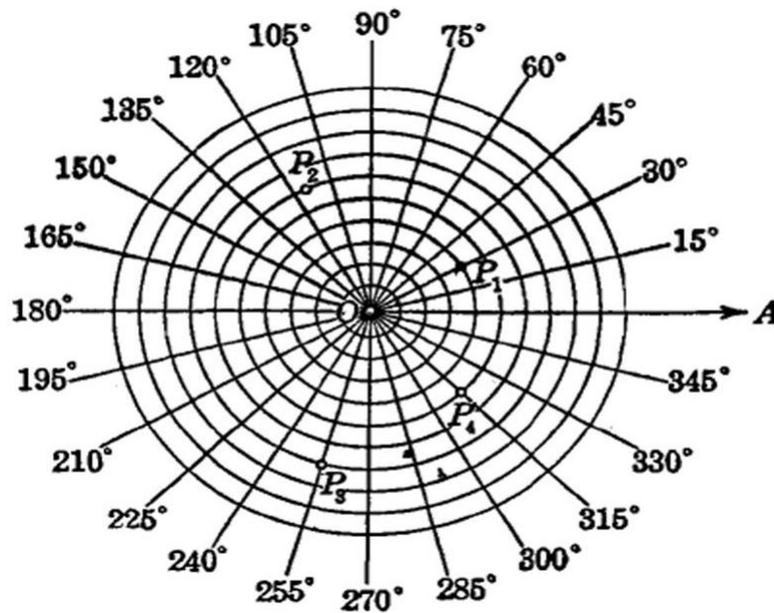


Figura 34 Alguns pontos marcados em coordenadas polares
Fonte: (LEHMANN, 1966).

O pólo tem infinitas representações no sistema polar $(0, \theta)$, pois são todos os valores de θ tais que $r = f(\theta) = 0$, que dão as direções das tangentes no pólo.

Considerando o pólo como a origem do sistema cartesiano, e o eixo polar como a parte positiva do eixo x tem-se as seguintes relações:

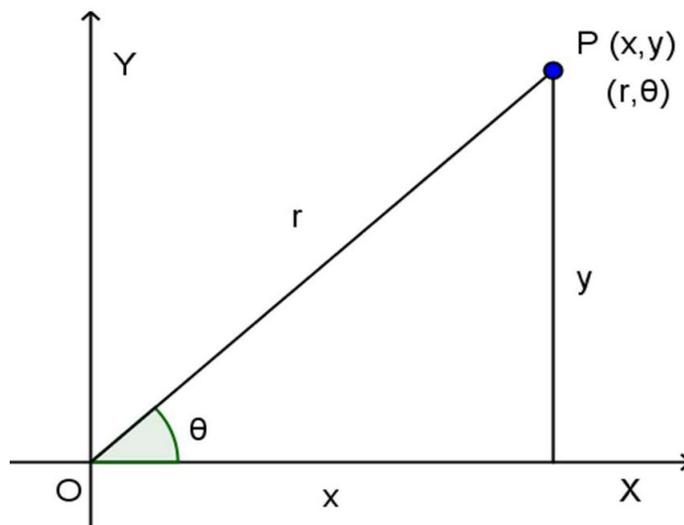


Figura 35 Coordenadas polares

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \quad (1)$$

$$\sen\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sen\theta \quad (2)$$

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

E daí provém que $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ então:

$$\sen\theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\cos\theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Dividindo (2) por (1) tem-se que:

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para traçar o gráfico de curvas em coordenadas polares deve-se, de acordo com Lehmann (1966), seguir os seguintes passos:

- a) Determinação das intersecções com o eixo polar e com o eixo de 90° ;
- b) Determinação da simetria da curva com respeito ao eixo polar, ao eixo a 90° e ao pólo;
- c) Determinação da extensão do lugar geométrico;
- d) Cálculo das coordenadas de um número suficiente de pontos para obter um gráfico adequado, e
- e) Traçar o gráfico.

Para determinar as intersecções com o eixo polar basta fazer $\theta = 0^\circ$ e para fazer a intersecção com o eixo de 90° , basta fazer $\theta = 90^\circ$.

Para fazer a simetria explica Kindle (1976) nos casos em que a substituição de θ por $-\theta$ não altera a equação, curva é simétrica em relação ao eixo polar. Quando substituimos θ por $\pi - \theta$, e a equação continua a mesma, a curva é simétrica em relação à reta $\theta = \pi$. E a curva é simétrica em relação ao pólo quando substituimos r por $-r$ ou θ por $\pi + \theta$ e a equação não se modifica.

Sobre a determinação da extensão do lugar geométrico Ayres Júnior (1973) diz que a equação polar $r = f(\theta)$ representa curva fechada quando r é um número real e finito para qualquer θ , mas quando existem valores para os quais uma das variáveis torna a outra infinita a curva não é fechada.

Segundo Anton et al. (2000), deve-se escolher valores conhecidos para θ , calcular os valores correspondentes de r , então, marcar os pontos (r, θ) no sistema de coordenadas polares e então traçar o gráfico.

4.4.1 Cônicas em coordenadas cartesianas.

(1) A elipse

A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante o maior que a distância entre eles.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

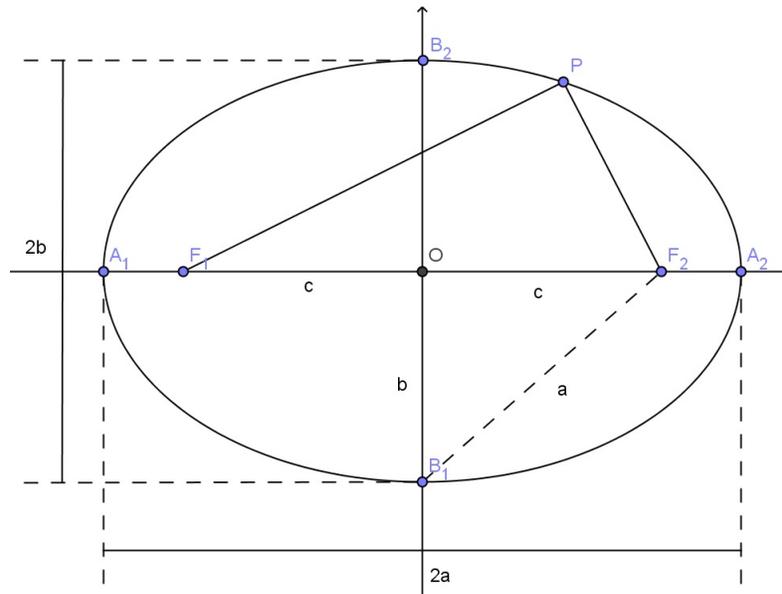


Figura 36 Elipse em coordenada cartesiana

Os elementos de uma elipse são:

Focos: são os pontos F_1 e F_2 .

Distância focal: é a distância entre os focos ($2c = F_1F_2$).

Eixo maior: é o segmento $A_1A_2 = 2a$, que passa pelos focos ($2a > 2c$).

Centro: é o ponto O , ponto médio de A_1A_2 .

Eixo menor: é o segmento $B_1B_2 = 2b$, perpendicular a A_1A_2 passando por O .

Excentricidade (e): é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $0 < e < 1$.

Se a excentricidade e for próxima de 1, o formato da elipse será mais achatado, se e for próximo de 0, o seu formato será próximo ao de uma circunferência.

Em uma elipse: $a^2 = b^2 + c^2$.

As equações de uma elipse são dadas por:

i) Focos no eixo das abscissas e centro $(0, 0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Focos no eixo das ordenadas e centro $(0, 0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(2) A parábola

A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a uma reta r dada é igual à distância a um ponto fixo F não pertencente a r .

$$PF = PH$$

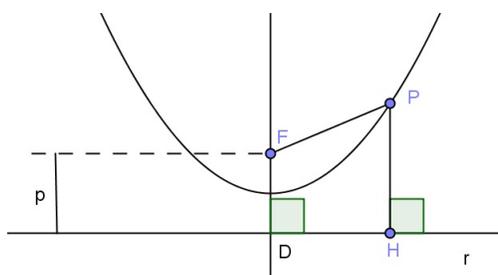


Figura 37 Parábola em coordenada cartesiana

Os elementos de uma parábola são:

Focos: o ponto F .

Diretriz: é a reta r .

Eixo de simetria: é reta perpendicular a r , que passa por F .

Vértice: é a intersecção da parábola com o eixo de simetria.

Parâmetro da parábola: é a distância de p entre o foco e a diretriz.

As equações de uma parábola são dadas por:

i) Eixo de simetria sobre o eixo x ($F(c, 0)$)

$$y^2 = 4cx \text{ ou } y^2 = 2px$$

ii) Eixo de simetria sobre o eixo x ($F(-c, 0)$)

$$y^2 = -4cx \text{ ou } y^2 = -2px$$

iii) Eixo de simetria sobre o eixo y ($F(0, c)$)

$$x^2 = 4cy \text{ ou } x^2 = 2py$$

iv) Eixo de simetria sobre o eixo y ($F(0, -c)$)

$$x^2 = -4cy \text{ ou } x^2 = -2py$$

(3) A hipérbole

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e menor que a distância entre eles.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

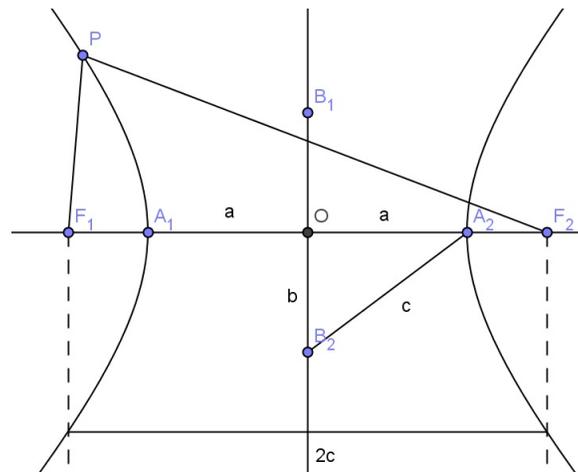


Figura 38 Elipse em coordenada cartesiana

Os elementos de uma hipérbole são:

Focos: são os pontos F_1 e F_2 .

Distância focal: é a distância entre os focos ($2c = F_1F_2$).

Vértices: São os pontos A_1 e A_2 , intersecções de F_1F_2 com a hipérbole.

Eixo real: é o segmento $A_1A_2 = 2a$.

Centro: é o ponto O , ponto médio de A_1A_2 .

Eixo imaginário: é o segmento $B_1B_2 = 2b$.

Excentricidade (e): é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $e > 1$.

Se e está próximo de 1, os ramos da hipérbole serão mais fechados. Se e for um número tendendo ao infinito, os ramos da hipérbole serão mais abertos.

Em uma hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2$.

As equações de uma hipérbole são dadas por:

i) Focos no eixo das abscissas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Focos no eixo das ordenadas

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

As assíntotas de uma hipérbole são as retas $y = \pm \frac{b}{a}x$, das quais a hipérbole fica cada vez mais próxima, sem tocá-las.

4.4.2 Cônicas em coordenadas polares.

Anton et al. (2000) deduz as equações polares para as cônicas. Suponhamos que a diretriz esteja a direita do foco (Figura 54).

Sabendo que $\frac{PF}{PD} = e$, temos que

$$PF = ePD,$$

e como $PF = r$ e $PD = d - r\cos\theta$, segue que

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$

Assim,

$$\frac{d}{r} - \frac{r\cos\theta}{r} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{d}{r} = \frac{1}{e} + \cos\theta$$

$$ed = r + er\cos\theta$$

$$ed = r(1 + e\cos\theta)$$

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

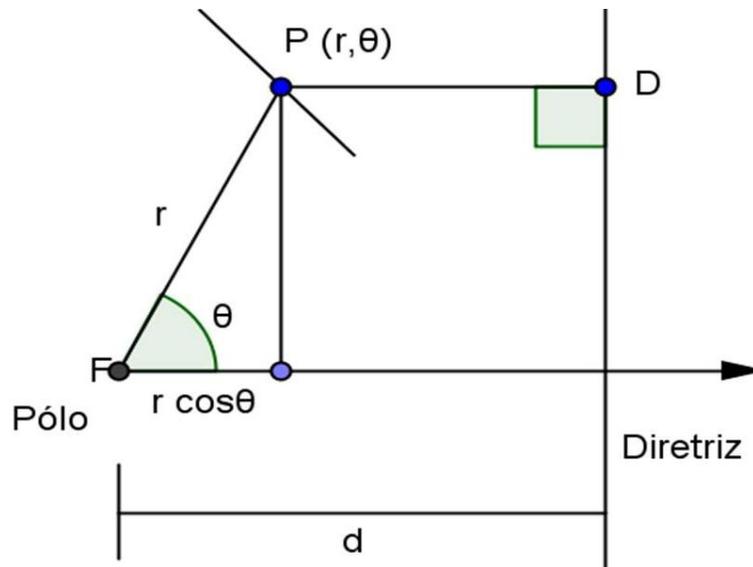


Figura 39 Equação polar das cônicas

Assim, para os demais casos temos o seguinte resultado:

Teorema: Se uma seção cônica com excentricidade e está posicionada em um sistema de coordenadas polares, de modo que seu foco está no pólo e a diretriz correspondente está a d unidades do pólo, então a equação da cônica tem uma das quatro formas possíveis, dependendo da sua orientação:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \text{ (diretriz à direita do polo)}$$

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \text{ (diretriz à esquerda do polo)}$$

$$r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta} \text{ (diretriz acima do polo)}$$

$$r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta} \text{ (diretriz abaixo do polo)}$$

Ainda para Anton et al. (2000) na elipse precisa-se determinar a distância do foco aos vértices. Sendo r_0 a distância do foco até o vértice mais próximo e r_1 a distância até o vértice mais afastado, temos que: $r_0 = a - c$, $r_1 = a + c$, somando as duas temos: $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_0)$ e subtraindo temos: $c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$. Agora multiplicando $r_0.r_1 = a^2 - c^2 = b^2$, logo $b = \sqrt{r_0r_1}$. Da mesma maneira que na elipse, na hipérbole tem-se que: $r_0 = c - a$, $r_1 = a + c$, somando as duas temos: $a = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$ e subtraindo tem-se: $c = \frac{1}{2}(r_1 + r_0)$. Agora multiplicando $r_0.r_1 = c^2 - a^2 = b^2$, logo $b = \sqrt{r_0r_1}$.

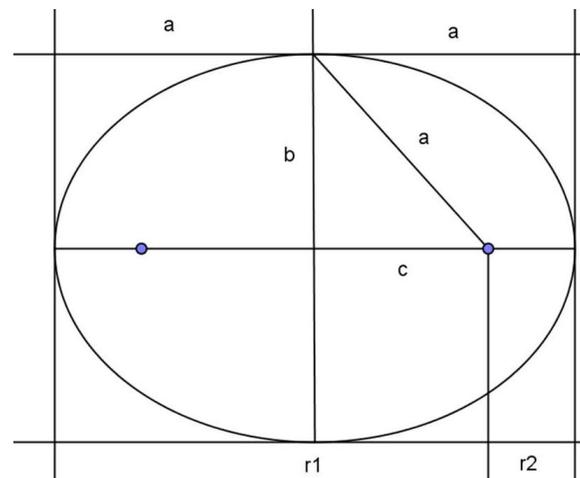


Figura 40 Elipse

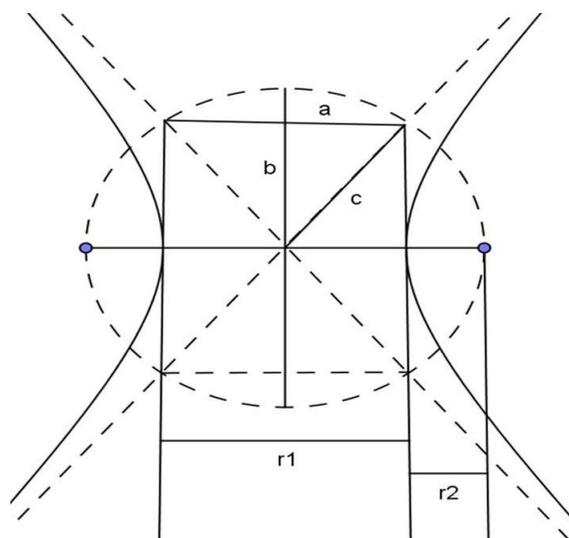


Figura 41 Hipérbole

Exemplo:

Esboce o gráfico de $r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$ em coordenadas polares. (ANTON, 2000, p. 167).

Solução: A equação não está em nenhuma das quatro formas acima, assim, deve-se dividir o numerador e denominador por 2 para encontrar o termo constante 1 no denominador. Assim, tem-se:

$$r = \frac{3}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$$

donde resulta que esta equação é da forma $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$ com $d = 6$ e $e = \frac{1}{2}$. Assim o gráfico da elipse tem diretriz 6 unidades a direita do pólo. Pode-se calcular r_0 fixando $\theta = 0$ e r_1 fixando $\theta = \pi$. Assim, $r_0 = 2$ e $r_1 = 6$.

Assim, $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_0) = 4$, $b = \sqrt{r_0 r_1} = 2\sqrt{3}$ e $c = \frac{1}{2}(r_1 - r_0) = 2$

O esboço da elipse é:

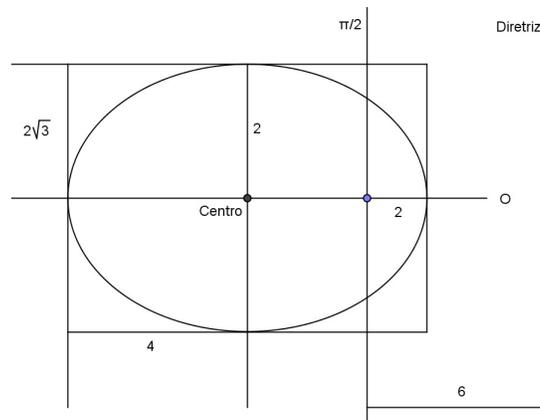


Figura 42 Esboço rudimentar da elipse

5 TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

Este capítulo apresenta um estudo voltado para a graduação, onde abordamos as rotações e translações de eixos coordenados. No fim do capítulo mostramos a rotação de eixos utilizando a álgebra linear.

Quando se trabalha com cônicas, muitas vezes a escolha certa dos eixos conduz a uma forma mais simples da equação. É possível simplificar essa equação de duas maneiras, pela translação de eixos e/ou pela rotação de eixos.

Para Lehmann (1966) uma transformação é uma operação pela qual uma relação, expressão ou figura se transforma em outra seguindo uma lei dada. Analiticamente, a lei se expressa por uma ou mais equações chamadas equações de transformações.

5.1 Translação de eixos coordenados

De acordo com Kindle (1976) sendo OX e OY os eixos originais e $O'X'$ e $O'Y'$ os eixos transladados, respectivamente paralelos aos primeiros. Considerando (h, k) a nova origem do novo sistema e seja P um ponto qualquer do plano, com (x, y) as coordenadas dos eixos originais e (x', y') as coordenadas nos novos eixos.

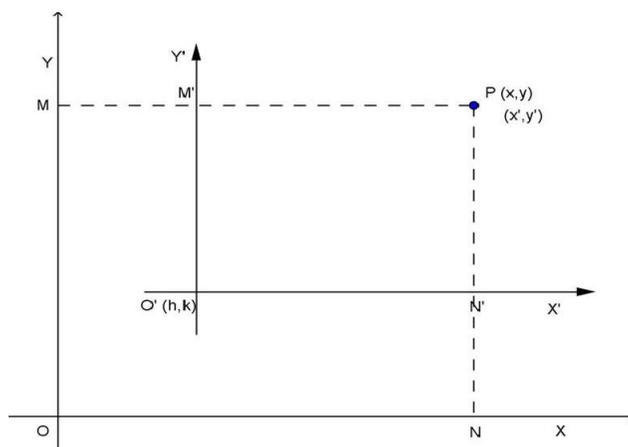


Figura 43 Translação de eixos

Determinando-se x e y em função de x' , y' , h e k , temos:

$$x = MP = MM' + M'P = h + x'$$

e,

$$y = NP = NN' + N'P = k + y'$$

Logo, as fórmulas para transformação são: $x = x' + h$ e $y = y' + k$, isto é, $x' = x - h$ e $y' = y - k$.

5.2 Rotação dos eixos coordenados

A rotação dos eixos coordenados consiste em manter a origem fixa e girar os eixos em um determinado ângulo.

Lehmann (1966) traz o seguinte resultado,

Teorema 1: Se os eixos coordenados giram um ângulo θ em torno de sua origem como centro de rotação, e as coordenadas de um ponto qualquer P antes e depois da rotação são (x, y) e (x', y') respectivamente, as equações de transformação do sistema original ao novo sistema de coordenadas estão dadas por: $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$.

Demonstração: Sejam X e Y os eixos originais e X' e Y' os novos eixos. A partir do ponto P traça-se a ordenada AP correspondente ao sistema X, Y , a ordenada $A'P$ correspondente ao sistema X', Y' , e a reta OP . Seja o ângulo $POA' = \varphi = r$. Por trigonometria tem-se:

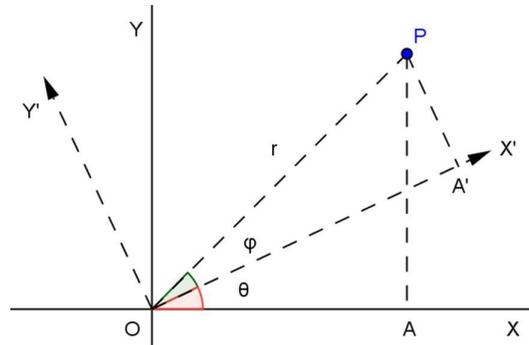


Figura 44 Rotação de eixos

$$x = \overline{OA} = r \cos(\theta + \varphi) \quad (1)$$

$$y = \overline{AP} = r \sin(\theta + \varphi) \quad (2)$$

$$x' = \overline{OA'} = r \cos\varphi, y' = \overline{A'P} = r \sin\varphi \quad (3)$$

De (1) tem-se:

$$x = \overline{OA} = r \cos(\theta + \varphi) = r \cos\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi$$

Se nesta última equação substituir-se os valores dados por (3), obtemos a primeira equação de transformação

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

Analogamente, de (2)

$$y = r \sin(\theta + \varphi) = r \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta \sin\varphi$$

De (3), tem-se a segunda equação de transformação:

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

Para as aplicações será necessário girar os eixos coordenados somente por um ângulo suficientemente grande para fazer coincidir um dos eixos coordenados com uma reta dada fixa qualquer, ou para fazer que seja paralelo a ela em um plano coordenado. Assim podemos restringir, em geral, os valores do ângulo de rotação θ ao intervalo dado por $0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (LEHMANN, 1966).

Já Ayres Júnior (1973) apresenta outra maneira de encontrar as equações de rotação, mantendo a origem fixa, e os eixos coordenados girando em sentido anti-horário um ângulo θ , e se um ponto P tem coordenadas (x, y) no sistema OXY e (x', y') no novo sistema tem-se:

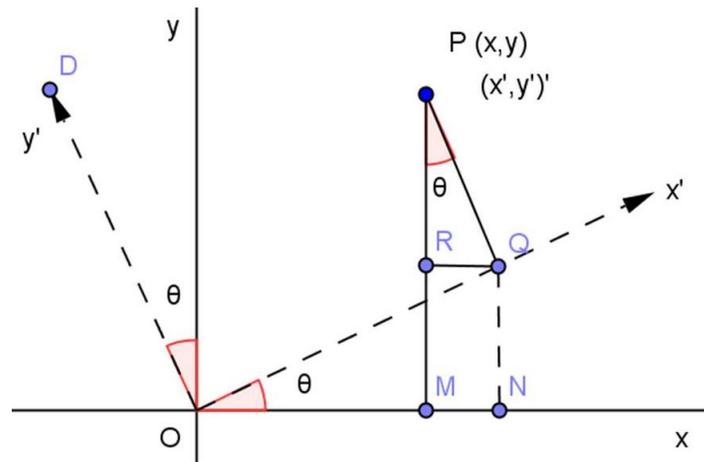


Figura 45 Eixos com rotação

$$\begin{aligned}
 x &= OM = ON - MN = ON - RQ \\
 &= OQ \cos \theta - QP \sin \theta \\
 &= x' \cos \theta - y' \sin \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= MP = MR + RP = NQ + RP \\
 &= OQ \operatorname{sen} \theta + QP \operatorname{cos} \theta \\
 &= x' \operatorname{sen} \theta - y' \operatorname{cos} \theta
 \end{aligned}$$

De acordo com Camargo et al.(2005) sendo $P(x,y)$ um ponto do plano π . Quando rotaciona-se θ radianos no sentido anti-horário, obtém-se um ponto $P'(u,v)$ tal que

$$\begin{cases} x = u \operatorname{cos} \theta - v \operatorname{sen} \theta \\ y = u \operatorname{sen} \theta + v \operatorname{cos} \theta \end{cases}$$

onde $P = P'$. Resolvendo esse sistema temos

$$\begin{cases} u = x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta \\ v = -x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta \end{cases}$$

que são as expressões das novas coordenadas em relação às antigas. Pode-se escrever matricialmente por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde M é a matriz mudança de base $M = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix}$ que é ortogonal, ou seja, $M^{-1} = M^t$.

Exemplo: Transformar a equação $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$. Girando os eixos coordenados um ângulo de 30° . Traçar o lugar geométrico e ambos os sistemas de

eixos coordenados.(LEHMANN, 1966, p.140)

Solução: Pelo teorema 1, as equações de transformação são:

$$x = x' \cos 30^\circ - y' \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} x' - \frac{1}{2} y' \text{ e}$$

$$y = x' \operatorname{sen} 30^\circ + y' \cos 30^\circ = \frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y'$$

Substituindo estes valores de x e y na equação (1) obtém-se:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 4$$

Desenvolvendo e simplificando essa última equação, obtém-se a equação transformada $5x'^2 + y'^2 = 8$. Logo,, o lugar geométrico é uma elipse

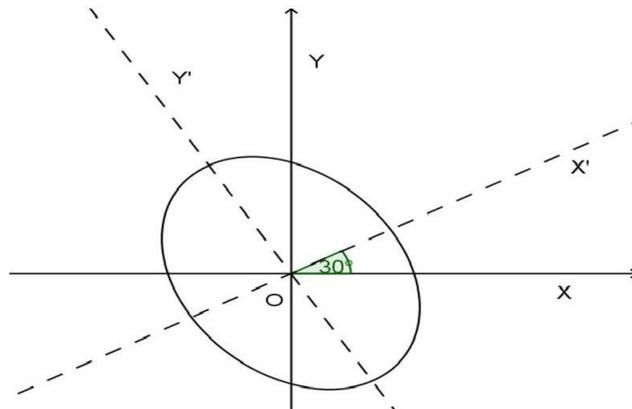


Figura 46 Rotação de eixos da elipse

5.3 A equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2

De acordo com Anton et al. (2000), a equação da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

recebe o nome de equação polinomial de segundo grau em x e y . O termo Bxy é chamado termo misto. Se a equação não tiver o termo misto, ou seja, $B = 0$, então a equação é do tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e, neste caso, o gráfico será possivelmente uma secção cônica degenerada que está na posição padrão ou transladada. Agora, se a equação tiver o termo misto, ou seja, $B \neq 0$, o gráfico será possivelmente uma cônica rotacionada de sua orientação-padrão.

Lehmann (1966) afirma que para transformar a equação polinomial do segundo grau que apresenta o coeficiente B diferente de zero, por rotação de eixos, tem-se as seguintes equações de transformação por rotação:

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

, e

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

,
dadas no Teorema 1. Substituindo na equação polinomial geral do segundo grau tem-se:

$$A(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + C(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \sin\theta) + E(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + F = 0.$$

Se desenvolver-se e colocar-se os termos comuns em evidência, obtém-se

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad (2)$$

em que

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2\theta + B \sin\theta \cos\theta + C \sin^2\theta, \\ B' &= 2(C - A) \sin\theta \cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \end{aligned}$$

$$C' = A\text{sen}^2\theta - B\text{sen}\theta\text{cos}\theta + C\text{cos}^2\theta,$$

$$D' = D\text{cos}\theta + E\text{sen}\theta,$$

$$E' = E\text{cos}\theta - D\text{sen}\theta,$$

$$F' = F.$$

Se na equação (2) desejamos eliminar o termo $x'y'$, o coeficiente de B' deve anular-se. Portanto, devemos ter

$$2(C - A)\text{sen}\theta\text{cos}\theta + B(\text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta) = 0$$

Por meio das fórmulas trigonométricas do ângulo duplo, esta última equação pode ser escrita da forma:

$$(C - A)\text{sen}^2\theta + B\text{cos}^2\theta = 0 \quad (4)$$

Se $A \neq C$, pela Equação (4) temos $\text{tg}^2\theta = \frac{B}{A - C}$. Se $A = C$, então pela Equação (4) temos: $B\text{cos}^2\theta = 0$. Como $B \neq 0$, por hipótese, segue que

$$\text{cos}^2\theta = 0 \quad (5)$$

O ângulo de rotação θ é restringido ao intervalo $0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, de maneira que o intervalo de variação para 2θ é $0^\circ \leq 2\theta \leq \pi$. Portanto, da equação (5), temos que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Lehmann (1966) ainda traz a seguinte definição.

Definição 1: Se um dos coeficientes A' ou C' é igual a zero, a equação (4) representa uma parábola ou um dos casos degenerados. Se A' e C' têm o mesmo sinal, a equação (4) representa uma elipse ou um dos casos degenerados. Se A' e C' têm sinais contrários, a equação (4) representa uma hipérbole ou um dos casos degenerados.

Segundo Ayres Júnior (1973), a equação (2), já transformada é chamada de forma semi-reduzida da equação do 2º grau.

Lehmann (1966) traz o seguinte resultado:

Teorema 2: A equação geral de segundo grau representa uma cônica do tipo parábola, elipse ou hipérbole segundo o indicador $I = B^2 - 4AC$. Se $I = 0$ é uma parábola, se $I < 0$ é uma elipse e se $I > 0$ é uma hipérbole.

5.4 Rotação de eixos usando a álgebra linear

Para Callioli et al. (1990), as equações canônicas das cônicas têm um aspecto comum para a álgebra, elas são equações de segundo grau em \mathbb{R}^2 . Mas para que as equações estejam na sua forma canônica é preciso trabalhar com sistemas de eixos ortogonais numa posição favorável em relação às curvas.

Definição: Uma cônica em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde A ou B ou $C \neq 0$. Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática, $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear, $L(x, y) = Dx + Ey$, e um termo constante F . Isto é, a equação que define a cônica é: $Q(x, y) + L(x, y) + F = 0$ (BOLDRINI et al., 1980, p. 306).

O Instituto Gauss de Matemática (2013) apresenta outra definição.

Definição: Se A uma matriz $m \times n$, denominamos de autovalor da matriz A o número real λ , tal que $A.V = \lambda V$, em que $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ é um vetor não nulo. O vetor V é chamado de autovetor de A .

De acordo com Callioli et al. (1990), devemos analisar a equação geral quadrática em duas variáveis

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \quad (1)$$

e verificar se são cônicas ou não. Fazendo essa análise, verificaremos que sempre serão cônicas ou seus casos degenerados, e as classificaremos de acordo com seus coeficientes. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

,
 $f(x, y) = 0$ será escrita na forma

$$X^t . A . X + 2[a_1 a_2] X + a = 0 \quad (2)$$

Como A é simétrica e toda matriz simétrica é diagonalizável, é possível obter uma matriz ortogonal P de forma que $P^t . A . P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A .

Ainda segundo Callioli et al. (1990) considerando uma mudança de base determinada por P , sendo a equação $X = P.Y$, onde $Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ é a matriz do vetor genérico de \mathbb{R}^2 na nova base então a equação (2) ficará da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= Y^t . (P^t . A . P) . Y + 2[a_1 a_2] . P . Y + a \\ &= [x_1, y_1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 2[a_1 a_2] . P . Y + a \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_1 + a = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Os coeficientes b_1 e b_2 são expressos em função de a_1, a_2 e dos termos de P .

Segundo Waga et al. (2013b), para calcular os autovalores associados a uma matriz devemos calcular as raízes do polinômio característico $\det[A - \lambda I_n] = 0$, onde I_n é a matriz identidade. Os autovetores associados devem ser normalizados.

De acordo com Waga et al. (2013a), o polinômio

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

com coeficientes reais, chama-se forma quadrática no \mathbb{R}^2 . A matriz simétrica $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é a matriz da forma quadrática. Então $Q(x,y)$ pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= [x \ y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x' \ y'] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \end{aligned}$$

em que λ_1 e λ_2 os autovalores da matriz simétrica M .

Exemplo: A cônica de equação $x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0$, tem centro na origem (pois a equação não tem termos lineares) e eixo(s) de simetria não paralela ao eixo coordenado.

Solução:

1º passo: Escrever a equação na sua forma matricial:

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$

2º passo: Diagonalização da forma quadrática para eliminar os termos mistos, encontrando os autovalores e autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 1 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Daí tem-se os autovalores $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Para $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$, tem-se

$$\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} - (2-\sqrt{2}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo tem-se $y = -(1 + \sqrt{2})x$. Então chega-se ao vetor:

$$v_1 = (-(1 + \sqrt{2}), 1)$$

que normalizado é:

$$v_1 = \left(\frac{-(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right).$$

Procedendo da mesma forma para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ tem-se:

$$v_2 = \left(\frac{-(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right).$$

Sabe-se que $Q(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ se reduz a $Q(x', y') = (2 - \sqrt{2})x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2$.

3º passo: Substitui-se a equação por suas novas coordenadas obtendo

$(2 - \sqrt{2})x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2 - 1 = 0$. Da qual tem-se a elipse:

Para classificar uma cônica segundo Boldriniet al. (1980) dada a sua equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde A ou B ou $C \neq 0$ devemos seguir os seguintes passos:

1º passo: Escrever a equação na sua forma matricial:

$$[x \ y] \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D \ E] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2º passo: Diagonalização da forma quadrática para eliminar os termos mistos, encontrando os autovalores e autovetores ortonormais da matriz simétrica M .

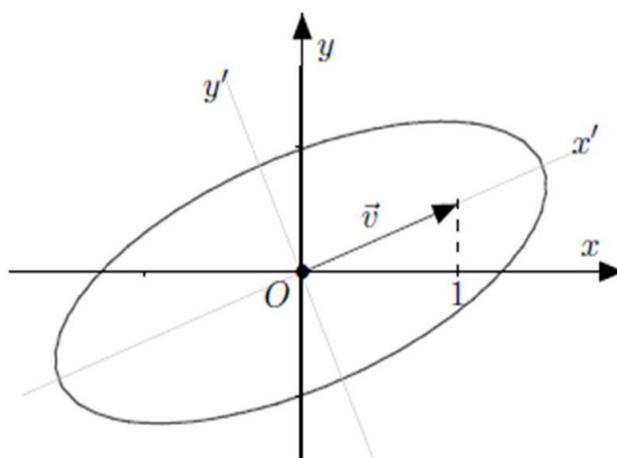


Figura 47 Esboço da elipse

3º passo: Devemos obter as novas coordenadas substituindo na equação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$

$P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, em que P é a matriz de autovetores de M.

4º passo: Substituímos a equação por suas novas coordenadas obtendo $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [D \ E]P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + F = 0$, ou seja, $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + ax' + by' + F = 0$.

5º passo: Eliminação dos termos lineares, agrupando os termos e completando quadrados. Então tem-se três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1 x'^2 + ax' + \lambda_2 y'^2 + by' + F = 0$$

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y' + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0$$

Sendo $x'' = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y'' = y' + \frac{b}{2\lambda_2}$, tem-se então $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f = 0$ onde $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$.

ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$

$$\lambda_1 x'^2 + ax' + by' + F = 0$$

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by' + F = 0$$

Sendo $x'' = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y'' = y'$ tem-se $\lambda_1 x''^2 + by'' + f = 0$, onde $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$.

iii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ (análogo ao anterior).

Com isso pode-se classificar as cônicas. Santos (2010, p.426-429) mostra um exemplo:

Considere a cônica C com a seguinte equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$$

Reescrevendo tem-se $X^t \cdot A \cdot X - 36 = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Então tem-se: $\det(A - \lambda I) = 0$, então:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0,$$

onde tem-se os autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$. Os autovetores associados a λ_1 são a solução do sistema $(A - 4I).X = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução é $x = 2y$. Chegando ao autovetor $v_1 = (2, 1)$, normalizando tem-se

$$v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Para o autovalor λ_2 tem-se que resolver o sistema $(A - 9I).X = 0$. Cujas soluções são

$$v_2 = (1, -2), \text{ normalizando } v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \text{ tem-se que } Q(x, y) = 5x^2 - 4xy +$$

$8y^2$ se reduz a $Q(x', y') = 4x'^2 + 9y'^2$.

Logo, a equação da cônica rotacionada é $4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$. Que é a equação de uma elipse cujo esboço é:

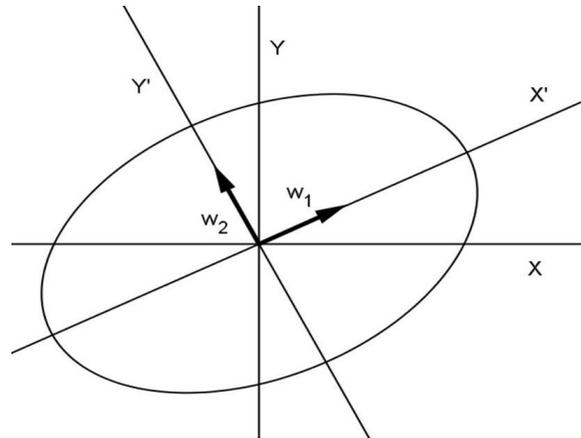


Figura 48 Esboço da elipse

Ainda para Boldrini et al. (1980) pode-se classificar as cônicas por meio de seus autovalores. Utilizando a equação $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f = 0$ tem-se: se λ_1 e λ_2 , os dois autovalores, forem ambos positivos, ter-se-á para $f < 0$ uma elipse,

para $f = 0$ um ponto e para $f > 0$ o conjunto vazio. Se λ_1 e λ_2 forem negativos tem-se uma elipse se $f > 0$, um ponto se $f = 0$ e o conjunto vazio caso $f < 0$. Se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos tem-se uma hipérbole se $f \neq 0$, ou um par de retas concorrentes se $f = 0$. No caso da equação $\lambda_2 y''^2 + ax'' + f = 0$ tem-se se $a \neq 0$ uma parábola, se $a = 0$ um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos um breve relato histórico, algumas propostas diferenciadas para o trabalho das cônicas, bem como a transformação de coordenadas, que irão ajudar os professores de ensino médio e superior na elaboração de suas aulas, além de um banco de questões.

Elaboramos cinco propostas para o ensino da parábola em sala de aula, a dedução da fórmula e aplicações da parábola. Tem-se também uma proposta para se trabalhar as coordenadas polares no Ensino Médio, levando os alunos a entenderem que existem outros sistemas de coordenadas e não apenas o cartesiano. E, para os professores da graduação, um capítulo de transformações de coordenadas, com translação e rotação de eixos coordenados, equação geral do 2º grau em \mathbb{R}^2 e também rotação de eixos usando a álgebra linear.

O ensino das cônicas no Ensino Médio deverá ser diferenciado para aumentar o interesse dos alunos e levá-los ao entendimento desse assunto. Através desse trabalho foi possível perceber que vários livros didáticos trazem o assunto de forma analítica, somente com a utilização de fórmulas. Os alunos muitas vezes só têm contato com esse conteúdo quando vão para um curso de exatas, no qual é tratado o tema "cônicas", levando-os a uma frustração por não terem os pré-requisitos necessários para este tópico.

Como referência bibliográfica utilizamos alguns livros didáticos, revistas com atividades interessantes e trabalhos publicados por outros alunos que se interessaram pelas cônicas.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se um estudo sobre quádricas.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. et al. Cálculo, um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v. 2, 552 p.

AYRES JÚNIOR, F. Geometria analítica plana e sólida: resumo da teoria, 155 problemas resolvidos, 203 problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973. 203 p. (Coleção Schaum, 6).

BARROSO, J. M. Conexões com a matemática. São Paulo: Moderna, 2010. 160 p.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. 2.ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 315 p.

BORDALLO, M. As cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro. 2011. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

BOYER, C. B. História da matemática. 3.ed. São Paulo: Blucher, 2010. 107 p.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. 144 p.

CALLIOLI, C. A. et al. Álgebra linear e aplicações. 6.ed. São Paulo: Atual, 1990. 285 p.

CAMARGO, I. et al. Geometria analítica. 3.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005. 360 p.

CARNEIRO, M. J. D. et al. CBC, Conteúdo Básico Comum. Belo Horizonte: Secretaria do Estado de Educação de Minas Gerais, 2007. 59 p.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. 134 p.

GIOVANNI, J. R. et al. Matemática completa. 2.ed. São Paulo: FTD, 2005. 134 p. (Coleção Matemática Completa).

GOULART, M. C. Matemática no Ensino Médio 3^a série. 3.ed. São Paulo: Scipione, 2005. 112 p. (Coleção Matemática no Ensino Médio).

INSTITUTO GAUSS DE MATEMÁTICA. Autovalores e autovetores. Disponível em: <http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=247%3Aautovalores-eautovetores&catid=41%3Aconteudosal&Itemid=38>. Acesso em: 16 jan. 2013.

KINDLE, J. H. Geometria analítica plana e no espaço: resumo da teoria, 345 problemas resolvidos, 910 problemas propostos. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 118 p. (Coleção Schaum).

LEHMANN, C. H. Geometria analítica. La Habana: 1966. 344 p.

LOPES, J. F. Cônicas e aplicações. 2011. 184 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2011.

MENDES, R. Geometria bom de bilhar. Revista Cálculo, Brasília, n. 12, p. 45-51, 2012.

QUARANTA, F. Tradução comentada da obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o ensino de matemática. 2008. 310 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

QUARANTA, F. et al. Cônicas: um excelente elo capaz de mostrar as conexões entre a geometria no plano e no espaço. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: SBEM, 2007.p. 2.

RIBEIRO, J. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia 3: Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010. 273 p.

RODRIGUES FILHO, N. Cônicas e suas aplicações em faróis automotivos. Belo Horizonte: UFMG, 2007. 135 p.

SANTOS, R.J. Um curso de geometria analítica e álgebra linear. Belo Horizonte: UFMG, 2010. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/regi>>. Acesso em: 16 jan. 2013

SILVA, C. X. et al. Matemática aula por aula. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. 148 p. (Coleção Matemática Aula Por Aula). SMOLE, K. C. S. et al. Matemática: Ensino Médio, volume 3. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 133 p.

SMOLE, K. C. S. et al. Matemática: Ensino Médio, volume 3. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010. 133 p.

SOUZA, E. W. Cônicas e aplicações. 2008. 39 p. Monografia (Especialização em Matemática, com ênfase em Geometria) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

VENTURI, J.J. Cônicas e quádras. 5. ed. Curitiba: Unificado, 1949. Disponível em: <<http://www.geometriaanalitica.com.br>>. Acesso em: 7 dez. 2012.

WAGA, C. et al. Álgebra linear II. Disponível em: <<http://www.ime.uerj.br/alglin/ApostilaAlgLinII.pdf>>. Acesso em: 16 jan. 2013a.

WAGA, C. ET. AL..Álgebra linear III. Disponível em: <http://www.ime.uerj.br/algin/ApostilaAlgLinIII/Capitulo6_Aut08resumido.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2013b.

YOUSSEF, A. N. et al. Matemática: Ensino Médio, volume único. São Paulo: Scipione, 2005. 345 p.

ANEXOS

BANCO DE QUESTÕES

O banco de questões é composto por atividades que poderão auxiliar os professores na elaboração de suas aulas.

(1) (GIOVANNI et al., 2005) (Cesgranrio-RJ) Para delimitar um gramado, um jardineiro traçou uma elipse inscrita num terreno retangular de 20m por 16m. Para isso, usou um fio esticado preso por suas extremidades M e N, como mostra a figura. Qual é a distância entre os pontos M e N?

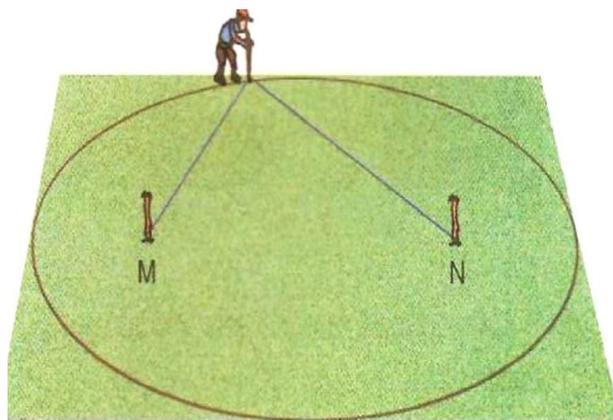


Figura 1 Elipse feita pelo jardineiro

Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

(2) (GIOVANNI et al., 2005)(UFMT) A 1ª lei de Kepler estabelece que qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos. Admitindo que O se encontre na origem do plano cartesiano e que o eixo focal está sobre o eixo x, julgue os itens.

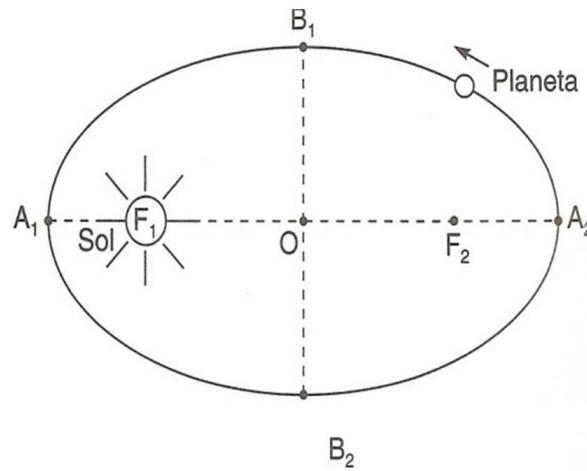


Figura 2 Órbita de um planeta em torno do sol
 Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

(a) A soma da distância do centro do planeta ao centro do Sol com a distância do centro do planeta a F_2 é igual a distância de A_1 a A_2 .

(b) A distância de A_1 a O é igual à distância do centro do sol a B_1 .

(c) Sendo a e b os semieixos maior e menor da elipse, respectivamente, sua equação é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(3) (GIOVANNI et al., 2005)(UERJ) Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100 cm x 200 cm e uma semi-elipse. Observe as figuras:

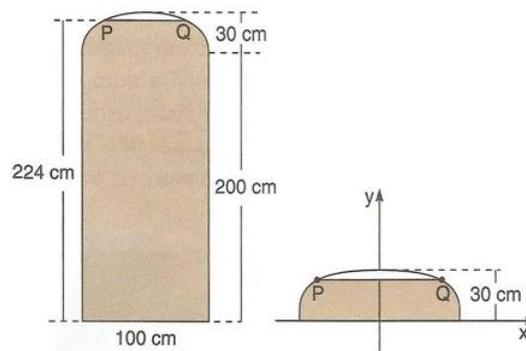


Figura 3 Porta colonial
 Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

Na semi-elipse o eixo maior mede 100 cm e o semieixo menor, 30 cm. Calcule a medida da corda \overline{PQ} , paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224 cm de altura.

(4) (GIOVANNI et al., 2005)(UERJ) O logotipo de uma empresa é formado por duas circunferências concêntricas tangentes a uma elipse, como mostra a figura abaixo.

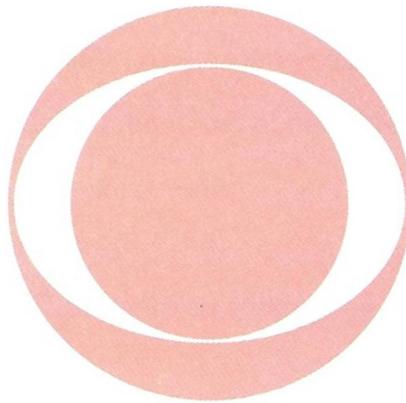


Figura 4 Logotipo

Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

A elipse tem excentricidade 0,6 e seu eixo menor mede 8 unidades. A área da região por ela limitada é dada por $a.b.\pi$, em que a e b são as medidas dos seus semieixos. Calcule a área da região definida pela cor rosa.

(5) (GIOVANNI et al., 2005)(UFRJ) Um satélite é colocado em órbita elíptica em torno da Terra (suposta esférica), tendo seus pólos como focos. Em certo sistema de medidas o raio da Terra mede 3 unidades. Ao passar pelo plano do Equador, o satélite está, no mesmo sistema de medidas, a uma unidade acima da superfície terrestre. Determine a que altura h o satélite estará quando passar diretamente sobre o pólo Norte.

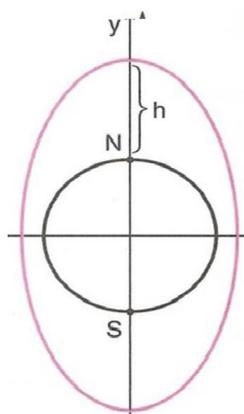


Figura 5 Satélite em torno da terra

Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

(6) (GIOVANNI et al., 2005)(UnB-DF) Numa mesa, desenha-se uma linha reta sobre a qual ao fixamos 2 pregos, de modo que a distância entre eles seja de 8 cm. Em seguida, prende-se um cordão de 10 cm nos pregos (figura 53):

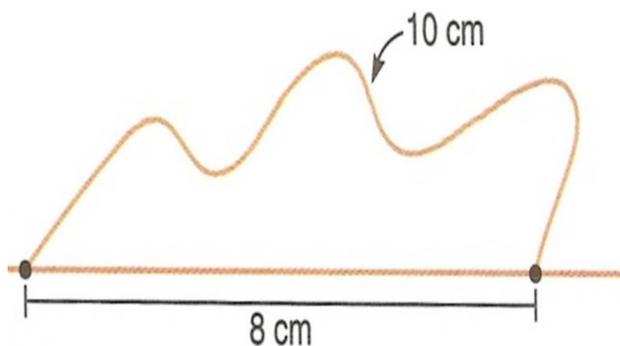


Figura 6 Pregos e barbante

Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

Com um lápis, sustenta-se o cordão, de modo a esticá-lo sobre a mesa (figura 7):

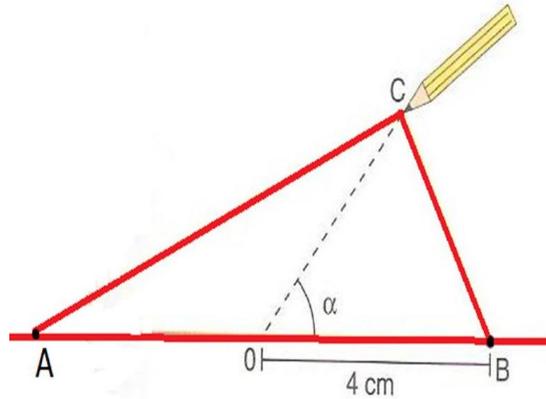


Figura 7 Lápis esticando o cordão
 Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

Julgue as proposições:

- (a) O conjunto de todas as possíveis posições do ponto C é uma elipse.
- (b) Quando (na Figura 7) $AC = BC$, a distância OC é igual a 3 cm.
- (c) Quando a ponta do lápis estiver sobre a reta desenhada, então sua distância ao ponto O será de 8 cm.
- (d) A distância OC (Figura 7) será máxima quando o ângulo α for igual a $\frac{\pi}{4}$ radianos.
- (e) A distância OC é mínima quando $\alpha = \pi$ radianos.

(7) (GIOVANNI et al., 2005) A órbita da Terra é uma elipse, estando o Sol em um de seus focos. O eixo maior mede, aproximadamente, $3 \cdot 10^8$ km e a excentricidade é $\frac{1}{60}$. Calcule a maior e a menor distância da Terra ao Sol.

(8) (GIOVANNI et al., 2005)(UFF- RJ) Haroldo, ao construir uma piscina, amarra as extremidades de uma corda de 6m de comprimento nas estacas E_1 e E_2 . Com o riscador R , estica a corda, de modo a obter o triângulo E_1RE_2 . Deslizando o riscador R de forma que a corda fique sempre esticada e rente ao chão, obtém o contorno da piscina desenhado na figura 8.

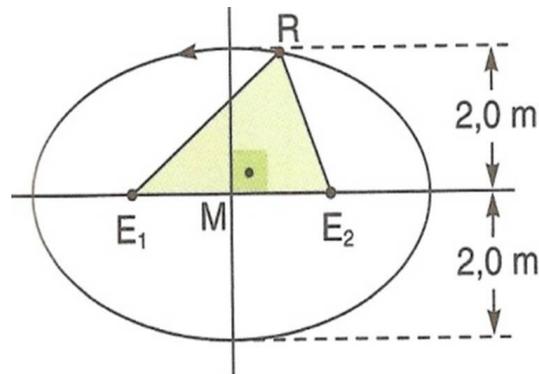


Figura 8 Piscina elíptica

Fonte: (GIOVANNI et al., 2005)

Se M é o ponto médio de E_1E_2 , a distância entre as estacas é:

- (a) $\sqrt{5}m$
- (b) $\sqrt{6}m$
- (c) $2\sqrt{5}m$
- (d) $2\sqrt{6}m$
- (e) $6\sqrt{2}m$

(9) (SILVA et al., 2005) (Unicamp - SP) A órbita de um satélite é uma elipse que tem a Terra em um de seus focos. Esse satélite atinge velocidade máxima e mínima nos pontos de menor e maior proximidade da Terra, respectivamente, quando então essas velocidades são inversamente proporcionais às distâncias do satélite a Terra (com a mesma constante de proporcionalidade). Calcule a excentricidade da órbita do satélite, sabendo também que a velocidade máxima é o dobro da velocidade mínima. (A excentricidade, como se sabe, é o quociente da distância entre os focos pelo comprimento do eixo maior).

(10) (SILVA et al., 2005) (Fatec - SP) A equação da elipse que tem focos nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e contém o ponto $\left(1, \frac{15}{4}\right)$ é:

- (a) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$
 (b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$
 (c) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$
 (d) $\frac{64x^2}{17} + \frac{64y^2}{81} = 1$
 (e) $\frac{24x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$

(11)(RIBEIRO, 2010)(Fuvest - SP) A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, interceptam-se nos pontos A e B. Pode-se afirmar que o ponto médio de AB é:

- (a) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
 (b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$
 (c) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$
 (d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
 (e) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(12) (RIBEIRO, 2010) Determine as coordenadas do centro da elipse $15x^2 + 12y^2 - 210x + 72y + 663 = 0$.

(13)(RIBEIRO, 2010)(UEL PR) Em uma praça dispõe-se de uma região retangular de 20 m de comprimento por 16 m de largura para construir um jardim. A exemplo de outros canteiros, este deverá ter a forma elíptica e estar inscrito nessa região retangular. Para aguar-lo, serão colocados dois aspersores nos pontos que correspondem aos focos da elipse. Qual será a distância entre esses dois aspersores?

- (a) 4m
- (b) 6m
- (c) 8m
- (d) 10m
- (e) 12m

(14)(RIBEIRO, 2010)(ENEM) uma elipse é uma seção plana de um cilindro circular reto, em que o plano que intersecta o cilindro é oblíquo ao eixo do cilindro (Figura 9). É possível construir um sólido de nome elipsoide que, quando seccionado por três planos perpendiculares entre si, mostra elipses de diferentes semieixos a , b e c , como na Figura 9. O volume de um elipsoide de semieixos a , b e c é dado por $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

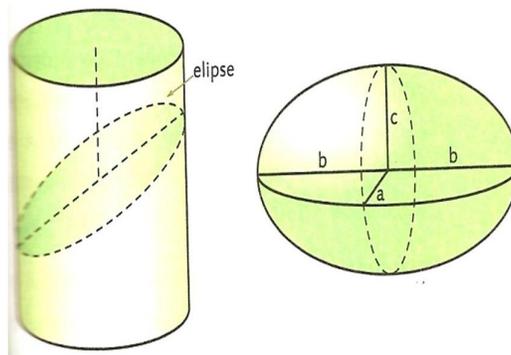


Figura 9 Corte do cilindro e elipsoide

Fonte: (RIBEIRO, 2010)

Considere que um agricultor produz melancias, cujo formato é aproximadamente um elipsoide, e ele deseja embalar e exportar suas melancias em caixas na forma de um paralelepípedo retângulo. Para melhor acondicioná-las, o agricultor preencherá o espaço vazio da caixa com material amortecido de impactos (palha de arroz/serragem/bolinhas de isopor).

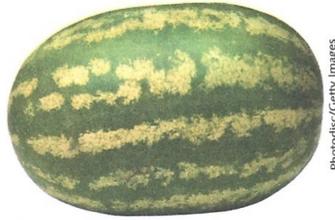


Figura 10 Melancia
Fonte: (RIBEIRO, 2010)

Suponha que sejam a , b e c , em cm , as medidas dos semieixos do elipsoide que modela as melancias, e que sejam $2a$, $2b$ e $2c$, respectivamente, as medidas das arestas da caixa. Nessas condições, qual é o volume de material amortecedor necessário em cada caixa?

- (a) $V = 8abc \text{ cm}^3$
- (b) $V = \frac{4}{3}abc \text{ cm}^3$
- (c) $V = \left(8 + \frac{4\pi}{3}\right)abc \text{ cm}^3$
- (d) $V = \left(8 - \frac{4\pi}{3}\right)abc \text{ cm}^3$
- (e) $V = \left(\frac{4\pi}{3} - 8\right)abc \text{ cm}^3$

(15)(RIBEIRO, 2010)(Cefet- PB) Um designer de interiores está decorando um ambiente cujo teto tem forma elíptica, conforme mostra a figura. Objetivando colocar luminárias nos pontos correspondentes aos focos da elipse, ao fazer as medidas, ele verificou que a soma das medidas de A_1A_2 e B_1B_2 é igual a 32 m, e que as medidas de A_1A_2 , L_1L_2 e B_1B_2 formam nessa ordem, uma PA. Sendo Assim,, a distância entre L_1 e A_1 é de:

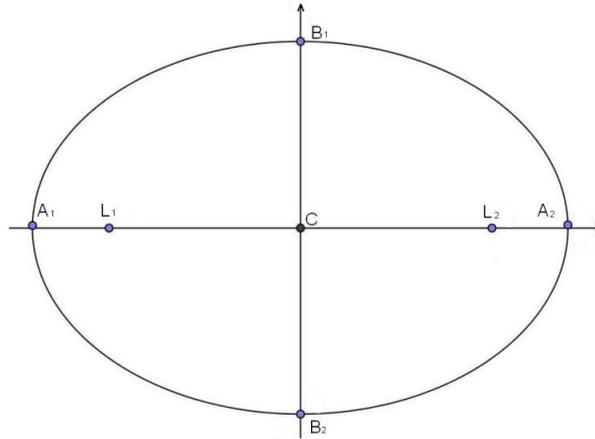


Figura 11 Ambiente elíptico

- (a) 2m
- (b) 1m
- (c) 3m
- (d) 4m
- (e) 1,5m

(16)(RIBEIRO, 2010)(UFV - MG) Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno da Terra, a equação da órbita do satélite é dada por $9x^2 + 25y^2 - 288x - 1296 = 0$, em que x e y são medidos em milhares de quilômetros. Nessas condições, é correto afirmar que:

- (a) A menor distância do satélite a Terra é 16000 km.
- (b) A distância do ponto (16,12) da órbita do satélite a Terra é 28000 km
- (c) A maior distância do satélite a Terra é 36000 km.
- (d) A órbita do satélite passa pelo ponto de coordenadas (0,36).
- (e) A excentricidade da órbita do satélite é $\frac{3}{4}$.

(17)(GOULART, 2005)Obter a equação da elipse que é o conjunto dos pontos P do plano tais que a soma das distâncias entre P e $F_1(-4,0)$ e entre P e

$F_2(4,0)$ seja constante e igual a 10.

(18)(DANTE, 2010)A tabela abaixo mostra a excentricidade da órbita elíptica ao redor do Sol dos oito planetas do sistema solar. Qual dos planetas tem a órbita mais parecida com uma circunferência? Para esse planeta, calcule a diferença percentual entre o tamanho do semieixo menor e do maior.

Tabela 2: Excentricidade das órbitas dos planetas. Fonte: (DANTE, 2010).

Planeta	Excentricidade da órbita
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Netuno	0,010

(19)(DANTE, 2010) Sabendo que a órbita de Mercúrio em torno do Sol tem excentricidade 0,106; que o Sol é sempre um dos focos da elipse das órbitas planetárias; que a unidade astronômica (UA) vale 1 para a distância média entre o Sol e a Terra; que o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol chama-se afélio e, no afélio, Mercúrio está a 0,47 UA do Sol; e que o ponto da órbita em que o planeta está mais próximo do Sol chama-se periélio, obtenha, em unidades astronômicas, a distância de Mercúrio ao Sol no periélio.

(20)(DANTE, 2010) De acordo com a 2ª lei de Kepler, a reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Ou seja, os planetas se movem mais rapidamente quando próximos ao sol. De acordo com a figura abaixo, em qual ponto a velocidade do planeta é menor?

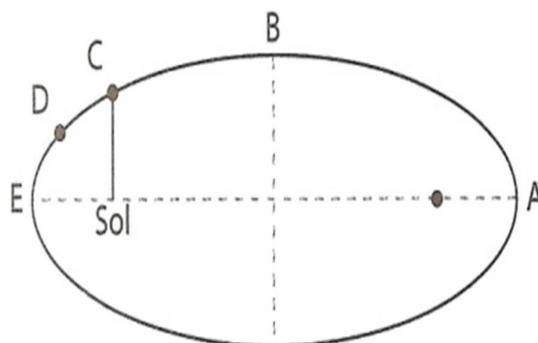


Figura 12 Órbita do planeta em torno do sol
 Fonte: (DANTE, 2010)

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

(21)(DANTE, 2010) Sabendo que as distâncias entre o Sol e o periélio (ponto da órbita mais próximos do Sol) e entre o sol e o afélio (ponto da órbita mais afastado do Sol) no movimento de translação da Terra são respectivamente, 147×10^6 km e 152×10^6 km. Calcule a medida da distância focal da trajetória elíptica sabendo que a excentricidade da curva é $\frac{1}{50}$.

(22)(BARROSO, 2010) Observe os esboços das elipses. Mesmo sem as medidas, é possível associá-las a uma equação. Analise a forma e a posição de cada elipse e associe a uma equação. Registre e justifique sua resposta.

- (I) $x^2 + 100y^2 = 1$
- (II) $x^2 + \frac{10y^2}{9} = 1$
- (III) $100x^2 + y^2 = 1$

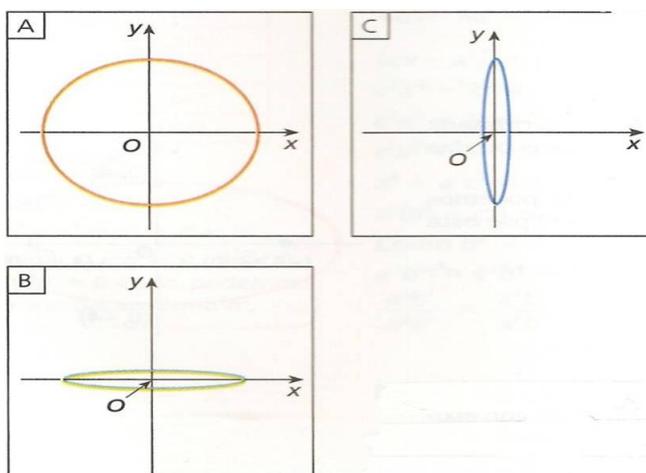


Figura 13 Elipses

Fonte: (BARROSO, 2010)

(23)(BARROSO, 2010) Na elipse representada na figura, a circunferência inscrita tem raio 2, centro na origem e passa por F_1 e F_2 da elipse. Determine a equação da elipse.

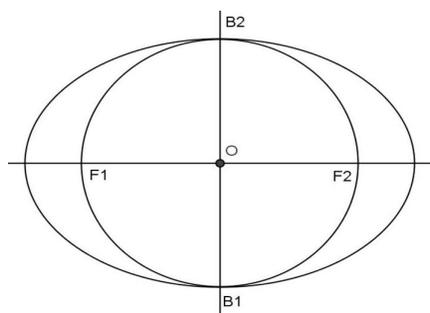


Figura 14 Circunferência inscrita na elipse

Fonte: (GeoGebra)

(24) (LEHMANN, 1966) Em cada um dos exercícios, encontrar as equações transformadas ao girar os eixos coordenados pelo ângulo indicado.

(a) $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0 : (\theta = 45^\circ)$

$$(b) 5x^2 - 3xy + y^2 - 4 = 0 \left(\arctg \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

(25) (LEHMANN, 1966) Em cada uma das alternativas abaixo, transforme por uma rotação dos eixos coordenados a equação dada em outra em que não apareça o termo misto.

$$(a) 4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$$

$$(b) 9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$$

$$(c) 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$$

(26) (LEHMANN, 1966) Determinar a natureza do lugar geométrico da equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$. Reduzir a equação para sua forma canônica por transformação de coordenadas. Traçar o lugar geométrico e todos os sistemas de coordenadas que sejam necessários.

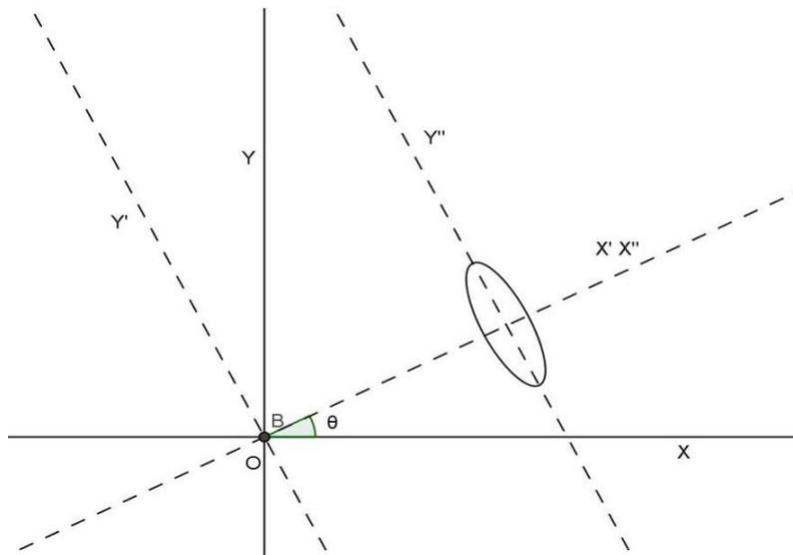


Figura 15 Elipse com os novos eixos coordenados

(27) (LEHMANN, 1966) Em cada um dos exercícios abaixo, determinar a natureza da cônica que representa a equação dada, e reduzir a equação na sua forma canônica por transformação de coordenadas. Traçar o lugar geométrico, quando exista, e todos os sistemas de eixos coordenados:

$$(a) 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$$

$$(b) 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$$

(28) (LEHMANN, 1966) Em um sistema polar traçar os seguintes pontos:

$$P(1, 135^\circ), Q(-2, \frac{\pi}{3}), R(3, 75^\circ), S(-4, \frac{2\pi}{3}), T(5, \frac{5\pi}{4}), U(-2, 210^\circ), \\ V(-3, \frac{5\pi}{6}), X(3\sqrt{2}, 135^\circ)$$

(29)(LEHMANN, 1966) Construa o triângulo cujos vértices são:

$$P(5, 60^\circ), Q(-2, \frac{7\pi}{4}), R(-4, 150^\circ)$$

(30)(LEHMANN, 1966) Passar a equações cartesianas dadas para a sua forma polar.

$$(a) x^2 + y^2 = 4$$

$$(b) x^2 - 4y - 4 = 0$$

(31)(LEHMANN, 1966) Em cada um dos exercícios passar a equação polar para a forma cartesiana:

$$(a) r - r\cos\theta = 4$$

$$(b) r = 2\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(32)(ANTON et al., 2000)O cometa Halley (visto em 1986) tem uma excentricidade de 0,97 e um semieixo maior $a = 18,1$ UA.

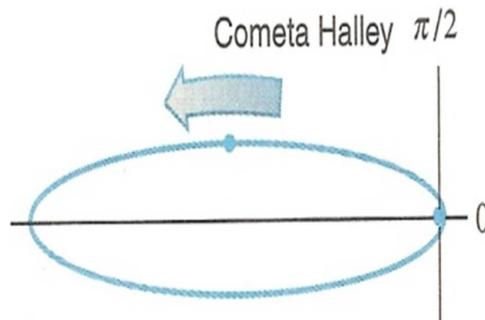


Figura 16 Órbita do cometa Halley
Fonte: (ANTON et al., 2000)

- (a) Determine a equação de sua órbita no sistema de coordenadas polares mostrada na figura
- (b) Determine o período de sua órbita
- (c) Determine as distâncias do periélio e do afélio

(33)(ANTON et al., 2000)Um módulo lunar da missão Apólo orbita a Lua em órbita elíptica com excentricidade $e = 0,12$ e semi eixo maior $a = 2015$ km. Supondo a Lua sendo uma esfera de raio 1740 km, determine a altura máxima do módulo acima da superfície lunar.

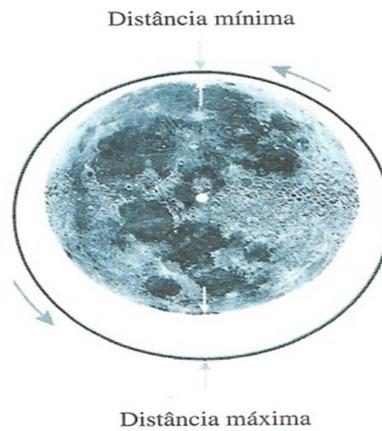


Figura 17 Superfície Lunar
Fonte: (ANTON et al., 2000)

(34)(ANTON et al., 2000)A órbita do planeta plutão tem excentricidade $e = 0,249$ e o semieixo maior $a = 39,5$ UA.

(a) Determine o período T em dias.

(b) Determine as distâncias do periélio e do afélio.

(c) Escolha um só sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no pólo, e determine uma equação polar da órbita de Plutão naquele sistema de coordenadas.

(d) Faça um esboço da órbita com proporções razoavelmente precisas.

(35) (ANTON et al., 2000) (a) Seja a o semieixo maior da órbita de um planeta em torno do Sol, e seja T seu período. Mostre que se T é medido em dias e a em quilômetros, então $T = (365 \times 10^{-9})(a/150)^{\frac{3}{2}}$.

(b) Use o resultado da parte (a) para encontrar o período do planeta Mercúrio em dias, dado que o seu semieixo maior é $a = 57,95 \times 10^6$.

(c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o Sol no pólo e encontre uma equação para a órbita de Mercúrio naquele sistema de coordenadas, dado que a excentricidade da órbita é $e = 0,206$.

(d) Use um recurso gráfico computacional para gerar a órbita de Mercúrio a partir da equação obtida na parte c.

(36)(ANTON et al., 2000)O cometa Hale-Bopp, descoberto independentemente em 23 de julho de 1995, por Alan Hale e Thomas Bopp, tem uma excentricidade orbital de $e = 0,9951$ e um período de 2380 anos:

(a) Determine seu semieixo maior em unidades astronômicas (UA).

(b) Determine a distância do seu periélio e afélio.

(c) Escolha um sistema de coordenadas polares com o centro do Sol no pólo, e determine uma equação para a órbita do Hale-Bopp naquele sistema de coordenadas. :

(d) Faça um esboço da órbita do Hale-Bopp com proporções razoavelmente precisas.

(37) (ANTON et al., 2000) Acredita-se que o planeta Júpiter tenha um centro de rocha e raio 10.000 km, circundado por duas camadas de hidrogênio - uma camada grossa de 40.000 km de hidrogênio comprimido quase metálico e outra de 20.000 km de camada grossa de hidrogênio molecular regular. Os aspectos visíveis, tais como a grande mancha vermelha, estão na superfície externa da camada de hidrogênio molecular. Em 6 de novembro de 1997, a espaçonave Galileo foi colocada na órbita jupiteriana para estudar a lua Europa. A órbita tinha excentricidade 0,814580 e semieixo maior 3.514.918,9 km. Determine a altura mínima e máxima de Galileo acima da camada de hidrogênio molecular.

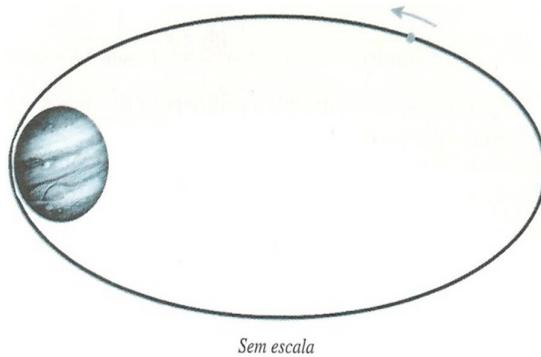


Figura 18 Planeta júpiter
Fonte: (ANTON et al., 2000)

(38) (AYRES JÚNIOR, 1973) Mostre que o ponto $A = \left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$ é um ponto da elipse $r = \frac{3}{4 + 2\text{sen}\theta}$

(39) (AYRES JÚNIOR, 1973) Trace a cônica $r = \frac{18}{5 + 4\text{sen}\theta}$

(40) (KINDLE, 1976) Determine a natureza da cônica definida pela equação $r = \frac{12}{4 + 3\text{sen}\theta}$

41) (KINDLE, 1976) Achar a equação polar da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

RESPOSTAS

(1) 12 m

(2) (a) v (b) v (c) f

(3) 60 cm

(4) 21π

(5) 2 unidades

(6) (a) v (b) v (c) f (d) f (e) v

(7) $1,525 \times 10^8$ km e $1,475 \times 10^8$ km

(8) C

(9) $\frac{1}{3}$

(10) B

(11) D

(12) C(7,-3)

(13) E

(14) D

(15) A

(16) C

(17) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

(18) Vênus. 0,0024%

(19) 0,31 UA

(20) A

(21) $2c = 6 \cdot 10^6$ km

(22) A - II, B - I, C - III

(23) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(24) (a) $4y'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0$ (b) $11x'^2 + y'^2 - 4 = 0$

(25) (a) $5x'^2 + 2x' - y' - 1 = 0$

(b) $21x'^2 + 15y'^2 - 10 = 0$

(c) $6x'^2 + y'^2 - 2 = 0$

(26) Elipse, equação: $6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 29 = 0$ ou $6x''^2 + y''^2 = 1$

(27) (a) $y''^2 - 4x'' = 0$ (b) $x''^2 + 2y''^2 = 2$

(30) (a) $r = 2$ (b) $r = \frac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$

(31) (a) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ (b) $y^2 - 8x - 16 = 0$

(c) $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$ (d) $y^2 + 8x - 16 = 0$

(32) (a) A equação polar da órbita tem a forma $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$. Mas $a(1 - e^2) = 18,1[1 - (0,97)^2] \approx 1,07$. Assim, a equação da órbita é $r = \frac{1,07}{1 + 0,97\cos\theta}$.

(b) como $a = 18,1$, o período da órbita é $T = (18,1)^{\frac{3}{2}} \approx 77$ anos

(c) $r_0 = 18,1(1 - 0,97)(150 \times 10^6) \approx 81.500.000$ km

$r_1 = 18,1(1 + 0,97)(150 \times 10^6) \approx 5.350.000.000$ km

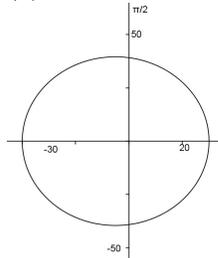
(33) $d_{\min} = r_0 - 1740 = a(1 - e) - 1740 = 2015(0,88) - 1740 \approx 33,2$ km

$d_{\max} = r_1 - 1740 = a(1 + e) - 1740 = 2015(1,12) - 1740 \approx 516,8$ km

(34) (a) $T \approx 248$ anos(b) $r_0 \approx 4.449.675.000$ km e $r_1 \approx 7.400.325.000$ km.

(c) $r \approx \frac{37,05}{1 + 0,249\cos\theta}$ UA.

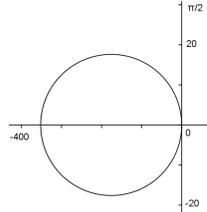
(d)

(36) (a) $a \approx 178,26$ UA

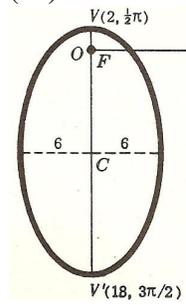
(b) $r_0 \approx 0,8735 \text{ UA}$ e $r_1 \approx 355,64 \text{ UA}$

(c) $r \approx \frac{1,74}{1 + 0,9951 \cos \theta} \text{ UA}$

(d)



(39)



(40) elipse

(41) $9r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta = 36$ ou $r^2(4 + 5 \cos^2 \theta) = 36$