LUCIANA PINTO FREITAS

ATIVIDADES ALGÉBRICAS NO 6^o ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2014

LUCIANA PINTO FREITAS

ATIVIDADES ALGÉBRICAS NO 6^o ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof^a. Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
JULHO DE 2014

LUCIANA PINTO FREITAS ATIVIDADES

ALGÉBRICAS NO 6^o ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 01 de Julho de 2014.

Prof. Mikhail Petrovich Vishnevskii
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof^a. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IF Fluminense

Prof^a. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela grandiosa força concedida, me permitindo concluir este curso.

À minha orientadora, por ter me conduzido a importantes reflexões e pela dedicação prestada em todas as etapas do trabalho.

A toda equipe de professores do PROFMAT-UENF, pela excelência na qualidade das aulas, pelo cuidado, incentivos e amizade que sempre tiveram com os alunos.

A todos os companheiros de turma, pela solidariedade nos momentos de estudo.

Aos Professores doutores membros dessa banca, pela disponibilidade e pelas ponderações e críticas que certamente contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro que recebi ao longo de todo o curso de mestrado.

A álgebra é generosa; frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu.

Jean Le Rond d'Alembert

Resumo

O presente trabalho busca contribuir para a inclusão de práticas que estimulem o pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade e que sirvam como base para a introdução da linguagem algébrica nos anos finais do ensino fundamental. São propostas atividades das quais o objetivo é desenvolver habilidades como: perceber regularidades, realizar generalizações, estabelecer relações de igualdade e interpretar situações-problema. Aos professores que tenham interesse em adotar tais práticas são apresentadas, como sugestões, questões que requerem as habilidades citadas anteriormente e cujas resoluções são apoiadas no uso de materiais manipuláveis. Para testar a viabilidade da inserção desta temática no cotidiano de sala de aula, foi criada uma sequência didática e implementada, no período de abril a maio do ano de 2014, em uma turma de 6^o ano do ensino fundamental. Os resultados, analisados a partir de uma pesquisa mista (qualitativa e quantitativa), mostraram que o trabalho com atividades incentivadoras do pensamento algébrico foi positivo para a classe na qual a experiência foi realizada.

Palavras-chaves: Pensamento algébrico, materiais manipuláveis, sequência didática.

Abstract

This study seeks to contribute to the inclusion of practices that encourage algebraic thinking from the early years of schooling and serve as a basis for the introduction of algebraic language in the final years of primary school. Activities are proposed with the goal to develop skills such as perceive regularities, making generalize, establish relations of equality and interpret problem situations. For teachers who are interested in adopting such practices are presented as suggestions, issues that require the skills mentioned above and whose resolutions are supported in the use of manipulative materials. To test the feasibility of inclusion of this theme in daily life classroom, a teaching sequence was created and implemented in the period from April to May of 2014, in a class of 6th grade of elementary school. The results, analyzed from a mixed research (quantitative and quantitative), showed that work with activities that encourage algebraic thinking was positive for the class in which the experiment was performed.

Key-words: algebraic thinking, manipulatives materials, teaching sequence.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
EVA	Espuma vinílica acetinada
EF	Ensino Fundamental
km	Quilômetros
WI-FI	*Wireless Fidelity*

Sumário

Introdução

O trabalho com a álgebra se estabelece a partir do sétimo ano do ensino fundamental (EF). De acordo com os PCNs, “embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas”. (BRASIL, 1998, p. 50)

A iniciação dos alunos na álgebra é marcada pela introdução de conceitos como variável, incógnita, expressão algébrica e equação. São mudanças consideráveis com relação aos anos anteriores e costuma ser traumático quando o aluno não possui nenhuma experiência com atividades de natureza algébrica. Conforme cita Sessa,

> Para os professores, de um lado, a álgebra representa a ferramenta matemática por excelência; poder-se-ia dizer que eles se formam numa matemática algebrizada. Os alunos, de outro lado, veem a álgebra como fonte infinita de incompreensão e de dificuldades operacionais insuperáveis.(SESSA, 2009, p. 6)

Trabalhar aspectos da álgebra desde os primeiros anos de escolaridade integrada à aritmética cria uma base para a compreensão dos conceitos que serão introduzidos nos anos finais do EF e estimula o desenvolvimento do pensamento algébrico, sobre o qual Van de Walle faz as seguintes considerações:

> O pensamento algébrico ou raciocínio algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda matemática e é essencial para torná-la útil na a vida cotidiana. (VAN DE WALLE, 2009, p. 287)

Os PCNs BRASIL (1998, p. 84) orientam que seja realizada desde os primeiros anos de escolaridade a “pré-álgebra”, por meio da qual “as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações.” Como incentivador desta abordagem educacional, destaca-se um projeto americano denominado *“early algebra”* [1], que defende a interligação entre álgebra e aritmética e realiza pesquisas neste sentido. Conforme explica Neagoy,

[1] http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp

> Este movimento, conhecido como “early algebra”, para a comunidade de ensino de matemática, não significa ensinar a álgebra tradicional escolar mais cedo. Pelo contrário, trata-se de promover formas de pensar, fazer e comunicar sobre a matemática e de ensino-aprendizagem com a compreensão. Trata-se de fazer a conexão, analisando as relações, observando a estrutura, mudança de estudo e solução de problemas, é sobre justificar, conjecturar, generalizar, simbolizar e matematizar, que são hábitos críticos de mente. [2] (NEAGOY, 2009, p. 1, tradução nossa)

Diante da importância de desenvolver o raciocínio algébrico o quanto antes, este trabalho apresenta uma proposta didática com esta finalidade, que poderá servir de inspiração para professores interessados no tema e ser aplicada, com as devidas adaptações, desde o primeiro ciclo do EF.

Fundamentada nas pesquisas bibliográficas realizadas durante a elaboração desta dissertação, a primeira parte deste trabalho propõe atividades com potencial para estimular o pensamento algébrico, baseadas no uso de três tipos de materiais concretos bastante difundidos no meio educacional: os blocos lógicos, o material dourado e as barras de Cuisenaire.

Conforme ressalta CARVALHO, GOMES e PIRES (2010, p. 163), a condição básica para a construção do pensamento algébrico é a criação e coordenação de relações, “construídas não apenas por meio do mero manuseio da linguagem, mas também por meio de situações e experiências com materiais manipuláveis.”

A segunda parte do trabalho descreve a implementação de uma sequência didática, constituída de quatro seções de atividades em grupo, realizada em uma turma do sexto ano do EF da Escola Municipal Maria Antônia Pessanha Trindade, no município de Campos dos Goytacazes.

Para descrever o desenvolvimento deste trabalho a estruturação dos capítulos é feita da seguinte forma:

No capitulo 1 são apresentadas algumas concepções de álgebra, feitas considerações sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do EF e levantadas dificuldades que os alunos podem apresentar ao se iniciarem na álgebra.

O capitulo 2 faz uma breve exposição sobre a relevância da adoção de materiais manipuláveis no ensino da matemática, apresenta alguns exemplares e sugere uma série de atividades, relacionadas à “pré-álgebra”, que podem ser desenvolvidas utilizando estes materiais como recursos.

---

[2] This movement, known as “early” algebra, to the math education community, is not about teaching traditional school algebra early. Rather, it’s about fostering ways of thinking about, doing, and communicating about mathematics, and of teaching and learning mathematics with understanding. It1s about making connections, analyzing relationships, noticing structure, studying change and solving problems, it’s about justifying, conjecturing, generalizing, symbolizing and mathematizing, all of which are critical habits of mind.

O capítulo 3 descreve a implementação da proposta didática, realizada com alunos de sexto ano do EF da Escola Municipal Maria Antônia Pessanha Trindade, que investigou as características do pensamento algébrico utilizadas e desenvolvidas pelos alunos

O capitulo 4 apresenta as considerações finais acerca do trabalho e avalia a viabilidade da proposta.

Finalmente, é apresentada a lista de referências bibliográficas e o apêndice.

Capítulo 1

Álgebra e Pensamento Algébrico

Quando se fala em educação algébrica na atualidade não é pertinente pensarmos em regras mecanicistas e sem objetivos, a álgebra é vista como uma ferramenta que abre horizontes aos alunos para todas as áreas do conhecimento.

Neste capítulo são enumeradas algumas concepções de álgebra baseadas na compreensão de USISKIN (1995) e dos PCNs BRASIL (1998), com destaque especial para a caracterização do pensamento algébrico.

Ao final, são apresentadas algumas dificuldades que os alunos enfrentam quando se iniciam na aprendizagem de álgebra. Conhecer tais dificuldades previamente permite ao professor fazer um planejamento para enfrentá-las e saná-las da melhor forma possível.

1.1 As Concepções de Álgebra

USISKIN (1995) defende quatro concepções de álgebra, que determinam as finalidades da mesma. Estas concepções são mais direcionadas para o EF e se baseiam nos diferentes empregos das variáveis. São elas:

1.1.1 Álgebra como Aritmética Generalizada

Nesta visão, é comum usar variáveis como generalizadoras de modelos:

$$3 + 5.7 = 5.7 + 3, \quad \text{como}, \quad a + bc = bc + a \tag{1.1}$$

Traduzir e generalizar são as instruções chaves desta concepção. (USISKIN, 1995, p. 13)

1.1.2 Álgebra como Estudo de Meios Para Resolver Problemas

Dentro desta concepção a álgebra nos serve na resolução de problemas, tais como:

"Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número."

Esta concepção se distingue da primeira pelo fato de que além de modelar (traduzir) o problema, é necessário resolvê-lo. As variáveis passam a ser incógnitas ou constantes.

As instruções chaves são simplificar e resolver. (USISKIN, 1995, p. 14)

1.1.3 Álgebra como Estudo das Relações entre Grandezas

Nesta concepção os modelos matemáticos estabelecem uma relação concomitantemente de dependência e independência entre grandezas que variam. As letras assumem o significado de variável e não de incógnita como nas equações. Por exemplo, a fórmula que relaciona a área A de um retângulo, com sua base b e altura h,

$$A = b.h \tag{1.2}$$

Nesta situação a variável assume dupla significação: como "argumento", quando se refere aos elementos do domínio de uma função (b e h); ou "parâmetro", se for o número obtido pela dependência dos valores do argumento (A).

As instruções chaves são relacionar e graficar. (USISKIN, 1995, p. 15)

1.1.4 Álgebra como Estudo das Estruturas

Aqui se define a álgebra como estudo das estruturas devido às propriedades que são atribuídas às operações com números reais e polinômios. Dado o exemplo:

$$3x^2 + 4ax - 132a^2 \tag{1.3}$$

Observa-se que o mesmo não se enquadra em nenhuma das concepções anteriores, pois não se trata de uma função ou relação, não há equação a ser resolvida e nenhum modelo aritmético esta sendo generalizado. No estudo das estruturas, a variável é um símbolo arbitrário estabelecido por certas propriedades.

As instruções chaves são manipular e justificar. (USISKIN, 1995, p. 17)

É possível perceber que os PCNs BRASIL (1998, p. 50), quando determinam que os alunos devem reconhecer as diferentes funções da álgebra, se baseiam em concepções semelhantes às estabelecidas por (USISKIN, 1995):

- Generalizar padrões aritméticos;
- Estabelecer relação entre duas grandezas
- Modelizar e resolver problemas aritmeticamente difíceis

Os PCNs orientam que o privilégio atribuído pelos professores ao estudo do cálculo algébrico e das equações não é suficiente para a aprendizagem dos conteúdos algébricos. É preciso percorrer todas as concepções de álgebra, de forma articulada.

> Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra, PCNs (BRASIL, 1998, p. 116)

1.2 Demonstrações do Pensamento Algébrico

Muito tem se falado sobre desenvolver o pensamento algébrico, mas o que demonstra este pensamento?

PONTE, BRANCO e MATOS (2009) defendem que o grande objetivo do estudo da álgebra no EF é o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, que vai muito além de manipular símbolos. Para os autores,

> O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10)

Pensar algebricamente é independente de usar o simbolismo algébrico. Um aluno pode ter um pensamento algébrico sem ter domínio da linguagem algébrica.

Em (SANTOS, 2010, p. 3) foi encontrado um problema que foi aplicado a alguns alunos do 8^o ano do EF:

"Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan. Quantas figurinhas têm cada um?"

Foi constatado que a maioria dos alunos recorreram a processos aritméticos para resolver este problema. Segundo SANTOS (2010) cerca de 30% dos alunos recorreram à divisão por três para obter os valores desconhecidos. Em contrapartida, aproximadamente 10% dos alunos do 6^o ano utilizaram um raciocínio algébrico na solução do mesmo problema, de forma análoga à ilustrada na Figura 1:

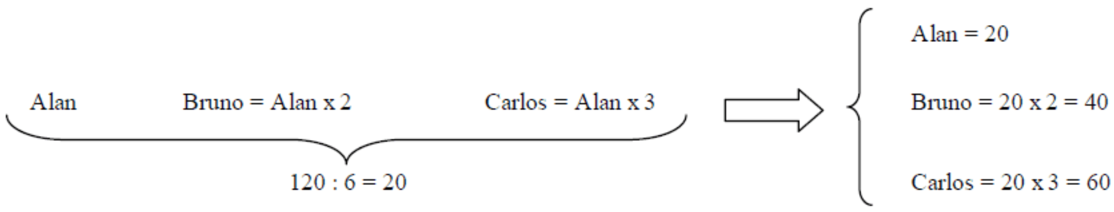


Figura 1 – Solução do problema da partilha
Fonte: (SANTOS, 2010, p. 4)

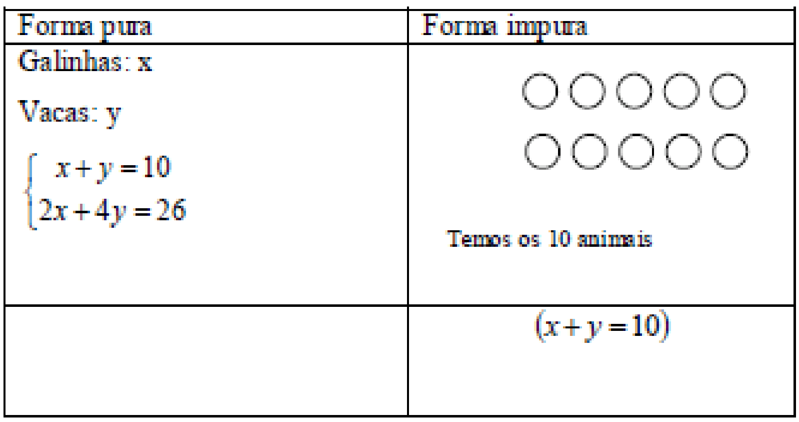
Santos conclui que,

> Por esse protocolo podemos observar que, mesmo se esse aluno não representa formalmente a equação, ele mostra ser capaz de reconhecer as relações envolvidas no problema e elaborar uma representação mental da equação. Nesse caso, dizemos que esse aluno está "pensando algebricamente", ao contrário do aluno que simplesmente divide o total de figurinhas por três, que estaria trabalhando em um pensamento aritmético, (SANTOS, 2010, p. 4).

Outro exemplo, expõe uma situação-problema que normalmente só seria apresentada aos alunos no 7^o ou 8^o ano do EF, como parte do conteúdo de sistemas de equações de primeiro grau.

Em um sítio existem vacas e galinhas, num total de 10 cabeças e 26 patas. Quantos animais de cada tipo existem nesse sítio? (SANTOS, 2010, p. 6).

A estratégia utilizada pelos alunos de quarto ano de escolaridade para resolver este problema, definida por SANTOS (2010) como "forma impura", demonstra que o raciocínio algébrico prescinde a linguagem simbólica e pode ser estimulado em classes dos anos iniciais. As figuras seguintes mostram duas formas distintas de resolver a situação-problema:



Forma pura	Forma impura
Galinhas: x Vacas: y $\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=26 \end{cases}$	Temos os 10 animais
	$(x+y=10)$

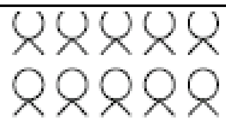
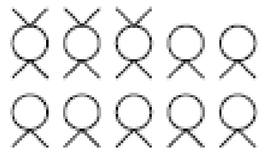
$\begin{cases} x+y=10\times(-2) \\ 2x+4y=26 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x-2y=-20 \\ 2x+4y=26 \end{cases}$	 Damos duas patas para cada animal: $(2x+2y=26)$
$+2y=6$	Subtraindo, sobram 6 patas $(2y=26)$
$y=3$ logo, $x=7$	Dividindo as patas que sobraram. 
Portanto, temos 3 vacas e 7 galinhas.	$y=\frac{6}{2}$ Temos 3 vacas e 7 galinhas

Figura 2 – Resoluções da situação-problema
Fonte: (SANTOS, 2010, p. 8)

FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL (1993, p. 88) analisaram uma série de situações nas quais acreditavam ser possível, em maior ou menor grau, que estivesse presente o pensamento algébrico e concluíram que não existe uma forma única de expressar o pensamento algébrico, que pode ser por meio de linguagem: geométrica, aritmética ou algébrica (quando é de natureza simbólica).

Diante do fato de não necessitar de uma linguagem estritamente simbólico-formal, a primeira etapa da educação algébrica pode ocorrer nas séries iniciais e fazendo uso de situações-problema de modo a garantir o exercício dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, que são, segundo (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87):

- Percepções de regularidades;
- Percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam;

- Tentativa de expressar a estrutura de uma situação-problema;
- Presença da generalização.

PONTE, BRANCO e MATOS (2009) apresentam três vertentes fundamentais do pensamento algébrico, que estão descritas na Figura 3:

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Figura 3 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico
Fonte: (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 11)

Os PCNs BRASIL (1998, p. 64) orientam para o 3^o ciclo do EF, que compreende os 6^o e 7^o ano, que o desenvolvimento do pensamento algébrico seja feito por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas;
- Traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
- Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
- Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar abstratamente, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo

> informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL, 1998, p. 117)

BRANCO (2013) cita algumas abordagens que podem ser feitas nos anos iniciais de escolaridade com objetivo de explorar de aspectos algébricos:(BRANCO, 2013, p. 24)

- Trabalhar com expressões numéricas para desenvolver o pensamento relacional;
- Generalizar expressões numéricas, usando números como quase-variável;
- Explorar sequências pictóricas de crescimento para desenvolver a generalização;
- Introduzir variáveis e da covariação usando problemas verbais (*word problems*);
- Usar problemas para introduzir a linguagem algébrica;
- Utilizar o conceito de função para ligar diversos tópicos matemáticos.

1.3 Dificuldades na Iniciação à Álgebra

Para BOOTH (1995, p. 24), "em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral".

Os erros mais comuns dentre os alunos que se iniciam na álgebra ocorrem por associarem as operações e representações algébricas às aritméticas. Algumas dificuldades mais ocorrentes na iniciação da álgebra são citadas por (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009) e (BOOTH, 1995).

1.3.1 Interpretação dos Símbolos da Soma e Multiplicação

O maior problema causado por estes símbolos é que em aritmética eles dão o comando para que se efetue uma ação. O aluno é levado a obter um resultado, daí erros como:

$$2a + 5b = 7ab \qquad (1.4)$$

Segundo BOOTH (1995, p. 27) isso ocorre porque há uma dificuldade em aceitar a "ausência de fechamento". Ele ressalta que é importante deixar claro que "$2 + 3$" não representa apenas uma instrução, mas o resultado de uma adição. Ler a expressão como "some 2 com 3" ou "o número que é 3 a mais que 2" em vez de "2 mais 3" também ajudará a mostrar ao aluno que o símbolo operatório é mais do que o comando para uma ação. (BOOTH, 1995, p. 28)

Quanto ao símbolo da operação de multiplicação, segundo BOOTH (1995), o aluno tende a compreender $3n$ como $3 + n$. Isso ocorre porque quando estuda o sistema de numeração decimal o número natural pode ser representado conforme o exemplo a seguir:

243 = 2 centenas + 4 dezenas + 3 unidades

Outra situação que contribui para a confusão gerada pelo símbolo de multiplicação é a maneira de representar as frações mistas, nas quais o símbolo da adição pode ser ocultado:

$$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

A proposta para evitar esta dificuldade é que durante algum tempo se represente a multiplicação como 3xn em vez de $3n$ até que o aluno se habitue à nova notação. (BOOTH, 1995, p. 28)

1.3.2 A Relação de Igualdade e o Símbolo "="

Para PONTE, BRANCO e MATOS (2009, p. 73), a igualdade representa, em aritmética, uma relação de equivalência. Eles consideram que "a mudança de significado do símbolo "=" é um dos aspectos que mais dificuldade traz aos alunos."

Em Aritmética, os alunos estão habituados a encarar a expressão $5 + 7 =$ como indicativo de uma operação que precisa ser resolvida. Em Álgebra, $x + 5 = 7$ não é uma operação, mas uma condição. Existe uma pergunta implícita: Qual o valor que satisfaz esta igualdade?

Para solucionar as dificuldades ligadas ao sinal de igualdade, PONTE, BRANCO e MATOS (2009, p. 20) defendem que é preciso desde os anos iniciais trabalhar com os alunos situações que os façam reconhecer este sinal como representação de uma equivalência entre expressões e os estimule a analisar e comparar essas expressões.

Para BOOTH (1995, p. 29)"é preciso acentuar o valor bidirecional do sinal de igualdade, tanto se exigindo a leitura adequada do símbolo", não usar expressões como "2 mais 3 dá 5". É importante que o professor trabalhe relações do tipo $a + b = c$, mas também o modelo $c = a + b$ e ainda $a + b = c + d$.

1.3.3 A Interpretação das Letras

As letras, que também estão presentes na aritmética, podem causar dificuldades porque na álgebra elas representam números. Na aritmética a representação $3m$ pode ser interpretada como 3 metros, enquanto que em álgebra ela representa o produto entre dois números: 3 e m.

BOOTH (1995, p. 31) recomenda cuidado ao usar afirmações do tipo "a representa o numero de abacaxis" o que leva o aluno a converter "$3a$" em "3 abacaxis", em vez de "3 vezes o numero de abacaxis."

Outra questão levantada pela autora é referente a igualdade $x + y + z = x + p + z$. Mesmo quando os alunos interpretam as letras como representações de números, há uma forte tendência a considerar que elas representam valores únicos. Para combater este erro é importante que o professor atividades que os estimule a pensar em situações deste tipo, como por exemplo a citada acima em que $y = z$. (BOOTH, 1995, p. 32)

1.3.4 Interação entre Linguagem e Interpretação

O aluno não consegue converter a situação-problema em uma representação algébrica. Essa dificuldade é devida a falta do estimulo ao raciocínio, que deve ser incentivado desde os primeiros anos escolares. Schoen, enumera alguns princípios que podem orientar o professor que trabalha com resolução de problemas:

- Apoiar o aprendizado de coisas novas no conhecimento e compreensão que os alunos já possuem; (SCHOEN, 1995, p. 137)
- Ir gradualmente da verbalização para a linguagem algébrica; (SCHOEN, 1995, p. 138)
- Introduzir os tópicos de álgebra com aplicações;(SCHOEN, 1995, p. 139)
- Ensinar os tópicos de álgebra com base em perspectivas de como eles podem ser aplicados; (SCHOEN, 1995, p. 139)
- Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares na compreensão e resolução de problemas; (SCHOEN, 1995, p. 141)
- Comprometer os alunos com a resolução de problemas. (SCHOEN, 1995, p. 141)

Capítulo 2

Atividades Propostas

Este capítulo propõe atividades que podem ser aplicadas desde os primeiros anos de escolaridade, de forma cada vez mais aprofundada a medida em que se aproxima dos anos finais do EF. Pela abrangência das atividades, há uma sugestão de uso de materiais manipuláveis (ou concretos), principalmente para os primeiros ciclos.

Inicialmente, é feita uma breve revisão bibliográfica sobre a relevância do uso destes materiais no ensino da matemática, logo depois são apresentados três materiais bastante populares na educação: material dourado, barras de Cuisenaire e os blocos lógicos.

O capítulo se encerra com os modelos de atividades propostas que apresentam os aspectos caracterizadores do pensamento algébrico: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativa de expressar a estrutura de uma situação-problema e presença da generalização, (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87).

2.1 Materiais Manipuláveis nas Atividades Matemáticas

Segundo Grossnickle, Junge e Metzner, "Materiais manipuláveis são objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia", (GROSSNICKLE; JUNGE; METZNER, 1951, p. 162, tradução nossa). [1]

Para TURRIONI e PEREZ (2006, p. 61), estes materiais facilitam a observação e a análise, desenvolvem o raciocínio lógico, crítico e científico, são fundamentais para o ensino experimental e excelentes para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

O uso de materiais manipuláveis (ou concretos) nas aulas de matemática pode trazer grandes benefícios quando aplicados na introdução dos conteúdos. Espera-se que

[1] Manipulative materials are objects or things that the pupil is able to feel, touch, handle and move. They may be real objects which have social application in our everyday affairs, or they may be objects which are used to represent an idea

os alunos possam avançar para o raciocínio abstrato a partir de conexões feitas com o conhecimento desenvolvido na manipulação do material.

PASTELLS (2009, p. 13) recomenda que "sempre que se introduza uma nova competência matemática, o melhor processo de ensino-aprendizagem deverá incluir o manuseio com diferentes materiais", pois a diversidade de recursos e estratégias para abordar um mesmo conteúdo permite a interiorização do conhecimento matemático de forma significativa.

Já Mendes ressalta que,

> É importante, entretanto, que o professor perceba a necessidade de relacionar as atividades manipulativas com as operações matemáticas realizadas no caderno de cada aluno, pois o material faz parte desse processo cognitivo de produção matemática, mas não se encerra em si. Isso porque a aprendizagem é um processo progressivo que não se esgota na manipulação de modelos físicos, mas nas relações manipulativo-simbólicas e abstrativas estabelecidas em cada atividade. (MENDES, 2009, p. 26)

Segundo Lorenzato, a eficiência do material manipulável depende da maneira como será aplicado pelo professor LORENZATO (2006, p. 27). Para Mendes, não é adequado que o professor use estes materiais como peça motivadora ocasional ou em situações que o aluno é apenas espectador. (MENDES, 2009, p. 25)

Com relação à faixa etária, Lorenzato acredita que o material didático manipulável facilita a aprendizagem qualquer que seja o assunto, curso ou idade. Esta opinião conflita com a ideia de que estes materiais só devem ser utilizado por crianças. Segundo o autor, é importante que o assunto seja uma novidade para a classe e apesar da utilização do material, possivelmente, tornar o ensino mais lento no início, haverá uma compensação em relação à compreensão adquirida. (LORENZATO, 2006, p. 30)

RÊGO e RÊGO (2006, p. 54) orientam sobre alguns cuidados que devem ser tomados por parte do professor quando optar por utilizar materiais manipulativos em suas aulas:

- Dar tempo para que os alunos conheçam o material;
- Incentivar a comunicação e troca de ideias, alem de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidas;
- Mediar o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
- Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
- Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados;

- Estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material.

Materiais manipulativos voltados para a educação geralmente são comercializados a um preço bastante elevado para a aquisição do professor, mas existe a possibilidade de construí-los ou adaptá-los com os alunos, em sala de aula, utilizando materiais alternativos, com custo mais baixo, ou recicláveis.

Construir os recursos manipuláveis com os alunos revela, como afirma Lorenzato (2006), uma das melhores potencialidades do material didático, pois é o momento em que poderão surgir os imprevistos e dúvidas que conduzirão os alunos a fazerem conjecturas e descobrirem caminhos e soluções. (LORENZATO, 2006, p. 28)

2.2 Materiais de Apoio na Composição das Atividades

O material dourado Montessori

O material dourado Montessori foi idealizado pela médica e educadora italiana Maria Montessori (1870-1952) para auxiliar o ensino sensorial, a aprendizagem do sistema de numeração decimal e a efetuar as operações fundamentais MÁRQUEZ et al. (2009, p. 28). Baseado no nosso sistema de numeração ele é composto por cubos e apresenta a configuração ilustrada na Figura 4:

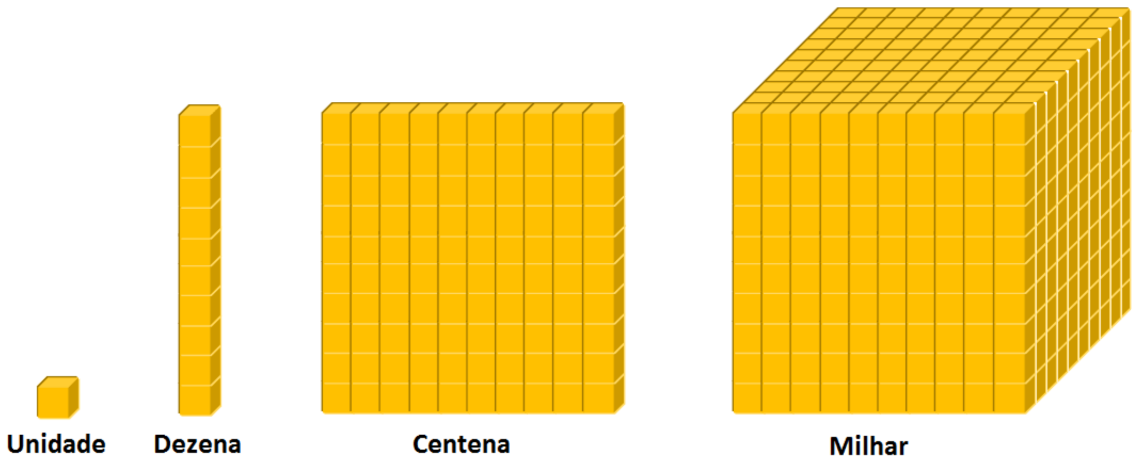


Figura 4 – Material dourado
Fonte: Autoria própria

Quando foi idealizado o material era confeccionado com contas douradas(daí a origem do nome), mas atualmente é comercializado em madeira e até em EVA, a partir do qual é possível confeccionar o material em sala de aula.

Os blocos lógicos

Um dos materiais lógico estruturados (nos quais os atributos se combinam de todas as formas possíveis) mais populares são blocos projetados pelo matemático Zoltan P. Dienes. Este material baseia-se em quatro características e onze atributos: cor(vermelho, amarelo e azul), forma(quadrado, círculo, retângulo e triângulo), tamanho(grande e pequeno) e espessura(grosso e fino). A combinação dos atributos resulta em 48 diferentes peças semelhantes às da figura 5. (PASTELLS, 2009, p. 18)

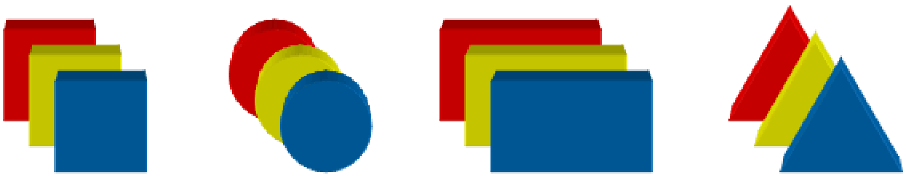


Figura 5 – blocos lógicos
Fonte: Autoria própria

Os blocos podem ser confeccionados em sala de aula com EVA e adaptações podem ser feitas a fim de modificar as possibilidades de uso, uma vez que devido a distinção entre as peças algumas atividades são inviáveis de serem realizadas.

A escala de Cuisinaire

As barras na Figura 6, também conhecidas como escalas ou réguas de Cuisenaire foram criadas pelo professor de matemática Emile Georges Cuisenaire (1891-1980), para ajudar no ensino dos conceitos básicos de Matemática. Foi assim que surgiu a Escala de Cuisenaire, um material constituído de um conjunto de 10 diferentes barras distinguidas por cor e comprimento: Brancas - 1cm; Vermelhas - 2cm; Verdes claro - 3cm; Rosas - 4cm; Amarelas - 5cm; Verdes escuros - 6cm; Pretas - 7cm; Marrons - 8cm; Azuis - 9cm; Laranjas - 10cm.

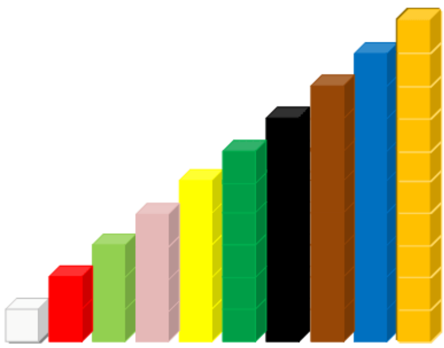


Figura 6 – Escala de Cuisenaire
Fonte: Autoria própria

As barras podem ser úteis para ordenar e comparar tamanhos, corresponder cores, comprimentos, numerais e quantidades, construir a soma e a diferença, entre outras funções, LORENZATO (2008, p. 70). Sua confecção em sala de aula também pode ser realizada usando o EVA.

2.3 Atividades

2.3.1 Atividade 1 - Sequência Crescente com Material Dourado

Com o material dourado é possível construir e explorar sequências crescentes, Figura 7, as quais são formadas por elementos diferentes e cada elemento depende do termo anterior e de sua posição (ordem) na sequência.

Propostas de investigação:

a) Relacionar termo com posição

b) Estabelecer relação entre os termos

c) Investigar características dos termos

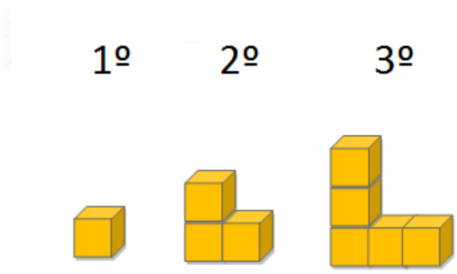


Figura 7 – Sequência crescente - material dourado
Fonte: Autoria própria

Questões a serem levantadas:

1. *Represente o próximo elemento da sequência:*

2. *Complete a tabela de acordo com o número de cubinhos em cada ordem:*

Ordem (n)	1	2	3	4	5	7	8	...	12
Número de cubos (C_n)	1	3	5					...	

3. *Quantos cubinhos existirão na posição 8?*

4. *Qual propriedade é possível perceber nesta sequência?*

5. *É possível construir um elemento com 6 cubinhos? Explique?*

6. *Qual é a diferença entre o número de cubinhos de duas ordens adjacentes?*

7. *Quantos cubinhos existirão na posição 12?*

8. *A partir da regularidade observada determine o termo geral da sequência*

Com o auxílio do material dourado os alunos podem reproduzir a sequência, percebendo a regularidade existente. A partir disto, serão capazes de representar o elemento referente a 4^a ordem e completar a tabela.

Os alunos poderão expressar as propriedades da sequência ressaltando o fato dos elementos representarem números ímpares ou da razão ser constante de uma ordem para a seguinte.

Uma vez percebido que os elementos representam o conjunto dos números ímpares, alunos dos primeiros anos de escolaridade poderão prever a partir de somas sucessivas o número de elementos de posições maiores, porém próximas. Já para alunos que tiverem conhecimento da linguagem algébrica, é possível calcular o número de elementos de ordens distantes e inclusive realizar generalização para a ordem n, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 - C_1 &= 2 \\ C_3 - C_2 &= 2 \\ C_4 - C_3 &= 2 \\ C_5 - C_4 &= 2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ C_n - C_{n-1} &= 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Logo

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + ... + C_n - (C_1 + C_2 + ... + C_{n-1}) &= 1 + 2(n-1) \\ C_n &= 1 + 2n - 2 \\ C_n &= 2n - 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3.2 Atividade 2 - Sequência Repetitiva com Blocos Lógicos

Os blocos lógicos permitem construir uma variedade de sequências repetitivas, Figura 8. Uma sequência repetitiva possui uma unidade (formada por vários elementos) que se repete de forma cíclica.

Propostas de investigação:

a) Relacionar termo com posição.

b) Estabelecer relação entre os termos.

c) Explorar raciocínio multiplicativo.

d) Estabelecer padrão.

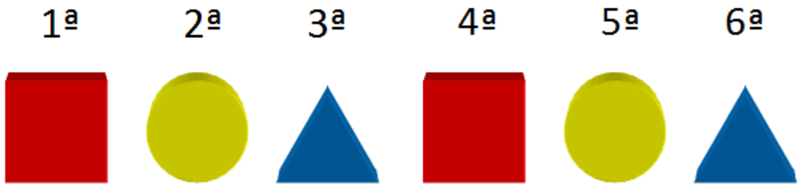


Figura 8 – Sequência repetitiva - blocos lógicos
Fonte: Autoria própria

Questões a serem levantadas:

1. *Qual é a próxima figura da sequência?*
2. *Que característica você observou na sequência?*
3. *Quais números são representados por sólidos de bases circulares?*
4. *Nas primeiras vinte figuras, quantas sólidos de bases quadradas há?*
5. *Qual é figura existente na posição 10?*
6. *É possível que um sólido de base triangular ocupe a posição 100?*
7. *Quantos elementos possuem as 5 primeiras unidades repetitivas?*
8. *Crie uma sequência que apresente algum padrão:*
9. *Determine o termo geral das ordens ocupadas por sólidos de bases circulares:*

Com os blocos, os alunos podem representar várias ordens da sequência, percebendo a regularidade existente e as características da unidade cíclica. À medida que se tornam independentes do material conseguem, por meio de contagens, prever o elemento de uma ordem próxima.

Os alunos poderão expressar as propriedades da sequência ressaltando o fato de que a unidade repetitiva possui três elementos e que os sólidos de bases triangulares pertencem às ordens que representam os múltiplos de 3.

Alunos dos últimos anos de escolaridade, pedem ser capazes de investigar o termo geral da ordem referente a determinado elemento que se repete. Considerando o sólido de bases circulares, termo da 2^a ordem, pode-se observar que se repete regularmente nas ordens descritas na tabela abaixo: Os alunos devem ser estimulados a perceber que:

Ordem das figuras de bases circulares (P_n)	2	5	8	11	...	P_n

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \\ P_2 - P_1 &= 3 \\ P_3 - P_2 &= 3 \\ P_4 - P_3 &= 3 \\ P_5 - P_4 &= 3 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ P_n - P_{n-1} &= 3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + ... + P_n - (P_1 + P_2 + ... + P_{n-1}) &= 2 + 3(n-1) \\ P_n &= 2 + 3n - 3 \\ P_n &= 3n - 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Termo geral do sólido de bases circulares: $3n - 1$

Analogamente é possível deduzir os termos gerais dos outros elementos.

Termo geral do sólido de bases quadradas: $3n - 2$

Termo geral do sólido de bases triangulares: $3n$

2.3.3 Atividade 3 - Sequência Mista

Nesta atividade há uma repetição de termos representados por blocos lógicos intercalados a termos crescentes representados pelo material dourado. Esta é a característica de uma sequência mista, há um elemento que se repete ciclicamente e outro que varia de acordo com a ordem ocupada, Figura 9.

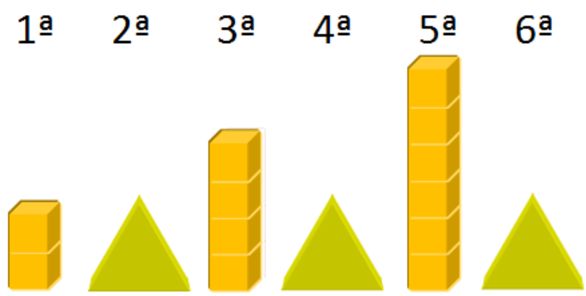


Figura 9 – Sequência mista - material dourado e blocos lógicos
Fonte: Autoria própria

Propostas de investigação:

a) Relacionar termo com posição.

b) Estabelecer relação entre os termos.

c) Investigar características dos termos.

Questões a serem levantadas:

1. *Continue a sequência até a décima posição:*
2. *Que característica você observou na sequência?*
3. *Qual é a propriedade dos números representados por sólidos de bases triangulares?*
4. *Que figuras estão representadas nos números ímpares?*
5. *Quantos cubos estarão na 9ª posição?*
6. *Quantos cubos estarão na 25ª posição?*
7. *É possível representar um termo com 7 cubos?*
8. *Encontre o termo geral para o número de cubos de uma posição* $2n-1$

Por meio dos materiais, os alunos podem estender a representação da sequência, percebendo as propriedades.

Os alunos poderão perceber que as ordens pares são compostas por triângulos e que as ímpares possuem um número par crescente de cubos.

Nos últimos anos de escolaridade, podem ser incentivados a investigar um termo geral que permita prever quantos cubos estão presentes numa ordem ímpar qualquer.

Ordens ímpares $(2n-1)$	1	3	5	7	...	$2n-1$
número de cubos (C_{2n-1})	2	4	6	8	...	C_{2n-1}

Os alunos podem ser estimulados a perceber que:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 2 \\
C_3 - C_1 = C_3 - 2 = 2 \leftrightarrow C_3 &= 4 \\
C_5 - C_3 = C_5 - 4 = 2 \leftrightarrow C_5 &= 6 \\
C_7 - C_5 = C_7 - 6 = 2 \leftrightarrow C_7 &= 8 \\
\vdots \qquad &\vdots \\
C_{2n-1} - C_{2n-3} = C_{2n-1} - (2n-2) = 2 \leftrightarrow C_{2n-1} &= 2n
\end{aligned}$$

2.3.4 Atividade 4 - Relações de Igualdade usando Barras de Cuisenaire

Nesta atividade, as barras de Cuisenaire são usadas para representar as relações de igualdade que envolvem valores desconhecidos. As incógnitas são representadas por um material manipulável na forma de prisma de base losangular, como ilustram as figuras 10, 11 e 12.

A resolução, para os primeiros ciclos, pode ser realizada levando o aluno a usar a ideia de compensação. A partir do 5^o ano, relações que apresentem duas operações podem ser aplicadas como preparação para o conteúdo de equações do primeiro grau, inserindo os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade.

Segundo SOUZA e PARATO (2012a),

> Ao adicionarmos ou subtrairmos um mesmo número nos dois membros de uma equação, a igualdade não se altera. Esse é o princípio aditivo da igualdade. De maneira semelhante, ao multiplicarmos ou dividirmos os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, a igualdade também não se altera. Esse é o princípio multiplicativo da igualdade.

Para introduzir o conteúdo de equações do 1^o grau no sétimo ano do EF, esta atividade já pode ser relacionada com a linguagem algébrica.

Os materiais usados como recursos são as barras de Cuisenaire.

Propostas de investigação:

a) Estabelecer relação de igualdade entre números e expressões numéricas.

b) Estabelecer relação de igualdade entre expressões numéricas.

c) Investigar o princípio aditivo e multiplicativo da igualdade.

d) Reconhecer as propriedades da adição.

Questões a serem levantadas:

1. *Calcule o valor desconhecido das igualdades:*
2. *Se forem adicionadas 3 unidades ao lado direito, o que deverá ser feito do lado esquerdo para manter a igualdade?*
3. *Se forem retiradas 3 unidades ao lado direito, o que deverá ser feito do lado esquerdo para manter a igualdade?*
4. *Se forem trocadas as posições das parcelas do lado direito ou esquerdo, a igualdade se manterá?*

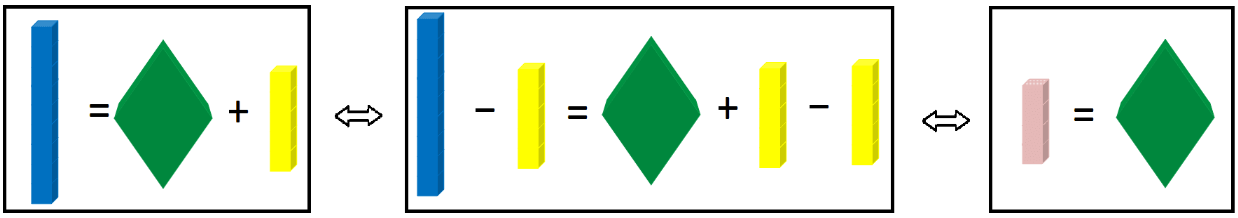


Figura 10 – Relação de igualdade (a) - barras de Cuisenaire
Fonte: Autoria própria

Solução algébrica

$$
\begin{aligned}
9 &= x + 5 \\
9 - 5 &= x + 5 - 5 \\
4 &= x
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

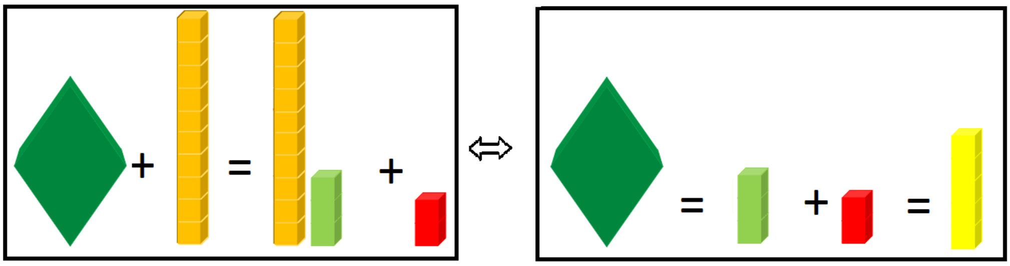


Figura 11 – Relação de igualdade (b) - barras de Cuisenaire
Fonte: Autoria própria

Solução algébrica

$$
\begin{aligned}
x + 10 &= 15 \\
x + 10 - 10 &= 15 - 10 \\
x &= 5
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

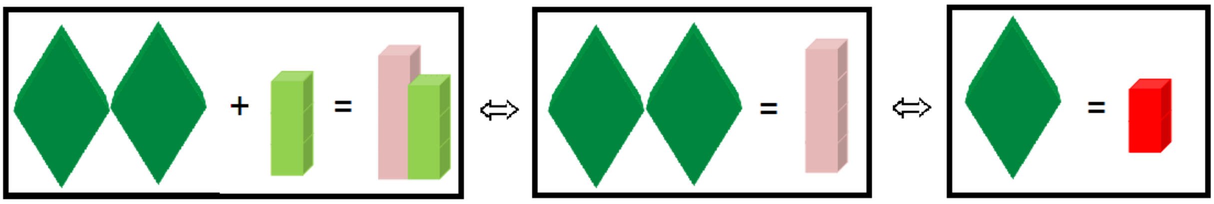


Figura 12 – Relação de igualdade (c) - barras de Cuisenaire
Fonte: Autoria própria

Solução algébrica

$$
\begin{aligned}
2x + 3 &= 7 \\
2x + 3 - 3 &= 7 - 3 \\
2x &= 4 \\
\frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \\
x &= 2
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Nas atividades sobre estas relações, deve-se levar o aluno a compreender o símbolo da igualdade como uma relação de equivalência e o da adição como uma ação. Os modelos propostos anteriormente buscam reforçar o aspecto bidirecional da igualdade.

Para desenvolver este tipo de atividade pode ser usada uma representação física da balança de dois braços, para que a situação de equilíbrio seja associada à ideia de equivalência. De acordo com Pontes, Branco e Matos:

> A situação das balanças em equilíbrio ajuda a desenvolver a compreensão do sinal de igual como indicando equivalência entre duas quantidades e a promover o surgimento de estratégias informais para a resolução de equações que os alunos devem conseguir justificar. Muitas vezes, estas estratégias permitem estabelecer relações com a representação da situação em linguagem algébrica e com os princípios de equivalência. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 106)

2.3.5 Atividade 5 - O Problema da Partilha de Figurinhas

O problema a seguir tem uma estrutura multiplicativa associada a um valor total.

"Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan. Quantas figurinhas têm cada um?" (SANTOS, 2010, p. 6).

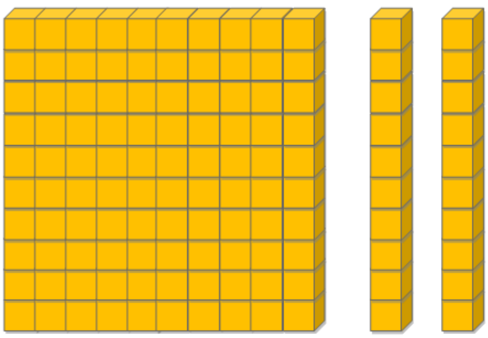


Figura 13 – Resolução da atividade proposta 5(a) - material dourado
Fonte: Autoria própria

A resolução sugerida, com o auxilio do material dourado (poderiam ser usadas as barras de Cuisenaire), inicia-se pela representação das 120 figurinhas totais, ilustrada na Figura 13:

De acordo com as hipóteses, os alunos devem ser orientados a solucionar o problema associando uma dezena ao Alan, duas dezenas ao Bruno e três dezenas ao Carlos, até que se esgotem. Esta solução busca levar o aluno a perceber que o total de figurinhas deve ser dividido por 6 e que 1 parte é atribuída a Alan, 2 partes a Bruno e 3 partes a Carlos, Figura 14.

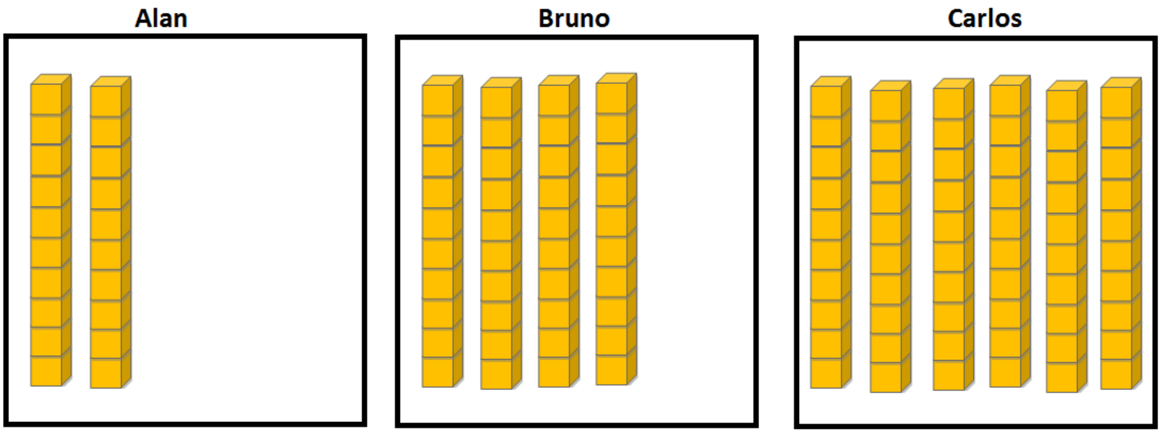


Figura 14 – Resolução da atividade proposta 5(b) - material dourado
Fonte: Autoria própria

De acordo com a distribuição conclui-se que Alan tem 20 figurinhas, Bruno 40 e Carlos 60.

Usando a linguagem algébrica, alunos nos últimos anos do EF deverão ser incentivados ao uso de uma representação análoga a que segue:

Considere,

a = número de figurinhas de Alan;

b = número de figurinhas de Bruno;

c = número de figurinhas de Carlos

$$
\begin{aligned}
a + 2a + 3a &= 120 \\
6a &= 120 \\
\frac{6a}{6} &= \frac{120}{6} \\
a &= 20
\end{aligned}
$$

Logo, $b = 2a = 40; \quad c = 3a = 60$.

2.3.6 Atividade 6 - Problema de Comparação Aditiva

O problema proposto tem uma estrutura aditiva associada a um valor total.

Num jogo de basquete foram feitos 150 pontos. As duas equipes teriam empatado se não fosse por uma diferença de 20 pontos. Quantos pontos marcou a equipe vencedora?

Nesta atividade são utilizadas as barras laranjas de Cuisenaire (poderia ser usado o material dourado) para representar o total de pontos da partida, Figura 15.

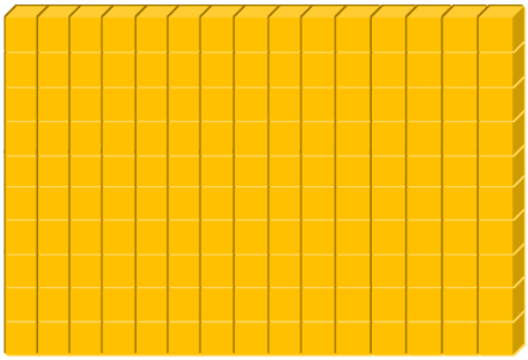


Figura 15 – Resolução da atividade proposta 6(a) - barras de Cuisenaire
Fonte: Autoria própria

De acordo com a hipótese, reserva-se a diferença de 20 pontos que pertence à equipe vencedora e dividi-se em partes iguais a quantidade referente aos pontos restante, conforme ilustrado na Figura 16.

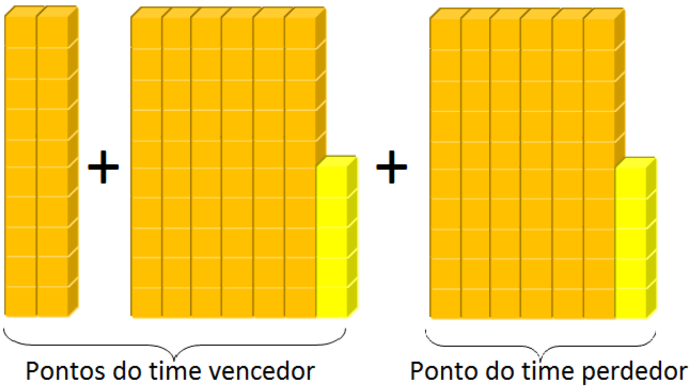


Figura 16 – Resolução da atividade proposta 6(b) - barras de Cuisenaire
Fonte: Autoria própria

Conclui-se que o time vencedor fez 85 pontos e o perdedor fez 65.

Usando a linguagem algébrica, alunos nos últimos anos do EF deverão ser incentivados ao uso de uma representação análoga a que segue:

Considere,

a = número de pontos do time vencedor

b = número de pontos do time perdedor

Das hipóteses temos que

$$a + b = 150$$
$$b = a - 20$$

Logo, substituindo temos:

$$a + a - 20 = 150$$
$$2a - 20 = 150$$
$$2a - 20 + 20 = 150 + 20$$
$$2a = 170$$
$$\frac{2a}{2} = \frac{170}{2}$$
$$a = 85$$

Portanto, $b = 85 - 20 = 65$.

Outra forma de resolver o problema seria supondo que:

$$a + b = 150$$
$$a = b + 20$$

Logo, substituindo temos:

$$b + 20 + b = 150$$
$$2b + 20 = 150$$
$$2b + 20 - 20 = 150 - 20$$
$$2b = 130$$
$$\frac{2b}{2} = \frac{130}{2}$$
$$b = 65$$

Portanto, $a = 65 + 20 = 85$

2.3.7 Atividade 7 - O Problema do Total de Alunos

O problema que segue foi descrito por SIMON e STIMPSON (1995). Os autores mostram uma solução, realizada por um professor, que se baseia no uso de diagramas. A solução adaptada com materiais concretos usa blocos lógicos para representar a incógnita e cubos de Cuisenaire para representar unidades.

"Numa classe $\frac{3}{5}$ dos alunos eram meninas. Dobrando-se o número de meninos e acrescentando-se 6 meninas, o número de meninos passou a ser igual ao de meninas. Quantos alunos havia na classe inicialmente?" (SIMON; STIMPSON, 1995, p. 155)

Inicialmente representa-se a primeira hipótese: a quantidade total de alunos é desconhecida, mas sabe-se que $\dfrac{3}{5}$ do número de alunos são de meninas, logo $\dfrac{2}{5}$ são meninos. Cada bloco vermelho representa a mesma quantidade (desconhecida) de alunos, Figura 17.

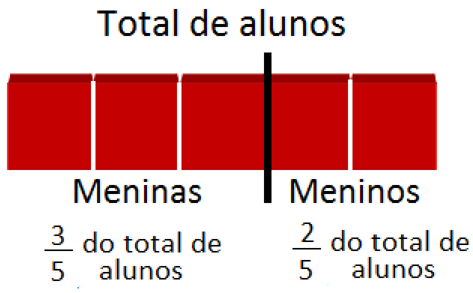


Figura 17 – Resolução da at. proposta 7(a) - barras de Cuisenaire e blocos lógicos
Fonte: Autoria própria

A segunda hipótese afirma que se dobrarmos o número inicial de meninos e adicionarmos 6 ao número inicial de meninas as quantidades de meninos e meninas ficarão iguais, conforme representação na Figura 18:

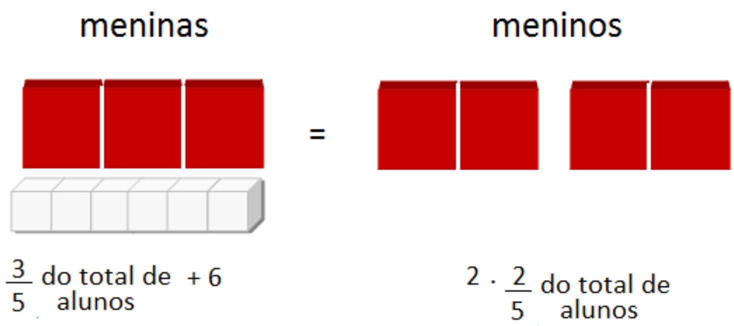


Figura 18 – Resolução da at. proposta 7(b) - barras de Cuisenaire e blocos lógicos
Fonte: Autoria própria

Pelo princípio aditivo da igualdade conclui-se que cada parte da fração da primeira hipótese equivale a 6, Figura 19. A partir da igualdade acima pode-se concluir que havia

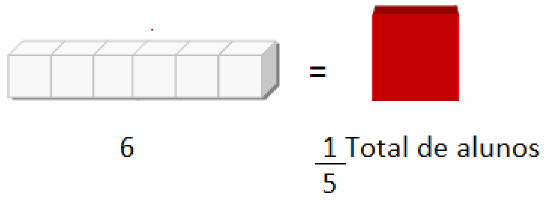


Figura 19 – Resolução da at. proposta 7(c) - barras de Cuisenaire e blocos lógicos
Fonte: Autoria própria

30 alunos inicialmente.

Para a solução algébrica do problema, considere:

x = número total de alunos

$\frac{3x}{5}$ = fração referente ao números de meninas

$\frac{2x}{5}$ = fração referente ao números de meninos

$$2.\frac{2x}{5} = \frac{3x}{5} + 6$$
$$\frac{4x}{5} = \frac{3x}{5} + 6$$
$$4x = 3x + 30$$
$$4x - 3x = 3x - 3x + 30$$
$$x = 30$$

Capítulo 3

Sequência Didática Aplicada em Sala de Aula

Este capítulo relata a implementação de uma proposta didática baseada nas atividades sugeridas no capítulo anterior. Inicialmente há uma descrição sobre a proposta, seguida dos detalhes da aplicação e análise dos resultados.

3.1 Proposta da Sequência Didática

A sequência didática proposta neste trabalho tem como objetivo estimular o pensamento algébrico dos alunos.

Segundo Zabala, sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”, (ZABALA, 1998, p. 18).

As atividades desenvolvidas são apoiadas na utilização de materiais concretos por tornarem o trabalho dos alunos mais dinâmico e interativo. Como ressalta Thompson, “alunos da terceira a sexta série conseguem aprender conceitos algébricos simples e têm vontade de fazê-lo quando lhes é permitido operar com material concreto”, (THOMPSON, 1995, p. 88).

As atividades garantem o exercício de habilidades como percepção de regularidades e capacidade de generalização por meio de sequências, resolução de situações-problema e trabalho com relações de igualdade.

De acordo com as classificações de USISKIN (1995), as questões são baseadas nas concepções de álgebra como aritmética generalizada e álgebra como meio para resolver certos tipos de problemas. As atividades 1 e 2 estimulam à tradução e generalização de situações, enquanto as atividades 3 e 4, que apresentam valores desconhecidos, dependem de ações como simplificar e resolver.

O público escolhido para realizar este trabalho foi de alunos do sexto ano do EF, porém as atividades podem ser aplicadas a anos de escolaridade do primeiro segmento, uma vez que não é necessária uma linguagem formal para expressar o pensamento algébrico, conforme ressaltam (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Após a aplicação da sequência didática, foi realizada uma atividade final, individual, cuja finalidade foi constatar se as atividades contribuíram para a melhoria do raciocínio algébrico. Pretende-se investigar se este conjunto de atividades é capaz de promover alguma evolução nos aspectos do pensamento algébrico dos alunos e para isto servirá de parâmetro uma atividade final aplicada na turma que realizou as atividades e em outra turma de 6^o ano da mesma escola, que não realizou as atividades.

3.1.1 Justificativa e Objetivos

Diante das orientações fornecidas pelos PCNs BRASIL (1998) e o que defendem autores como FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL (1993) e PONTE, BRANCO e MATOS (2009), sobre a introdução de atividades pré-algébricas desde os primeiros anos do EF, surgiu o interesse em desenvolver e aplicar uma sequência didática que estimulasse o pensamento algébrico servindo de base para a introdução do estudo da álgebra.

Segundo os PCNs

> No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra. (BRASIL, 1998, p. 68)

O objetivo desta proposta de ensino-aprendizagem é identificar que características do pensamento algébrico podem ser desenvolvidas pelos estudantes durante as seções de atividades. Os resultados obtidos poderão servir como referência para novas formas de abordagens no ensino da matemática. Pretende-se com a implementação da proposta:

- Desenvolver a capacidade de perceber regularidades e fazer generalizações por meio do trabalho com sequências;
- Promover o embasamento para o estudo das equações do primeiro grau por meio da noção de equilíbrio;
- Aprimorar a competência de resolver problemas.

3.1.2 Materiais e Tecnologias

Foram utilizados na confecção dos recursos didáticos:

Palitos

Usados na construção da sequência crescente na atividade sobre generalizações.

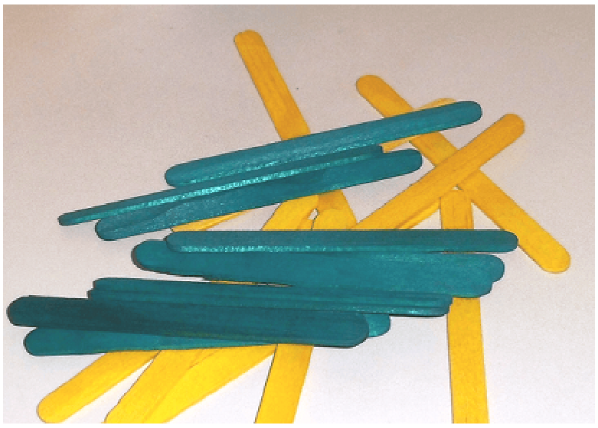


Figura 20 – Material concreto - palitos
Fonte: Autoria própria

Material em EVA:

Adaptados dos blocos lógicos, foram confeccionados sólidos (de bases triangulares, circulares e quadradas) coloridos para trabalhar as sequências nas atividades de generalização e de regularidades.

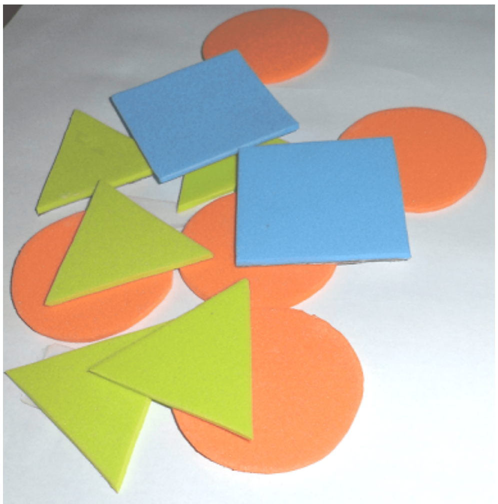


Figura 21 – Material concreto - formas geométricas em EVA
Fonte: Autoria própria

Um paralelepípedo, denominado pela autora de tapete da igualdade Figura 22, foi usado para representar as relações de equivalência. A construção deste objeto, inspirada nas balanças de equilíbrio, teve como objetivo auxiliar na compreensão do sinal de igual na comparação entre duas quantidades.

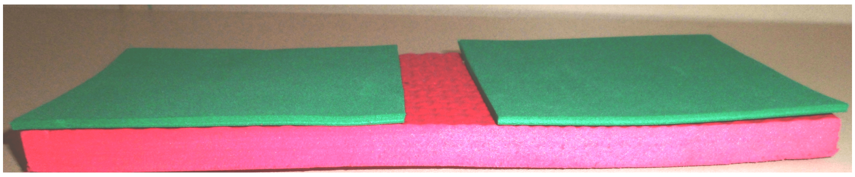


Figura 22 – Tapete da igualdade
Fonte: Autoria própria

Com base no material dourado, foram confeccionados cubinhos e barras representando a unidade e a dezena respectivamente. Para representar valores desconhecidos foram confeccionados prismas de bases losangulares. Estes materiais são usados nas atividades sobre relações de igualdade e resolução de problemas.

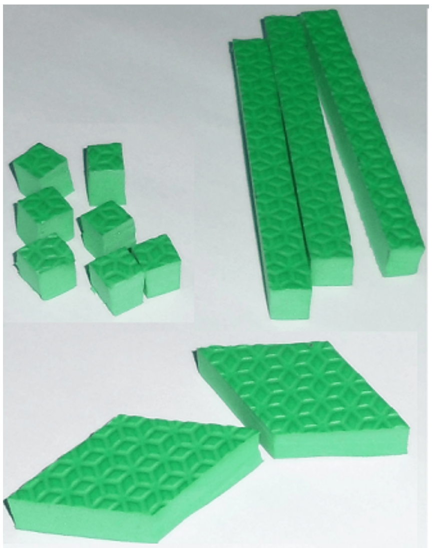


Figura 23 – Material concreto - unidade, dezena e incógnita
Fonte: Autoria própria

3.1.3 Recomendações Metodológicas

Todas as atividades serão realizadas em grupos de três ou quatro alunos para que haja interação e facilidade no apoio fornecido pelo professor. Todos os grupos receberão um *kit* de materiais concretos e folha de resposta referente a atividade a ser desenvolvida.

A sequência didática deve ser implementada, no caso do sexto ano do EF, preferencialmente no primeiro bimestre do ano letivo, no qual trabalha-se o conjunto dos números naturais. São reservadas oito horas-aula divididas em quatro encontros de duas horas-aula.

3.1.4 Dificuldades Previstas

O fato desta sequência propor uma forma não tradicional de conduzir a aula pode trazer estranhamento aos alunos.

A disposição dos alunos em grupos, o uso de material concreto e a atividade de investigação a ser realizada pode gerar dúvidas e algum tumulto. O professor deve se organizar para administrar estas situações.

Outro cuidado a ser tomado é o de dispor num mesmo grupo alunos com vários níveis de cognitivos, para que a interação seja mais proveitosa.

3.1.5 Metodologia da Aplicação

A sequência de atividades foi aplicada na Escola Municipal Maria Antônia Pessanha Trindade, localizada no município de Campos dos Goytacazes, no estado do Rio de Janeiro.

Trata-se de um distrito com característica rurais, distante aproximadamente 30 km do centro da cidade, que possui acesso à tecnologia, inclusive a escola possui sala de vídeo, laboratório de informática em fase de instalação e rede de internet *WI-FI*.

Duas turmas de 6^o ano do EF participaram do trabalho. A primeira, denominada turma de investigação, composta por 25 alunos com idades entre 10 e 14 anos, sendo 14 meninas e 11 meninos, participou de todas as atividades. A segunda, denominada turma de controle, composta por 25 alunos com idades entre 11 e 16 anos, sendo 10 meninas e 14 meninos, participou apenas da atividade final.

A escolha da escola foi feita pelos seguintes motivos:

- A pesquisadora atua como professora nas turmas de sexto ano;
- Os alunos são interessados e os problemas sociais não interferem de forma drástica no rendimento escolar;
- O quantitativo de alunos permite que seja realizado um trabalho onde todos poderão se manifestar.

O trabalho ocorreu durante o mês de abril do ano corrente. A cada seção havia um primeiro momento no qual os grupos eram formados e os *kits* de materiais distribuídos. Em seguida, os alunos realizavam a atividade de investigação com a mediação do professor que interagia com toda a classe sempre que alguma dúvida surgia.

A implementação da sequência didática foi realizada em cinco seções distribuídas conforme a tabela 1:

Tabela 1 – Cronograma das atividades

Tema	**Objetivos**	**Carga horária**
Generalização	Realizar generalizações próximas sobre sequências.	2 horas-aula
Regularidade	Reconhecer e construir padrões	2 horas-aula
Resolução de problemas	Modelar e Interpretar problemas e resultados;	2 horas-aula
Relação de igualdade	Compreender os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade; Compreender a relação de equivalência estabelecida pelo símbolo da igualdade.	2 horas-aula
Atividade final	Verificar se as atividades contribuíram para a melhoria do raciocínio algébrico	1 hora aula

Fonte: Elaboração própria

A seguir, é feito o detalhamento de cada seção realizada, destacando o ambiente, a atitude dos alunos, as atividades (que se encontram no Apêndice A) e as intervenções realizadas pela professora.

Atividade I - Generalizações - dia 04/04/2014

Na atividade 1 buscou-se desenvolver a capacidade de generalização. Para isso foram propostas situações em que os alunos tiveram que construir e explorar sequências com objetivos de:

- Analisar a regularidade e realizar previsões a partir do contexto geométrico;
- Explorar a relação entre o termo e sua ordem nas sequências;
- Expressar com palavras as relações observadas.

Estiveram presentes 17 alunos, que foram divididos em 5 grupos (A, B, C, D, E) de quatro ou três integrantes. Cada grupo recebeu um *kit* de material contendo 22 palitos para investigar a questão 1 e 7 sólidos de bases triangulares para a questão 2.

Os alunos se mostraram interessados e assim que receberam os materiais começaram a formar figuras geométricas de forma espontânea. Cerca de dez minutos depois foram orientados a iniciarem a atividade. Foi apresentado o conceito de sequência e esclarecido como seria o formato das sequências que seriam construídas com o material que eles haviam recebido. A conclusão da atividade se deu em 90 minutos.

Atividade II - Regularidades - dia 11/04/2014

Na atividade 2 foi explorada a capacidade de reconhecer e reproduzir padrões. Foram apresentadas sequências de figuras geométricas com objetivos de:

- Estender a representação de sequências;
- Identificar a unidade que se repete;
- Explorar a relação entre o termo e sua ordem nas sequências;
- Criar sequências com algum padrão.

Estiveram presentes 17 alunos, que foram divididos em 5 grupos (A, B, C, D, E) de quatro ou três integrantes. Cada grupo recebeu um *kit* de material contendo 3 sólidos de bases circulares, 3 de bases quadradas e 2 de bases triangulares, para investigar a questão 1; 15 sólidos de bases quadradas 4 de bases circulares para a questão 2.

Os alunos, inicialmente, tiveram um tempo para a livre manipulação dos sólidos. Logo após foram indagados sobre suas nomenclaturas e características. Antes de iniciar a atividade foram apresentadas as distinções entre sequência repetitiva e mista

Na folha de tarefas haviam representações pictóricas dos primeiros termos das sequências, as quais os alunos reproduziram com o material concreto e se mostraram bastante independentes. A conclusão se deu em 80 minutos.

Atividade III - Resolução de problemas - dia 25/04/2014

A atividade 3 trabalhou a resolução de problemas de natureza algébrica. O material concreto serviu de recurso auxiliar e a atividade teve como objetivos:

- Aprimorar a capacidade de relacionar os elementos do problema;
- Representar as situações-problema por meio de um modelo;
- Interpretar solução obtida;

Estiveram presentes 20 alunos, que foram divididos em 5 grupos (A, B, C, D, E) de quatro integrantes. Cada grupo recebeu um *kit* de material composto por 2 barras, representando a dezena; 20 cubinhos, representando a unidade e 6 sólidos de bases losangulares (sendo um de cor diferente), representando o valor desconhecido. O material foi apresentado e os alunos tiveram cerca de 10 minutos para a livre manipulação.

A atividade foi composta por quatro problemas e sua condução contou com uma participação maior da professora, que orientou os grupos na modelagem dos problemas. Inicialmente foi solicitado que eles representassem a relação de igualdade entre barra e cubinhos, para que compreendessem a função da objeto denominado de “tapete da igualdade”.

A principal dificuldade foi quanto a interpretação dos problemas. A conclusão da atividade ocorreu em 90 minutos.

Atividade IV - Relações de igualdade - dia 02/05/2014

A atividade 4 trabalhou relações de igualdade e teve como objetivos:

- Promover a compreensão do símbolo da igualdade como representação de equivalência ;
- Explicitar o valor bilateral da igualdade;
- Possibilitar o exercício dos princípios aditivo e multiplicativo da igualdade;

Estiveram presentes 17 alunos, que foram divididos em 5 grupos (A, B, C, D, E) de quatro ou três integrantes. Cada grupo recebeu um *kit* de material composto por 4 barras, representando a dezena; 25 cubinhos, representando a unidade e 5 sólidos de bases losangulares, representando o valor desconhecido. Os alunos já estavam familiarizados com o material.

A atividade foi composta por duas questões e a interferência da professora ocorreu para recordar os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade.

Esta atividade foi realizada de forma bastante independente pelos alunos. As dificuldades se deram devido ao hábito de trabalhar a relação de igualdade de forma unilateral e também quando ocorreram valores desconhecidos em ambos lados da igualdade. A conclusão da atividade ocorreu em 70 minutos.

Atividade final - dia 06/05/2014

A atividade final consistiu de quatro questões discursivas cuja resolução exigiu habilidades como: percepção de regularidades, realização de generalização e resolução de problemas. Seu objetivo foi avaliar os resultados produzidos pela aplicação da sequência didática.

A atividade foi individual e para sua resolução não foi fornecido nenhum material. Foi realizada por 17 alunos da turma de investigação, que foram aqueles que estiveram presentes em pelo menos três seções de atividades e 18 alunos da turma de controle .

O tempo máximo de resolução foi 40 minutos e os 10 minutos restantes foram destinados à discussão sobre os problemas abordados.

3.1.6 Análise dos Resultados

Durante pouco mais de um mês os alunos foram estimulados trabalhar o raciocínio algébrico. Não houve nenhuma resistência por parte dos estudantes em registrar no papel suas ações, tampouco em utilizar o material concreto. Ao final das seções, após a entrega das folhas de respostas, as atividades eram debatidas com os alunos e resolvidas no quadro.

A análise dos resultados foi baseada na abordagem de investigação mista. Segundo Creswell et al. (2003):

> Um estudo com métodos mistos envolve a coleta ou analise de dados qualitativos e/ou quantitativos em um único estudo no qual os dados são coletados simultaneamente ou em sequência, recebem uma prioridade e envolvem a integração dos dados em uma ou mais etapas no processo de pesquisa, (CRESWELL et al., 2003, p. 212, tradução nossa). [1]

Os instrumentos de coleta de dados foram os registros escritos dos alunos e aqueles baseados na observação da professora. Os resultados das seções de atividades são apresentados a seguir:

Atividade I - Generalizações

A questão 1 propôs a investigação sobre uma sequência de quadrados. O tópico (1a) solicitou que os alunos construíssem um quadrado com os palitos recebidos, e isso não trouxe dificuldades.

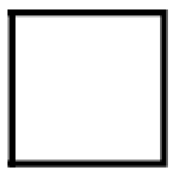


Figura 24 – Quadrado - Tópico (1a) da atividade I
Fonte: Autoria própria

[1] A mixed methods study involves the collection or analysis of both quantitative and/or qualitative data in a single study in which the data are collected concurrently or sequentially, are given a priority, and involve the integration of the data at one or more stages in the process of research.

Em seguida, no tópico (1b), deveriam continuar a sequência da Figura 25 e preencher uma tabela, como mostra a Figura 26, com os dados observados relacionando o número de palitos e de quadrados.

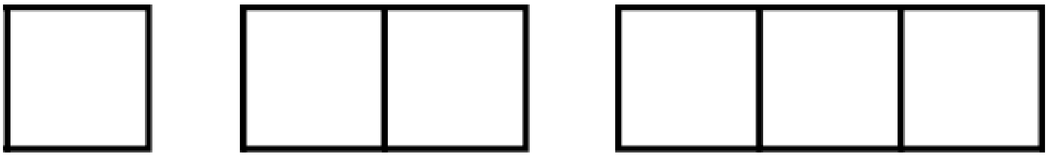


Figura 25 – Sequência de quadrados - Tópico (1b) da atividade I
Fonte: Autoria própria

Neste momento foi necessária orientação para o preenchimento da tabela, que apresentava resultados para sete ordens da sequência.

Número de quadrados	1	2	3	4	5	6	7
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	22

Figura 26 – Tabela Grupo C - Tópico (1b) da atividade I
Fonte: Autoria própria

O grupo E, mesmo realizando a montagem com os palitos, considerou que a cada quadrado eram acrescentados 4 palitos. Os integrantes refizeram a montagem e perceberam o erro.

Na resolução do tópico (1c), quando perguntou-se quantos palitos seriam necessários para formar uma sequência de 6 quadrados, os grupos A, C e D recorreram ao resultado da tabela, os outros dois refizeram a construção da sequência.

No tópico (1d) apenas os grupos A e C conseguiram responder, observando a tabela (Figura 27).

É possível construir uma sequência de quadrados com *18* palitos? Explique: Não Porque 16 [illegible]
[illegible] 19

Figura 27 – Solução Grupo A - Tópico (1d) da atividade I
Fonte: Autoria própria

No tópico (1e) todos perceberam que havia um aumento de 3 palitos a cada quadrado acrescentado.

No tópico (1f) reclamaram não haver palitos suficientes para construir 10 quadrados, mas foram orientados a usar a informação da tabela para resolver e todos chegaram no resultado correto, conforme mostra a tabela na Figura 28.

Número de quadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de palitos	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Figura 28 – Tabela Grupo A - Tópico (1f) da atividade I
Fonte: Autoria própria

A questão 2 pretendia relacionar o número de sólidos de bases triangulares e o perímetro da figura formada pela união das bases destes sólidos. Para simplificar a linguagem, será usado o termo triângulo em vez de sólido de bases triangulares.

O tópico (2a) solicitou que os alunos calculassem o perímetro do triângulo recebido. O conceito de perímetro era desconhecido pela maioria e a professora fez uma intervenção no quadro para explicar o assunto.

Os alunos usaram uma régua para medir o lado do triângulo, que era de 4 centímetros

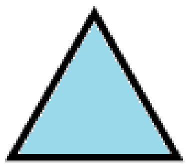


Figura 29 – Tópico (2a) da atividade I
Fonte: Autoria própria

O tópico (2b) solicitou que os alunos unissem dois triângulos pelos lados, conforme a figura 30, e calculassem seu perímetro.

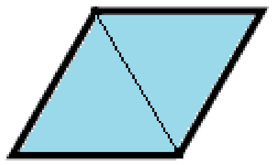


Figura 30 – Tópico (2b) da atividade I
Fonte: Autoria própria

No tópico (2c) os alunos continuaram a sequência na Figura 29 e completaram a tabela (Figura 30) que relacionava números de triângulos unidos pelos lados e perímetro da figura formada, com maior facilidade se comparado a questão 1.

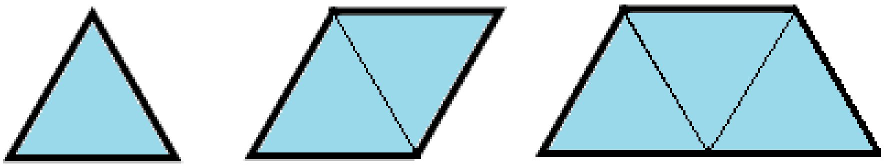


Figura 31 – Tópico (2c) da atividade I
Fonte: Autoria própria

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7
Perímetro (cm)	12	16	20	24	28	32	36

Figura 32 – Tabela Grupo A - Tópico (2c) da atividade I
Fonte: Autoria própria

Veloso (2012), que em sua dissertação de mestrado apresentou os resultados da aplicação de uma série de atividades abordando padrões e sequências numa turma de 6^o ano de EF, considerou que o trabalho com tarefas semelhantes "trouxe consideráveis contribuições para a domesticação do olhar dos alunos e organização de suas descobertas no caminho para realização de generalizações algébricas." (VELOSO, 2012, p. 203)

Logo, pode-se considerar que todos obtiveram sucesso nos tópicos da questão 2, baseados na experiência da questão 1. Foram, inclusive, capazes de realizar generalizações próximas percebendo que a razão de crescimento era de 4 centímetros, conforme mostra a Figura 33, com a solução do tópico(2f).

Qual é o perímetro da figura formada pela sequência de 10 triângulos? 48 cm

Figura 33 – Solução Grupo C - Tópico (2f) da atividade I
Fonte: Autoria própria

Atividade II - Regularidades

A questão 1 apresentava uma investigação sobre uma sequência repetitiva, formada por sólidos de bases quadradas, triangulares e circulares, com um padrão de regularidade Figura 34.

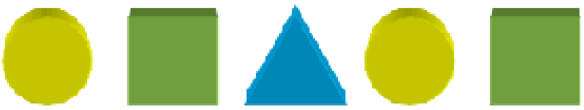


Figura 34 – Sequência repetitiva - Atividade II
Fonte: Autoria própria

A questão 2 apresentava uma sequência mista Figura 35 formada de sólidos de bases quadradas e circulares, com a finalidade de que os alunos investigassem suas características.

Figura 35 – Sequência mista - Atividade II
Fonte: Autoria própria

Após as devidas orientações, os alunos iniciaram o trabalho. O tópico (1a) de ambas questionava sobre a figura seguinte das sequências e foi respondido sem dificuldades.

O tópico (1b) pediu a descrição de alguma característica observada nas sequências, mas os alunos não conseguiram se expressar com clareza, sendo a melhor reposta, referente à sequência repetitiva, ilustrada na Figura 36:

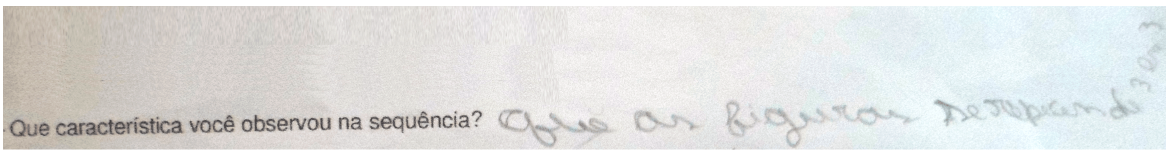


Figura 36 – Solução grupo B - Tópico (1b) da atividade II
Fonte: Autoria própria

Dois grupos associaram a ordem ocupada pelos sólidos de bases triangulares, no tópico (1c), a um conjunto finito de múltiplos de 3 na sequência repetitiva.

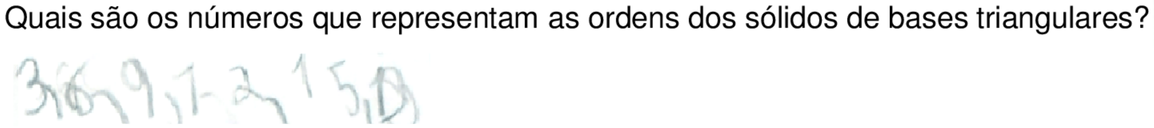


Figura 37 – Solução grupo B - Tópico (1c) da atividade II
Fonte: Autoria própria

O mesmo ocorreu na sequência mista, no tópico (2c), quando a pergunta se referia aos sólidos de bases circulares. Isso mostra que os alunos não possuem maturidade para realizar generalizações para conjuntos infinitos.

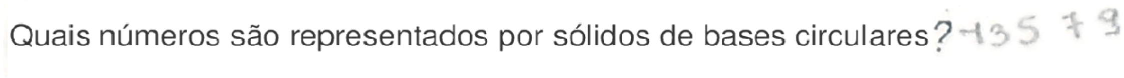


Figura 38 – Solução grupo C - Tópico (2c) da atividade II
Fonte: Autoria própria

Quanto à sequência repetitiva, houve dificuldade em realizar generalizações próximas. Apenas um grupo conseguiu associar os quatro primeiros quadrados a suas posições, no tópico(1d) e prever o número de quadrados nas vinte primeiras posições, no tópico (1f).

Dois grupos foram capazes de perceber a unidade repetitiva, conseguindo prever o termo da décima posição, solicitado no tópico(1e).

Todos criaram sequências de padrões semelhantes ao apresentado na questão, para o tópico (1g), como mostra a Figura 39.

Figura 39 – Sequência repetitiva Grupo C - Atividade II
Fonte: Autoria própria

Sobre a sequência mista, todos os grupos conseguiram fazer distinção entre ordens pares e ímpares, identificando as figuras que representavam estas ordens.

Foram feitas representações pictóricas, Figura 40, para prever o número de quadrados nas oitava e décima segunda ordens, o que demonstrou independência do material concreto e percepção da razão de crescimento dos termos pares da sequência

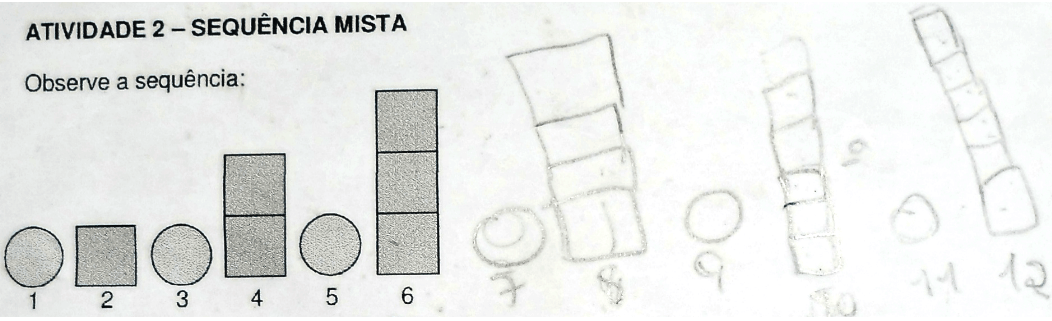


Figura 40 – Sequência mista Grupo C - Atividade II
Fonte: Autoria própria

Nenhum grupo conseguiu prever quantos quadrados havia nas primeiras vinte posições. Este fato mostrou a dificuldade em realizar generalização próxima quando há uma razão de crescimento.

Atividade III - Resolução de problemas

A questão 1 tratou de um problema no qual 18 unidades deveriam ser divididas em seis partes de modo que uma parte fosse atribuída ao primeiro elemento (Alan), duas partes ao segundo (Bruno) e três partes ao terceiro (Carlos).

Os alunos foram orientados a associar uma unidade a Alan, o dobro a Bruno e o triplo a Carlos até que se esgotassem as 18 unidades. A questão foi resolvida com sucesso por quatro grupos. Um grupo usou representações pictóricas para responder a questão, como mostra a Figura 41.

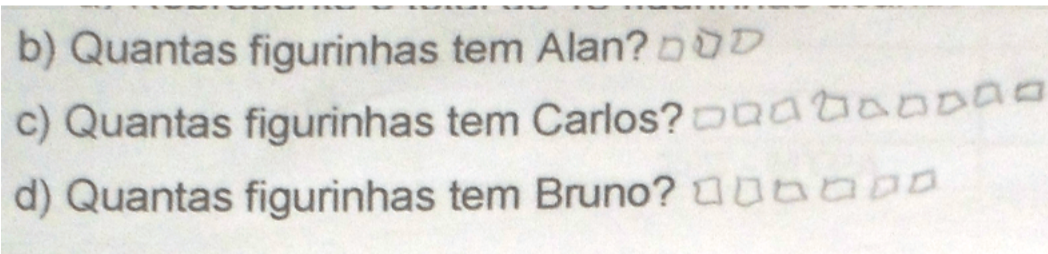


Figura 41 – Solução da questão 1 - Grupo C - Atividade III
Fonte: Autoria própria

A questão 2 apresentou um problema de dois valores desconhecidos. A orientação dada foi que representassem no “tapete da igualdade” a primeira hipótese e a partir dela incluíssem a segunda e tentassem resolver o problema. Todos conseguiram realizar corretamente a questão a partir da modelagem ilustrada na Figura 42.

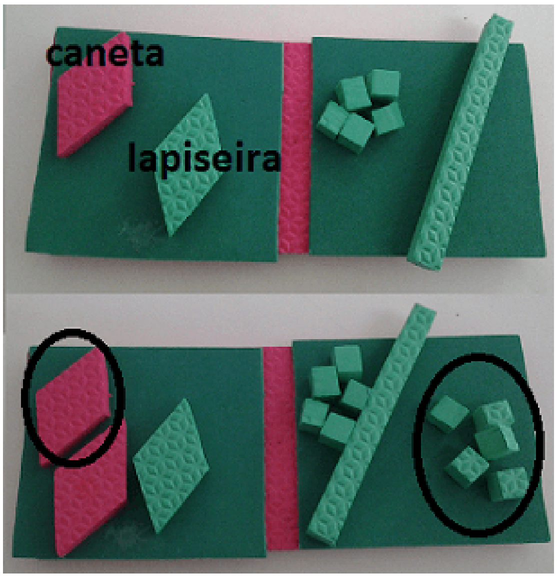


Figura 42 – Modelagem da questão 2 - Atividade III
Fonte: Autoria própria

A questão 3 trouxe um problema que relacionava duas expressões. Com o auxílio do “tapete da igualdade” os alunos modelaram a situação-problema e lhes foi apresentado o princípio aditivo da igualdade para que pudessem concluir a resolução.

O grupo D conseguiu resolver o tópico (3b) apenas observando a modelação do problema (Figura 43). Os outros grupos usaram o princípio aditivo da igualdade.

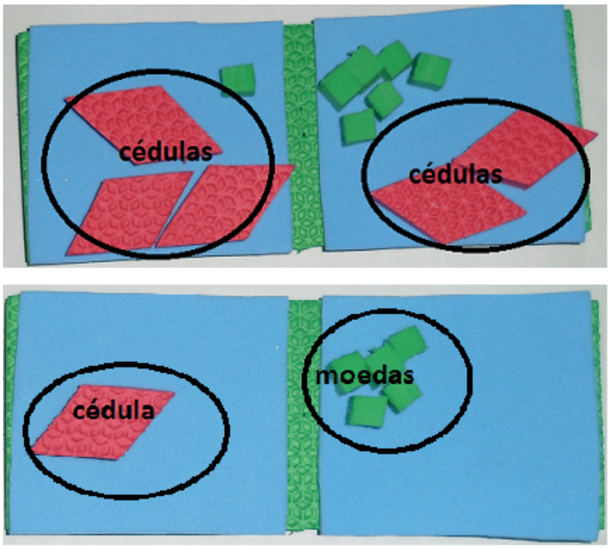


Figura 43 – Modelagem da questão 3 - Atividade III
Fonte: Autoria própria

A questão 4 abordou um problema de natureza aditiva. Os alunos foram orientados a pensar no que impedia os dois de terem a mesma idade e a partir desta reflexão resolverem o problema.

Esta foi a questão que gerou maior dificuldade e apenas o grupo C conseguiu solucioná-la corretamente (Figura 44). Os alunos reservaram as três unidades referentes a diferença de idade e dividiram o restante igualmente. Em seguida acrescentaram as três unidades ao resultado referente ao que tinha maior idade.

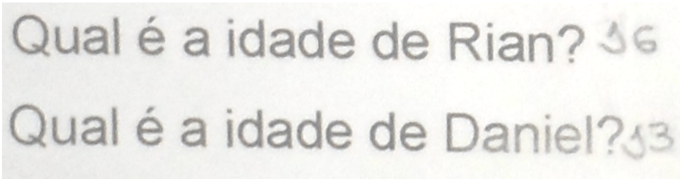

Qual é a idade de Rian? 16
Qual é a idade de Daniel? 13

Figura 44 – Solução da questão 4 - Grupo C - Atividade III
Fonte: Autoria própria

Atividade IV

A questão 1 trouxe igualdades entre expressões aditivas envolvendo valores desconhecidos.

$$a)\ 18 + \diamondsuit = 25$$
$$c)\ 25 = 15 + \diamondsuit$$
$$e)\ 27 - 6 = 8 + \diamondsuit$$

Figura 45 – Questão 1 - Atividade IV
Fonte: Autoria própria

As maiores dificuldades foram nos tópicos em que o valor desconhecido estava à direita do simbolo da igualdade e que traziam expressões numéricas em ambos lados da igualdade. Nestes casos, o material concreto ajudou na modelagem das relações, mas a partir do momento que a relação foi compreendida, os alunos não precisaram do material pra concluir as atividades.

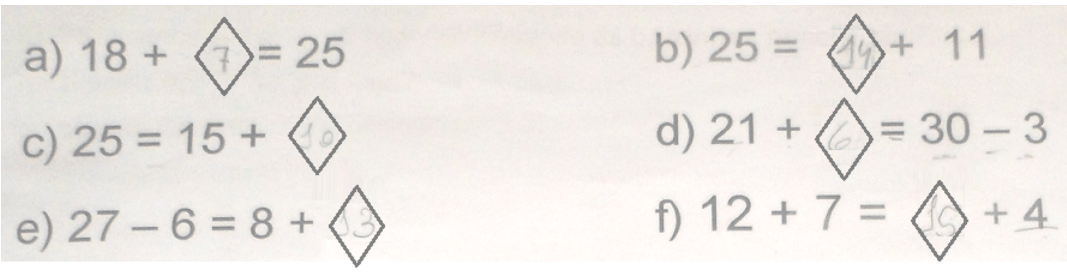

a) 18 + ◇7 = 25
b) 25 = ◇14 + 11
c) 25 = 15 + ◇10
d) 21 + ◇6 = 30 – 3
e) 27 – 6 = 8 + ◇13
f) 12 + 7 = ◇15 + 4

Figura 46 – Solução da questão 1 - Grupo E - Atividade IV
Fonte: Autoria própria

A questão 2 apresentou igualdade entre expressões contendo operações de adição e multiplicação com valores desconhecidos.

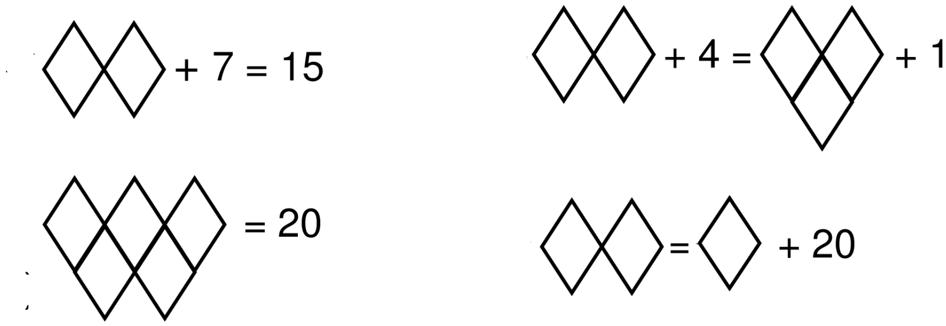


Figura 47 – Questão 2 - Atividade IV
Fonte: Autoria própria

O “tapete da igualdade” foi usado pela maioria dos grupos, que aplicaram os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade. O grupo B só recorreu ao material concreto para resolver o tópico (e), ilustrado na Figura 48.

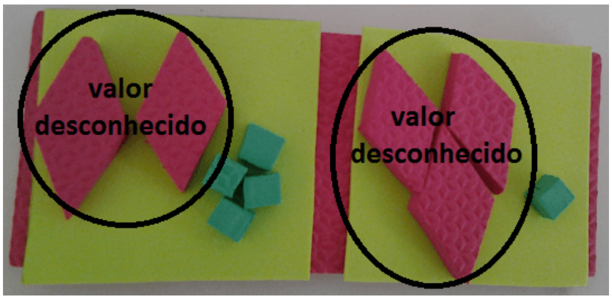


Figura 48 – Modelagem da questão 2e - Atividade IV
Fonte: Autoria própria

Todos os grupos tiveram sucesso na resolução da questão.

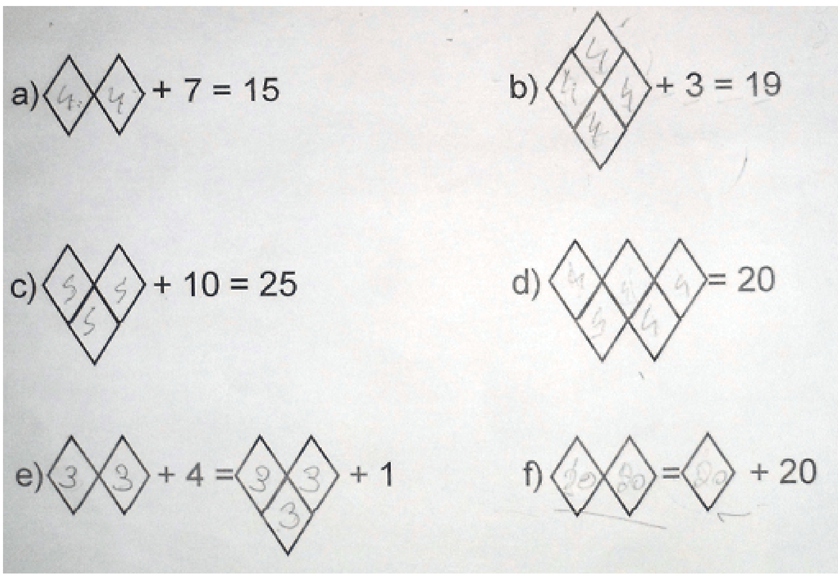


Figura 49 – Solução da questão 2 - Grupo E - Atividade IV
Fonte: Autoria própria

Atividade Final

A atividade final foi composta por questões que abordavam as habilidades trabalhadas durante a aplicação da sequência didática. Apesar do resultado pouco satisfatório da turma de investigação, percebe-se que foi superior ao da turma de controle. A análise dos resultados foi feita de forma quantitativa e a tabela a seguir mostra os resultados.

Tabela 2 – Resultados da atividade final

Habilidades	T. investigação	T. controle
Reconhece a regularidade em uma sequência crescente	29%	0%
Reconhece a regularidade em uma sequência repetitiva	35%	6%
Resolve um problema de valor desconhecido	13%	0%
Relaciona a igualdade entre duas expressões	41 %	6%

Fonte: Elaboração própria

A primeira questão trouxe uma sequência pictórica crescente, de três ordens representadas por cubos, que apresentavam um padrão de regularidade. A resolução da questão exigiu percepção do padrão e previsão do número de cubos da quarta e quinta ordem.

A maioria dos erros se deu por má interpretação do padrão. Vários alunos afirmaram que houve um crescimento de razão 3, o que os fez chegar ao resultado de 9 cubos para a pilha IV,como mostra a figura 50.

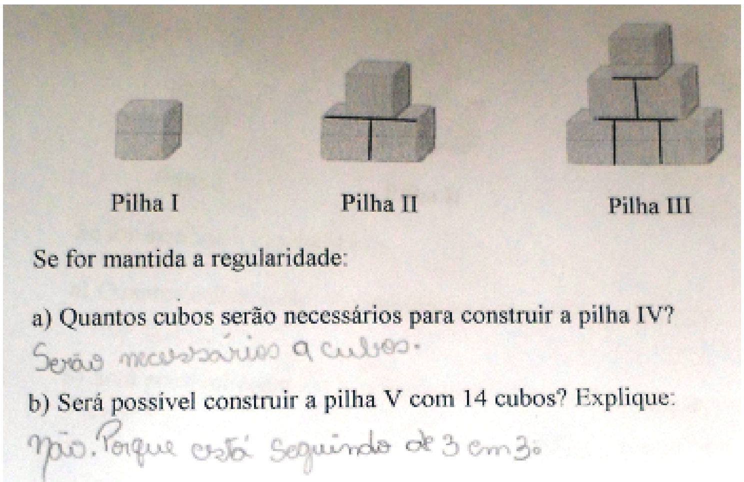


Figura 50 – Solução da questão 1 - Aluno A - Atividade Final
Fonte: (SOUZA; PARATO, 2012b, p. 42)

Apesar de 39 % dos alunos da turma de controle terem conseguido resolver o tópico (a), só foi considerada como correta a questão que apresentou acertos nos tópicos (a) e (b).

Da turma de investigação, 29% foram capazes de resolver a questão por completo, justificando suas respostas, como ilustrado na Figura 51.

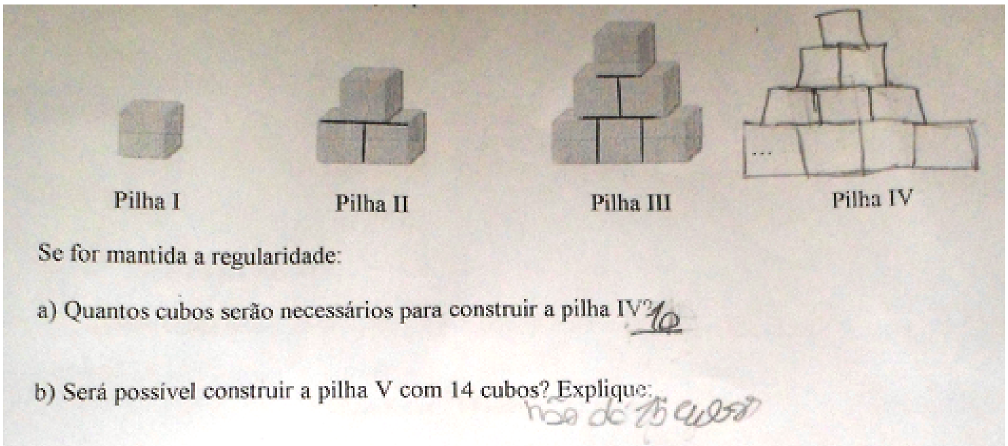


Figura 51 – Solução da questão 1 - Aluno B - Atividade Final
Fonte:(SOUZA; PARATO, 2012b, p. 42)

A segunda questão trouxe uma sequência repetitiva. Os alunos deveriam reconhecer a unidade repetitiva e prever a décima primeira figura. Os erros referentes a esta questão ocorreram pela falta de atenção ao padrão de repetição. Os alunos usaram a contagem da sequência a partir do círculo, como mostra a figura 52,

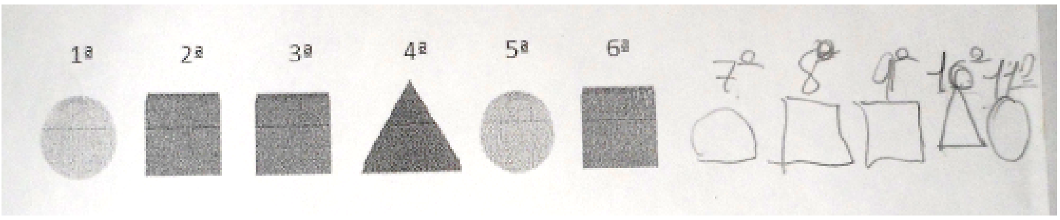


Figura 52 – Solução da questão 2 - Aluno B - Atividade Final
Fonte: Autoria própria

e não a partir do quadrado, que seria o correto.

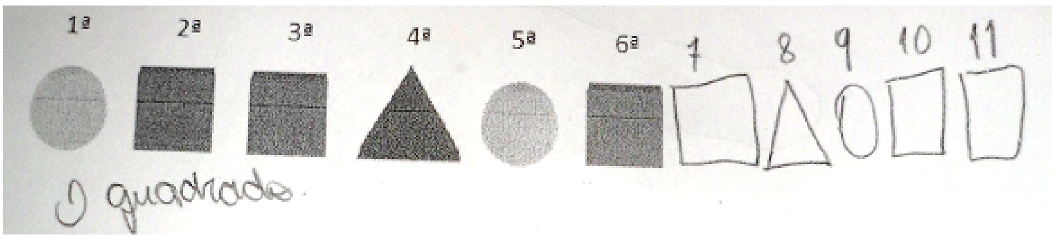
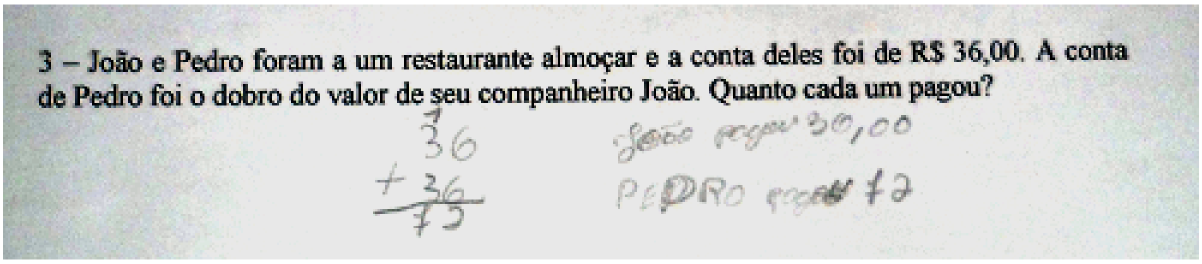


Figura 53 – Solução da questão 2 - Aluno C - Atividade Final
Fonte: Autoria própria

Na turma de controle 28% dos alunos sequer tentaram resolver esta questão.

A terceira questão abordou um problema em que um total de R$36,00 deveria ser dividido em três partes sendo uma atribuída a João e duas partes atribuídas a Pedro.

A maioria dos alunos que erraram usaram o raciocínio que Santos (2010) SANTOS (2010, p. 3) chama de aritmético, efetuando $36.2 + 36$. O erro é ilustrado na Figura 54.


3 – João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 36,00. A conta de Pedro foi o dobro do valor de seu companheiro João. Quanto cada um pagou?

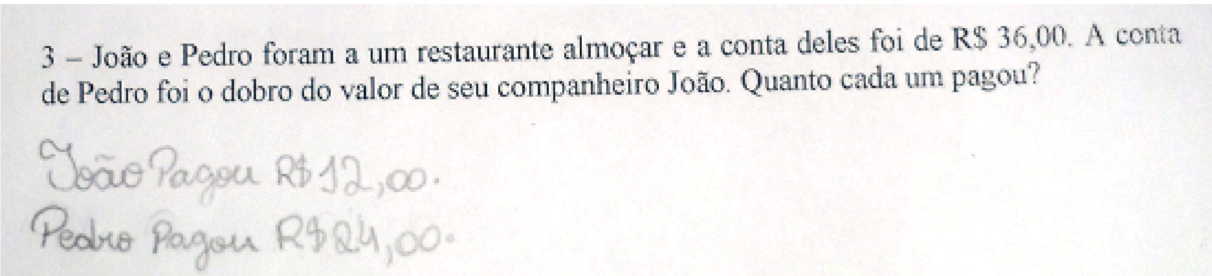
$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 36 \\ \hline 72 \end{array}$$

João pagou 30,00

PEDRO pagou 72

Figura 54 – Solução da questão 3 - Aluno D - Atividade Final
Fonte: Autoria própria

Esta questão foi a que apresentou maior dificuldade e os poucos alunos que a solucionaram não mostraram o raciocínio usado, como mostrado na Figura 55.


3 – João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 36,00. A conta de Pedro foi o dobro do valor de seu companheiro João. Quanto cada um pagou?

João Pagou R$12,00.

Pedro Pagou R$24,00.

Figura 55 – Solução da questão 3 - Aluno A - Atividade Final
Fonte: Autoria própria

A quarta questão trouxe uma balança desequilibrada. Os alunos deveriam calcular o valor desconhecido necessário para equilibrá-la.

Esta questão apresentou dois tipos de erros, conforme mostra a Figura 56: alguns alunos encontraram o valor desconhecido efetuando $35 + 12$ e outros $35 + 12 + 28$. Isto quer dizer que os alunos não conseguiram interpretar o que era solicitado.

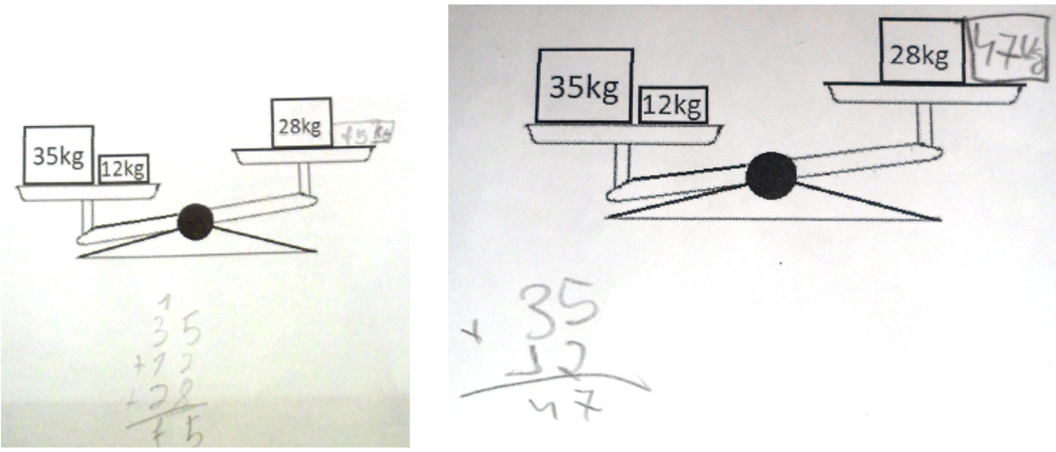


Figura 56 – Solução da questão 4 - Alunos D e E - Atividade Final
Fonte: Autoria própria

Algumas características das seções de atividades podem ter contribuído para o resultado mediano na atividade final, tais como: a professora interagiu com os grupos, deu sugestões, leu algumas questões e isto facilitou o entendimento do que estava sendo solicitado pelos problemas.

Além disso o material manipulável não foi disponibilizado durante a atividade final. Isso porque desejava-se verificar quais mecanismos os alunos usariam na solução das questões.

A dificuldade em reconhecer os padrões das sequências demonstra a falta de prática com atividades visuais. Ficou evidenciado a falta de experiências anteriores com questões que estimulem o raciocínio algébrico.

3.1.7 Avaliação Geral e Conclusões

A implementação da sequência foi positiva, uma vez que o trabalho em grupos possibilitou a troca de conhecimento. Alunos que não interagiam nas aulas anteriores se identificaram com a proposta e tiveram boa participação durante as atividades, evidenciando inclusive aspectos caracterizadores do pensamento algébrico.

Pode-se ressaltar ainda que a experiência contribuiu para melhoria na capacidade de expressar com palavras o que foi compreendido. Isto foi percebido por meio da questão 1 da atividade final.

A contribuição do material foi proveitosa e os alunos mostraram, já durante as atividades, serem capazes de passar do estágio concreto para o pictórico. Segundo Thompson (1995), estes dois estágios antecedem o estágio em que a criança é capaz de reproduzir ações com símbolos e operações abstratas. (THOMPSON, 1995, p. 87)

No geral, pode-se inferir que as atividades contribuíram para que os estudantes evidenciassem características de pensamento algébrico realizando generalizações próximas, reconhecendo regularidade em sequências, resolvendo e representando situações-problema, estabelecendo relações de igualdade e expressando, mesmo com linguagem natural, o que era observado e compreendido.

Capítulo 4

Considerações Finais

Este trabalho foi fruto do interesse em ensinar os conteúdos algébricos de uma forma menos mecânica e que tivesse algum significado para o aluno. A partir das pesquisas bibliográficas foi revelado que atividades com características algébricas poderiam ser introduzidas desde os primeiros anos de escolaridade, o que possibilitaria ao aluno a construção de significados para os conteúdos algébricos.

Iniciou-se então o processo de desenvolvimento de atividades que pudessem estimular o pensamento algébrico até mesmo em alunos que não conhecessem a linguagem algébrica. Como recursos foram escolhidos materiais manipuláveis que facilitassem a visualização e a resolução das atividades pelos alunos.

As atividades desenvolvidas foram base para a sequência didática implementada, cujos resultados obtidos demonstram ser viável introduzir situações de natureza algébrica no 6^o ano do EF. Espera-se que nos próximos anos de escolaridade os alunos possam fazer associações entre o que foi aprendido nesta experiência e os novos conteúdos algébricos que serão introduzidos.

Além de servir como base para a aprendizagem dos conteúdos algébricos a proposta pode auxiliar no trabalho de outros conteúdos matemáticos. Como foi vivenciado durante a implementação houve a introdução de conceitos como: perímetro, sequências e princípios de equivalência.

As sequência didática pode ser adaptada por professores para serem aplicadas desde o primeiro ciclo do EF. Quanto mais cedo os alunos forem envolvidos em atividades com estas características, melhores serão os resultados no decorrer dos anos escolares.

Os materiais manipuláveis utilizados quando não existirem na escola podem ser facilmente construídos com o uso de EVA, inclusive com a participação dos alunos.

Este trabalho é finalizado com a confiança de que a proposta didática apresentada possa contribuir para a aprendizagem da matemática e crescimento dos alunos.

Referências

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam na Álgebra. In: COXFORD, A.F. AND SHULTE, A.P. *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.

BRANCO, N. *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos*. Tese (Doutorado) — Universidade de Lisboa - Instituto de educação, Lisboa, 2013. Citado na página 22.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5^a a 8^a séries)*. Brasília, DF, 1998. Citado 7 vezes nas páginas 13, 16, 17, 18, 21, 22 e 43.

CARVALHO, A. d.; GOMES, M.; PIRES, M. *Fundamentos técnicos do pensamento Matemático*. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2010. 159-163 p. Citado na página 14.

CRESWELL, J. et al. Advanced mixed methods research designs. In: TASHAKKORI, A. AND TEDDLIE, C. *Handbook of mixed methods in social and behavioral research*. Thousand Oaks, CA:: Sage Publications, 2003. p. 209–240. Citado na página 50.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1[10], p. 78–91, março 1993. Citado 3 vezes nas páginas 20, 25 e 43.

GROSSNICKLE, F. E.; JUNGE, C.; METZNER, W. Instructional materials for teaching arithmetic. In: HENRY, N.B. *In the teaching of arithmetic, fiftieth yearbook of the national society for the study of education*. Chicago: University of Chicago Press, 1951. cap. Parte II. Citado na página 25.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: ____. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 03–38. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

LORENZATO, S. *Educação infantil e percepção matemática*. São Paulo: Autores Associados, 2008. Citado na página 29.

MÁRQUEZ, R. M. G. et al. *Um Enfoque Pedagógico da Matemática: para o Ensino Fundamental*. Rio de Janeiro: Clube de autores, 2009. Citado na página 27.

MENDES, I. *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. São Paulo: Editora Livraria da física, 2009. Citado na página 26.

NEAGOY, M. *Planting the seeds of algebra, Prek2: explorations for the early grades.* London: Corwin, 2009. Citado na página 14.

PASTELLS, A. A. I. *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdico-manipulativos: para crianças de 6 a 12 anos*. Curitiba: Base Editorial, 2009. (22 ed). Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.

PONTE, J. P. d.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no ensino basico*. Lisboa, Portugal, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 18, 21, 22, 23, 36 e 43.

RÊGO, R.; RÊGO, R. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (ORG.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 39–56. Citado na página 26.

SANTOS, M. C. D. Desenvolvimento do pensamento algébrico: O que estamos fazendo em nossas salas de aulas? In: SBEM, 2010, Salvador. *In Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade*. Salvador, 2010. p. 10. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 20, 36 e 62.

SCHOEN, H. Ensinar a álgebra elementar focalizando problemas. In: COXFORD, A.F. AND SHULTE, A.P. *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. Citado na página 24.

SESSA, C. *Iniciação ao estudo didático da álgebra: origens e perspectivas*. São Paulo: Edições SM, 2009. Citado na página 13.

SIMON, M.; STIMPSON, V. Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas. In: COXFORD, A.F. AND SHULTE, A.P. *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. Citado na página 40.

SOUZA, J. d.; PARATO, P. *Vontade de saber Matemática*. 2^{a}. ed. São Paulo: FTD, 2012. (7^{o}). Citado na página 34.

SOUZA, J. d.; PARATO, P. *Vontade de saber Matemática*. 2^{a}. ed. São Paulo: FTD, 2012. (6^{o}). Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.

THOMPSON, F. O ensino da álgebra para a criança mais nova. In: COXFORD, A.F. AND SHULTE, A.P. *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 63.

TURRIONI, A.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (ORG.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 57–76. Citado na página 25.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra na escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F. AND SHULTE, A.P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995. cap. 2, p. 9–22. Trad. Domingues Hygino. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 42.

VAN DE WALLE, J. A. *A Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6â. ed. Porto Alegra: Artmed, 2009. 287-319 p. Citado na página 13.

VELOSO, D. *O Desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no Ensino Fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano*. Tese (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Agosto 2012. Citado na página 53.

ZABALA, A. *A prática educativa: com ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. Citado na página 42.

APÊNDICE A

Sequência Didática

Escola Municipal Mª Antônia P. Trindade – Matemática
Aluno: ____
Turma: ________Data: ___/___/_____ Profª. Luciana Freitas

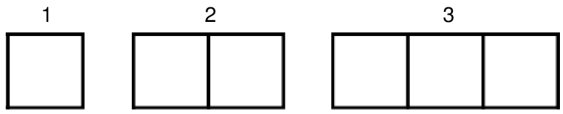
PROFMAT

ATIVIDADE I – GENERALIZAÇÕES

QUESTÃO 1 – SEQUÊNCIA COM PALITOS

(a) – Construa um quadrado usando palitos. Quantos palitos você usou?

(b) – Construa uma sequência de quadrados conforme ilustração e preencha a tabela com os dados observados:



Número de quadrados	1	2	3				
Número de palitos							

(c) – Quantos palitos são necessários para formar uma sequência de 6 quadrados?

(d) – É possível construir uma sequência de quadrados com 18 palitos? Explique:

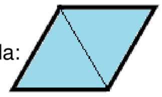
(e) – Qual é a relação entre a quantidade de palitos e o número de quadrados?

(f) – Quantos palitos a sequência de 10 quadrados terá?

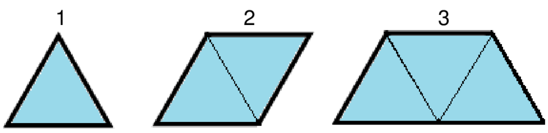
QUESTÃO 2 – SEQUÊNCIA COM TRIÂNGULOS

(a) – Com o auxílio da régua calcule o perímetro do triângulo:

(b) – Una dois triângulos pelos lados e calcule, com o auxílio da régua, o perímetro da figura formada:



(c) – Continue a sequência e preencha a tabela:



Numero de triângulos	1	2	3				
Perímetro							

(d) – É possível construir uma figura que tenha 27 cm de perímetro?

(e) – Para cada triângulo acrescentado o perímetro aumenta em quantos centímetros?

(f) – Qual é o perímetro da figura formada pela sequência de 10 triângulos?

Escola Municipal Mª Antônia P. Trindade – Matemática
Aluno: ____
Turma: _________Data: ___/___/_____ Profª. Luciana Freitas

PROFMAT

ATIVIDADE II – REGULARIDADES

QUESTÃO 1 – SEQUÊNCIA REPETITIVA

Observe a sequência:

1 2 3 4 5

(a) – Qual é a próxima figura da sequência?

(b) – Que característica você observou na sequência?

(c) – Quais são os números que representam as ordens dos sólidos de bases triangulares?

(d) – Quais são os números que representam as ordens dos quatro primeiros sólidos de bases quadradas?

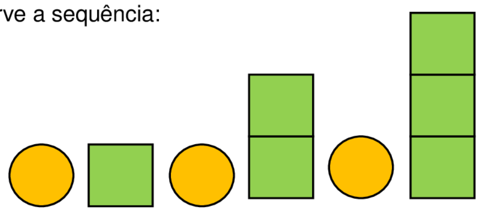
(e) – Qual elemento ocupa a posição 10 da sequência?

(f) – Nas primeiras vinte figuras, quantos sólidos de bases quadradas há?

(g) – Crie uma sequência que apresente algum padrão:

QUESTÃO 2 – SEQUÊNCIA MISTA

Observe a sequência:



1 2 3 4 5 6

(a) – Continue a sequência até a décima posição:

(b) – Que característica você observou na sequência?

(c) – Quais números são representados por sólidos de bases circulares?

(d) – Que figuras estão representadas por números pares?

(e) – Quantos quadrados estarão na oitava posição?

(f) – Quantos quadrados estarão na décima segunda posição?

(g) – Nas primeiras vinte figuras, quantos sólidos de bases quadradas há?

Escola Municipal Mª Antônia P. Trindade – Matemática
Aluno: ____
Turma: ________Data: ___/___/_____ Profª. Luciana Freitas

PROFMAT

ATIVIDADE III – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

QUESTÃO 1

Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 18 figurinhas da Copa do Mundo 2014. Sabe-se que Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan.

a) Represente o total de 18 figurinhas usando as **barrinhas numéricas**:

b) Quantas figurinhas tem Alan?

c) Quantas figurinhas tem Carlos?

d) Quantas figurinhas tem Bruno?

QUESTÃO 2

Pedro pretende comprar uma caneta e uma lapiseira por R$ 15,00. Se ele levar mais uma caneta, pagará um total de R$ 20,00.

a) Represente as duas situações de igualdade usando as **barrinhas numéricas**:

b) Qual é o preço de cada caneta?

c) Qual é o preço da lapiseira?

QUESTÃO 3

Vitória e Heloísa foram ao shopping e compraram o mesmo DVD. Vitória pagou com 2 cédulas e 6 moedas de R$1,00. Heloísa pagou com 3 cédulas iguais às de Vitória e 1 moeda de R$1,00.

a) Represente o valor pago pelas duas usando as **barrinhas numéricas**:

b) De quanto eram as cédulas usadas no pagamento?

c) Quanto custou cada DVD?

QUESTÃO 4

A idade de Rian e Daniel somadas é igual a 29, mas sabe-se que Rian nasceu 3 anos antes que Daniel.

a) Represente o total de 29 usando as **barrinhas numéricas**:

b) Qual é a idade de Rian?

c) Qual é a idade de Daniel?

Escola Municipal Mª Antônia P. Trindade – Matemática
Aluno: ____
Turma: ________Data: ___/___/_____ Profª. Luciana Freitas
PROFMAT

ATIVIDADE IV – RELAÇÕES DE IGUALDADE

QUESTÃO 1 – VALOR DESCONHECIDO

Use as barrinhas para representar e calcular os valores desconhecidos nas igualdades:

a) $18 + \Diamond = 25$

b) $25 = \Diamond + 11$

c) $25 = 15 + \Diamond$

d) $21 + \Diamond = 30 - 3$

e) $27 - 6 = 8 + \Diamond$

f) $12 + 7 = \Diamond + 4$

QUESTÃO 2 – BALANÇA DE EQUILÍBRIO

De acordo com as igualdades, qual é o valor representado pelos losangos?

a) $\Diamond\Diamond + 7 = 15$

b) $\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond + 3 = 19$

c) $\Diamond\Diamond\Diamond + 10 = 25$

d) $\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond\Diamond = 20$

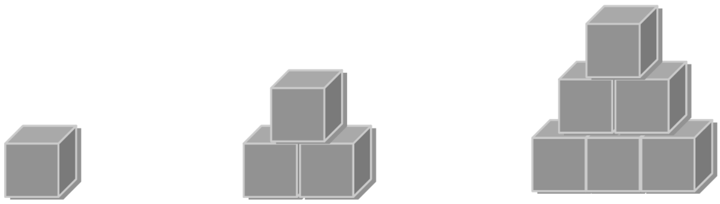
e) $\Diamond\Diamond + 4 = \Diamond\Diamond\Diamond + 1$

f) $\Diamond\Diamond = \Diamond + 20$

Escola Municipal Mª Antônia P. Trindade – Matemática
Aluno: ____
Turma: ________Data: ___/___/_____ Profª. Luciana Freitas

ATIVIDADE FINAL

1– (SOUZA & PARATO, 2012) Observe a sequência formada por pilhas de cubos:



...

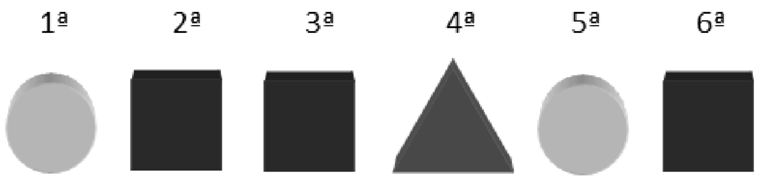
Pilha I Pilha II Pilha III Pilha IV

Se for mantida a regularidade:

a) Quantos cubos serão necessários para construir a pilha IV?

b) Será possível construir a pilha V com 14 cubos? Explique:

2 – Qual é a figura que ocupa a 11ª posição?



3 – João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a conta deles foi de R$ 36,00. A conta de Pedro foi o dobro do valor de seu companheiro João. Quanto cada um pagou?

4 – Quantos quilogramas são necessários para equilibrar a balança?