Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Um paralelo entre a matemática popular e a matemática formal

Gilliard Giovanni Silveira Hortêncio

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientadora: **Profª. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Julho de 2014

Um paralelo entre a matemática popular e a matemática formal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Gilliard Giovanni Silveira Hortêncio e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 17 de agosto de 2014.

Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
Orientadora

Banca examinadora:

Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Luciene Pinheiro Lopes
Prof. Dr. Almir César Ferreira Cavalcanti

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, desenvolvido pela Sociedade Brasileira de Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

H822p Hortêncio, Gilliard Giovanni Silveira.
Um paralelo entre a matemática popular e a matemática formal / Gilliard Giovanni Silveira Hortêncio. -- 2014
xi, 37 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientadora: Eunice Cândida Pereira Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matemática popular. 2. Tripé para o ensino de Matemática. 3. Noves-fora. 4. Matemática dos pedreiros. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de julho de 2014 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

---

Profª.Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues

Profª. Dra. Luciene Pinheiro Lopes

Prof. Dr.Almir César Ferreira Cavalcanti *a todos que lutam por um mundo melhor*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha companheira Anelize Moreno por compartilhar de um ideal de mundo semelhante ao que acredito, fazendo com que possamos lutar juntos pelo que acreditamos, e também pela compreensão nesses dois últimos anos onde estive ausente muitas vezes devido a dedicação a este curso. Também agradeço a meus pais Terezinha Silveira Braga e Claudomiro Hortêncio, a meu pai pelas palavras de incentivo em momentos de extrema dificuldades que passei durante este curso, já a minha mãe por toda a dedicação que ela tem feito por todos seus filhos no decorrer de sua vida e por todo o apoio que ela tem me dado em todos os momentos da minha vida, colocando muitas vezes minhas necessidades a frente das suas próprias necessidades.

Agradeço aos colegas Cleonício, Edinei,Emerson, Edson e Paulo, pelos momentos de estudos em conjunto e por toda dedicação demonstrada por eles neste curso que fez com que eu também me motivasse pra seguir adiante mesmo nos momentos mais difíceis, agradeço também aos colegas Jessé, Victor, Gledson e Marco Antonio pelas contribuições tanto matemáticas como pessoais no decorrer desse curso. Porém gostaria de fazer um agradecimento mais que especial a três grandes amigos que conheci no decorrer destes dois últimos anos, que são, Nivaldo, Ricardo e Luiz Fernando, sendo que estes mais do que ninguém merecem o título denominado de mestre, pois foi com estes três grandes matemáticos e companheiros que pude vencer esta grande batalha, que foi fazer este curso, onde eles me ajudaram desde as minhas dificuldades mais básicas até em questões que até eu mesmo duvidava que era capaz de compreender.

Por fim, gostaria de agradecer minha orientadora Professora Eunice que colaborou muito neste trabalho sugerindo alterações e fazendo correções quando necessárias.

Eu quero professores que gritem na passeata, que invadam câmaras legislativas, que ocupem prédios públicos. Que não tenham medo de descumprir as regras, quando as regras são só um jeito de manter a injustiça. E que ensinem outras coisas, além de português e matemática. Ou melhor, que ensinem de outro jeito, pra que ler e fazer conta não sirva só pra passar na prova, mas pra mudar a história.

(trecho do texto 'Eu quero professores que saibam fazer um coquetel molotov' de Alexandre Bortolini).

Resumo

A Matemática, como ciência que é, deve estar a serviço da potencialização da prática social dos homens, prestando contribuições para melhorar tanto a vida material das mesmas como para o desenvolvimento da humanidade. Entende-se que tais contribuições não advém apenas de uma matemática acadêmica (formal) mas também de uma matemática usada na vida cotidiana, adaptada as necessidades de quem as usa. Neste trabalho, faz-se um paralelo entre a matemática popular (noves-fora e a prova dos nove, construção civil: paredes no esquadro e pedreiros saindo pela tangente) com a matemática formal (Teorema de Pitágoras, ângulos e congruência modular), com o intuito de mostrar que a matemática popular é de grande valia dentro das práticas profissionais e que a mesma, de certa forma, pode contribuir para o equilíbrio do "Tripé para o ensino de Matemática"(conceituação, manipulação e aplicações).

Palavras chave: Matemática popular, Tripé para o ensino de Matemática, Noves-fora, Matemática dos pedreiros.

Abstract

Mathematics as a science that is, one must be at the service leveraging the social practice of men paying contributions to improve both the same life as the material for the development of humanity. It is understood that such contributions stems not only from an academic mathematics (formal) but also a math used in everyday life, adapted to the needs of the wearer. This work made a parallel between popular math (nine out and the real proof, construction: walls in the square and masons go off on tangents) with formal math (Pythagorean Theorem, angles and modular congruence), with In order to show that the popular mathematics is valuable within professional practices and that it, in a way, can contribute to balancing the " Tripod for teaching mathematics "(conceptualization, manipulation and applications).

Keywords: Popular mathematics, Tripod for teaching mathematics, Noves off, Mathematics masons.

Sumário

Agradecimentos **v**

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Introdução **1**

1 Noves-fora e a Prova dos Nove 4

Noves-fora e a Prova dos Nove **4**

1.1 Princípio da Indução 4

1.2 Divisibilidade 5

1.3 Congruência 7

1.4 Noves-fora 12

1.5 Noves-fora e a Congruência Modular 15

1.6 A Prova dos Nove 17

1.6.1 A Prova dos Nove Funciona? 19

2 Pedreiros e os Ângulos na Construção Civil 21

Pedreiros e os Ângulos na Construção Civil **21**

2.1 Paredes no Esquadro 21

2.2 Pedreiro saindo pela tangente 24

2.3 Um dia como Servente de Pedreiro 29

Considerações finais **31**

Referências Bibliográficas **32**

Anexos **33**

Lista de Figuras

2.1 Passo I para garantir a perpendicularidade entre paredes 22
2.2 Passo II para garantir a perpendicularidade entre paredes 23
2.3 Passo III para garantir a perpendicularidade entre paredes 23
2.4 Representação de um telhado meia-água 25
2.5 Construindo telhado meia-água I 26
2.6 Construindo telhado meia-água II 26
2.7 Represetação de um telhado de duas águas 26
2.8 Construindo telhado de duas águas 27
2.9 Cálculo de inclinação de telhado meia-água 27
2.10 Vista externa do telhado que foi trocado 33
2.11 Vista interna do telhado que foi trocado 34
2.12 Coletando medidas para cálculo da inclinação do telhado I 34
2.13 Coletando medidas para cálculo da inclinação do telhado II 35
2.14 Coletando medidas para cálculo da inclinação do telhado III 35
2.15 Modelo da telha que foi trocada 36
2.16 Informação sobre a telha que o pedreiro estava manuseando 36
2.17 Vista externa do telhado depois de trocada as telhas 37
2.18 Vista interna do telhado depois de trocada as telhas 37

Introdução

Elon Lages Lima considera que o ensino da matemática deve ter três pilares, que são: conceituação, manipulação e aplicações. Sendo o equilíbrio entre estes o responsável pela boa compreensão matemática do estudante. Desta forma, ele considera que:

> "O ensino da matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de conceituação, manipulação e aplicações. Da dosagem adequada de cada uma dessas três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das idéias,o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento das três componentes básicas. Elas devem ser pensadas como um tripé de sustentação: as três são suficientes para assegurar a harmonia do curso e cada uma delas é necessária para seu bom êxito."(LIMA, 2006)

A conceituação, como o próprio nome diz, vem de conceito. Trata-se de compreender as definições matemáticas, de modo a dar sustentabilidade a um assunto a ser estudado.

A manipulação costuma ser de características aritméticas e trata-se do manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares.

A aplicação utiliza dos conceitos e da manipulação matemática para chegar a resultados, conclusões ou previsões, podendo ser estas do nosso cotidiano ou abordando áreas científicas. Com certeza, a busca por aplicações fez e ainda faz com que a matemática continue avançando. Porém, como a aplicação se utiliza da conceituação e da manipulação para poder produzir resultados, torna-se necessário e imprescindível o domínio destas para se fazer uma aplicação de forma coesa.

A utilização de quantidades corretas de conceitos, manipulações e aplicações fará com que elevemos o nível de conhecimento matemático de nossa sociedade. Porém, este equilíbrio tão desejado ainda não vem acontecendo em nossas escolas, já que durante os anos de 1960 e 1970, no período conhecido como matemática moderna, privilegiou a conceituação em detrimento das outras. Após este período, o que vem acontecendo é um exagero com relação à manipulação, em detrimento das demais, fazendo com que muitos pensem que a matemática se resume simplesmente à manipulação.

Com o intuito de contribuir para o equilibrio deste tripé (conceituação, manipulação e aplicação), neste trabalho fizemos um paralelo entre a matemática formal (Teorema de Pitágoras, ângulos e conguência modular) e a matemática popular (Noves-fora, paredes no esquadro e pedreiros saindo pela tangente). Esta matemática popular, não deve ser desmerecida em relação a matemática acadêmica, pois é uma forma diferenciada de realizar cálculos que são de grande valia dentro de suas práticas profissionais ou culturais.

A necessidade de desenvolver este trabalho deve-se a dificuldade que os professores de matemática têm, e até mesmo os livros didáticos, de utilizar a matemática formal conjuntamente com a matemática popular. Sendo que a matemática popular poderia ser mostrada nas escolas como uma forma alternativa de realizar cálculos afim de mostrar que não se tem apenas aquele modo de se fazer matemática que os livros didáticos apresentam. Isto dificulta a aproximação dos alunos com a matéria, pois deixa de levar em conta suas experiências pessoais. Esta situação fica mais evidente quando trabalhamos com alunos do EJA (Educação de Jovens e Adultos). Eles trazem um conhecimento matemático empírico muito grande e, normalmente, se decepcionam com a matemática trabalhada em sala de aula, muitas vezes, bem distante da matemática do cotidiano destes alunos.

Desta forma, torna-se necessário valorizar a matemática popular. Um exemplo claro são os pedreiros que possuem um conhecimento empírico matemático muito grande, porém têm dificuldades em formalizá-lo. Muitas vezes, uma pessoa que tem um conhecimento considerável de matemática, tem dificuldade de compreender os cálculos feitos por um pedreiro em uma simples construção ou em uma reforma de um imóvel. Também exitem certas dificuldades para compreender métodos antigos, que nossos avós já utilizavam a tempo atrás, como o famoso “noves-fora”.

Diante disso, este trabalho tem o intuito de resgatar e valorizar essa matemática utilizada por populares, propondo um “intercâmbio”entre os conhecimentos matemáticos acadêmicos e populares, de modo que um possa dar suporte para o outro, valorizando tanto o conhecimento acadêmico quanto o empírico, fazendo desta forma uma reaproximação entre a matemática e a sociedade.

Para facilitar a compreensão do trabalho, ele foi dividido em dois capítulos.

No primeiro capítulo, demonstramos alguns pré requisitos sobre divisibilidade, aritmética dos restos e congruência. Resgatamos o tão utilizado (no passado) noves-fora, isto é apresentamos como funciona, de maneira que até mesmo os que não tiveram a oportunidade de conhecer este método, tão utilizado por nossos avós, possam compreender. Também explicamos como fazer a prova dos nove e aborda sobre sua possível eficácia.

Por fim, no último capítulo, entramos no mundo dos pedreiros para compreender alguns cálculos realizados por eles nos seus trabalhos na construção civil. Mais especificamente, abordamos como trabalham os pedreiros sem a utilização de um instrumento específico para fazer medidas de ângulos, já que na construção civil existem muitas situações onde precisam ter conhecimento relacionados com medidas de ângulos. Neste caso, utilizamos noções básicas de porcentagem e trigonometria para compreender, do ponto de vista formal, como trabalham os pedreiros, mesmo sem ter as medidas destes ângulos.

Finalizamos este fazendo uma breve análise sobre o trabalho desenvolvido, deixando como reflexão a importância de realizar trabalhos que aproximem a escola do cotidiano da comunidade em que está inserida.

Capítulo 1

Noves-fora e a Prova dos Nove

Noves-fora nada mais é do que encontrar o resto da divisão de um número qualquer por nove. O cálculo do noves-fora feito popularmente, sejam nas ruas, e as vezes, por pessoas que não possuem conhecimento formal sobre este assunto, são realizados com bastante rapidez.

Mas como estas pessoas conseguem encontrar o resto de uma divisão por nove de forma tão rápida?

O objetivo deste capítulo é fazer um esclarecimento sobre a citada pergunta baseada no livro de Renate Wantanabe " Na terra dos noves-fora", bem como explicitar a matemárica formal que está "por trás"da citada prova.

Para cumprir com o citado objetivo iniciamos o capítulo fazendo uma abordagem sobre: princípio de indução, divisibilidade e congruência.

1.1 Princípio da Indução

Embora esses próximos conceitos possam ser estendidos, com algumas hipóteses adicionais, a todo o conjunto dos números inteiros, será suficiente para este texto apresentarmos como segue.

Axioma 1.1.1 (Princípio da Indução) *Seja A um conjunto não vazio de* $\mathbb{N}$. *Se*

i) $1 \in A$;

ii) $n + 1 \in A$ *sempre que* $n \in A$.

Então $A = \mathbb{N}$.

Usaremos este axioma para demonstrar a seguinte afirmação

Teorema 1.1.1 (Princípio da Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio dos naturais possui um menor elemento.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{A}$ um subconjunto não vazio dos naturais, $I_n = \{p \in \mathbb{N};\ 1 \leq p \leq n\}$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$, um conjunto formado pelos elementos $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - \mathcal{A}$.
Se $1 \in \mathcal{A}$, então claramente 1 é o menor elemento de $\mathcal{A}$.
Agora, se $1 \notin \mathcal{A}$, então $1 \in \mathcal{X}$, tendo em vista que $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - \mathcal{A}$. Porém $\mathcal{X} \neq \mathbb{N}$, pois $\mathcal{A} \neq \{\ \}$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$.
Logo, o princípio da indução não pode ser aplicado a $\mathcal{X}$, o que implica que o item ii) do Axioma 1.1.1 não vale em $\mathcal{X}$, isto é: existe um $n_0 \in \mathcal{X}$ tal que $n_0 + 1 \notin \mathcal{X}$.
Como $I_n \subset \mathbb{N} - \mathcal{A}$, temos que todos os números inteiros de 1 a n_0 pertencem a $\mathcal{X}$ e como $n_0 + 1 \notin \mathcal{X}$, temos que $n_0 + 1 \in \mathcal{A}$ e $I_n = \mathcal{X}$.
Portanto, $a = n_0 + 1$ é o menor elemente de $\mathcal{A}$. ■

1.2 Divisibilidade

Dados dois números inteiros a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b , escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Neste caso, diremos também que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou, ainda que b um *múltiplo* de a.

Observe que a notação $a|b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{Z}$, nem representa uma fração.Trata-se de uma sentença que diz ser verdade que existe c tal que $b = ac$. A negação dessa sentença é representado por $a \nmid b$, significando que não existe nenhum número inteiro c tal que $b = ac$.

Proposição 1.2.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que*

i) $1|a$, $a|a$ *e* $a|0$.

ii) *se* $a|b$ *e* $b|c$, *então* $a|c$.

Demonstração: *i)* Isto decorre das igualdades $a = 1.a$, $a = a.1$ e $a.0 = 0$.
O item *i)* da proposição acima nos diz que todo número inteiro é divisível por 1 e, se não

nulo, por si mesmo.

ii) Se $a|b$ e $b|c$ implica que existem $f, g \in \mathbb{Z}$, tais que $b = a.f$ e $c = b.g$. Substituindo o valor de b da primeira equação na outra , obtemos $c = b.g = (a.f).g = a.(f.g)$ o que mostra que $a|c$. ■

Proposição 1.2.2 *Se* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *, com* $a \neq 0$ *e* $c \neq 0$*, então* $a|b$ *e* $c|d \Rightarrow a.c|b.d$.

Demonstração: Se $a|b$ e $c|d$, então $\exists\ f, g \in \mathbb{Z}$, $b = a.f$ e $d = c.g$. Portanto, $b.d = (a.c)(f.g)$, logo, $a.c|b.d$. ■

Em particular, se $a|b$, então $a.c|b.c$, para todo $c \in \mathbb{Z}^*$.

Proposição 1.2.3 *Sejam* a*,* b*,* c $\in \mathbb{Z}$*, com* $a \neq 0$*, tais que* $a|(b+c)$*. Então* $a|b \Leftrightarrow a|c$.

Demonstração: Como $a|(b+c)$, existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = f.a$.
Agora , se $a|b$, temos que existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a.g$. Segue $a.g + c = f.a = a.f$. Portanto, obtemos $c = a.f - a.g = a.(f - g)$, o que implica que $a|c$. ■

A prova da outra implicação é totalmente análoga.

Proposição 1.2.4 *Se* $a, b, c \in \mathbb{Z}$*,com* $a \neq 0$*, e* $x, y \in \mathbb{Z}$ *são tais que* $a|b$ *e* $a|c$*, então* $a|(xb \pm yc)$.

Demonstração: $a|b$ e $a|c$ implicam que existem $f, g \in \mathbb{Z}$ *tais que* b = af *e* c = ag. *logo,* xb $\pm\ yc = x(af) \pm y(ag) = a(xf \pm yg)$, o que prova o resultado . ■

Teorema 1.2.1 (Teorema da Divisão Euclidiana) *Sejam* a *e* b *dois números naturais com* $0 < a < b$*. Existem dois únicos números naturais* q *e* r *tais que* $b = a.q + r$*, com* $r < a$.

Demonstração: Suponha que $b > a$ e considere, os números $b, b-a, b-2a, b-3a, ..., b-n.a, ...$
Pela Propriedade da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q.a$. Vamos provar que r tem propriedade requerida , ou seja , que $r < a$.
Se $a|b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar . Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$, e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse , existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - qa$, teríamos $c = b - (q+1).a \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de r ser o menor

elemento de S .

Portanto , temos que $b = a.q + r$ com $r \ < \ a$, o que prova a existência de q e r.

Agora vamos mostrar a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S , a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a.q$ e $r' = b - a.q'$, com $r \ < \ r' \ < \ a$, teríamos $r' - r \geq \ a$, o que acarretaria $r' \ \geq \ r + a \ \geq a$, absurdo. Portanto, $r = r'$, daí segue-se que $b - a.q = b - a.q'$, o que implica que $a.q = a.q'$ e, portanto, $q = q'$. ■

Nas condições do Teorema 1.2.1, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e de *resto* da divisão de b por a . A demonstração do teorema fornece um algoritmo para calcular o quaciente e o resto da divisão de um número natural por outro, através de subtrações sucessivas .

Exemplo 1.2.1 *Vamos achar o quociente e o resto da divisão de 19 por 5 .*
Considere as diferenças sucessivas : $19 - 5 = 14, \ 19 - 2.5 = 9, \ 19 - 3.5 = 4 < 5.$
Isto nos dá $q = 3$ *e* $r = 4$.

1.3 Congruência

A “Teoria das congruências”é um vasto campo da matemática, inserido na teoria dos números. Abrange propriedades e teoremas cujo entendimento e aplicabilidade variam dos níveis mais básicos aos mais avançados. Porém como a proposta deste trabalho está voltada para o ensino básico, nos restingiremos apenas a itens úteis para este fim.

Em matemática, aritmética modular (chamada também de aritmética do relógio) é um sistema de aritmética para inteiros, onde os números “ voltam para trás”quando atingem um certo valor, o módulo.

O matemático suiço Euler foi o pioneiro na abordagem de congruência por volta de 1750, quando ele explicitamente introduiziu a ideia de congruência módulo um número natural N. A aritmética modular foi desenvolvida posteriormente por Carl Friendrich Gauss em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801.

Veja a seguir exemplo de congruência modular que podem ser trabalhadas no ensino básico. Este é uma aplicação interessante sobre congruência, relacionada a calendários:

Exemplo 1.3.1 *Vamos supor que você saiba em qual dia da semana caiu o dia 1º de* janeiro de um determinado ano. Em 2006, por exemplo, foi um domingo. Imaginemos que você deseja saber quando cairá um outro dia qualquer (vale para qualquer ano). É só montar uma tabela para essa primeira semana, que no caso será:

Domingo	1
Segunda	2
Terça	3
Quarta	4
Quinta	5
Sexta	6
Sábado	7

.

Verificamos que aqui estamos diante de um caso de congruência, módulo 7 nesse caso. Digamos que estivéssemos interessados em descobrir em que dia da semana caiu o dia 5 de julho (e não temos calendário em mãos, é claro). Primeiro presisamos ver quantos dias existem de 1 de janeiro até 5 de julho. Vejamos:

Janeiro = 31 dias

Fevereiro = 28 dias (2006 não é bissexto)

Março = 31 dias

Abril = 30 dias

Maio = 31 dias

Junho = 30 dias

Julho = 5 dias

Total = 186 dias.

Agora, é como se tivéssemos uma fila de 186 dias e estamos desejando saber, na congruência de módulo 7 (sete dias da semana) qual o correspondente ao 186.

Se dividimos 186 por 7, teremos como quociente 26 e como resto 4. Logo 186 é congruente ao 4, no módulo 7. Como o dia 4 de janeiro de 2006 foi uma quarta-feira, o 186º desse mesmo ano também o será e, é claro, que todas as demais quartas-feiras deste ano serão ocupados por números congruentes ao 4, módulo 7.

Segue a definição de congruência dado por Hefez (2006).

Definição 1.3.1 *Seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se* $a \equiv b \ mod \ m$.

Por exemplo, $21 \equiv 13 \ mod \ 2$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1.

Quando a relação $a \equiv b \ mod \ m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso, $a \not\equiv b \ mod \ m$.

Como o resto da divisão de um número natural qualquer por 1 é sempre nulo, temos que $a \equiv b \ mod \ 1$, quaisquer que sejam $a, \ b \in \mathbb{N}$. Isto torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, doravante, consideraremos sempre $m > 1$.

Veja a seguir o caso da congruência usada cotidianamente em relógios analógicos.

Exemplo 1.3.2 *Aritmética do relógio*

Trata-se de um caso de cogruência, módulo 12 (nos relógios analógicos, é claro). Note que 13 horas é congruente a 1 hora, no módulo 12. Ambos divididos por 12, deixam resto 1. 17 horas é congruente a 5 horas, módulo 12. Tanto 17, como 5, divididos por 12, deixam resto 5 ... e assim, sucessivamente.

$1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv ..., mod 12$

$5 \equiv 17 \equiv 29 \equiv ..., mod 12$

Assim as horas marcadas num relógio analógico constituem também um caso clássico de congruência, nesse caso com módulo 12.

Assim, com os dois exemplos que mostramos, podemos observar que em nosso cotidiano existem inúmeras situações onde se faz presente a noção de congruência, módulo k. Calendários, relógios analógicos e problemas em geral envolvendo repetições periódicas. A congruência modular nos ajuda a fazer operações matemática que neste trabalho são de muita importância, como entender o critério de divisibilidade por nove e qual é o resto de qualquer número natural quando dividido por nove.

A congruência módulo um inteiro fixado m satisfaz algumas propriedades, conforme proposição a seguir:

Proposição 1.3.1 *Seja* $m \in \mathbb{N}$*, com* $m > 1$*. Para todos* $a, b, c \in \mathbb{N}$*, tem-se que*

(i) $a \equiv a \; mod \; m,$

(ii) *Se* $a \equiv b \; mod \; m$, *então* $b \equiv a \; mod \; m$,

(iii) *se* $a \equiv b \; mod \; m$ *e* $b \equiv c \; mod \; m$, *então* $a \equiv c \; mod \; m$.

Para verificar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente aplicar o seguinte resultado:

Suponha que $a, \; b \in \; \mathbb{N}$ são tais que $b \; \geq \; a$. Tem-se que $a \; \equiv \; b \; mod \; m$ *se, e somente se*, $m|b \; - \; a$.

Demonstração: Sejam $a \; = \; mq \; + \; r$, com $r \; < \; m$ e $b \; = \; mq' \; + \; r'$, com $r' \; < \; m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b \; - \; a \; = \begin{cases} m(q' \; - \; q) \; + \; (r' \; - \; r), & se \; r' \geq \; r \\ m(q' \; - \; q) \; - \; (r' \; - \; r), & se \; r \geq \; r' \end{cases}$$

onde $r' \; - \; r \; < \; m, \; \; ou \; \; r \; - \; r' \; < \; m$. Portanto, $a \; \equiv \; b \; mod \; m$ se, e somente se, $r \; = \; r'$, o que é equivalente a dizer que $m|b \; - \; a$.

Note que todo número natural é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um dos números 0,1,...,$m-1$. Além disso, dois desses números distintos não são congruentes módulo m.
Portanto, para achar o resto da divisão de um número a por m, basta achar o número natural r dentre os números 0,1,...,$m-1$ que seja congruente a a módulo m. ■

Como a congruência módulo m satisfaz as propriedades dadas sob a forma da proposição 1.3.1, a saber:

- Propriedade reflexiva (item i)
- Propriedade simétrica (item ii)
- Propriedade transitiva(item iii)

Então dizemos que a mesma define uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

Chamaremos de *sistema completo de resíduos* módulo m a todo conjunto de números naturais cujos resto pela divisão por m são os números 0,1,...,$m-1$, sem repetições e numa ordem qualquer.

Portanto, um sistema completo de resíduos módulo m possui m elementos.
É claro que, se $a_1, ..., a_m$ são m números naturais, dois a dois não congruentes módulo m, então eles formam um sistema completo de resíduos módulo m. De fato, os restos da divisão dos a_i por m são dois a dois distintos, o que implica que são os números 0,1,...,$m-1$ em alguma ordem.

O que torna útil e poderosa a noção de congruência é o fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição e multiplicação nos inteiros, conforme veremos na proposição a seguir.

Proposição 1.3.2 *Seja* $a, b, c, d, m \in \mathbb{N}$, *com* $m > 1$.

(i) *Se* $a \equiv b \ mod \ m$ *e* $c \equiv d \ mod \ m$, *então* $a + c \equiv b + d \ mod \ m$.

(ii) *Se* $a \equiv b \ mod \ m$ *e* $c \equiv d \ mod \ m$, *então* $ac \equiv bd \ mod \ m$.

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \ mod \ m$ e $c \equiv d \ mod \ m$. Podemos, sem perca de generalidade, supor que $b \geq a$ e $d \geq c$. Logo, temos que $m|b - a$ e $m|d - c$.

(i) Basta observar que $m|(b - a) + (d - c)$ e, portanto, $m|(b + d) - (a + c)$, o que prova essa parte do resultado.

(ii) Basta notar que $bd - ac = d(b - a) + a(d - c)$ e concluir que $m|bd - ac$.

■

Corolário 1.3.1 *Para todos* $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{N}$, *se* $a \equiv b \ mod \ m$, *então* $a^n \equiv b^n \ mod \ m$.

Demonstração: Se $a \equiv b \ mod \ m$ então $a^n \equiv b^n \ mod \ m$
Demostraremos por indução.
Para n=1 temos:
$a^1 \equiv b^1 \ mod \ m$, logo temos $a \equiv b \ mod \ m$, verdadeiro pela hipótese.
Suponha verdadeiro para n, ou seja:

$$a^n \equiv b^n \ mod \ m, \text{segue:} \begin{cases} a^n \equiv b^n \ mod \ m \\ a \equiv a \ mod \ m \\ b \equiv b \ mod \ m \end{cases} \overbrace{\Rightarrow}^{pela \ proposição \ 1.3.2(ii)} \begin{cases} a^{n+1} \equiv ab^n \ mod \ m \\ a^n b \equiv b^{n+1} \ mod \ m \end{cases}$$

Pela Proposição 1.3.2 (i) temos:

$a^{n+1} + a^n b \equiv ab^n + b^{n+1} \ mod \ m \ \Rightarrow \ a^{n+1} - b^{n+1} \equiv ab^n - a^n b \ mod \ m \quad (*)$

Por hipótese de indução($a^n \equiv b^n \ mod \ m$) temos,

$a \equiv b \ mod \ m \ \Rightarrow \ b \equiv a \ mod \ m$ por outro lado $a^n \equiv b^n \ mod \ m \Rightarrow a^n b \equiv ab^n \ mod \ m \Rightarrow ab^n \equiv 0 \ mod \ m$

Comparando com $(*)$ segue por transitividade

$a^{n+1} - b^{n+1} \equiv 0 \ mod \ m$, o que estabelece a veracidade $\forall \ n \in \mathbb{N}$. ■

1.4 Noves-fora

O noves-fora é um método antigo, bastante utilizado por pessoas mais velhas e pode ser descrito da seguinte maneira: retira-se o maior múltiplo de nove de um número natural qualquer, mesmo sem saber qual é esse múltiplo, e em seguida encontra-se qual é o valor que deveria ser subtraído deste número natural para que ele passe a ser um múltiplo de 9. Isso é feito de uma maneira muito simples e prática, e também é útil para fazer a prova dos nove nas operações básicas da matemática. Veremos a seguir, mais detalhadamente, como funciona esse processo.

Noves-fora nada mais é do que encontrar quanto é o resto da divisão de um número qualquer por nove. Desta forma temos, por exemplo, que 12 noves-fora é 3, pois quando dividimos 12 por 9 temos como quociente o número 1 e como resto o número 3. Desta mesma maneira, temos que 31 noves-fora é 4, pois quando dividimos 31 por 9 temos como quociente o número 3 e como resto o número 4.

Mas o que mais impressiona no cálculo dos noves-fora feito popularmente, sejam nas ruas e às vezes, por pessoas que não possuem conhecimento formal sobre o assunto, é a rapidez com que eles encontram o resto desta divisão por 9. São capazes de falar que 1230010 noves-fora é 7 em menos de 5 segundos.

Mas como essas pessoas conseguem encontrar o resto de uma divisão por nove de uma forma tão rápida? Com o intuito de esclarecer o assunto, a autora Renate Wantanabe, nascida na Alemanha, mas que foi criada e estudou no Brasil, escreveu o pequeno livro

“Na terra dos noves-fora”, que faz parte da coleção Vivendo a Matemática, da editora Scipione.

Este livro conta a estória de um menino chamado Paulo, que foi passar as férias na casa de sua avó, em uma cidade de pessoas muito estranhas, matematicamente dizendo. O município era chamado noves-fora. Este local era diferente para Paulo, porque sempre que alguém falava ou escutava um número, esta pessoa automaticamente já fazia o noves-fora deste número. Desta forma, a autora mostra toda a epopéia e raciocínio matemático deste menino de 11 anos para compreender o noves-fora e em seguida a prova dos nove.

A ideia do protagonista do livro ser uma criança de 11 anos não é em vão, já que mostra que uma criança que sabe fazer as quatro operações básicas da matemática é capaz de compreender o noves-fora e a prova dos nove. Talvez seja este o motivo de ser tão conhecido por populares. O livro traz o texto de uma maneira bem simples e gostosa de ler, capaz de cativar as crianças inclusive, trazendo pequenas atividades no decorrer do texto para avaliar se o leitor tem acompanhado o raciocínio do protagonista.

No primeiro dia de Paulo passeando pela cidade de noves-fora ele colhe as seguintes informações: 11 noves-fora 2; 12 noves-fora 3; 14 noves-fora 5; 6 noves-fora 6. A princípio, com estas informações, ele raciocinou que noves-fora era apenas subtrair 9 dos números, pois subtraindo 9 de 11 temos 2; subtraindo 9 de 12 temos 3; subtraindo 9 de 14 temos 5 e como não tem como subtrair 9 de 6, no universo dos números naturais em que se passa a estória, concluiu ele que tinha razão de 6 noves-fora ser 6 mesmo.

Porém, Paulo teve uma surpresa no dia seguinte, ao descobrir que 100 noves-fora não era 91 e sim 1. Neste momento ele percebeu que seu raciocínio não servia para todos os casos e passou a ficar atento às conversas e colheu as seguintes informações: 43 noves-fora 7; 38 noves-fora 2; 27 noves-fora 0; 187 noves-fora 7; 319 noves-fora 4; 33 noves-fora 6; 18 noves-fora 0. Depois de muito pensar nessas informações, Paulo enfim compreendeu que o noves-fora tão falado na cidade nada mais era do que o resto da divisão de um número (natural) qualquer por 9.

Mas uma das coisas que mais intriga no noves-fora é a rapidez com que as pessoas conseguem descobrir o resto da divisão de um número natural qualquer por 9. Paulo também ficou intrigado com isso quando, no terceiro dia na cidade, um de seus amiguinhos falou que 790 noves-fora era 7 sem precisar de tempo algum para fazer contas. Desta maneira, ele viu que tinha descoberto o sentido do noves-fora, porém ainda não sabia a técnica mais rápida para fazê-lo.

O livro prossegue contando todo o raciocínio utilizado pelo menino para compreender esta técnica, que é bastante simples: basta somar os algarismos do número em questão, caso o resultado seja menor que nove, esse é o noves-fora, ou seja, o resto da divisão deste número por nove; caso o resultado seja maior que nove, somamos de novo os algarismos e repetimos esse processo até que o resultado seja um número natural menor que nove. Caso o resultado de quando somarmos os algarismos em algum momento seja 9, temos que esse número terá como seu noves-fora o zero, já que parece bastante coerente que 9 noves-fora não resta nada. Isso nos da a garantia de que este número é um múltiplo de 9, já que quando dividido por nove tem o zero como resto. Veja abaixo como isto funciona:

- 11 noves-fora é 2, pois 1 + 1 = 2;
- 15 noves-fora é 6, pois 1 + 5 = 6;
- 38 noves-fora é 2, pois 3 + 8 = 11, como 11 é maior do que 9 repetimos o processo e temos: 1 +1 = 2;
- 18 noves-fora é 0, pois 1+ 8 = 9 e 9 - 9 = 0;
- 98345270136 noves-fora é 3, pois 9 + 8 + 3 + 4 + 5 + 2 + 7 + 0 + 1 + 3 + 6 = 48, repetindo o processo temos 4 + 8 = 12, repetindo novamente o processo temos finalmente 1 + 2 = 3.

São cálculos simples e funcionam sempre que quisermos encontrar o resto da divisão de um número por 9, pois basta somarmos os algarismos deste número. Isto é muito utilizado nas escolas para resto zero, ou seja, para saber se um número natural qualquer é divisível por 9, pois somamos os algarismos e vemos se o resultado é um múltiplo de nove. Porém, o procedimento poderia ser continuado como no noves-fora e daí chegaríamos a conclusão de que a soma dos algarismos, se somássemos até encontrarmos um único algarismo, teria que ser o nove para que esse número seja divisível por 9, com a exceção do número zero.

Veja a tabuada do 9 abaixo:

9 x 1 = 9

9 x 2 = 18, 1 + 8 = 9

9 x 3 = 27, 2 + 7 = 9

9 x 4 = 36, 3 + 6 = 9

9 x 5 = 45, 4 + 5 = 9

9 x 6 = 54, 5 + 4 = 9

9 x 7 = 63, 6 + 3 = 9

9 x 8 = 72, 7 + 2 = 9

9 x 9 = 81, 8 + 1 = 9

9 x 10 = 90, 9 + 0 = 9

9 x 11 = 99, 9 + 9 = 18, somando novamente os algarismos temos: 1 + 8 = 9.

Desta forma, podemos proceder para qualquer número natural, e como sabemos que 9 noves-fora é zero, podemos dizer que o noves-fora é útil quando procuramos saber se um número é divisível por 9, ou seja, para saber se um número é divisível por 9 basta fazer o noves-fora, se o resultado for zero, este número é divisível por 9; se for qualquer outro resultado, este número não é divisível por 9. Formalmente podemos justificar isto usando o algoritmo de Euclides,pois sabemos que: $9|n \Rightarrow n = 9\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{N}$, caso contrário temos que $9 \not| n$.

1.5 Noves-fora e a Congruência Modular

Nesta seção mostraremos que o noves-fora funciona para qualquer número natural. Para cumprir com esse objetivo vamos usar a noção de conguência modular.

Calcular o noves-fora de um número é encontrar o resto da divisão deste número por 9, mas também podemos falar que o noves-fora de um número é a menor congruência natural (considerando zero como natural) de um número natural qualquer, módulo 9. Assim, trabalhando na congruência módulo 9 temos que:

$0 \equiv 0 \; mod \; 9$

$1 \equiv 1 \; mod \; 9$

$2 \equiv 2 \; mod \; 9$

$3 \equiv 3 \; mod \; 9$

$4 \equiv 4 \; mod \; 9$

$5 \equiv 5 \; mod \; 9$

$6 \equiv 6 \, mod \, 9$

$7 \equiv 7 \, mod \, 9$

$8 \equiv 8 \, mod \, 9$

$9 \equiv 0 \, mod \, 9$

$10 \equiv 1 \, mod \, 9$

Veja que é cíclica a congruência acima, ou seja, no módulo 9 todo número necessariamente será côngruo a um dos números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Da mesmo modo, quando fazemos o noves-fora é possível encontrar estes resultados, por isso podemos falar que o noves-fora é um caso particular da congruência módulo 9.

Utilizaremos $10 \equiv 1 mod \, 9$ para demonstrar que o noves-fora realmente serve para encontrar o resto da divisão de um número natural qualquer por 9.

Tome um número natural qualquer que chamaremos de $N_r N_{r-1} ... N_2 N_1 N_0$, sendo que os índices representam a posição do algarismo N.

Logo temos que :

$N_r N_{r-1} ... N_2 N_1 N_0 = 10^0 N_0 + 10^1 N_1 + 10^2 N_2 + ... + 10^{r-1} N_{r-1} + 10^r N_r$

Note que:

$$
\begin{array}{lclc lcl}
10^0 & \equiv & 1 \, mod \, 9 & \text{multiplicando por } N_0 \text{ temos:} & 10^0 N_0 & \equiv & N_0 mod \, 9 \\
10^1 & \equiv & 1 \, mod \, 9 & \text{multiplicando por } N_1 \text{ temos:} & 10^1 N_1 & \equiv & N_1 mod \, 9 \\
10^2 & \equiv & 1 \, mod \, 9 & \text{multiplicando por } N_2 \text{ temos:} & 10^2 N_2 & \equiv & N_2 mod \, 9 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
10^{r-1} & \equiv & 1 \, mod \, 9 & \text{multiplicando por } N_{r-1} \text{ temos:} & 10^{r-1} N_{r-1} & \equiv & N_{r-1} mod \, 9 \\
10^r & \equiv & 1 \, mod \, 9 & \text{multiplicando por } N_r \text{ temos:} & 10^r N_r & \equiv & N_r mod \, 9
\end{array}
$$

Somando membro a membro da congruência temos:

$$10^0 N_0 + 10^1 N_1 + 10^2 N_2 + ... + 10^{r-1} N_{r-1} + 10^r N_r \equiv N_0 + N_1 + N_2 + ... + N_{r-1} + N_r \;\; mod \, 9$$

Logo, podemos concluir que um número qualquer é côngruo à soma de seus algarismos no módulo 9. Fato este que usamos quando fazemos o noves-fora.

Note que por recorrência,através da regularidade, temos a garantia que podemos fazer as operações desenvolvidas acima, pelos seguintes fatos: $10^0 \equiv 1 \, mod \, 9$, $10^1 \equiv 1 \, mod \, 9$, $10^2 \equiv 1 \, mod \, 9$, ... , $10^{r-1} \equiv 1 \, mod \, 9$, $10^r \equiv 1 \, mod \, 9$. Outra forma (mais elegante) de afirmar isto é utilizando o Corolário 1.3.1, que diz: se $a \equiv b \, mod \, m \Rightarrow a^n \equiv b^n \, mod \, m$.

Já para garantir que podemos multiplicar a congruência por $N_0, N_1, N_2, ..., N_{r-1}, N_r$, como foi feito acima demonstraremos que se $a \equiv b \bmod m \Rightarrow$ac $\equiv bc \bmod m$.

Demonstração: Se $a \equiv b \bmod m \Leftrightarrow m|a - b \Rightarrow \exists\ k \in\ \mathbb{Z}$ tal que $a - b = mk \Rightarrow c(a - b) = cmk \Rightarrow ac - bc = ckm \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \bmod m$. ■

Vale ressaltar que esta implicação trata-se de um caso particular da Proposição 1.3.2(ii), quando $c = d$.

1.6 A Prova dos Nove

Como vimos anteriormente, o noves-fora é útil para sabermos se um número é divisível por nove ou não, mas também podemos utilizá-lo para fazer a prova dos nove, fato este muito utilizado por populares em seus cotidianos. A prova dos nove pode ser feita em qualquer conta envolvendo números naturais. Veremos em seguida como é feita a prova dos nove nas contas envolvendo as quatro operações básicas. Para isto, resolveremos uma mesma conta acertando uma e errando a outra.

Veja como fazemos na adição:

$239 + 678 = 917$

Para fazer a prova dos nove, fazemos o noves-fora de um lado da igualdade e em seguida fazemos o noves-fora depois da igualdade. Na sequência, comparamos o resultado dos noves-fora.

Note que:

239 noves-fora é 5 e 678 noves-fora é 3, como $5 + 3 = 8$ temos que o noves-fora do lado esquerdo da igualdade é 8. Por outro lado, 917 noves-fora é 8. Logo, temos que os noves-fora dos dois lados da igualdade têm que ser iguais, portanto existe uma boa possibilidade de que esta operação esteja correta.

Por outro lado, $239 + 678 = 907$, temos que 907 noves-fora é 7. Logo, temos que os noves-fora dos dois lados da igualdade são diferentes, portanto temos a garantia que esta operação está errada.

A subtração funciona de forma semelhante à adição, porém existe a possibilidade de que o primeiro lado da igualdade, quando feito o noves-fora, resulte em um número negativo. Quando isto acontece basta adicionar nove.

No exemplo, 679 - 548 = 131, podemos proceder da seguinte maneira:
679 noves-fora é 4 e que 548 noves-fora é 8, como 4 - 8 = - 4 , como se trata de um número negativo, basta somar nove para encontrar o noves-fora, desta forma temos que o noves-fora do lado esquerdo da igualdade será - 4 + 9 = 5. Além disso, temos que o noves-fora de 131 também é 5, portanto existe uma boa possibilidade de que esta operação esteja correta.
Já no exemplo, 679 - 548 = 133, temos que 133 noves-fora é 7, logo temos que o noves-fora do lado esquerdo da igualdade é diferente do noves-fora do lado direito da igualdade, portanto temos a garantia de que esta operação está errada.

Na multiplicação, a prova dos nove é feita de forma semelhante a da adição, porém desta vez utilizando a operação da multiplicação, como por exemplo,em 234 x 86 = 20124, temos que 234 noves-fora é 0 e 86 noves-fora é 5, como 0 x 5 = 0 temos que o noves-fora do lado esquerdo da igualdade é zero. Por outro lado, note que 20124 noves-fora também é zero, portanto existe uma boa possibilidade de que esta operação esteja correta.

No exemplo 234 x 86 = 20104, temos que 20104 noves-fora é 7. Como $0 \neq 7$ temos a garantia que está operação está errada.

Já na divisão, devemos lembrar que estamos trabalhando com números inteiros, logo a prova dos nove serve para ser aplicada para a parte inteira que encontramos no quociente e um possível resto.

A prova dos nove da divisão é um pouco mais complicada, já que teremos que fazer duas operações além do noves-fora. Funciona da seguinte forma: faz o produto entre o noves-fora do quociente e do divisor e em seguida soma com o noves fora do resto, em seguida faz o noves-fora do dividendo e compara os resultados. Um exemplo é dado a seguir: $484 \div 23 = 21$ e deixa resto 1

Veja que 21 noves-fora é 3, 23 noves-fora é 5 e que 1 noves fora é 1. Logo temos que 3 x 5 + 1 = 16, sendo que 16 noves-fora é 7. Por outro lado temos que 484 noves fora também é 7, portanto existe uma boa possibilidade de que esta operação esteja correta.
No exemplo, $484 \div 23 = 23$ e deixa resto 15 note que, 23 noves-fora é 5, e 15 noves fora é 6. Logo temos que 5 x 5 + 1 = 26, sendo que 26 noves-fora é 8. Como vimos acima 484 noves-fora é 7 e como $8 \neq 7$ temos a garantia de que a operação feita está errada.

1.6.1 A Prova dos Nove Funciona?

Perceba que nos exemplos feitos anteriormente, mostrando como é feita a prova dos nove, nem sempre chegamos a uma conclusão muito exata. Acontece que, quando calculamos o noves-fora do lado esquerdo da igualdade de uma equação e ele é diferente do noves-fora do lado direito da mesma equação, temos a certeza de que a operação feita está errada. Porém, quando o resultado do noves-fora de ambos os lados da equação é o mesmo, não podemos garantir que a operação está correta. Mas por que isso acontece?

Antes de aprofundamos na justificativa deste questionamento, vamos retornar ao primeiro exemplo de adição citado neste capítulo, quer seja $239 + 678 = 917$. Esta conta está correta, mas não podemos afirmar isso pela prova dos nove. Não podemos dizer que esta operação está correta porque fazendo o noves-fora de $239 + 678$ o resultado é 8 e fazendo o noves-fora de 917 também é 8. Não podemos garantir isto porque temos contra-exemplos que derrubam esta tese: perceba que 908 noves-fora é 8 também, porém sabemos que $239 + 678 \neq 908$. Logo, quando temos o mesmo resultado de noves-fora dos dois lados da equação, isso não garante que a operação esteja correta. Por outro lado, não conseguiremos encontrar nenhum contra-exemplo mostrando que quando feito o noves-fora dos dois lados da igualdade de nossa operação e o valor dos noves-fora forem diferentes, o resultado da conta possa estar correto.

Para entendermos porque isso acontece voltaremos àquela ideia de que fazer o noves-fora é encontrar o resto da divisão de um número por nove. Isto é, quando falamos que o noves-fora de um número natural operado com outro também natural é um certo número x (com $x \in \mathbb{N} /\ 0 \leq x \leq 8$) estamos dizendo que o número resultante desta operação, quando dividido por nove, tem resto x. Logo, o noves-fora do resultado encontrado na operação tem que ser x, já que não é possível que um número quando dividido por nove tenha mais de uma possibilidade para o seu resto. Em outras palavras, se um número a dividido por nove tem resto b e um número c quando dividido por nove produz um resto d, temos que para afirmar que $a = c$ necessariamente temos que ter $b = d$. Porém, a recíproca não é verdadeira, $b = d$ não garante que $a = c$, pois podemos ter números diferentes que, quando divididos por nove, produzem o mesmo resto.

Fica mais fácil de entender todo este processo se utilizarmos congruência, já que como vimos anteriormente o noves-fora é a menor congruência natural (considerando zero como natural) de um número natural qualquer módulo 9. Note que quando falamos que um número x é côngruo a um número y módulo 9 isto não significa que $x = y$, porém se x não for côngruo a y módulo 9 temos a certeza que $x \neq y$. Logo, isto explica porque a prova dos nove nos traz a garantia de que algumas contas estão erradas, porém nunca nos garante que a conta está correta.

Capítulo 2

Pedreiros e os Ângulos na Construção Civil

A matemática usada na vida cotidiana é quase sempre adaptada às necessidades do grupo que as usa na sua profissão ou no contexto cultural. Como exemplo, podemos citar um grupo de profissionais inseridos no trabalho da construção civil: os pedreiros. Esses profissionais desenvolvem maneiras próprias de realizar a " matemática", a qual não deve ser desmerecida em relação a matemática acadêmica, pois é uma maneira diferenciada de realizar cálculos que são de grande valia dentro de suas práticas profissionais.

No trabalho da construção civil, em vários momentos, os pedreiros utilizam frases que estão relacionadas ao conceito de ângulos. São falas do tipo, " estas paredes estão no esquadro"ou " a caída deste telhado deve ser de 30%.

Apesar destes profissionais trabalharem bastante com ângulos, não é comum, ver pedreiros manusear aparelhos que meçam ângulos. Na realidade, eles não utilizam esses aparelhos, no entanto, eles medem ângulos utilizando-se de cálculos que são importantes em suas profissões.

O objetivo deste capítulo é descrever alguns cálculos utilizados por pedreiros no trabalho da construção civil, os quais seguem nas seções a seguir.

2.1 Paredes no Esquadro

Uma das preocupações dos pedreiros é ver se as paredes da construção vão "ficar no esquadro". Em uma linguagem matemática, diríamos a mesma coisa afirmando que as paredes estão em posições perpendiculares, ou seja, formam um ângulo reto.

Um matemático, sabendo que as paredes devem estar em posição perpendicular uma em relação à outra, provavelmente pensaria em medir o ângulo formado entre as duas paredes, o que seria totalmente plausível. Porém, não é desta forma que um pedreiro procede, já que não costuma ter aparelhos para fazer este tipo de medição.

No livro "Descobrindo o Teorema de Pitágoras", o autor Luiz Márcio Imennes narra de forma clara e bastante didática como o pedreiro costuma fazer para garantir que as paredes que ele irá construir formarão um ângulo de 90° uma em relação à outra. Esta narrativa funciona da seguinte forma:

Inicialmente, o pedreiro prega uma estaca A e outra estaca B; amarra um fio entre estas duas estacas e o estica bem. Em seguida, ele prega uma estaca C, sendo que esta estaca C ele tenta visualmente colocar em uma posição em que, quando amarrar um fio ligando as estacas A e C, este fio fique em posição perpendicular ao fio das estacas A e B. Depois disso, amarra-se um fio entre as estacas A e C. Mas, neste momento, o pedreiro não tem nenhuma garantia de que as linhas estão em posições perpendiculares, por isso o pedreiro sempre considera que a estaca C está em uma posição provisória, podendo ser alterado caso seja necessário. Veja na figura a seguir:

Figura 2.1: Passo I para garantir a perpendicularidade entre paredes

O próximo passo do pedreiro é confirmar se conseguiu colocar a estaca C no lugar certo. Para isso, ele faz o seguinte procedimento:

Mede uma distância de 4 metros partindo da estaca A e indo em direção a estaca B e coloca uma nova estaca que chamaremos de D. Em seguida, mede uma distância de 3 metros partindo da estaca A em direção a estaca C e coloca uma nova estaca que chamaremos de E. Por fim, ele mede a distância entre as estacas D e E. Se esta distância for de 5 metros, o pedreiro diz que está no esquadro. Caso a distância seja menor que 5 metros, ele afastará a estaca C da estaca B, fazendo isto de forma que o fio amarrado nas estacas permaneça esticado. Caso a distância seja maior que 5 metros, ele irá aproximar a estaca C da estaca B, o que pode ser visto na figura a seguir:

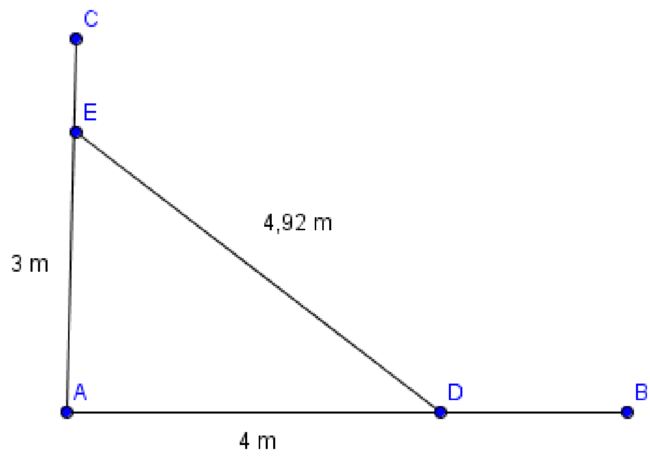

Figura 2.2: Passo II para garantir a perpendicularidade entre paredes

Note que a distância entre as estacas D e E é menor que 5 metros, logo teremos que afastar a estaca C da estaca B. Conforme figura a seguir:

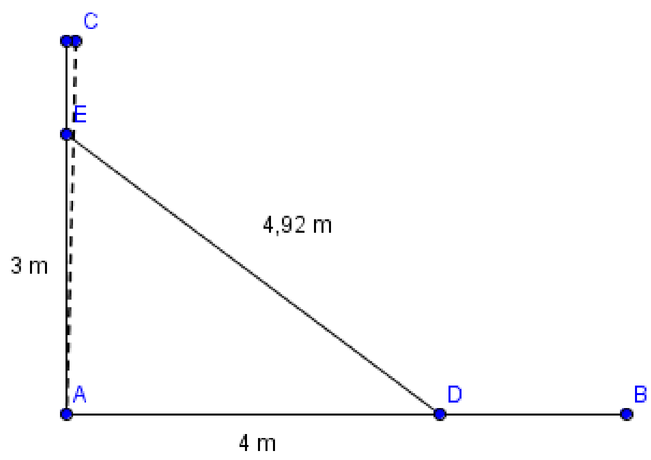

Figura 2.3: Passo III para garantir a perpendicularidade entre paredes

Normalmente, um pedreiro experiente, com poucas tentativas, consegue colocar estes fios em posições perpendiculares e dar continuidade ao seu trabalho.

Apesar do pedreiro não ter feito a medida entre os ângulos formados pela linha presa nas estacas A e B e pela outra linha presa nas estacas A e C, indiretamente ele fez esta medida, já que ele garantiu que utilizando aqueles fios ele conseguia formar o triângulo pitagórico (3,4,5), triângulo este que necessariamente é retângulo.Podemos afirmar que o pedreiro encontrou um ângulo de 90° e garantiu que as paredes, que serão construídas nos locais onde estão os fios, vão ficar em posições perpendiculares através da definição de triângulo retângulo.

Definição 2.1.1 *Um triângulo é considerado retângulo se, e somente se, o quadrado da medida de seu lado maior for igual à soma dos quadrados dos outros dois lados.*

A prova de que o pedreiro garantiu a perpendicularidade entre os fios está justamente na recíproca desta definição, que seria a seguinte: se o quadrado da medida de seu lado maior for igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então este triângulo é considerado retângulo, ou seja, possui um ângulo de 90°. Perceba que foi justamente isto que o pedreiro, sem perceber, utilizou.

2.2 Pedreiro saindo pela tangente

Ao falar que o pedreiro está saindo pela tangente, parece que estamos utilizando o sentido figurado desta frase, porém, não se trata disto. Estamos falando no sentido literal desta frase, ou seja, o pedreiro utiliza-se da trigonometria no triângulo retângulo para resolver problemas cotidianos do seu trabalho na construção civil.

Podemos ver isto mais claramente quando um pedreiro vai fazer a cobertura de uma casa, pois ele precisa tomar certo cuidado, já que as telhas precisam ser colocadas de modo a formar determinada inclinação, para que esta construção fique bem protegida da chuva, garantindo que ao chover a água irá escorrer normalmente pelo telhado, sem causar goteiras dentro da construção.

Estas inclinações irão variar de acordo com a telha utilizada na obra, algumas precisarão de uma inclinação maior, outras, menor. Segundo José Paulo Neves, pedreiro com 44 anos de experiência, o qual foi consultado no decorrer deste trabalho (veja relato na seção 2.3) , a caída do telhado usando a telha de barro é de 30% e para a telha Eternit é de 10%. Num primeiro momento, parece estranho esta afirmação, pois esperaríamos uma frase do tipo "a inclinação deste telhado será de x graus". Já a palavra "caída"não é de se estranhar, pois trata-se de um modo popular de falar inclinação. Já a medida adotada realmente parece um tanto inconveniente, uma vez que estamos trabalhando com ângulos e as medidas deveriam ser expressas em graus e não em porcentagem.

Apesar de parecer algo errado trabalhar com porcentagem na inclinação de um telhado, veremos agora que não é, pois indiretamente os pedreiros calculam o ângulo que eles utilizarão na inclinação de um telhado.

Primeiro, trataremos de compreender os cálculos feitos pelos pedreiros e, em seguida, faremos a relação com a medida de ângulos que naturalmente esperávamos que eles utilizassem.

Veremos agora como é feito o cálculo para uma boa inclinação de um telhado de meia-água. Antes porém, é importante sabermos que um telhado é chamado de meia-água na construção civil quando possui um único plano inclinado, ou seja, possui uma única superfície plana com declividade e é muito utilizado para fazer cobertura de pequenas áreas.

Como já foi escrito anteriormente, os pedreiros costumam falar que a inclinação de um telhado é medida em porcentagem de acordo com a telha a ser utilizada. Então, o significado para a frase "a inclinação de um telhado é de 30%", é que a diferença de altura entre os pontos mais alto e mais baixo do telhado tem que ser 30% da distância entre as paredes que sustentam os lados mais alto e mais baixo das telhas. A figura a seguir representa um telhado de meia-água de perfil.

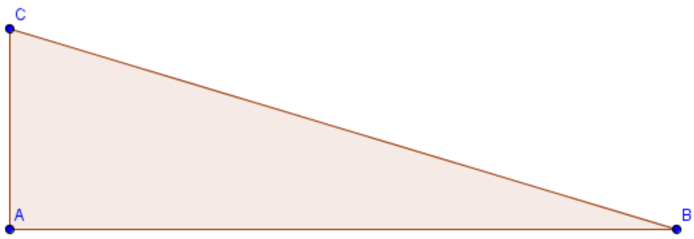

Figura 2.4: Representação de um telhado meia-água

Na figura acima, chame a distância entre A e B de x. Para que exista uma inclinação de 30% temos que, necessariamente, a distância entre A e C precisa ser de (30.x)/100. Se atribuirmos valores para a distância entre os pontos A e B teremos:

.

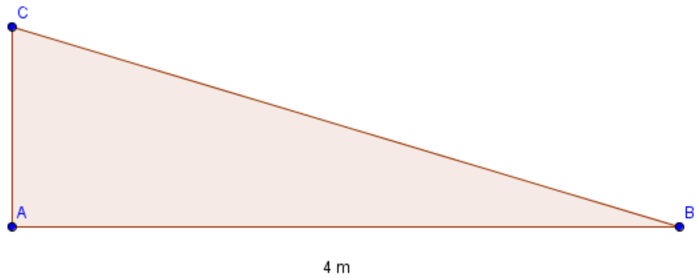

Figura 2.5: Construindo telhado meia-água I

Se a distância entre os pontos A e B for de 4 metros, para garantir que se tenha uma caida de 30% necessariamente a distância entre os pontos A e C deve ser 30% de 4 metros, ou seja, a distância entre A e C deve ser de 1,20 metros. Logo, temos a figura a seguir:

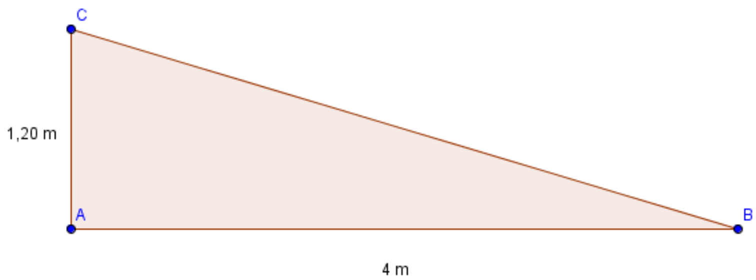

Figura 2.6: Construindo telhado meia-água II

O cálculo da inclinação de um telhado de duas águas (convencional) é bem parecido com o de meia-água. Lembrando que um telhado é chamado de duas águas na construção civil quando ele possui duas superfícies planas inclinadas. A figura a seguir ilustra este tipo de telhado.

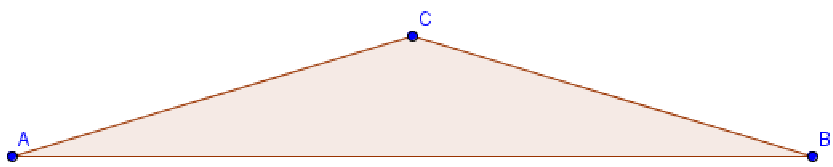

Figura 2.7: Represetação de um telhado de duas águas

Veremos agora como um pedreiro calcula a inclinação deste tipo de telhado. Se traçarmos uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto C estaremos dividindo este triângulo exatamente ao meio, conforme a figura a seguir:

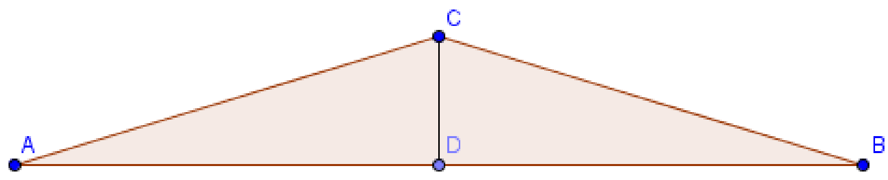

Figura 2.8: Construindo telhado de duas águas

A figura acima nos permite concluir que o cálculo da "caída"é feito da mesma forma que nos telhados de meia-água, basta trabalhar com a metade da distância entre A e B que será possível descobrir qual deve ser a medida do seguimento CD.

O grande questionamento é com relação à unidade de medida adotada, que é a porcentagem e não graus (geralmente usado na medida de ângulos, e quando falamos em inclinação o mais natural seria trabalhar com ângulos). Mas já sabemos da dificuldade de o pedreiro trabalhar com ângulos, já que normalmente não possui aparelhos para coletar estas medidas. Porém, veremos agora que, mesmo involuntariamente, o pedreiro está trabalhando com ângulos.

Começamos analisando o que representa em graus uma caída de 10% e 30%, as quais são utilizadas frequentemente pelos pedreiros. Sobre a caída de 30%, sempre irá corresponder a uma inclinação de 16,7°. Para entender isso, veja a figura a seguir e os comentários, expostos sobre a forma dos itens I), II)e III), conforme segue:

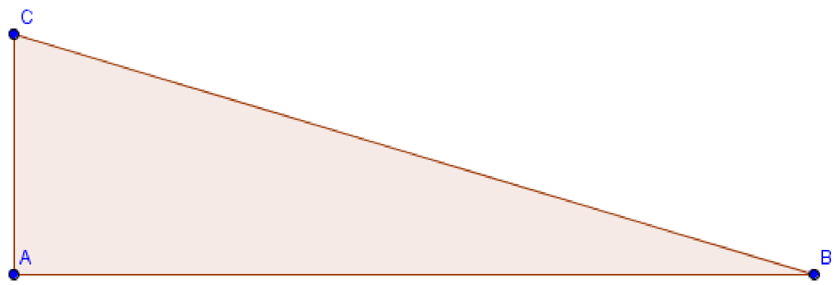

Figura 2.9: Cálculo de inclinação de telhado meia-água

I) Se a medida do seguimento AB for de 4 metros, o segmento AC é 30% desta medida, ou seja, será de 1,20 metros;

II) Se a medida do seguimento AB for de 5 metros, o segmento AC é 30% desta medida, ou seja, será de 1,50 metros;
III) Se a medida do seguimento AB for de 9 metros, o segmento AC é 30% desta medida, ou seja, será de 2,70 metros; E assim por diante.

Observe que nós temos um triângulo retângulo e, por isso, podemos aplicar os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Entre eles, utilizaremos a tangente para mostrar que seguindo uma proporção (que é dada em porcentagem) o ângulo permanecerá inalterado.

Nos casos citados acima, podemos calcular a tangente do ângulo formado pelos encontros dos seguimentos de retas AB e BC. Assim, temos que:

$$\text{I) tg B}= \frac{1,20}{4} = 0{,}3$$

$$\text{II) tg B}= \frac{1,50}{5} = 0{,}3$$

$$\text{III) tg B}= \frac{2,70}{9} = 0{,}3$$

Perceba que a tangente é a mesma, o que significa que os ângulos também são os mesmos. Mas, podemos escrever isto da seguinte forma:

$$\text{IV) tg B}= \frac{\frac{30x}{100}}{x} = 0{,}3$$

E para uma caída de 10%, temos que:

$$\text{V) tg B}= \frac{\frac{10x}{100}}{x} = 0{,}1$$

Com a ajuda de uma tabela de razões trigonométricas, vemos que uma caída de 30% representa um ângulo que está entre 16 e 17 graus, e uma caída de 10% representa um ângulo que está entre 5 e 6 graus. Se quisermos ser mais exatos, podemos utilizar programas de computador como o Geogebra e chegar a conclusão de que trata-se de ângulos de 16,7° e 5,71°, respectivamente.

É claro que o pedreiro teria muito mais dificuldade ou talvez até não conseguisse fazer o telhado com uma inclinação correta de uma construção se ele não utilizasse essa caída em porcentagem, pois ficaria impossível ele determinar o ângulo correto, que deveria ser a inclinação. Portanto, podemos justificar a informalidade do cálculo da "caída"dos telhados em porcentagem adotada por pedreiros, através da formalidade do uso da trigonometria, utilizando a tangente do ângulo de inclinação deste telhado. Logo temos que mesmo que não percebam, os pedreiros usam noções de trigonometria.

2.3 Um dia como Servente de Pedreiro

Para realizarmos parte deste trabalho, no que diz respeito a paredes no esquadro e pedreiro saindo pela tangente, coletamos algumas informações com o pedreiro José Paulo Neves. Um senhor de 67 anos, sendo 44 destes trabalhando como pedreiro, com residência fixa em Várzea Grande.

As citadas informações foram obtidas através de perguntas, de maneira bem informal, sem um questionário pré elaborado. Elas foram realizadas através de uma visita ao seu José, quando o mesmo estava substituindo o telhado de uma casa. Especificamente, no dia 30 de dezembro de 2013, fiz uma visita ao seu José que estava em uma residência, localizada na rua 179, quadra 140, casa 01, no bairro São Mateus em Varzea Grande/MT, para fazer a substituição do telhado da referida casa. Na ocasião, as telhas de barro (Figura 2.15) foram trocadas por Eternit (Figura 2.16), uma opção encontrada por seu José para sanar o problema das goteiras, da casa supracitada, nos períodos chuvosos. Segundo ele, o problema foi causado por um erro no cálculo da caída do telhado (veja detalhes na seção 2.2).

Neste dia vivi uma experiência interessante: na ausência do ajudante de pedreiro eu me ofereci para substituí-lo. Seu José, do alto do telhado, jogava as telhas para que eu as colocasse no chão. Enquanto trabalhavámos, aproveitei a oportunidade para fazer algumas perguntas, uma delas relacionada com a caída do telhado. Entre uma tela e outra, seu José explicou que as telhas precisavam ser trocadas porque a caída não era adequada e por isso a água não escoava direito, causando goteiras no inteior da residência. Disse também, que iria trocar por uma telha que tivesse uma caída menor, no caso Eternit, para evitar problemas nos dias chuvosos.

Durante o nosso trabalho, fiz outra pergunta ao seu José e a sua resposta me impressionou. Perguntei a ele que se o pedreiro, que tinha feito a cobertura daquela parte da casa, não deveria saber que a caída que ele fez estava errada. Seu José respondeu o seguinte: a dona da casa me relatou que o primeiro pedreiro avisou para ela que não tinha experência na parte de cobertura de casas e que mesmo assim ela o autorizou a fazer o serviço, uma vez que ela estava com dificuldades de encontrar um pedreiro.

A resposta de Seu José me impressionou, principalmente, porque estamos acostumados, inclusive, até nos meios acadêmicos, com pessoas que se aproveitam das falhas dos outros para se mostrarem mais capacitados. Naquele momento, seu José se mostrou mais ético do que muitos que se dizem éticos.

Outro fato que me chamou a atenção nesta “empreitada”com seu José, foi o momento em que chegaram as telhas de Eternit. Observei que em uma delas havia uma informação de que a mesma continha amianto em sua composição, elemento este proibido em vários produtos por ser uma substância cancerígena.

Para alertar os trabalhadores da construção civil, que usam este tipo de telha, nela tinha uma informação em letras pequenas dizendo “ao cortar ou furar não respire a poeira gerada uma vez que pode prejudicar gravemente a saúde”(veja figura 2.16). O que mais intriga é que trata-se de um tipo de telha mais utilizada por populações mais carentes. Além disso, a maior parte dos pedreiros que lidam com este tipo de telha não possuem equipamentos adequados para estes fins. Tratam-se de brasileiros esquecidos pelo poder público.

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos a matemática informal, por meio do noves-fora e da matemática usada por pedreiros na construção civil. Verificamos que esses métodos próprios que eles têm de realizar a "sua matemática"estão relacionados com a matemática formal. Especificamente com o Teorema de Pitágoras, ângulos, razões trigonométricas e congruência modular.

Pocuramos compreender a realidade onde estão inseridos os personagens deste trabalho e a matemática por eles utilizadas, é o caso do pedreiro seu José, que tem 44 anos de experiência na construção civil e que nos ensinou não apenas entender alguns cálculos (conforme figuras 2.12; 2.13; 2.14) como também entender que a sabedoria não está agregada a conceitos e cálculos.

No decorrer deste trabalho mostramos que é possível fazer um intercâmbio entre a matemática popular e a matemática acadêmica. Ao realizar este intercâmbio, mostraríamos nas escolas que existem outros modelos de se fazer a Matemática além daqueles que os livros didáticos mostram.

Os estudantes precisam entender que a matemática acadêmica não está isolada de suas realidades. Acreditamos que vale a pena procurar outras alternativas para ensinar e aprender Matemática, pois dessa maneira, o estudo desta ciência nas escolas poderá ser significativo tanto para o aluno quanto para o professor e também será relevante para a comunidade em que este indivíduo (o aluno) está inserido.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3ª edição. Editora SBM. Rio de Janeiro, RJ 2006.

[2] WATANABE, Renate. **Na terra dos noves-fora**, coleção: vivendo a matemática. 4ª edição, 2ª impressão. Editora Scipione. São Paulo, SP.

[3] HEFEZ, Hefez, A. . **Elementos de Aritmética**. Editora SBM. Rio de Janeiro, RJ 2006.

[4] IMENES, Luiz Márcio. **Descobrindo o teorema de Pitágoras**, coleção: vivendo a matemática. 6ª edição. Editora Scipione. São Paulo, SP.

Anexos

Figura 2.10: Vista externa do telhado que foi trocado

Figura 2.11: Vista interna do telhado que foi trocado

Figura 2.12: Coletando medidas para cálculo da inclinação do telhado I

Figura 2.13: Coletando medidas para cálculo da inclinação do telhado II

Figura 2.14: Coletando medidas para cálculo da inclinação do telhado III

Figura 2.15: Modelo da telha que foi trocada

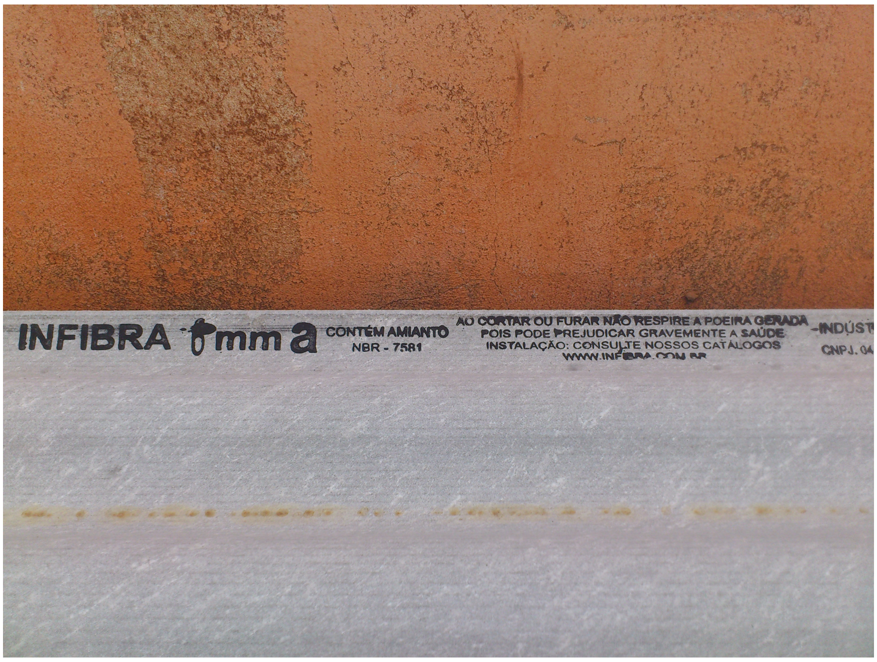

Figura 2.16: Informação sobre a telha que o pedreiro estava manuseando

Figura 2.17: Vista externa do telhado depois de trocada as telhas

Figura 2.18: Vista interna do telhado depois de trocada as telhas