

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**ELDON KERN NETA PACHECO**

**ALGUMAS PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS ESTENDIDAS AO  
TETRAEDRO**

**SAO LUÍS - MA  
2014**

**ELDON KERN NETA PACHECO**

**ALGUMAS PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS ESTENDIDAS AO  
TETRAEDRO**

Dissertação apresentada ao PROFMAT /  
Departamento de Matemática da Universi-  
dade Federal do Maranhão como requisito  
parcial à obtenção do grau de Mestre em  
Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes  
da Silva.

**SAO LUÍS - MA**

**2014**

Pacheco, Eldon Kern Neta

Algumas propriedades dos triângulos estendidas ao tetraedro/ Eldon Kern Neta Pacheco. – São Luís, 2014.

63 f.

Impresso por computador (Fotocópia).

Orientador: João de Deus Mendes da Silva.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, 2014.

1. Geometria Plana 2. Geometria Espacial 3. Pontos notáveis 4. Triângulo 5. Tetraedro I. Título

CDU 514



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

### Ata de Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Aos dias 28 de agosto de 2014, às 15h40min, no auditório 02 do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFMA, reuniram-se os membros da banca examinadora composta pelo (as) professores (as): Dr. JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA (Orientador), Dr. JOSÉ CLOVES VERDE SARAIVA e Dr. MARIO TANAKA FILHO, designados pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, a fim de argüirem o mestrando, com o título: “**ALGUMAS PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS ESTENDIDAS AO TETRAEDO**”. Aberta sessão pelo presidente da mesma, coube ao candidato, na forma regimental, expor o tema de sua dissertação, dentro do tempo regulamentar, sendo em seguida questionado pelos membros da banca examinadora, tendo dado as explicações que foram necessárias. Sendo o resultado final: “Aprovado”.

Recomendações da Banca:


---

---

---

---

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA (Orientador)

  
Prof. Dr. JOSÉ CLOVES VERDE SARAIVA

  
Prof. Dr. MARIO TANAKA FILHO

Candidato:

  
Eldon Kern Neta Pacheco

São Luís, 28 de Agosto de 2014.

# Agradecimentos

À Deus, por tudo;

À Minha esposa Antonia Pacheco e meus filhos Felipe, Fernanda e Fabrício pela compreensão e paciência durante o período de elaboração deste trabalho;

Aos meus colegas da Turma 2012 do PROFMAT pelo convívio e palavras de incentivo para a realização da dissertação e conseqüentemente conclusão do curso;

Ao meu orientador João de Deus Mendes da Silva que foi de grande importância para que esse trabalho pudesse ser realizado;

À SBM, a CAPES e a UFMA por, respectivamente, realizar, financiar e executar o projeto.

*“Entre dois espíritos iguais postos nas mesmas condições, aquele que sabe geometria é superior ao outro e adquire vigor especial”*

*Blaise Pascal*

# Resumo

Tratamos, nesta dissertação, de algumas propriedades dos triângulos que podem ser estendidas e aplicadas, de forma semelhante, em um tetraedro. Para sua realização, primeiramente inserimos algumas definições, proposições e teoremas básicos que serviram como preliminares no desenvolvimento principal do tema. Além disso, achamos útil nomear alguns segmentos e retas, simplesmente para facilitar a escrita evitando repetições e especialmente tornar uma leitura agradável e facilitar o entendimento das ideias propostas. A utilização do software GeoGebra 5 Beta Release, na sua versão 3D, se apresentou decisivo para a investigação, facilitando as demonstrações dos tópicos apresentados além de permitir, de forma simples, a construção de todas as figuras presentes no trabalho, o que seguramente levou a um melhor entendimento do assunto abordado.

**Palavras chave:** Geometria Plana, Geometria Espacial, Pontos Notáveis, Triângulo, Tetraedro.

# Abstract

This study presents some properties of triangles that can be extended and applied in a similar manner to tetrahedrons. For its achievement, first it is needed to insert some definitions, propositions and basic theorems which worked as the preliminary in the main development of this theme. In addition, we find useful to name some segments and lines to favor writing, avoiding repetitions and especially to provide a pleasant reading and make the understanding of proposed ideas easier. The use of Geogebra Beta Release 5 software in its 3D version, presented itself crucial for the research, making it easy the demonstration of the presented topics and allowed, in a simple way, the construction of all figures in the study, which surely led to a better understanding of this subject.

**Keywords:** Plane Geometry, Space Geometry, Notable Points, Triangles, Tetrahedron.



# Lista de Figuras

1.1	Caso <i>LAL</i> de congruência de triângulos. . . . .	16
1.2	Caso <i>ALA</i> de congruência de triângulos. . . . .	16
1.3	Caso <i>LLL</i> de congruência de triângulos. . . . .	16
1.4	Caso <i>LAAo</i> de congruência de triângulos. . . . .	17
1.5	Caso Especial de congruência de triângulos. . . . .	17
1.6	Caso <i>AAA</i> de semelhança de triângulos. . . . .	18
1.7	Caso <i>LAL</i> de semelhança de triângulos. . . . .	18
1.8	Caso <i>LLL</i> de semelhança de triângulos. . . . .	18
1.9	Ângulos alternos, correspondentes e colaterais. . . . .	19
1.10	$ABC$ é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ . . . . .	21
1.11	O ponto $P$ é o encontro das cevianas $\overline{AX}$ , $\overline{BY}$ e $\overline{CZ}$ . . . . .	21
2.1	$PX + PY + PZ$ é constante. . . . .	24
2.2	O segmento $\overline{PX}$ é a altura do triângulo equilátero $A_1PC_1$ . . . . .	25
2.3	As alturas $\overline{PX}$ e $\overline{C_1D}$ são congruentes. . . . .	25
2.4	Os segmentos $\overline{PZ}$ e $\overline{FG}$ são congruentes. . . . .	26
2.5	O segmento $\overline{DE}$ é a Base Média do $\Delta ABC$ . . . . .	27
2.6	Base Média do $\Delta ABC$ . . . . .	27
2.7	$G$ é o baricentro do $\Delta ABC$ . . . . .	28
2.8	Demonstração do baricentro de um triângulo. . . . .	29
2.9	Seis triângulos com áreas iguais. . . . .	30
2.10	$I$ é o incentro do $\Delta ABC$ . . . . .	31
2.11	Demonstração do incentro do $\Delta ABC$ . . . . .	32
2.12	$I_A$ , $I_B$ e $I_C$ são ex-incentros do $\Delta ABC$ . . . . .	33
2.13	Demonstração do ex-incentro do $\Delta ABC$ . . . . .	34
2.14	$O$ é o circuncentro do $\Delta ABC$ . . . . .	34
2.15	Posição do circuncentro do $\Delta ABC$ . . . . .	35
3.1	$\alpha$ e $\beta$ são semiplanos de mesma origem $r$ , distintos e não opostos. . . . .	36
3.2	$\gamma$ é bissetor do diedro $\alpha r \beta$ . . . . .	37

3.3	$a$ e $b$ são retas concorrentes, paralelas a $\alpha$ , mas contidas em $\beta$ . . . . .	37
3.4	$b$ e $c$ são retas concorrentes de $\alpha$ e perpendiculares a reta $a$ . . . . .	37
3.5	$r$ é uma reta perpendicular a $\beta$ , mas está contida em $\alpha$ . . . . .	38
3.6	Esfera de centro $O$ e raio $r$ . . . . .	38
3.7	Elementos de uma Pirâmide. . . . .	39
3.8	Tetraedro $VABC$ . . . . .	40
4.1	$PX + PY + PZ + PW$ é constante. . . . .	42
4.2	$\overline{PX}$ e $\overline{B_2E}$ são alturas do tetraedro regular $A_2B_2PD_2$ . . . . .	43
4.3	$\overline{D_1E_2}$ é a altura do tetraedro regular $A_1B_2C_2D_1$ . . . . .	43
4.4	$\overline{AE_4}$ é a altura do tetraedro regular $AB_1C_1D_1$ . . . . .	44
4.5	Face Média do tetraedro $VABC$ . . . . .	45
4.6	Relação entre as áreas dos triângulos $ABC$ e $ADE$ . . . . .	47
4.7	Relação entre os volumes dos tetraedros $VABC$ e $VXYZ$ . . . . .	47
4.8	$\overline{VG_1}$ e $\overline{BG_2}$ são barianas. . . . .	49
4.9	$G$ é o ponto de encontro das barianas $\overline{VG_1}$ e $\overline{BG_2}$ . . . . .	50
4.10	$\overline{VG}$ ( $\overline{BG}$ ) é o triplo de $\overline{GG_1}$ ( $\overline{GG_2}$ ). . . . .	50
4.11	$\overline{VJ}$ ( $\overline{CJ}$ ) é o triplo de $\overline{G_1J}$ ( $\overline{G_3J}$ ). . . . .	52
4.12	$T$ é o baricentro do tetraedro $VABC$ . . . . .	53
4.13	Seis tetraedros com volumes iguais. . . . .	53
4.14	$\overline{VX}$ é a interseção dos bissetores $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	54
4.15	O ponto $K$ equidista das faces do tetraedro. . . . .	55
4.16	O ponto $K$ é a interseção de três bissetores. . . . .	56
4.17	Esfera inscrita às faces do tetraedro. . . . .	57
4.18	$I_A$ é o centro de uma esfera ex-inscrita ao tetraedro $VABC$ . . . . .	58
4.19	O ponto $U$ equidista dos vértices do tetraedro $VABC$ . . . . .	59
4.20	Esfera circunscrita ao tetraedro. . . . .	59

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 DA GEOMETRIA PLANA</b>	<b>14</b>
1.1 Triângulo . . . . .	14
1.1.1 Definição . . . . .	14
1.1.2 Elementos . . . . .	14
1.1.3 Classificação . . . . .	14
1.1.4 Casos de Congruências de Triângulos . . . . .	15
1.1.5 Casos de Semelhança de Triângulos . . . . .	17
1.1.6 Expressões da Área do Triângulo . . . . .	19
1.2 Definições, Proposições e Teoremas Básicos . . . . .	19
<b>2 ALGUMAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO</b>	<b>24</b>
2.1 Soma Constante das Distâncias de um Ponto Interno aos Lados do Triângulo Equilátero . . . . .	24
2.2 Base Média . . . . .	26
2.3 Baricentro . . . . .	28
2.4 Triângulos de Áreas Iguais . . . . .	30
2.5 Incentro . . . . .	31
2.6 Ex-Incentro . . . . .	33
2.7 Circuncentro . . . . .	34
<b>3 DA GEOMETRIA ESPACIAL</b>	<b>36</b>
3.1 Definições e Teoremas Básicos . . . . .	36
3.2 Pirâmide . . . . .	39
3.2.1 Definição . . . . .	39
3.2.2 Elementos . . . . .	39
3.2.3 Altura . . . . .	39

3.2.4	Superfícies . . . . .	39
3.2.5	Natureza . . . . .	40
3.2.6	Pirâmide Regular . . . . .	40
3.3	Tetraedro . . . . .	40
<b>4</b>	<b>ANALOGIA DAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO AO TETRAEDRO</b>	<b>41</b>
4.1	Soma Constante das Distâncias de um Ponto Interno às Faces do Tetraedro Regular . . . . .	42
4.2	Face Média . . . . .	45
4.3	Baricentro do Tetraedro . . . . .	48
4.4	Tetraedros de Volumes Iguais . . . . .	53
4.5	Esfera Inscrita às Faces de um Tetraedro . . . . .	54
4.6	Esfera Ex-Inscrita em um Tetraedro . . . . .	57
4.7	Esfera Circunscrita ao Tetraedro . . . . .	58
	<b>Considerações Finais</b>	<b>61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução

Durante o exercício da docência, nas diversas experiências adquiridas, percebemos que há muito ainda a se fazer para melhorar a qualidade da educação básica, particularmente no que concerne a educação matemática.

Em sala de aula, pelo menos nos anos iniciais, o ensino de matemática faz uso de muitos materiais concretos para auxiliar na compreensão de muitos conceitos geométricos. Lamentavelmente, nos demais anos da escola básica o que se vê são as aulas rodeadas de abstrações que não levam em conta, por exemplo, a transição entre o uso de material concreto e o início da aquisição da abstração necessária à formação de um cidadão com desenvolvimento da autonomia intelectual e de pensamento crítico, de acordo com as finalidades do Ensino Médio estabelecidos na LDB (ver [1]) e de questionar a realidade, formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico e a capacidade de análise crítica, caracterizado como um dos objetivos do Ensino Fundamental estabelecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (ver [2]). Atualmente, com o avanço da tecnologia, diversos softwares estão disponíveis para serem usados para auxiliar no ensino da Matemática, diminuindo o abismo entre os conteúdos e a aprendizagem dos alunos. Desses softwares, os de geometria dinâmica vem se destacando e, dentre eles, especialmente, apontamos o Geogebra.

O GeoGebra, ver [7], é um programa livre de geometria dinâmica, criado e desenvolvido por *Markus Hohenwarter*, na *University of Salzburg*, para ser utilizado em sala de aula. A escolha deste software para construção das figuras se deu, principalmente, por ser gratuito, de fácil manuseio e por funcionar nas plataformas Windows, Linux e Macintosh (disponível também para tablets), combinando geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Começou a ser desenvolvido em 2001, tendo sua primeira versão em janeiro de 2002, e atualmente conta com várias equipes de desenvolvedores. Lançada recentemente, mas sendo desenvolvida desde 2012 e facilmente encontrada na internet e em vários idiomas, inclusive em português, sua versão 5 possibilita fazer construções em três dimensões, condições que, acreditamos, facilitam incrivelmente as observações, para esclarecer dúvidas e constata-

tar de maneira simples as suposições feitas.

O uso deste software propicia um ambiente de aprendizagem relevante que pode ser usado para fazer inferências, suposições, constatações e descobertas que depois podem ser demonstradas matematicamente, melhorando substancialmente a aprendizagem dos alunos e em especial sua capacidade de abstração, que é resultado da descoberta. Essa forma de abordar os conteúdos muda o foco do ensino, que hoje é centrado na exposição do professor, e foca na descoberta feita pelos alunos e mediada pelo professor.

O ensino de Geometria Espacial não é muito explorado na educação básica e em parte se deve a dificuldade de visualização dos sólidos ou mesmo pela falta de habilidade dos professores em desenhar. Neste contexto, o trabalho proposto aborda esse tema, com a ajuda do software GeoGebra 5 Beta Release, e com o intuito de melhorar a apresentação dos conteúdos bem como a aprendizagem dos alunos.

No decorrer do trabalho, os tópicos apresentados, as construções e todas as demonstrações foram ilustradas com figuras produzidas com o software Geogebra. Além disso, achamos útil nomear alguns elementos como segmentos e retas, simplesmente para facilitar a escrita evitando repetições e especialmente tornar uma leitura agradável e facilitando o entendimento das ideias propostas.

Sempre procurando criar uma cultura investigativa, estabelecemos, neste trabalho, uma semelhança, uma analogia entre propriedades da Geometria Plana e Geometria Espacial. Pretendemos verificar no sólido geométrico tetraedro se algumas propriedades inerentes ao triângulo se aplicam a ele. Assim, estenderemos ao tetraedro, de forma análoga, algumas propriedades dos triângulos. Destacamos aqui, que para um maior enriquecimento do tema, procuramos sempre apresentar uma demonstração alternativa, diferentemente das que existem atualmente. No caso das demonstrações que já são há muito tempo conhecidas e que foram inseridas nesta dissertação, indicamos as referências.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

Apresentamos, no primeiro capítulo, tópicos de geometria euclidiana plana, principalmente em relação aos triângulos, como definição, elementos, classificação, congruência, semelhança e expressões para o cálculo de suas áreas. Há também algumas definições, proposições e teoremas importantes que auxiliam nas demonstrações desenvolvidas neste trabalho, a se destacar o Teorema de Ceva cujo belo resultado serve para demonstrar a existência dos pontos notáveis (baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro) mais conhecidos e famosos do triângulo.

No segundo capítulo, são mostradas as propriedades dos triângulos que decidimos investigar semelhanças no tetraedro, quais sejam: a soma constante das

distâncias de um ponto interno aos lados do triângulo equilátero; base média de um triângulo; propriedades do baricentro; triângulos de áreas iguais; incentro; ex-incentro e circuncentro.

No terceiro capítulo, dedicado à geometria espacial, apresentamos algumas definições e alguns outros teoremas, que serão base para outras demonstrações. Além disso, apresentamos um tópico sobre pirâmide, inserindo sua definição, seus elementos, altura, superfícies e natureza, dando um maior destaque à pirâmide triangular ou tetraedro, que se caracteriza como principal objeto de estudo desta dissertação.

O ponto principal do tema deste trabalho se dá no quarto capítulo, onde, analogamente, vamos mostrar que em um tetraedro regular, a soma das distâncias de um ponto interno às faces também é constante. Além disso, em relação ao incentro, ex-incentro e circuncentro, apresentaremos esferas tangentes internamente e externamente às faces (ou a seus prolongamentos) e esfera circunscrita ao tetraedro. Mostraremos ainda conceitos como face média de um tetraedro, propriedades semelhantes para o baricentro do tetraedro e tetraedros com volumes iguais.

Por fim, apresentamos algumas considerações relativas ao desenvolvimento deste trabalho, chamando atenção para outros resultados que surgiram durante as demonstrações e deixando desafios que possibilitam explorar ainda mais o tema.

# Capítulo 1

## DA GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e conceitos além de teoremas básicos que servirão para o entendimento das demonstrações nesta dissertação.

### 1.1 Triângulo

#### 1.1.1 Definição

Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares, a reunião dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  chama-se *triângulo*  $ABC$ .

Indicação: triângulo  $ABC = \Delta ABC$ .

#### 1.1.2 Elementos

- **Vértices:** os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os *vértices* do  $\Delta ABC$ .
- **Lados:** os segmentos  $\overline{AB}$  (de medida  $c$ ),  $\overline{AC}$  (de medida  $b$ ) e  $\overline{BC}$  (de medida  $a$ ), são os *lados* do triângulo.
- **Ângulos:** os ângulos  $B\hat{A}C$  ou  $\hat{A}$ ,  $A\hat{B}C$  ou  $\hat{B}$  e  $A\hat{C}B$  ou  $\hat{C}$  são os ângulos do  $\Delta ABC$  (ou ângulos internos do  $\Delta ABC$ ).

#### 1.1.3 Classificação

Quanto aos *lados*, os triângulos se classificam em:

- **Equilátero** se, e somente se, tem os três lados congruentes;
- **Isósceles** se, e somente se, tem dois lados congruentes (o terceiro lado é chamado *base*);



- **Escaleno** se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes;

Quanto aos **ângulos**, os triângulos se classificam em:

- **Retângulo** se, e somente se, tem um ângulo reto (o lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa e os outros lados são os catetos);
- **Acutângulo** se, e somente se, tem os três ângulos agudos;
- **Obtusângulo** se, e somente se, tem um ângulo obtuso;

### 1.1.4 Casos de Congruências de Triângulos

**Definição 1** *Dois triângulos são congruentes (símbolo  $\cong$ ) se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que:*

- seus lados são ordenadamente congruentes e*
- seus ângulos são ordenadamente congruentes.*

Assim, dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes, e denotamos por  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , quando há uma correspondência entre os vértices  $A$  e  $D$ ,  $B$  e  $E$  e  $C$  e  $F$ , de modo que

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \iff \left\{ \begin{array}{ll} \overline{AB} \cong \overline{DE} & \hat{A} \cong \hat{D} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} & \hat{C} \cong \hat{F} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} & \hat{B} \cong \hat{E} \end{array} \right.$$

ou seja, temos seis congruências entre os lados e os ângulos correspondentes dos dois triângulos.

Verificando estas seis condições (três entre os lados e três entre os ângulos) de congruências podemos afirmar que dois triângulos são congruentes. Mas existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, são os chamados *casos de congruências*, e suas demonstrações podem ser encontradas na referência [4]. Logo a seguir veremos estes casos de congruência.

**Proposição 1 (Caso LAL - Lado, Ângulo, Lado)** *Sejam  $ABC$  e  $DEF$  dois triângulos. Se  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{D}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .*

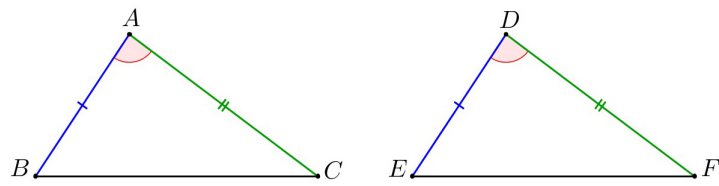


Figura 1.1: Caso LAL de congruência de triângulos.

**Proposição 2 (Caso ALA - Ângulo, Lado, Ângulo)** *Sejam  $ABC$  e  $DEF$  dois triângulos. Se  $\hat{B} \cong \hat{E}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .*

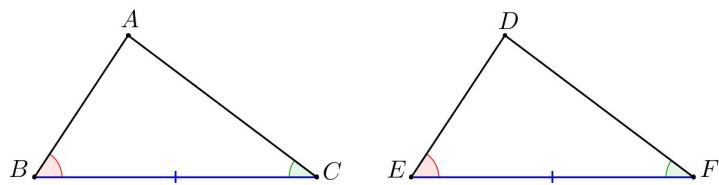


Figura 1.2: Caso ALA de congruência de triângulos.

**Proposição 3 (Caso LLL - Lado, Lado, Lado)** *Sejam  $ABC$  e  $DEF$  dois triângulos com  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ , então  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .*

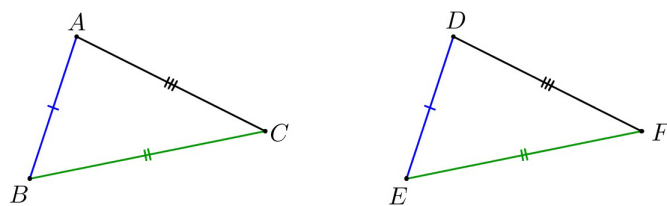


Figura 1.3: Caso LLL de congruência de triângulos.

**Proposição 4 (Caso LAAo - Lado, Ângulo, Ângulo Oposto)** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ . Se  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{D}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ .*

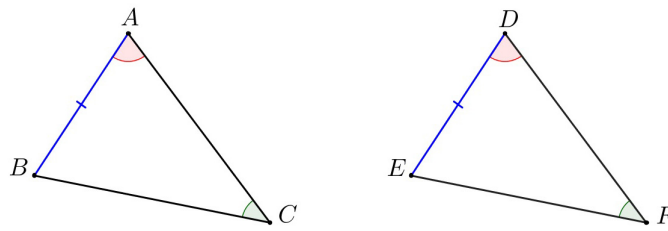


Figura 1.4: Caso LAAo de congruência de triângulos.

**Proposição 5 (Caso Especial - Triângulo Retângulo)** *Se dois triângulos retângulos tem ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.*

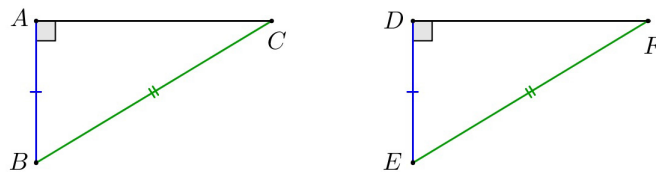


Figura 1.5: Caso Especial de congruência de triângulos.

### 1.1.5 Casos de Semelhança de Triângulos

**Definição 2** *Dois triângulos são semelhantes (símbolo  $\sim$ ) se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos<sup>1</sup> proporcionais.*

Neste caso, teremos três congruências sobre os ângulos e três proporções sobre os lados,

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \iff \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{array} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \right\}$$

Existem três casos nos quais podemos concluir que dois triângulos são semelhantes verificando condições mínimas para isso. São os *casos de semelhança* e suas demonstrações podem ser encontradas na referência [4]. Logo a seguir veremos estes casos de semelhança.

<sup>1</sup>dois lados homólogos (*homo* = mesmo, *logos* = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

**Proposição 6 (Caso AAA - Ângulo, Ângulo, Ângulo)** Se dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes (Se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ).

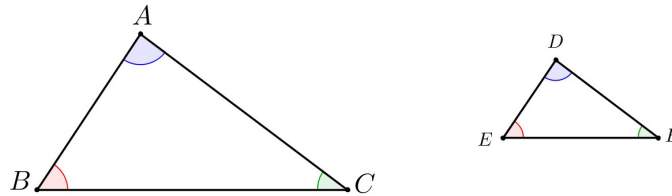


Figura 1.6: Caso AAA de semelhança de triângulos.

**Proposição 7 (Caso LAL - Lado, Ângulo, Lado)** Se dois lados do triângulo  $ABC$  são proporcionais aos homólogos do triângulo  $DEF$  e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes (Se  $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ).

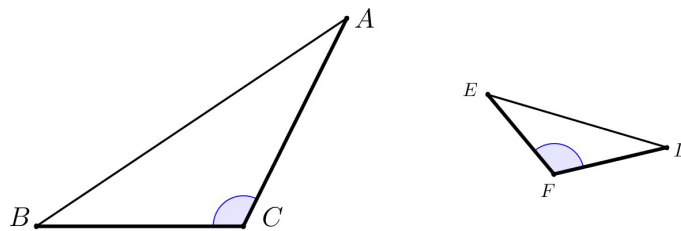


Figura 1.7: Caso LAL de semelhança de triângulos.

**Proposição 8 (Caso LLL - Lado, Lado, Lado)** Se dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  possuem os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes (Se  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ).

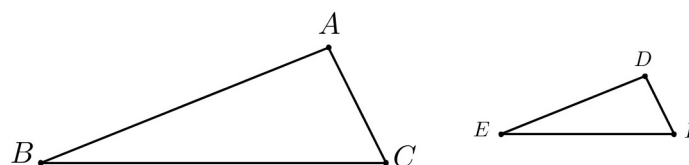


Figura 1.8: Caso LLL de semelhança de triângulos.

### 1.1.6 Expressões da Área do Triângulo

Dado um triângulo cujos lados tem medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  e respectivas alturas  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ , então a expressão de sua área ( $A_T$ ) é:

✓ Em função de um lado e respectiva altura

$$A_T = \frac{a \cdot h_a}{2}, \quad A_T = \frac{b \cdot h_b}{2}, \quad A_T = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

✓ Em função das medidas dos lados

$$A_T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{onde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

## 1.2 Definições, Proposições e Teoremas Básicos

**Definição 3 (Ângulos Alternos, Correspondentes e Colaterais)** *Sejam  $a$  e  $b$  duas retas distintas, paralelas ou não, e  $t$  uma reta concorrente com  $a$  e  $b$ .*

*Dos oito ângulos determinados por estas retas, indicados na Figura 1.9, chamam-se ângulos*

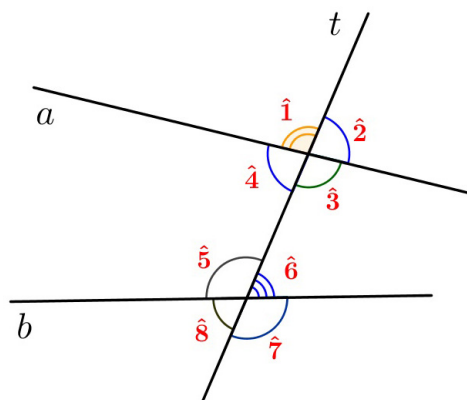


Figura 1.9: Ângulos alternos, correspondentes e colaterais.

- *alternos internos:*  $\hat{3}$  e  $\hat{5}$ ,  $\hat{4}$  e  $\hat{6}$ ;
- *alternos externos:*  $\hat{1}$  e  $\hat{7}$ ,  $\hat{2}$  e  $\hat{8}$ ;

- *correspondentes*:  $\hat{1}$  e  $\hat{5}$ ,  $\hat{2}$  e  $\hat{6}$ ,  $\hat{3}$  e  $\hat{7}$ ,  $\hat{4}$  e  $\hat{8}$ ;
- *colaterais internos*:  $\hat{3}$  e  $\hat{6}$ ,  $\hat{4}$  e  $\hat{5}$ ;
- *colaterais externos*:  $\hat{1}$  e  $\hat{8}$ ,  $\hat{2}$  e  $\hat{7}$ .

**Definição 4 (Ângulos Opostos Pelo Vértice)** *Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.*

**Proposição 9** *Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.*

**Definição 5 (Ceviana)** *Ceviana de um triângulo é um segmento que une um vértice a um ponto qualquer do lado oposto.*

**Definição 6 (Mediana)** *Mediana de um triângulo é uma ceviana que tem uma extremidade no ponto médio do lado oposto.*

**Definição 7 (Bissetriz Interna de um Triângulo)** *Bissetriz interna de um triângulo é uma ceviana, que divide o ângulo do vértice em dois ângulos congruentes.*

**Definição 8 (Mediatriz)** *Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.*

**Proposição 10** *Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.*

**Teorema 1 (Retas Paralelas)** *Duas retas distintas são paralelas se, e somente se, formam com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes.*

**Teorema 2 (Teorema do Triângulo Isósceles)** *Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.*

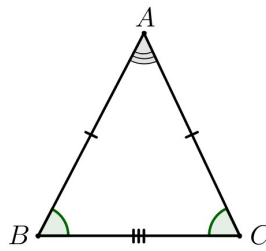


Figura 1.10:  $ABC$  é um triângulo isósceles de base  $\overline{BC}$ .

No triângulo isósceles da figura acima, os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são congruentes assim como os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .

As demonstrações dos teoremas acima são encontradas na referência [4].

**Teorema 3 (Teorema de Ceva)** *Três cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  de um triângulo  $ABC$  são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

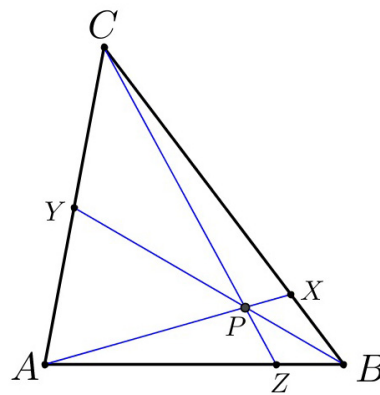


Figura 1.11: O ponto  $P$  é o encontro das cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$ .

A demonstração a seguir pode ser encontrada em [3].

#### **Demonstração:**

Suponhamos primeiramente que as três cevianas sejam congruentes. Seja  $P$  o ponto de encontro das três cevianas. Denote por  $(ABC)$  a área de um triângulo  $ABC$ . Observe na Figura 1.11 que os triângulos  $AZP$  e  $BZP$  possuem a mesma altura  $h$  com respeito às bases  $\overline{AZ}$  e  $\overline{ZB}$ , respectivamente. E os triângulos  $AZC$  e  $BZC$  tem a mesma altura  $H$  em relação às bases  $\overline{AZ}$  e  $\overline{ZB}$ , respectivamente.

Assim,

$$(AZP) = \frac{1}{2} \cdot AZ \cdot h \quad e \quad (BZP) = \frac{1}{2} \cdot ZB \cdot h,$$

$$(AZC) = \frac{1}{2} \cdot AZ \cdot H \quad e \quad (BZC) = \frac{1}{2} \cdot ZB \cdot H.$$

Isto implica que,

$$\frac{(CAP)}{(CBP)} = \frac{(AZC) - (AZP)}{(BZC) - (BZP)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AZ \cdot H - \frac{1}{2} \cdot AZ \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot ZB \cdot H - \frac{1}{2} \cdot ZB \cdot h} = \frac{AZ}{ZB},$$

ou seja,

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{(CAP)}{(CBP)}.$$

De forma análoga, temos que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABP)}{(ACP)} \quad e \quad \frac{CY}{YA} = \frac{(BCP)}{(BAP)}.$$

Fazendo o produto das três igualdades, temos

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{(CAP)}{(CBP)} \cdot \frac{(ABP)}{(ACP)} \cdot \frac{(BCP)}{(BAP)} = 1.$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$



Vamos provar agora que as três cevianas são concorrentes. Seja  $P$  o ponto de encontro das cevianas  $\overline{AX}$  e  $\overline{CZ}$ . O que temos que mostrar é que  $\overline{BY}$  passa também por  $P$ .

Antes, seja  $\overline{BY'}$  a ceviana que passa por  $P$ . Então temos

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY'}{Y'A} = 1.$$

Consequentemente

$$\frac{CY}{YA} = \frac{CY'}{Y'A}.$$

Note que  $Y$  e  $Y'$  pertencem ao segmento  $\overline{AC}$ , o que nos leva a concluir que  $Y$  coincide com  $Y'$  e provamos que  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes.

**Proposição 11 (Paralelogramo - Lados paralelos e congruentes)** *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, tem dois lados paralelos e congruentes.*

**Definição 9 (Circunferência)** *Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o **centro** e a distância dada é o **raio**.*

## Capítulo 2

# ALGUMAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO

Apresentaremos, neste capítulo, propriedades bem conhecidas que encontramos no triângulo como a soma constante das distâncias de um ponto interno qualquer aos seus lados (triângulo equilátero), a sua base média, seu baricentro e uma propriedade resultante do traçado das três medianas, além do seu incentro, ex-incentro e circuncentro.

### 2.1 Soma Constante das Distâncias de um Ponto Interno aos Lados do Triângulo Equilátero

**Propriedade 1** *Em um triângulo equilátero, a soma das distâncias de um ponto interno qualquer, aos seus lados, é constante.*

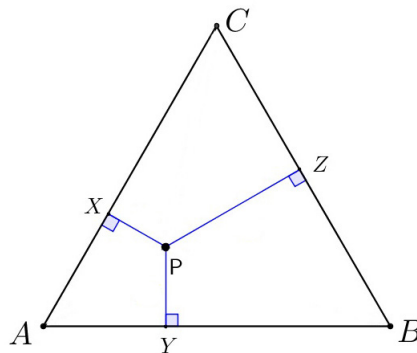


Figura 2.1:  $PX + PY + PZ$  é constante.

Podemos verificar que em qualquer posição do ponto  $P$  no triângulo equilátero, sempre vamos ter  $PX + PY + PZ = H$ , onde  $H$  é a altura do triângulo dado.

**Demonstração:**

Seja  $\overline{PX}$  a altura (distância de  $P$  ao lado  $\overline{A_1C_1}$ ) do triângulo equilátero  $A_1PC_1$  em relação ao lado  $\overline{A_1C_1}$  (Figura 2.2). Note que neste caso já se tem a soma das distâncias do ponto  $P$  aos lados igual a altura do triângulo equilátero dado, visto que  $P$  é um vértice e as distâncias aos dois lados adjacentes é zero.

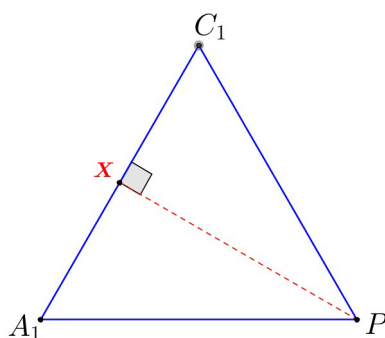


Figura 2.2: O segmento  $\overline{PX}$  é a altura do triângulo equilátero  $A_1PC_1$ .

Como se trata de um triângulo equilátero, então suas alturas são congruentes, assim  $\overline{PX} \cong \overline{C_1D}$  (Figura 2.3).

Prolongando  $\overline{C_1A_1}$  até  $A$  e  $\overline{C_1P}$  até  $B_1$ , de modo que  $C_1A = k \cdot C_1A_1$  e  $C_1B_1 = k \cdot C_1P$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 1$ . É muito simples verificar que o  $\Delta AB_1C_1$  é equilátero, pois como  $C_1A_1 = C_1P$  então  $C_1A = C_1B_1$  e o  $\Delta AB_1C_1$  é isósceles com ângulo do vértice  $\hat{C}_1$  medindo  $60^\circ$ . Logo, podemos concluir que o  $\Delta AB_1C_1$  é equilátero.

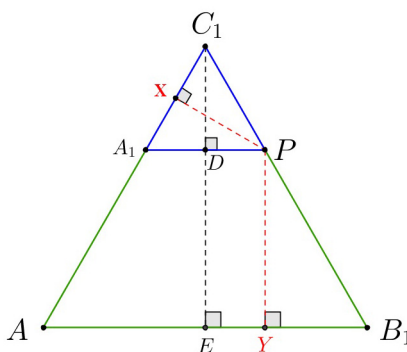


Figura 2.3: As alturas  $\overline{PX}$  e  $\overline{C_1D}$  são congruentes.

Note que sendo equiláteros os triângulos  $AB_1C_1$  e  $A_1PC_1$ , então  $\overline{A_1P} \parallel \overline{AB_1}$ , logo  $\overline{DE} \cong \overline{PY}$  (Figura 2.3).

Logo,  $PX + PY = C_1D + DE = C_1E = AF$ .  $\overline{C_1E} \cong \overline{AF}$  pois são alturas do triângulo equilátero  $AB_1C_1$  (ver Figura 2.3). Nesta figura temos o caso particular do ponto pertencer a um lado do triângulo.

Agora, prolongando  $\overline{AC_1}$  até  $C$  e  $\overline{AB_1}$  até  $B$ , de modo que  $AC = k_1 \cdot AC_1$  e  $AB = k_1 \cdot AB_1$ ,  $k_1 \in \mathbb{R}$ ,  $k_1 > 1$ . Analogamente ao caso anterior, podemos concluir que o  $\Delta ABC$  é equilátero e, além disso,  $\overline{PZ} \cong \overline{FG}$  (Figura 2.4).

Logo,  $PX + PY + PZ = AF + FG = AG$ , com  $\overline{AG}$  sendo a altura do triângulo equilátero  $ABC$ .

Portanto, sendo  $P$  um ponto qualquer de um triângulo equilátero, a soma das distâncias de  $P$  aos lados é constante e igual a altura do triângulo equilátero dado, ou seja,  $PX + PY + PZ$  é constante.

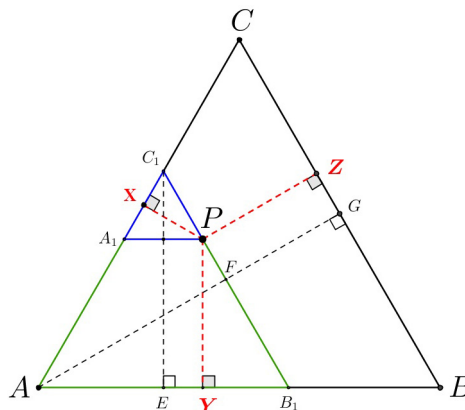


Figura 2.4: Os segmentos  $\overline{PZ}$  e  $\overline{FG}$  são congruentes.

## 2.2 Base Média

**Propriedade 2** *Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:*

- ele é paralelo ao terceiro lado;*
- ele é metade do terceiro lado.*

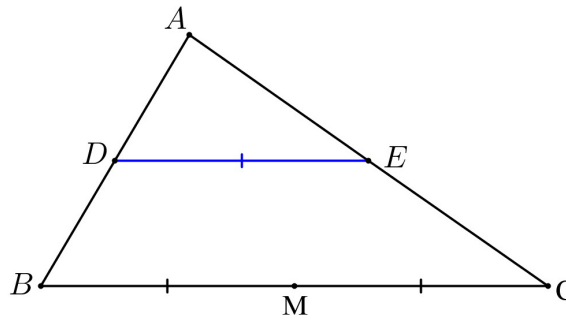


Figura 2.5: O segmento  $\overline{DE}$  é a Base Média do  $\Delta ABC$ .

Na figura 2.5, os pontos  $D$  e  $E$  são pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, o segmento  $\overline{DE}$  é paralelo a  $\overline{BC}$  e  $2 \cdot DE = BC$ .

A demonstração que é apresentada a seguir encontra-se em [4].

#### Demonstração:

Por hipótese, temos que  $\overline{AD} \cong \overline{DB}$  (Figura 2.6).

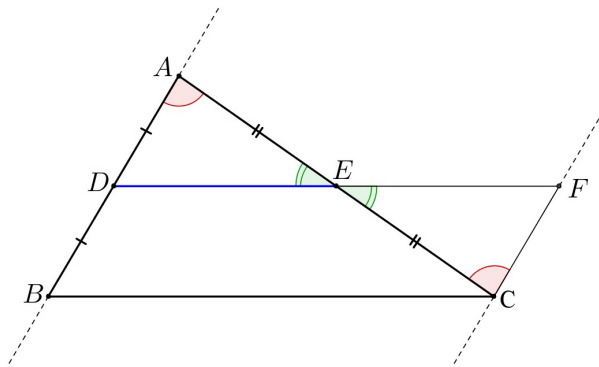


Figura 2.6: Base Média do  $\Delta ABC$ .

Conduzimos por  $C$  uma reta paralela à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e seja  $F$  o ponto de interseção com a reta  $\overleftrightarrow{DE}$ :  $CF \parallel AB$ .

$CF \parallel AB \Rightarrow \hat{E}CF \cong \hat{E}AD$  (ângulos alternos internos).

$(\hat{E}CF \cong \hat{E}AD, \overline{AE} \cong \overline{EC}, \hat{E} \text{ o.p.v.}) \xrightarrow{ALA} \Delta ADE \cong \Delta CFE \Rightarrow \overline{CF} \cong \overline{AD} \Rightarrow \overline{CF} \cong \overline{DB}$ .

$(\overline{CF} \parallel \overline{DB} \text{ e } \overline{CF} \cong \overline{DB}) \Rightarrow DBCF \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{DF} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

E ainda:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADE \cong \triangle CFE \Rightarrow \overline{DE} \cong \overline{EF} \\ DBCF \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{DF} \cong \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot DE = DF \Rightarrow 2 \cdot DE = BC, \text{ o que}$$

conclui a demonstração.

## 2.3 Baricentro

**Definição 10 (Baricentro)** O ponto de encontro das três medianas de um triângulo é chamado de *baricentro* ou *centróide*.

**Propriedade 3** As três medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto que as divide em dois segmentos tais que o segmento que contém o vértice é o dobro do segmento que contém o ponto médio do lado oposto.

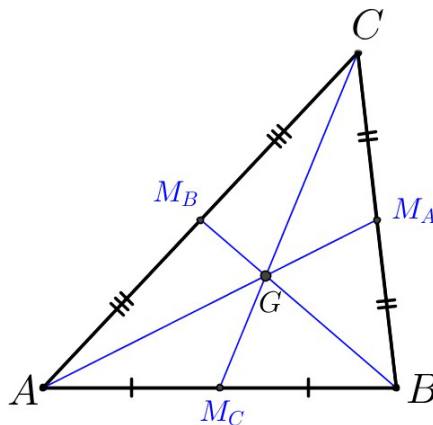


Figura 2.7:  $G$  é o baricentro do  $\triangle ABC$ .

Na Figura 2.7,  $G$  é o ponto de encontro das medianas  $\overline{AM_A}$ ,  $\overline{BM_B}$  e  $\overline{CM_C}$ . Além disso,  $AG = 2 \cdot GM_A$ ,  $BG = 2 \cdot GM_B$  e  $CG = 2 \cdot GM_C$ .

### Demonstração:

Seja  $X$  o ponto de encontro das medianas  $\overline{AM_A}$  e  $\overline{BM_B}$ . Considerando os pontos médios  $D$  e  $E$  dos segmentos  $\overline{AX}$  e  $\overline{BX}$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC, \quad \overline{CM_B} \cong \overline{AM_B}, \overline{CM_A} \cong \overline{BM_A} \Rightarrow \overline{M_A M_B} \parallel \overline{AB} \quad \text{e} \quad M_A M_B = \frac{AB}{2} \\ \Delta XAB, \quad \overline{XD} \cong \overline{AD} \quad \text{e} \quad \overline{XE} \cong \overline{BE} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{AB} \quad \text{e} \quad DE = \frac{AB}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \overline{M_A M_B} \parallel \overline{DE} \quad \text{e} \quad \overline{M_A M_B} \cong \overline{DE} \Rightarrow M_A M_B DE \text{ é um paralelogramo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{DX} \cong \overline{XM_A} \Rightarrow AX = 2 \cdot XM_A & (1) \\ \overline{EX} \cong \overline{XM_B} \Rightarrow BX = 2 \cdot XM_B & (2) \end{cases}$$

Logo, a mediana  $\overline{AM_A}$  intercepta a mediana  $\overline{BM_B}$  em um ponto  $X$  tal que:

$$BX = 2 \cdot XM_B.$$

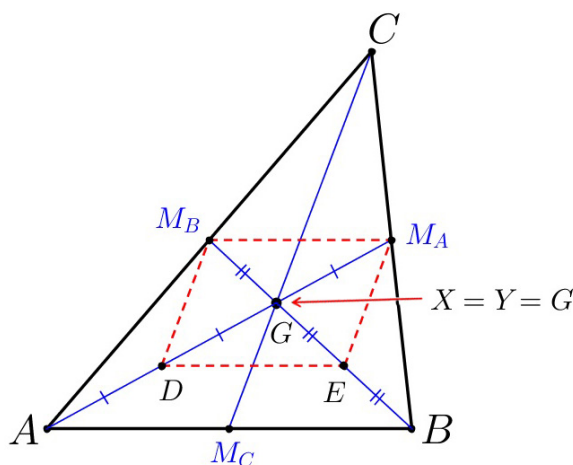


Figura 2.8: Demonstração do baricentro de um triângulo.

Sendo  $Y$  o ponto de encontro das medianas  $\overline{BM_B}$  e  $\overline{CM_C}$  então, analogamente, concluímos que:

$$BY = 2 \cdot YM_B \quad (3) \quad \text{e} \quad CY = 2 \cdot YM_C \quad (4)$$

ou seja, a mediana  $\overline{CM_C}$  intercepta a mediana  $\overline{BM_B}$  em um ponto  $Y$  tal que:

$$BY = 2 \cdot YM_B.$$

De (2) e (3), conclui-se que  $X = Y$ . De fato, se  $Y$  estiver entre  $G$  e  $M_B$  (de modo análogo com  $Y$  entre  $X$  e  $E$ ), temos:  $YM_B < XM_B \Rightarrow 2 \cdot YM_B < 2 \cdot XM_B \Rightarrow BY < BX$

o que é uma contradição, pois pela posição de  $Y$ ,  $BY > BX$ .

Chamando então  $X = Y$  de  $G$  e considerando (1), (2) e (4), concluímos que  $G$  é o ponto de encontro das três medianas.

Alem disso, concluímos também que:

$$AG = 2 \cdot GM_A, \quad BG = 2 \cdot GM_B \quad \text{e} \quad CG = 2 \cdot GM_C.$$

**Propriedade 4** *O baricentro é o centro de gravidade do triângulo.*

Significa dizer que, se suspendermos um triângulo de mesmo material pelo seu baricentro, ele fica equilibrado, ou seja, num plano horizontal.

## 2.4 Triângulos de Áreas Iguais

**Propriedade 5** *As medianas dividem o triângulo em seis triângulos menores de áreas iguais.*

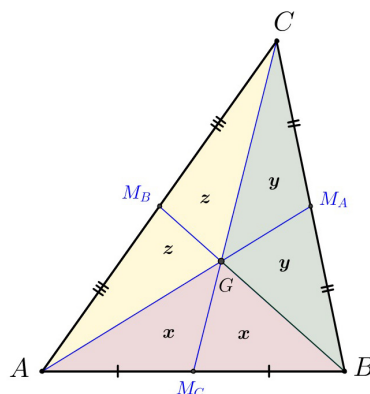


Figura 2.9: Seis triângulos com áreas iguais.

A demonstração que veremos abaixo é encontrada em [3].

**Demonstração:**

Podemos facilmente observar que  $(AGM_C) = (BGM_C) = x$ ,  $(BGM_A) = (CGM_A) =$



$y$  e  $(CGM_B) = (AGM_B) = z$ , pois possuem bases e alturas iguais (Figura 2.9).

Da mesma forma,  $(CAM_C) = (CBM_C)$ , então temos:

$$\begin{aligned} (CAM_C) &= (CBM_C) \\ (CGM_B) + (AGM_B) + (AGM_C) &= (CGM_A) + (BGM_A) + (BGM_C) \\ 2z + x &= 2y + x \\ z &= y. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que  $(ABM_B) = (CBM_B)$ , o que implica que  $x = y$ .

Assim,  $(AGM_C) = (BGM_C) = (BGM_A) = (CGM_A) = (CGM_B) = (AGM_B)$ .

Portanto, concluímos que os seis triângulos determinados pelas medianas possuem áreas iguais.

## 2.5 Incentro

**Definição 11 (Incentro)** *O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado de **incentro** do triângulo.*

**Propriedade 6** *As três bissetrizes internas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.*

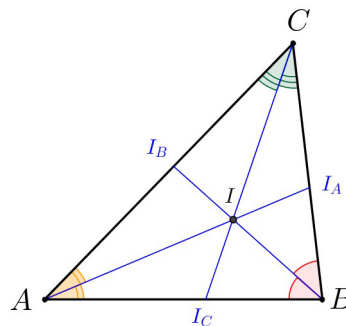


Figura 2.10:  $I$  é o incentro do  $\Delta ABC$ .

A demonstração que veremos abaixo é encontrada em [4].

**Demonstração:**

Sejam  $\overline{AI_A}$ ,  $\overline{BI_B}$  e  $\overline{CI_C}$  as bissetrizes internas do  $\Delta ABC$ .

O fato de cada ponto de uma bissetriz interna está a igual distância dos lados é visto pela congruência dos triângulos  $CIH_b$  e  $CIH_a$  (Figura 2.11).

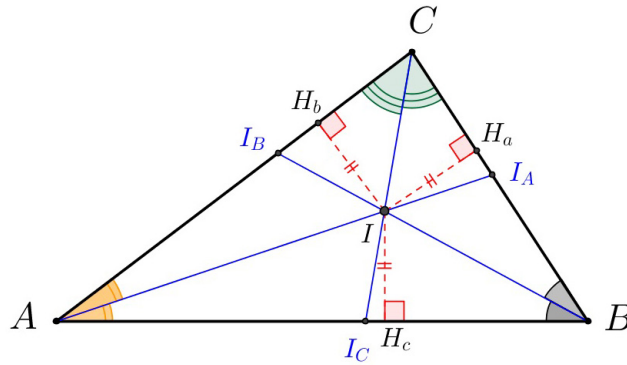


Figura 2.11: Demonstração do incentro do  $\Delta ABC$ .

De fato, temos  $\overline{CI}$  como lado comum,  $I\hat{C}H_b \cong I\hat{C}H_a$  (ângulos congruentes da bissetriz) e  $C\hat{H}_aI \cong C\hat{H}_bI$  já que  $IH_a$  e  $IH_b$  são distâncias do ponto  $I$  aos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ . Então, pelo caso LAAo de congruência de triângulos, concluímos que  $\Delta CIH_a \cong \Delta CIH_b$ , o que implica que  $IH_a = IH_b$ .

Continuando, seja  $I$  o ponto de encontro das bissetrizes internas  $\overline{AI_A}$  e  $\overline{BI_B}$ . Então temos:

$$\left. \begin{array}{l} I \in \overline{AI_A} \Rightarrow IH_c = IH_b \\ I \in \overline{BI_B} \Rightarrow IH_c = IH_a \end{array} \right\} \Rightarrow IH_b = IH_a \Rightarrow I \in \overline{CI_C}.$$

Logo  $I$  é o ponto de encontro das três bissetrizes internas do  $\Delta ABC$  e possui igual distância aos lados.

**Propriedade 7** O incentro é centro da circunferência inscrita no triângulo.

Com efeito, as distâncias iguais do incentro aos lados representam o raio da circunferência.

## 2.6 Ex-Incentro

**Propriedade 8** *As bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo e a interna do terceiro ângulo encontram-se em um ponto chamado ex-incentro, que é o centro da circunferência tangente a um dos lados e aos prolongamentos dos outros dois.*

Portanto, em um triângulo, temos três ex-incentros, como podemos ver na figura abaixo.

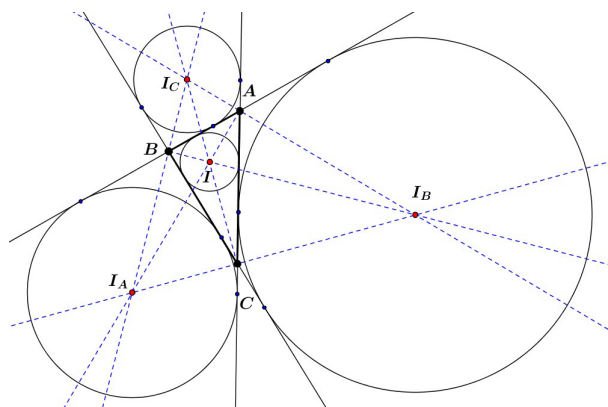


Figura 2.12:  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$  são ex-incentros do  $\triangle ABC$ .

A demonstração, que pode ser encontrada em [9], é bem simples e usa-se o fato de que cada ponto de uma bissetriz é equidistante dos lados do ângulo.

### Demonstração:

Vamos considerar as bissetrizes externas dos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$  sendo  $I_B$  seu ponto de encontro (Figura 2.13).

Então, temos que:

$$DI_B = FI_B \quad \text{e} \quad DI_B = EI_B$$

Consequentemente, como  $EI_B = FI_B$ , o ponto  $I_B$  pertence à bissetriz interna de  $\hat{B}$ .

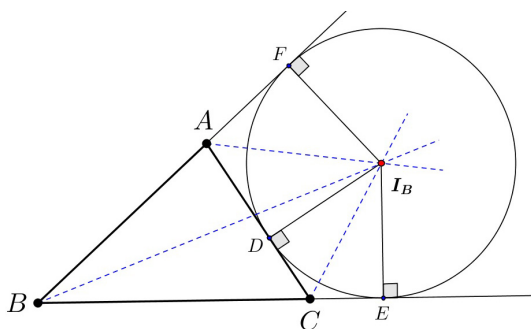


Figura 2.13: Demonstração do ex-incentro do  $\Delta ABC$ .

## 2.7 Circuncentro

**Definição 12 (Circuncentro)** O ponto de interseção das três mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de **circuncentro** do triângulo.

**Propriedade 9** As três mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

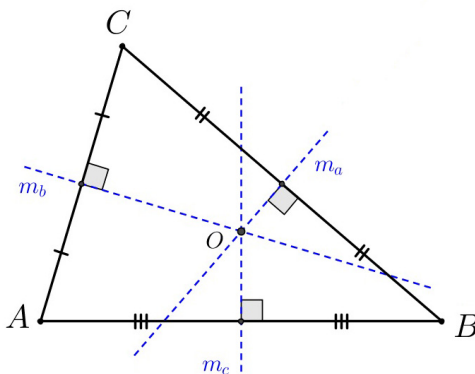


Figura 2.14:  $O$  é o circuncentro do  $\Delta ABC$ .

A demonstração que veremos abaixo é encontrada em [4].

**Demonstração:**

Sejam  $m_a$ ,  $m_b$  e  $m_c$  as mediatrizes dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente (ver Figura 2.14). Sendo  $O$  o ponto de interseção das mediatrizes  $m_b$  e  $m_c$ , temos que:

$$m_b \cap m_c = \{O\}$$

Note que, pela proposição 10 da página 20, os pontos da mediatriz são equidistantes das extremidades do segmento, que no triângulo são exatamente os vértices.

Assim, temos:

$$\left. \begin{array}{l} O \in m_b \Rightarrow \overline{OA} \cong \overline{OC} \\ O \in m_c \Rightarrow \overline{OA} \cong \overline{OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{OB} \cong \overline{OC} \Rightarrow O \in m_a.$$

Logo,

$$m_a \cap m_b \cap m_c = \{O\} \quad \text{e} \quad \overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}.$$

**Propriedade 10** *O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Realmente, como vimos durante a demonstração, as distâncias iguais do circuncentro aos vértices representam o raio da circunferência.

O circuncentro será interno ao triângulo se este for acutângulo, será externo ao triângulo se este for obtusângulo e coincidirá com o ponto médio da hipotenusa se o triângulo for retângulo.

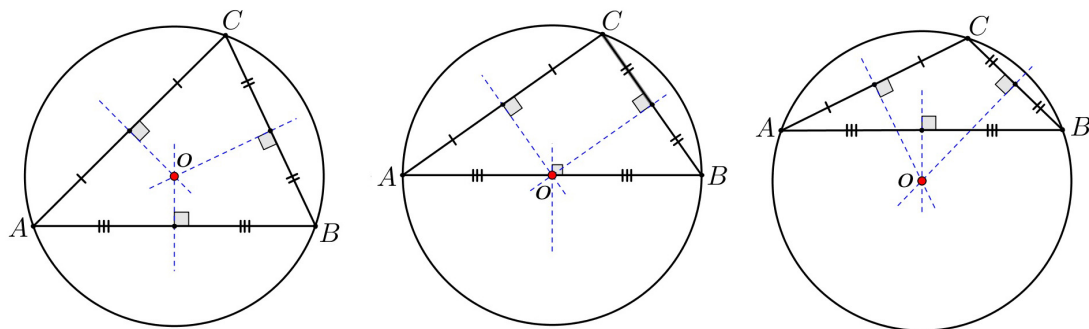


Figura 2.15: Posição do circuncentro do  $\triangle ABC$ .

## Capítulo 3

# DA GEOMETRIA ESPACIAL

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições além de outros teoremas que servirão para o entendimento das demonstrações nesta dissertação.

### 3.1 Definições e Teoremas Básicos

**Definição 13 (Diedro)** *Diedro (ou ângulo diedro ou ângulo diédrico) é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano.*

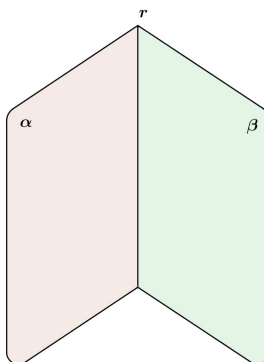


Figura 3.1:  $\alpha$  e  $\beta$  são semiplanos de mesma origem  $r$ , distintos e não opostos.

**Definição 14 (Bissetor de um Diedro)** *Um semiplano é bissetor de um diedro se, e somente se, ele possui origem na aresta do diedro e o divide em dois diedros adjacentes e congruentes.*

**Teorema 4 (Teorema da Existência de Planos Paralelos)** *Uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro.*

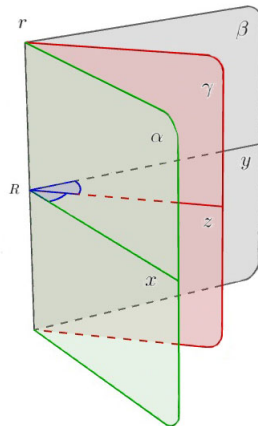


Figura 3.2:  $\gamma$  é bissetor do diedro  $\alpha\beta$ .

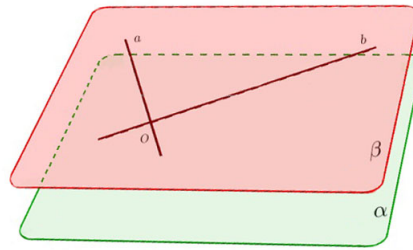


Figura 3.3:  $a$  e  $b$  são retas concorrentes, paralelas a  $\alpha$ , mas contidas em  $\beta$ .

**Teorema 5 (Reta e Plano Perpendiculares)** *Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é formar ângulo reto com duas retas concorrentes do plano.*

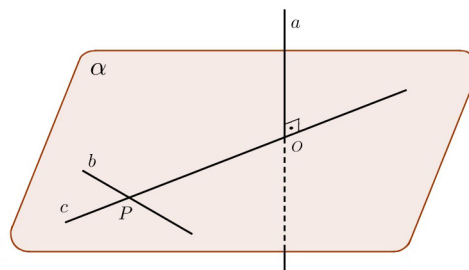


Figura 3.4:  $b$  e  $c$  são retas concorrentes de  $\alpha$  e perpendiculares a reta  $a$ .

As demonstrações dos dois teoremas acima são encontradas em [4].

**Definição 15 (Planos Perpendiculares)** Um plano  $\alpha$  é perpendicular a um plano  $\beta$  se, e somente se,  $\alpha$  contém uma reta perpendicular a  $\beta$ .

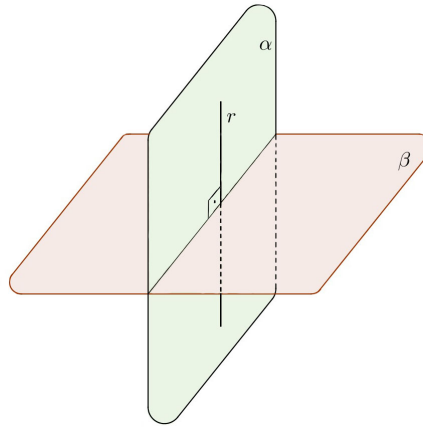


Figura 3.5:  $r$  é uma reta perpendicular a  $\beta$ , mas está contida em  $\alpha$ .

**Definição 16 (Esfera)** Consideremos um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . Chama-se *esfera* de centro  $O$  e raio  $r$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância de  $O$  a  $P$  seja menor ou igual a  $r$ .

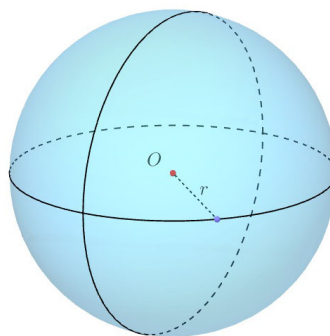


Figura 3.6: Esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .



## 3.2 Pirâmide

### 3.2.1 Definição

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa)  $A_1A_2A_3\dots A_n$  situado num plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Chama-se **pirâmide** (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra nos pontos do polígono (ver Figura 3.7).

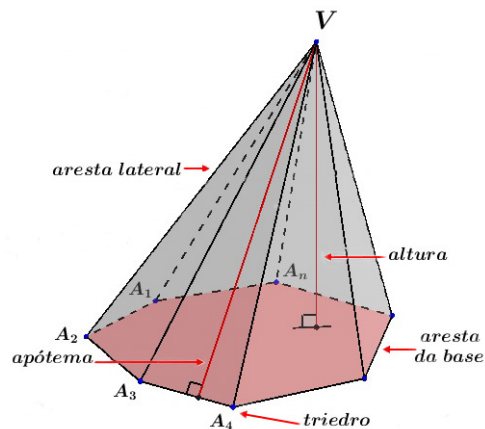


Figura 3.7: Elementos de uma Pirâmide.

### 3.2.2 Elementos

- O polígono  $A_1A_2A_3\dots A_n$  é a *base* da pirâmide;
- O ponto  $V$  é o *vértice* da pirâmide;
- A pirâmide possui  $n$  *faces laterais* (triângulos);
- A pirâmide ainda possui  $n$  *arestas laterais*,  $n$  *arestas da base*,  $2n$  *diedros*,  $n+1$  *ângulos poliédricos* e  $n$  *triedros*

### 3.2.3 Altura

A **altura** de uma pirâmide é a distância  $h$  entre o vértice e o plano da base.

### 3.2.4 Superfícies

**Superfície Lateral** é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada *área lateral*.

*Superfície Total* é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada *área total*.

### 3.2.5 Natureza

Natureza de uma pirâmide: uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a *base* for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

### 3.2.6 Pirâmide Regular

*Pirâmide Regular* é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

Em uma pirâmide regular, a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral é chamada de *apótema*.

## 3.3 Tetraedro

*Tetraedro* é uma pirâmide triangular.

*Tetraedro Regular* é um tetraedro que tem as seis arestas congruentes.

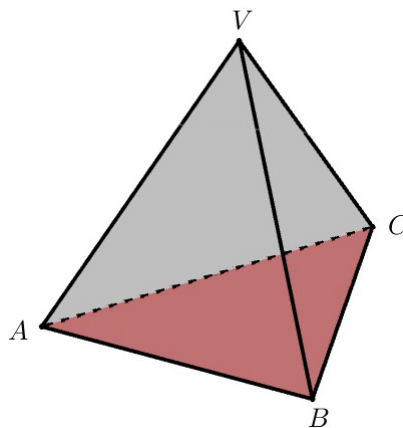


Figura 3.8: Tetraedro  $VABC$ .

## Capítulo 4

# ANALOGIA DAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO AO TETRAEDRO

Neste capítulo, que representa o ponto principal do desenvolvimento desta dissertação, apresentaremos de forma análoga no tetraedro, todas as propriedades dos triângulos que foram estudadas ao longo do capítulo 2.

Desta forma, para a soma constante das distâncias de um ponto interno do triângulo equilátero até seus lados, aqui teremos distâncias às faces do tetraedro; um triângulo, que chamaremos de face média do tetraedro, será a analogia para o segmento que representa a base média do triângulo.

Além disso, apresentaremos um ponto no tetraedro cuja distância a um vértice é o triplo da distância ao baricentro da face oposta a este vértice, algo parecido com o que acontece com os segmentos que o baricentro determina numa mediana do triângulo. Em relação aos triângulos de *áreas* iguais, trataremos de tetraedros com *volumes* iguais.

Apresentaremos ainda, semelhantemente para o incentro de um triângulo, uma esfera inscrita ao tetraedro, isto é, tangenciando suas faces. Da mesma maneira, para a circunferência ex-inscrita, naturalmente uma esfera tangente externamente a uma face e aos prolongamentos das outras três faces do tetraedro. Por fim, analogias entre circunferência circunscrita ao triângulo e esfera circunscrita ao tetraedro.

Para tornar um capítulo atraente e de fácil entendimento, tentaremos sempre que possível demonstrar todas essas propriedades de maneira bem simples e elementar, visto que, por exemplo, podemos encontrar a propriedade do baricentro de um tetraedro demonstrada em [6] com o auxílio de vetores.

## 4.1 Soma Constante das Distâncias de um Ponto Interno às Faces do Tetraedro Regular

No espaço euclidiano, semelhantemente aos *lados* do triângulo equilátero, temos às *faces* do tetraedro regular o que segue:

**Propriedade 11** *A soma das distâncias, de um ponto interior qualquer de um tetraedro regular, até suas faces é constante.*

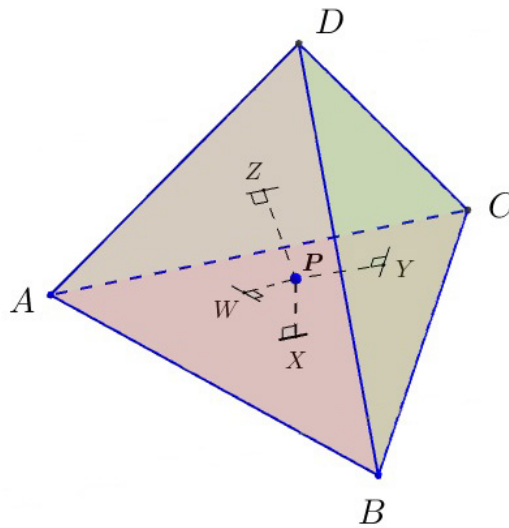


Figura 4.1:  $PX + PY + PZ + PW$  é constante.

### Demonstração:

Primeiramente vamos considerar o tetraedro regular  $A_2B_2PD_2$  da Figura 4.2. Temos que  $\overline{PX}$  é a altura do tetraedro regular dado, que é congruente a  $\overline{B_2E}$ .

Prolongando  $\overline{B_2D_2}$  até  $D_1$ ,  $\overline{B_2A_2}$  até  $A_1$ ,  $\overline{B_2P}$  até  $C_2$  de modo que  $B_2D_1 = k \cdot B_2D_2$ ,  $B_2A_1 = k \cdot B_2A_2$ ,  $B_2C_2 = k \cdot B_2P$ , com  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 1$ . É de fácil verificação que  $A_1B_2C_2D_1$  é um tetraedro regular, pois como  $B_2A_2 = B_2D_2 = B_2P$  então  $B_2A_1 = B_2D_1 = B_2C_2$  e estas arestas formam, duas a duas, lados congruentes de um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede  $60^\circ$ , conseqüentemente (Teorema 2)  $A_1D_1 = A_1C_2 = C_2D_1 = B_2A_1 = B_2D_1 = B_2C_2$  (ou seja, os triângulos isósceles são na verdade, equiláteros). Assim  $A_1B_2C_2D_1$  é um tetraedro regular.

Além disso,  $EE_1 = PY$  pois representam a mesma distância entre as faces paralelas  $A_2PD_2$  e  $A_1C_2D_1$ . Logo,  $PX + PY = B_2E_1 = D_1E_2$  (Figura 4.3), que represen-

tam a mesma altura do tetraedro regular  $A_1B_2C_2D_1$ .

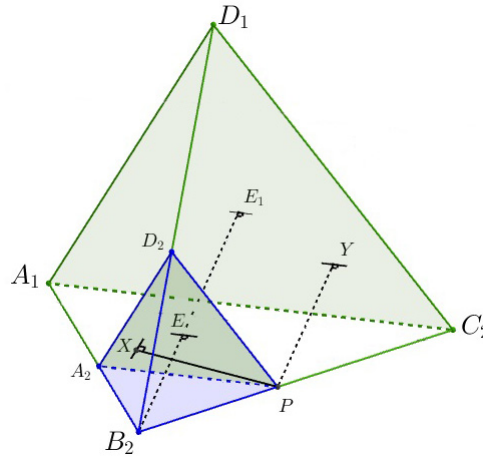


Figura 4.2:  $\overline{PX}$  e  $\overline{B_2E}$  são alturas do tetraedro regular  $A_2B_2PD_2$ .

Agora, prolongando  $\overline{D_1A_1}$  até  $A$ ,  $\overline{D_1B_2}$  até  $B_1$  e  $\overline{D_1C_2}$  até  $C_1$  de modo que  $D_1A = k_1 \cdot D_1A_1$ ,  $D_1B_1 = k_1 \cdot D_1B_2$ ,  $D_1C_1 = k_1 \cdot D_1C_2$ , com  $k_1 \in \mathbb{R}$ ,  $k_1 > 1$ . Analogamente ao último prolongamento, verifica-se que  $AB_1C_1D_1$  é um tetraedro regular.

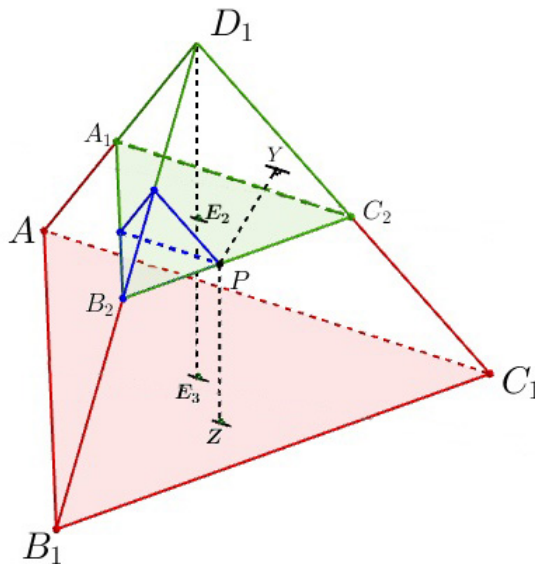


Figura 4.3:  $\overline{D_1E_2}$  é a altura do tetraedro regular  $A_1B_2C_2D_1$ .

Além disso  $E_2E_3 = PZ$  pois representam a mesma distância entre as faces paralelas  $A_1B_2C_2$  e  $AB_1C_1$ . Logo,  $PX + PY + PZ = D_1E_2 + E_2E_3 = D_1E_3 = AE_4$  (Figura 4.4) que representam a altura do tetraedro regular  $AB_1C_1D_1$ .

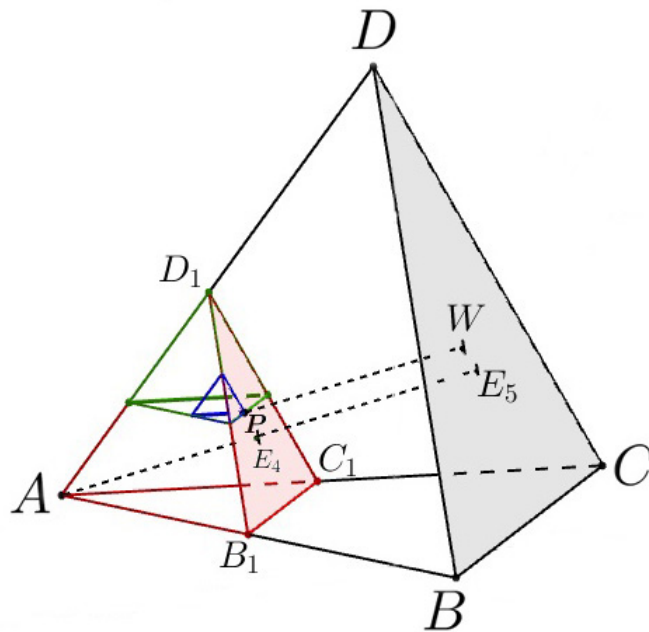


Figura 4.4:  $\overline{AE_4}$  é a altura do tetraedro regular  $AB_1C_1D_1$ .

Finalmente, prolongando  $\overline{AB_1}$  até  $B$ ,  $\overline{AD_1}$  até  $D$ ,  $\overline{AC_1}$  até  $C$  de modo que  $AB = k_2 \cdot AB_1$ ,  $AD = k_2 \cdot AD_1$ ,  $AC = k_2 \cdot AC_1$ , com  $k_2 \in \mathbb{R}$ ,  $k_2 > 1$ . Semelhantemente ao caso anterior, verifica-se com facilidade que  $ABCD$  é um tetraedro regular.

Além disso,  $E_4E_5 = PW$ , pois representam a mesma distância entre as faces paralelas  $B_1C_1D_1$  e  $BCD$ .

Então temos  $PX + PY + PZ + PW = AE_4 + E_4E_5 = AE_5 = H$ , onde  $H$  é a altura do tetraedro regular  $ABCD$ .

Portanto, conclui-se que  $PX + PY + PZ + PW = H$ .

Note que os casos particulares do ponto  $P$  pertencer a um *vértice* ou a uma *aresta* estão representados na Figura 4.2 e no caso do ponto  $P$  pertencer a uma *face* é representado na Figura 4.3.

## 4.2 Face Média

Considere agora o tetraedro da Figura 4.5 representando uma pirâmide triangular de base  $ABC$  e vértice  $V$ .

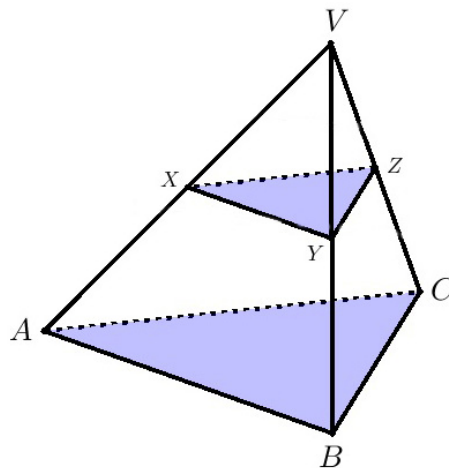


Figura 4.5: Face Média do tetraedro  $VABC$ .

Na figura 4.5, os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os pontos médios das arestas laterais  $\overline{VA}$ ,  $\overline{VB}$  e  $\overline{VC}$  respectivamente, o plano do triângulo  $XYZ$  é paralelo ao plano da base  $ABC$  e  $4 \cdot (XYZ) = (ABC)$ .

**Propriedade 12** *Se segmentos tem extremidades nos pontos médios de duas arestas laterais de uma pirâmide triangular, então:*

- a) os segmentos formam um triângulo cujo plano é paralelo ao plano da base da pirâmide;*
- b) a área desse triângulo é quarta parte da área da base da pirâmide.*

### **Demonstração:**

A demonstração do paralelismo entre os planos da base  $ABC$  e do triângulo  $XYZ$  é bem simples visto que, pela propriedade acima,  $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$  e  $\overline{YZ} \parallel \overline{BC}$ , ou seja, os segmentos  $\overline{XY}$  e  $\overline{YZ}$  são paralelos ao plano do triângulo  $ABC$  (note que estes segmentos, ou suas retas suportes, são concorrentes). Então, pelo teorema 4, podemos concluir que os planos em questão são paralelos.

E ainda, pela propriedade acima:

$$2 \cdot XY = AB, \quad 2 \cdot YZ = BC, \quad 2 \cdot XZ = CA.$$

Sendo  $p$  o semi-perímetro do triângulo  $XYZ$  e  $p'$  o semi-perímetro do triângulo  $ABC$ , temos

$$p' = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{2 \cdot XY + 2 \cdot YZ + 2 \cdot XZ}{2} = 2 \cdot \left( \frac{XY + YZ + XZ}{2} \right).$$

O que implica que  $p' = 2p$ .

Assim, temos:

$$\begin{aligned} (ABC) &= \sqrt{p'(p' - AB)(p' - BC)(p' - AC)} \\ &= \sqrt{2p(2p - 2 \cdot XY)(2p - 2 \cdot YZ)(2p - 2 \cdot XZ)} \\ &= \sqrt{16p(p - XY)(p - YZ)(p - XZ)} \\ &= 4 \cdot \sqrt{p(p - XY)(p - YZ)(p - XZ)} \\ &= 4 \cdot (XYZ). \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que  $(ABC) = 4 \cdot (XYZ)$ .

Agora, não é demais notar que a área do  $\Delta ABC$  é quatro vezes a área do  $\Delta ADE$  da Figura 2.5.

De fato, sendo  $G$  o ponto médio de  $\overline{BC}$  e pelo caso LLL de congruência de triângulos, vemos que  $\Delta ADE \cong \Delta DBG \cong \Delta GED \cong \Delta EGC$  (ver Figura 4.6).

Portanto,  $(ABC) = 4 \cdot (ADE)$ .



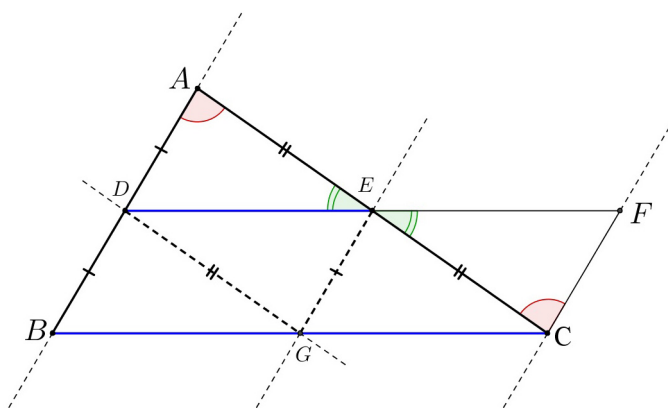


Figura 4.6: Relação entre as áreas dos triângulos  $ABC$  e  $ADE$ .

Nesse sentido podemos então encontrar a relação entre os volumes dos tetraedros  $VABC$  e  $VXYZ$  da Figura 4.5.

Temos então, pela Figura 4.7, que os triângulos  $VAB$  e  $VXY$  são semelhantes (Caso LLL). Logo, suas alturas também o são, e a razão de semelhança é  $k = 2$ .

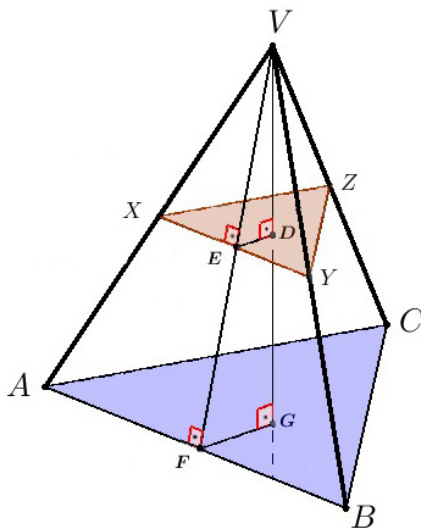


Figura 4.7: Relação entre os volumes dos tetraedros  $VABC$  e  $VXYZ$ .

Agora, observando os triângulos semelhantes (Caso AAA)  $VGF$  e  $VDE$ , notamos que a altura  $(\overline{VG})$  da pirâmide  $VABC$  é o dobro da altura  $(\overline{VD})$  da pirâmide  $VXYZ$ .

Assim, sendo  $V_{ABC}$ ,  $V_{XYZ}$  e  $h$  respectivamente o volume da pirâmide  $VABC$ , o volume da pirâmide  $VXYZ$  e a altura da pirâmide  $VXYZ$ , temos:

$$V_{ABC} = \frac{(ABC) \cdot (2h)}{3} = \frac{4 \cdot (XYZ) \cdot (2h)}{3} = 8 \cdot \frac{(XYZ) \cdot h}{3}$$

ou seja,

$$V_{ABC} = 8 \cdot V_{XYZ}.$$

e concluímos que o volume da pirâmide  $V_{ABC}$  é oito vezes o volume da pirâmide  $V_{XYZ}$ .

### 4.3 Baricentro do Tetraedro

Para este tópico vamos considerar a seguinte construção: em um tetraedro (ver Figura 4.8), um plano passando por uma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta. Então, em relação a uma mesma face, temos:

**Propriedade 13** *Em um tetraedro, os três planos que passam por uma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta (em uma mesma face), se encontram em um único segmento. Podemos chamar este segmento de Bariana (segmento que tem como extremidades um vértice e o baricentro da face oposta).*

#### Demonstração:

Note que, pela construção, este plano intercepta duas faces (por exemplo, na Figura 4.8, o plano que passa pela aresta  $VB$  e pelo ponto médio  $M_2$  intercepta as faces  $ABC$  e  $VAC$ ).

Vamos considerar o plano da face  $ABC$  (pirâmide com vértice  $V$  e base  $ABC$ ). Se o plano passa pelo ponto médio de uma aresta da base, então este plano passa por uma mediana da base. Sejam  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  os pontos médios das arestas da face  $ABC$ . Assim, a mediana  $\overline{AM_1}$  está contida no plano que passa pela aresta  $\overline{VA}$ , a mediana  $\overline{BM_2}$  está contida no plano que passa pela aresta  $\overline{VB}$  e a mediana  $\overline{CM_3}$  está contida no plano que passa pela aresta  $\overline{VC}$ . Ora, deste modo, o baricentro  $G_1$  pertence a cada um dos três planos considerados. E claro, por construção, o vértice  $V$  também

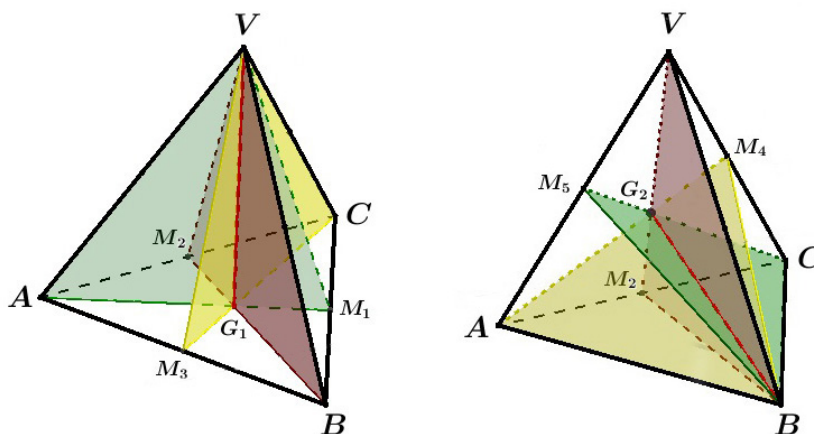


Figura 4.8:  $\overline{VG_1}$  e  $\overline{BG_2}$  são barianas.

pertence a cada um dos três planos em questão.

Portanto, podemos concluir que a interseção destes três planos, no tetraedro, é o segmento  $\overline{VG_1}$ .

A analogia deste resultado no tetraedro em relação ao baricentro de um triângulo já é bastante satisfatória. Por outro lado, esta construção pode ser realizada nas quatro faces do tetraedro, o que nos leva a detalhar um pouco mais este tópico. Dessa maneira, temos a seguinte propriedade:

**Propriedade 14** *As quatro barianas de um tetraedro se encontram em um mesmo ponto que as divide em dois segmentos tais que o segmento que contém o vértice é o triplo do segmento que contém o baricentro da face oposta.*

#### Demonstração:

Não esqueçamos (Figura 4.8) que pela construção, este plano intercepta duas faces. Sejam  $M_2$ ,  $M_4$  e  $M_5$  os pontos médios das arestas da face  $VAC$ . Então, analogamente ao caso anterior, considerando agora a face  $VAC$ , temos que a interseção dos planos que passam pela aresta  $\overline{VB}$  e ponto médio  $M_2$ , pela aresta  $\overline{AB}$  e ponto médio  $M_4$  e pela aresta  $\overline{BC}$  e ponto médio  $M_5$ , no tetraedro, é representada pelo segmento  $\overline{BG_2}$ .

Para mostrar que as barianas  $\overline{VG_1}$  e  $\overline{BG_2}$  se encontram em um ponto  $G$  (Figura 4.9), basta observar com mais detalhes na Figura 4.8, que estes dois segmentos são interseção, respectivamente, de três planos construídos sobre a face  $VAC$  e de três

planos construídos sobre a face ABC do tetraedro, sendo comum o plano que passa pela aresta  $\overline{VB}$  e pelo ponto médio  $M_2$ , quer dizer,  $\overline{VG_1}$  e  $\overline{BG_2}$  estão contidos neste último plano.

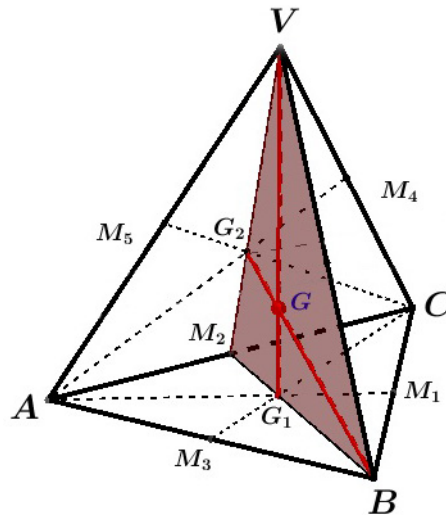


Figura 4.9:  $G$  é o ponto de encontro das barianas  $\overline{VG_1}$  e  $\overline{BG_2}$ .

Portanto, como as barianas  $\overline{VG_1}$  e  $\overline{BG_2}$  estão contidas no mesmo plano, concorrem no ponto  $G$ .

Seguindo, como  $\overline{VM_2}$  e  $\overline{BM_2}$  são medianas e  $G_1$  e  $G_2$  baricentros, então  $2 \cdot M_2G_1 = G_1B$  (de medida  $2m$ ) e  $2 \cdot G_2M_2 = VG_2$  (de medida  $2n$ , ver Figura 4.10).

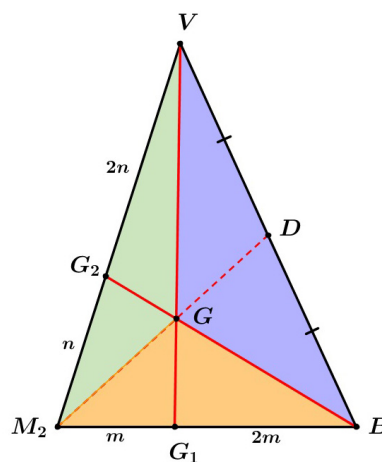


Figura 4.10:  $\overline{VG}$  ( $\overline{BG}$ ) é o triplo de  $\overline{GG_1}$  ( $\overline{GG_2}$ ).

Assim, temos:

$$\frac{M_2G_1}{G_1B} \cdot \frac{VG_2}{G_2M_2} = \frac{m}{2m} \cdot \frac{2n}{n} = 1,$$

e multiplicando pela fração  $\frac{BD}{DV}$ , sendo  $D$  o ponto médio de  $\overline{VB}$ , vem:

$$\frac{M_2G_1}{G_1B} \cdot \frac{BD}{DV} \cdot \frac{VG_2}{G_2M_2} = 1,$$

e pelo Teorema de Ceva, os segmentos  $\overline{VG_1}$ ,  $\overline{BG_2}$  e  $\overline{M_2D}$  se encontram em  $G$ .

Agora, note que os triângulos  $VGM_2$  e  $G_1GM_2$  tem a mesma altura  $h$  em relação às bases  $\overline{VG}$  e  $\overline{G_1G}$ . Também os triângulos  $G_1GM_2$  e  $G_1GB$  tem a mesma altura  $H$  em relação às bases  $\overline{G_1M_2}$  e  $\overline{G_1B}$ . Logo, em relação ao triângulo  $G_1GM_2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{G_1G \cdot h}{2} &= \frac{M_2G_1 \cdot H}{2} \\ \frac{G_1G \cdot h}{2} &= \frac{m \cdot H}{2}. \end{aligned}$$

Observando também na Figura 4.10 temos que  $(VDM_2) = (BDM_2)$ , pois possuem bases e alturas iguais. Da mesma forma,  $(VDG) = (BDG)$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} (VDM_2) &= (BDM_2) \\ (VDG) + (VGM_2) &= (BDG) + (BGM_2) \\ (VGM_2) &= (BGM_2) = (G_1GM_2) + (G_1GB) \\ \frac{VG \cdot h}{2} &= \frac{m \cdot H}{2} + \frac{2m \cdot H}{2} \\ \frac{VG \cdot h}{2} &= \frac{G_1G \cdot h}{2} + 2 \cdot \frac{G_1G \cdot h}{2} \\ \frac{VG \cdot h}{2} &= 3 \cdot \frac{G_1G \cdot h}{2} \\ VG &= 3 \cdot G_1G. \end{aligned}$$

Logo, a bariana  $\overline{BG_2}$  intercepta a bariana  $\overline{VG_1}$  no ponto  $G$  tal que:

$$VG = 3 \cdot G_1G. \quad (5)$$

Similarmente, se tem  $BG = 3 \cdot G_2G$ . (6)

De forma análoga à toda construção anterior, considerando o plano que passa pela aresta  $\overline{VC}$  e pelo ponto médio  $M_3$ , em relação às faces  $ABC$  e  $VAB$ , temos que  $J$  é o ponto de encontro das barianas  $\overline{CG_3}$  (com  $G_3$  o baricentro da face  $VAB$ ) e  $\overline{VG_1}$  (note que  $\overline{VG_1}$  está contida no plano  $VCM_3$ ), ou seja,  $\overline{CG_3}$  é uma bariana que intercepta a bariana  $\overline{VG_1}$  no ponto  $J$  (Figura 4.11) tal que:

$$VJ = 3 \cdot G_1J \quad (7) \quad \text{e} \quad CJ = 3 \cdot G_3J \quad (8)$$

De (5) e (7), conclui-se que  $G = J$ .

Chamando  $G = J$  de  $T$  e considerando (5), (6) e (8), concluímos que  $T$  é o ponto de encontro das três barianas.

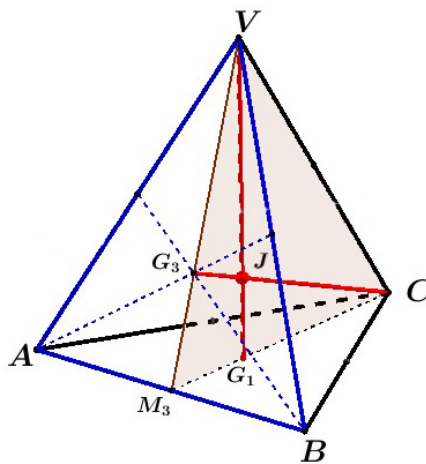


Figura 4.11:  $\overline{VJ}$  ( $\overline{CJ}$ ) é o triplo de  $\overline{G_1J}$  ( $\overline{G_3J}$ ).

Por fim, considerar o plano determinado por  $VCM_3$  em relação às faces  $ABC$  e  $VAB$  é considerar similarmente o plano determinado por  $VAM_1$  em relação às faces  $ABC$  e  $VBC$ . Logo, sendo  $G_4$  o baricentro da face  $VBC$ , temos que  $AT = 3 \cdot G_4T$ .

Conclusão, as quatro barianas  $\overline{VG_1}$ ,  $\overline{BG_2}$ ,  $\overline{CG_3}$  e  $\overline{AG_4}$  (ver Figura 4.12) se encontram no ponto  $T$  e

$$VT = 3 \cdot G_1T, \quad BT = 3 \cdot G_2T, \quad CT = 3 \cdot G_3T \quad \text{e} \quad AT = 3 \cdot G_4T.$$

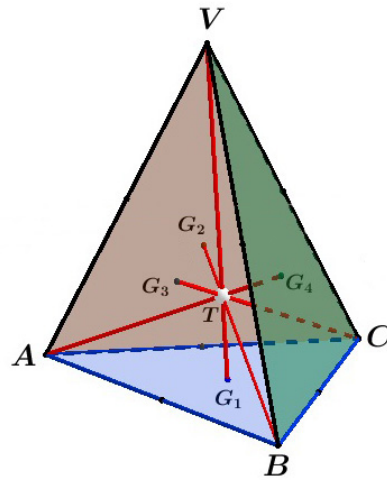


Figura 4.12:  $T$  é o baricentro do tetraedro  $VABC$ .

## 4.4 Tetraedros de Volumes Iguais

De acordo com a construção feita no item anterior em um tetraedro, temos:

**Propriedade 15** *Em um tetraedro, os três planos que passam por uma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta (em uma mesma face), dividem o tetraedro em seis tetraedros menores de volumes iguais.*

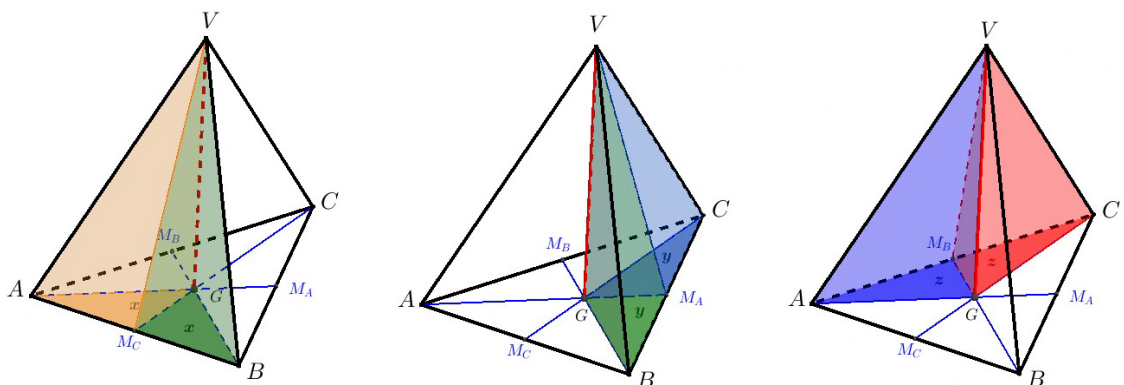


Figura 4.13: Seis tetraedros com volumes iguais.

### Demonstração:

Esta demonstração é bem simples visto que os triângulos formados (Figura

4.13) possuem a mesma área, como foi visto na seção 2.4. Então os tetraedros  $VGAM_C$ ,  $VGBM_C$ ,  $VGBM_A$ ,  $VGCM_A$ ,  $VGCM_B$  e  $VGAM_B$  possuem o mesmo volume porque possuem também a mesma altura, que é a altura do tetraedro  $VABC$ .

Portanto, concluímos que os seis tetraedros considerados possuem volumes iguais.

## 4.5 Esfera Inscrita às Faces de um Tetraedro

Semelhantemente à construção feita para o baricentro do tetraedro, vamos considerar agora os bissetores dos diedros formados pelas três faces que possuem um vértice comum, o que resulta no seguinte:

**Propriedade 16** *Em um tetraedro, os três bissetores dos diedros formados pelas faces que possuem um vértice comum, encontram-se num mesmo segmento cujos pontos estão a igual distância das faces do tetraedro.*

### Demonstração:

Considerando o bissetor do diedro formado pelas faces  $VAC$  e  $VBC$ , que chamaremos de  $\alpha$ , assim como o bissetor do diedro formado pelas faces  $VAB$  e  $VAC$ , que chamaremos de  $\beta$ , temos que o segmento  $\overline{VX}$ , no tetraedro, é a interseção destes dois bissetores (ver Figura 4.14).

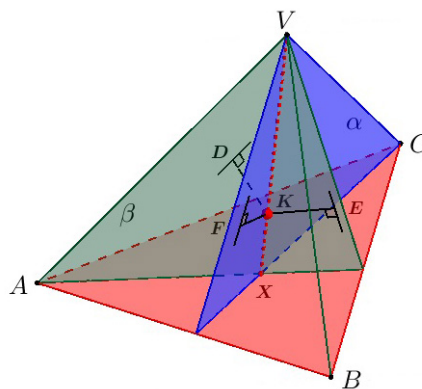


Figura 4.14:  $\overline{VX}$  é a interseção dos bissetores  $\alpha$  e  $\beta$ .

Ora, sendo bissetores, então cada ponto deles está a igual distância das faces do diedro. Assim, sendo  $K$  um ponto de  $\overline{VX}$ , então  $K \in \alpha$ , isto é,  $KD = KE$ ,



mas  $K$  também pertence a  $\beta$ , ou seja,  $KD = KF$ . O que implica que  $KE = KF$ , isto é,  $K$  pertence ao bissetor do diedro formado pelas faces  $VAB$  e  $VBC$ .

Logo, o ponto  $K$  é equidistante de três faces do tetraedro.

Além disso, mostramos que o segmento  $\overline{VX}$ , no tetraedro, é a interseção de três bissetores, o que mostra uma construção semelhante ao caso do baricentro do tetraedro da Seção 4.3. Note também que deixamos de considerar os diedros com  $ABC$  sendo uma de suas faces.

Para facilitar o desenvolvimento das demonstrações seguintes, chamaremos o segmento  $\overline{VX}$  de *fassetriz*.

Para fixarmos o ponto que possui a mesma distância também para a quarta face (face  $ABC$ ), basta observar que se  $V$  é um ponto da face  $VBC$  (e que não pertence a face  $ABC$ ) e  $X$  é um ponto da face  $ABC$ , então o bissetor do diedro formado por estas faces interceptará o segmento  $\overline{VX}$  num único ponto, o qual chamaremos definitivamente de  $K$ .

A característica desse ponto é que  $KG = KE$ . Portanto, concluímos que  $KD = KE = KF = KG$ , o que mostra que  $K$  equidista das faces do tetraedro (Figura 4.15).

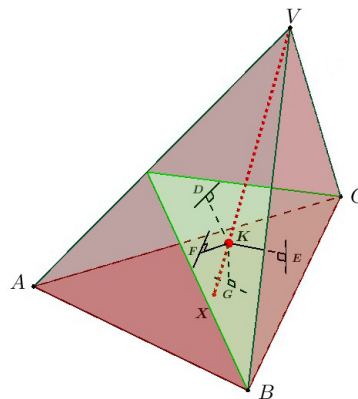


Figura 4.15: O ponto  $K$  equidista das faces do tetraedro.

**Propriedade 17** O ponto  $K$  representa o centro da esfera inscrita (tangente) às faces do tetraedro  $VABC$ .

Com efeito, as distâncias iguais às faces do tetraedro representam o raio da esfera (ver Figura 4.17).

Veja que  $KF = KG$  e  $KD = KG$  faz com que o ponto  $K$  pertença aos outros dois bissetores não mencionados.

É exatamente com estes bissetores:

- o bissetor do diedro formado pelas faces  $VAB$  e  $ABC$ ;
- o bissetor do diedro formado pelas faces  $VAC$  e  $ABC$  e;
- o bissetor do diedro formado pelas faces  $VBC$  e  $ABC$ ;

que conseguiríamos chegar ao ponto  $K$  com mais facilidade (ver figura 4.16). A novidade aqui é que conseguimos encontrar um ponto com a interseção de três planos (onde uma semelhança que se pode encontrar com a construção feita na seção 4.3 é que os três bissetores envolvidos são de diedros tendo uma face comum) e não com a interseção de quatro segmentos.

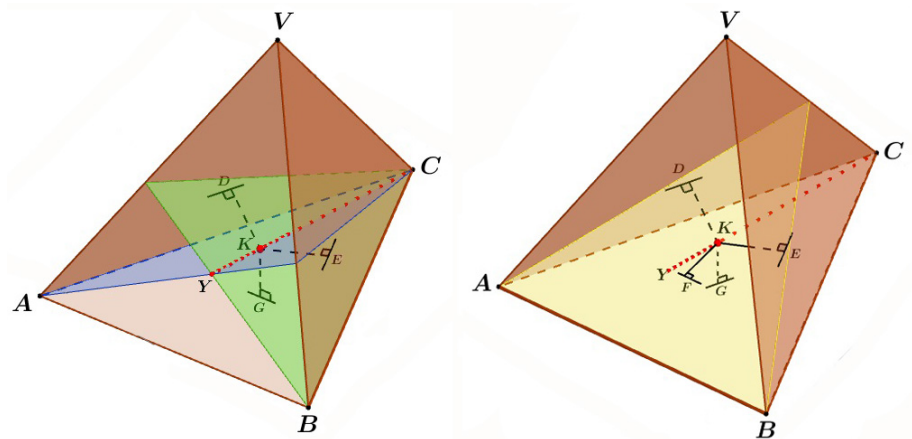


Figura 4.16: O ponto  $K$  é a interseção de três bissetores.

Mas, sabendo que já existe o ponto  $K$ , por que não enunciarmos então um resultado tomando as quatro fassetrizes? Ficaria mais ou menos assim:

**Propriedade 18** *As quatro fassetrizes de um tetraedro encontram-se num mesmo ponto que está a igual distância das faces do tetraedro.*

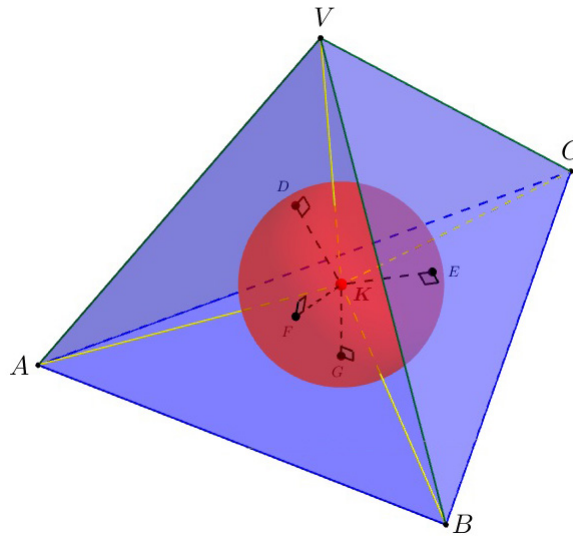


Figura 4.17: Esfera inscrita às faces do tetraedro.

## 4.6 Esfera Ex-Inscrita em um Tetraedro

Em relação ao ex-incentro de um triângulo, semelhantemente em um tetraedro, temos:

**Propriedade 19** *Em relação a uma face de um tetraedro, o bissetor externo e a fassetriz correspondentes encontram-se em um ponto que representa o centro da esfera tangente (esfera ex-inscrita) a esta face e aos prolongamentos das outras três faces.*

Portanto, em um tetraedro, temos quatro esferas ex-inscritas.

### Demonstração:

Vamos considerar o bissetor do diedro formado pela face  $VBC$  e o prolongamento da face  $ABC$ . É verdade que este plano é interceptado pelo prolongamento da fassetriz que parte do vértice  $A$ .

Seja  $I_A$  o ponto de interseção mencionado acima (ver figura 4.18).

Ora, sendo  $I_A$  um ponto do prolongamento da fassetriz que parte do vértice  $A$ , tem distâncias iguais aos prolongamentos das faces  $VAB$ ,  $ABC$  e  $VAC$ . Da mesma forma, sendo um ponto do bissetor, tem distâncias iguais à face  $VBC$  e ao prolongamento da face  $ABC$ .

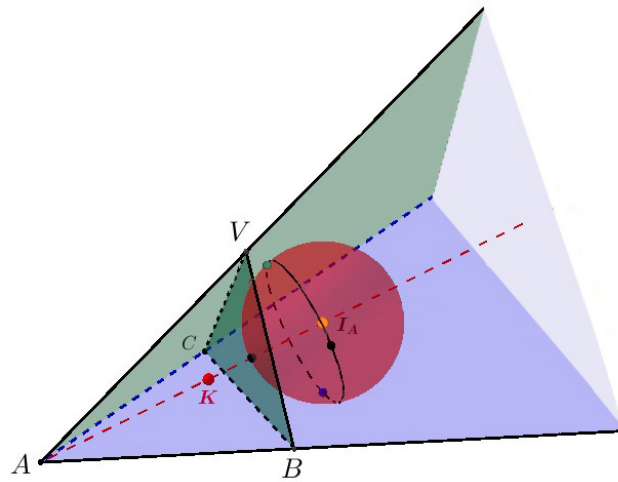


Figura 4.18:  $I_A$  é o centro de uma esfera ex-inscrita ao tetraedro  $VABC$ .

Portanto, concluímos que o ponto  $I_A$  tem distâncias iguais à face  $VBC$  e aos prolongamentos das faces  $VAB$ ,  $ABC$  e  $VAC$ .

## 4.7 Esfera Circunscrita ao Tetraedro

Podemos verificar sem muita dificuldade que qualquer ponto da reta perpendicular ao plano do triângulo pelo seu circuncentro é também equidistante dos vértices do triângulo (ver [5], cap. IV). Podemos chamar esta reta de *circunssetriz*. Assim, temos o que segue:

**Propriedade 20** *As quatro circunssetrizes de um tetraedro encontram-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do tetraedro.*

### Demonstração:

Basta observar que duas destas retas estão num mesmo plano, ou seja, se interceptam em um ponto.

Observando que a mediatriz  $m_b$  da face  $ABC$  e a mediatriz  $m_v$  da face  $VAC$  encontram-se no ponto  $D$  formando um plano, que pelo Teorema 5 é perpendicular à reta suporte da aresta  $\overline{AC}$  e, conseqüentemente, por definição (planos perpendiculares), é perpendicular às faces  $ABC$  e  $VAC$  (ver Figura 4.19).

Como o plano formado pelas mediatrizes passa pelos circuncentros das

faces  $ABC$  e  $VAC$ , então as circunscritrizes  $c_1$  e  $c_2$  pertencem a este plano, ou seja, se interceptam em um ponto  $U$ .

Desta forma, já se garante as distâncias iguais de  $U$  aos vértices. De  $UB = UC = UV$  e  $UA = UB = UV$  conclui-se que  $U$  pertence às circunscritrizes das faces  $VBC$  e  $VAB$ .

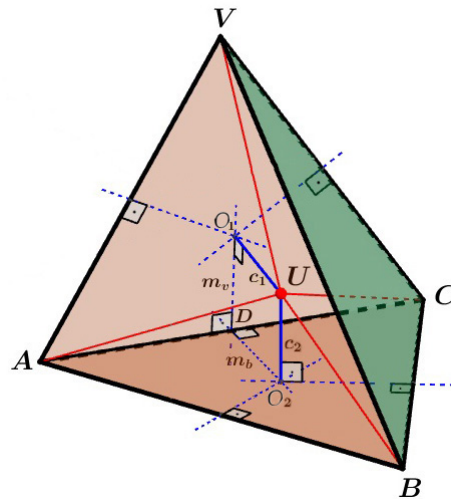


Figura 4.19: O ponto  $U$  equidista dos vértices do tetraedro  $VABC$ .

**Propriedade 21** O ponto  $U$  é o centro da esfera circunscrita ao tetraedro.

De fato, vimos durante a demonstração que as distâncias do ponto  $U$  aos vértices são iguais e representam o raio da esfera.

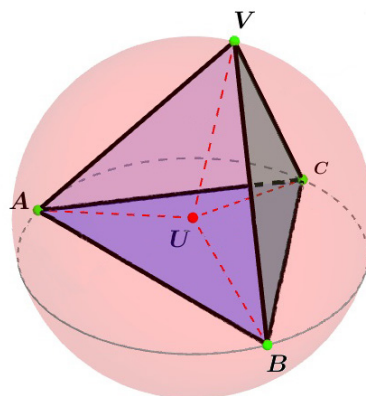


Figura 4.20: Esfera circunscrita ao tetraedro.

Para incentivar a investigação, deixamos a cargo do leitor determinar em que condições o centro da esfera circunscrita será interno ou externo ao tetraedro, ou

se poderá estar numa das faces ou numa aresta.

Mas fica a dica para o ponto  $U$  sobre uma aresta. Basta verificar que os ângulos opostos a esta aresta, nas duas faces adjacentes, devem ser ângulos retos e, conseqüentemente, o circuncentro é comum, que é o ponto médio dessa aresta, isto indica também o ponto de encontro de duas circunscrituras.

## Considerações Finais

O objetivo geral deste trabalho foi estabelecer analogamente, no tetraedro, algumas peculiaridades e propriedades dos triângulos. Foi possível estabelecer, por exemplo, relações entre circunferências e esferas inscritas e circunscritas, relações entre as características do baricentro, e alguns poucos pontos notáveis, poucos mesmo pois segundo o site *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*, ver [8], do professor americano Clark Kimberling, da University of Evansville, dos Estados Unidos, existem cinco mil, oitocentos e quarenta pontos notáveis do triângulo e provavelmente mais pontos sendo encontrados a cada dia.

Ressaltamos que foi necessário criar nomes para alguns segmentos e retas, simplesmente para facilitar a escrita evitando repetições e especialmente tornar uma leitura agradável e facilitar o entendimento das ideias propostas.

Destacamos ainda, a qualidade das imagens feitas no GeoGebra 5 Beta Release (versão 3D) que decididamente influenciaram no desenvolvimento e esclarecimento de alguns conceitos, construções e definições criados ao longo do quarto capítulo.

Lamentamos a impossibilidade de apresentar imagens em movimento, o que certamente facilitaria a compreensão dos resultados apresentados nesta dissertação.

Como trabalhos futuros, indicamos ao leitor curioso e com espírito investigativo, o desafio de descobrir o que ocorre, em um tetraedro, com os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas, e ainda, determinar em que condições o centro da esfera circunscrita será interno ou externo ao tetraedro, ou se poderá estar numa das faces ou numa aresta.

Para finalizar, esperamos que esta dissertação possa servir de motivação para o desenvolvimento contínuo da Geometria Espacial e, quem sabe, de inspiração para a criação de algo parecido com o que encontramos na *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*.

## Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília, DF. 1996.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF. MEC / SEE, 1998.
- [3] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. G. *Geometry Revisited*, Vol. 19. Washington: The Mathematical Association of America, 1967.
- [4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [5] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial*. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [6] FRENSEL, K.; DELGADO, J. *Notas de Aulas em Geometria Analítica*. cap. 10. Disponível em: [http://www.professores.uff.br/katia\\_frensel/aulasga/aula10.pdf](http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga/aula10.pdf). Acesso em: 21/07/2014.
- [7] **GeoGebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 26/05/2014.
- [8] KIMBERLING, Clark. *Encyclopedia of Triangle Centers - ETC*. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCPart4.html>. Acesso em: 26/06/2014.
- [9] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria I*. 5. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1990.