



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Método de *Newton-Raphson* aplicado a localização de raízes polinomiais

Julimar Carlos de Oliveira

São Luis - MA

Agosto de 2014

Julimar Carlos de Oliveira

**Método de *Newton-Raphson* aplicado à
localização de raízes polinomiais**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Coelho Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Método de *Newton-Raphson* aplicado a localização de raízes polinomiais

Julimar Carlos de Oliveira

Prof. Dr. João Coelho Filho(Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. José Cloves Verde Saraiva
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
Universidade Federal do Mato Grosso

”A matemática não é uma caminhada cuidadosa através de uma estrada bem conhecida, é uma jornada por terras selvagens e estranhas, onde os exploradores frequentemente se perdem. A exatidão deve ser um sinal aos historiadores de que os mapas já foram feitos e os exploradores se foram para outras terras”.

W.S.Anglin

AGRADECIMENTOS

À todos os meus professores da educação básica, pois mesmo diante das dificuldades inerentes a profissão, sempre se dedicaram ao máximo na certeza de uma educação melhor.

Aos meus colegas da turma PROFMAT - 2012 que foram sempre prestativos e solidários nos momentos de dificuldade, carismáticos e companheiros nos momentos de alegria.

À SBM, a CAPES e a UFMA, por sonhar, financiar e executar o Mestrado PROFMAT.

Ao meu Orientador Prof. Dr. João Coelho Filho por ter acreditado e se dedicado ao máximo na realização do trabalho.

À minha família, pois desde a infância e diante das dificuldades enfrentadas, não mediu esforços na busca por uma educação melhor.

Em especial, à minha querida mãe, Neusa Carlos, pela insistência, perseverança e certeza na educação como objeto transformador da sociedade e de seu filho.

RESUMO

O presente trabalho é uma proposta para localização de raízes polinomiais de grau n . É proposto, através de aulas práticas, a localização de raízes polinomiais utilizando o chamado Método de Newton - Raphson. Entende-se que este trabalho preenche um espaço não explorado por livros didáticos, pois oferece material a ser utilizado em sala. Para atingir o objetivo, é introduzido de forma elementar e intuitiva os conceitos de limite e derivada de uma função. É proposto utilizar também o software educacional GeoGebra pois, além de ser gratuito e acessível, oferece um tratamento dinâmico necessário a abordagem do trabalho.

PALAVRAS CHAVE: Raízes Polinomiais; Método de Newton - Raphson; GeoGebra na Escola.

ABSTRACT

This work is a proposal for the localization of polynomial roots of degree n . It is proposed the localization of polynomial roots by practical classes, using Newton - Raphson's method. This work is supposed to fill in a gap that it is not explored by textbooks, since it offers material to be used in clas. To achieve the aim it is introduced the concepts of limit and derivative of a function in an elementary and intuitive way. It is also proposed to use the education software Geogebra because it besides being free and acessible, it offers a dynamic treatment that the approach of this work requires.

KEY WORDS: Polynomial roots; Newton - Raphson's Method; GeoGebra at School.

Conteúdo

1	Introdução	6
1.1	As origens do Método	7
1.2	Cálculo no Ensino Médio	7
1.3	Descrição do Trabalho	9
2	Método de Newton-Raphson	11
2.1	A Derivada de um Polinômio	11
2.2	Descrevendo o Método	13
2.3	Aplicando o Método	18
3	Aplicação do Método	20
3.1	Parte 1 - A ideia de Limite de uma função	21
3.2	Parte 2 - Entendendo a Derivada	23
3.3	Parte 3 - Usando o Método	27
4	Considerações Finais	31
5	Apêndice	33
5.1	Derivada	33
5.2	Funções Contínuas e Teorema do Valor Intermediário	37

Capítulo 1

Introdução

No ensino fundamental, tem-se os primeiros contatos com funções matemáticas básicas, como funções afins e quadráticas. A partir dessa fase da educação básica, algumas aulas são dedicadas exclusivamente a descobrir as raízes dessas funções. Nesses casos, através de operações algébricas, ou com uso de fórmulas, o problema é resolvido. No entanto, ao ingressar no ensino médio o estudante se depara com problemas nos quais tais funções não serão mais suficientes para representar as situações antes bem compreendidas. Então, geralmente no último ano do ensino médio, é generalizado o conceito de função polinomial de grau n qualquer, o que faz surgir nos estudantes o questionamento de como encontrar suas raízes e, de preferência, utilizando ainda operações algébricas ou fórmulas prontas. Infelizmente a abordagem atual dos livros didáticos não oferece resposta satisfatória, se não pela grande quantidade de conteúdos didáticos, talvez pelo fato da abordagem exigir conceitos que a maioria dos professores julgam além dos objetivos da educação básica. Dessa forma os livros didáticos atuais tratam o tema de forma superficial em que apenas quando uma função polinomial satisfaz determinadas condições podemos encontrar suas raízes. Entende-se que encontrar raízes de funções polinomiais, para um grau n qualquer, é uma lacuna que pode perfeitamente ser preenchida a partir de uma abordagem adequada do tema. Tal abordagem será feita utilizando o método de Newton-Raphson que possui como diferencial o poder de enriquecer o aprendizado tendo em vista que há utilização de novos conceitos matemáticos além do uso de novas tecnologias no ensino.

1.1 As origens do Método

O *Método de Newton - Raphson* tem sua origem com o próprio surgimento do Cálculo, que utiliza conceitos de derivada com interpretação geométrica da inclinação de uma reta tangente em um ponto específico do gráfico. O que é conhecido atualmente como *Método de Newton* foi descrito em *Méthod of fluxions* em 1671, sendo o mesmo publicado em 1736. Porém, em 1690, Joseph Raphson, um membro da Royal Society de Londres, publicou um opúsculo, *Analysis aequationum universalis*, que essencialmente descreve o mesmo método descoberto por Newton para aproximações das raízes reais de uma equação. Por essa razão, esse método é hoje também conhecido como *Método de Newton-Raphson*,[2].

É importante observar que o *Método de Newton-Raphson* será usado no presente trabalho apenas em funções polinômiais, no entanto, é aplicável tanto para equações algébricas como para equações transcendentais. Aliás, vale lembrar que originalmente Newton usou o método para a cúbica $x^3 - 2x - 5 = 0$. A versão atual desse método é o seguinte:

Se $p(x) = 0$ tem apenas uma raiz no intervalo $[a, b]$ e se nem $p'(x)$ nem $p''(x)$ se anulam nesse intervalo, escolhido x_0 como aquele dos dois números a e b para o qual $p(x_0)$ e $p''(x_0)$ tem o mesmo sinal, então

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

situa-se mais próximo da raiz do que x_0 .

Essa afirmação é provada em [4], pg.112-117, ou [13], pg.189-191.

1.2 Cálculo no Ensino Médio

No Brasil, há algum tempo se discute a implantação do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio devido a inegável importância dessa disciplina nas mais diversas áreas do conhecimento. Uma das razões desse movimento talvez seja sua grande importância nos anos iniciais de muitos cursos superiores. Alguns pesquisadores têm levantado a questão

dada sua importância para as ciências e tecnologias modernas. Nesse sentido, Ávila (1991, p.3) justifica seu ensino ao afirmar que:

”O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que os alunos do Ensino Médio encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno”.

Nesse sentido, um dos argumentos dos defensores da não inclusão do Ensino de Cálculo é quanto a grande extensão dos programas de Matemática. Ávila (1991, p.6) considera um equívoco tal argumento considerando que muitos conteúdos são excessivamente extensos e inúteis:

”O exemplo mais evidente disso está no ensino de funções. Gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura - contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva - num esforço de poucos resultados práticos”.

Ávila defende ainda que o ensino do Cálculo deve ser acompanhado de várias aplicações tanto à Física quanto a Matemática e, em acordo com o presente trabalho diz:

”Uma importante aplicação da derivada na própria Matemática, e de muita atualidade nessa época de cálculos numéricos com auxílio de computadores eletrônicos,...trata-se do método de Newton no cálculo numérico, em particular do cálculo de raízes n -ésimas pelo método das aproximações sucessivas”.

Observa-se porém alguns resultados práticos de tal movimento tendo em vista que alguns livros didáticos já dedicam capítulos exclusivos ao ensino de fundamentos de Cálculo introduzindo ideias de limites e derivadas. Entre estes;(BIANCHINI, Edvaldo. Matemática - vol.3, Ed. Moderna. São Paulo, 2004) e (SMOLE, Katia K. Stocco. Matemática - vol.3, Ed. Saraiva. São Paulo, 2005.)

Entende-se que este trabalho pode perfeitamente desempenhar um duplo papel: localizar raízes de um polinômio qualquer utilizando como ponto de partida conteúdo

já ensinado em sala de aula, ao mesmo tempo que introduz conceitos elementares de Cálculo Diferencial, enriquecendo seu aprendizado e colocando-os em contato com novas tecnologias. Para atingir tal objetivo será sugerido um cronograma de atividades e tópicos a serem utilizados em sala de aula, sempre lembrando que caberá ao professor sua seleção e adequação a sua realidade. Conforme nosso objetivo é a utilização em sala de aula, nosso texto será estruturado de forma elementar, deixando o rigor das demonstrações como leitura complementar ou sugestões indicadas ao longo do texto. Esperando dessa forma tornar a leitura proveitosa, agradável e acessível não só a professores como também a alunos.

E aos que ainda resistem ao ensino de Cálculo no Ensino Médio, fica a mensagem do Professor Geraldo Ávila que em 1991 já antecipava:

”Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual”.

1.3 Descrição do Trabalho

O presente trabalho está organizado de forma a contemplar teoria e prática em sala de aula. Seu principal objetivo é fornecer um material que possa ser utilizado tanto para introdução de conceitos elementares de Cálculo Diferencial quanto para localização de raízes polinomiais. Inicialmente busca-se justificar a necessidade do ensino de Cálculo no Ensino Médio, lembrando que, conforme bem lembra Ávila (1991, p.1), até o final dos anos 50 o Cálculo fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico, contemplando o ensino de derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como o polinômio de Taylor. Dessa forma, aos que defendem seu ensino, estaríamos nada mais que corrigindo um equívoco cometido ao suprimir seu ensino em prol da então denominada *”Matemática Moderna”*¹.

No Capítulo 2 é construído um material que tem como objetivo apresentar ao professor os elementos de Cálculo que serão necessários para uma boa compreensão do

¹Movimento de modernização do ensino da Matemática que defendia um maior rigor no ensino

funcionamento do *Método de Newton - Raphson*. O mesmo é feito utilizando o software educacional **GeoGebra**, lembrando que, os gráficos e construções apresentados são todos elementares podendo ser perfeitamente construídos sem sua utilização. No entanto, é recomendada sua utilização tendo em vista seu caráter dinâmico e construtivo por parte dos alunos.

O Capítulo 3 apresenta o objetivo principal de todo o trabalho onde é proposto, através de aulas práticas, como introduzir os conceitos de limite e derivada de um polinômio. Introduzimos a ideia de limite com um polinômio de grau 1 (função afim) nada impedindo que o professor utilize outro de sua preferência, pois os passos são os mesmos. Em seguida é mostrado intuitivamente o significado da derivada de um polinômio. O objetivo nessa seção é relacionar o conceito de limite com o de derivada. Logo em seguida, na seção 3.3, procura-se aplicar os conceitos apresentados para localizar raízes polinômiais. Isto será feito através de aplicações simples pois o objetivo é tornar as construções envolventes e estimulantes a todos.

Finalmente, no Capítulo 4 são feitas as considerações finais.

Capítulo 2

Método de Newton-Raphson

Para resolver uma equação quadrática $ax^2 + bx + c$ usamos a bem conhecida fórmula de Bháskara¹. Para equações de terceiro e quarto grau também existem fórmulas para encontrar suas raízes, embora sejam bastante complicadas. Se p for um polinômio de grau 5 ou maior, não existe nenhuma fórmula pronta². Uma maneira elaborada de localizar raízes é utilizando o chamado *Método de Newton-Raphson*, o qual descreveremos a seguir para polinômios. Vale lembrar que tal Método utiliza de forma direta o conceito de derivada e, implicitamente, o fato de que todo polinômio é uma função contínua. Tais fatos podem ser consultados no Apêndice.

Começamos definindo derivada de um polinômio.

2.1 A Derivada de um Polinômio

A derivada de uma polinômio está diretamente relacionada ao conceito de limite. A seguir temos a sua definição.

Definição 2.1: *Dado um polinômio p , definimos a função derivada p' no ponto a da seguinte forma*

$$p'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(a+h) - p(a)}{h}$$

¹Bhaskara Akaria: ✱ 1114, Índia - † 1185, Ujjain, Índia

²Maiores detalhes podem ser visto na Introdução de [12]

Graficamente, a derivada de um polinômio p em um ponto específico a representa a *inclinação* da reta tangente ao gráfico de p no ponto a . Como exemplo, consideramos o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$. Com o uso do Geogebra construímos seu gráfico e destacamos as retas r_1 e r_2 tangentes respectivamente nos pontos $A(2,0)$ e $B(3,1)$.

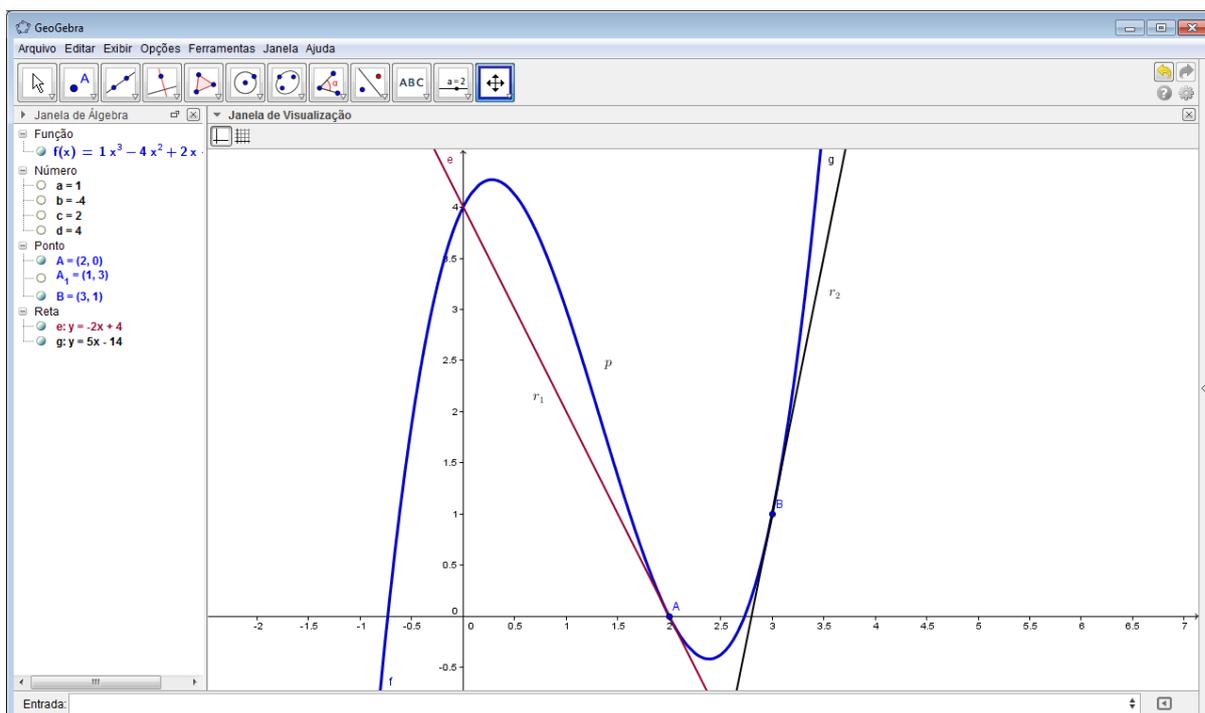


Figura 2.1: Retas Tangentes ao Gráfico de p

A inclinação das retas r_1 e r_2 nos pontos A e B são respectivamente iguais a -2 e 5 . Vê-se que r_1 e r_2 interceptam o eixo x . Isso acontece porque a derivada de p nos pontos A e B não são paralelas ao eixo x , ou seja, nesses pontos sua derivada é não nula. Esse fato geométrico é de suma importância para a eficácia do Método de Newton - Raphson.

Através da seguinte proposição mostra-se como encontrar a derivada de um polinômio qualquer em um ponto a .

Proposição 2.1: Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, então a derivada de p no ponto a é $p'(a) = na_n a^{n-1} + (n-1)a_{n-1} a^{n-2} + \dots + 2a_2 a + a_1$.

Demonstração: Usando a definição de derivada no ponto a , tem-se

$$\begin{aligned} p'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(a+h) - p(a)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a_n(a+h)^n + a_{n-1}(a+h)^{n-1} + \dots + a_1(a+h) + a_0] - [a_n a^n + \dots + a_1 a + a_0]}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a_n(a+h)^n - a_n a^n] + a_{n-1}[(a+h)^{n-1} - a^{n-1}] + \dots + a_1[(a+h) - a]}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_n \left[\binom{n}{1} a^{n-1} h + \dots + h^n \right] + a_{n-1} \left[\binom{n-1}{1} a^{n-2} h + \dots + h^{n-1} \right] + \dots + a_1 h}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h [a_n (\binom{n}{1} a^{n-1} + \dots + h^{n-1}) + a_{n-1} (\binom{n-1}{1} a^{n-2} + \dots + h^{n-2}) + \dots + a_1]}{h} &= \end{aligned}$$

Como todos os termos são multiplicados por h , obtem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} [(na_n a^{n-1} + \dots + a_n h^{n-1}) + ((n-1)a_{n-1} a^{n-2} + \dots + a_{n-1} h^{n-2}) + \dots + a_1]$$

Logo

$$p'(a) = na_n a^{n-1} + (n-1)a_{n-1} a^{n-2} + \dots + 2a_2 a + a_1$$

2.2 Descrevendo o Método

Vamos explicar agora como funciona o **Método de Newton-Raphson**. A geometria envolvida é mostrada na Figura 2.2, onde a raiz que tentamos encontrar é chamada r .

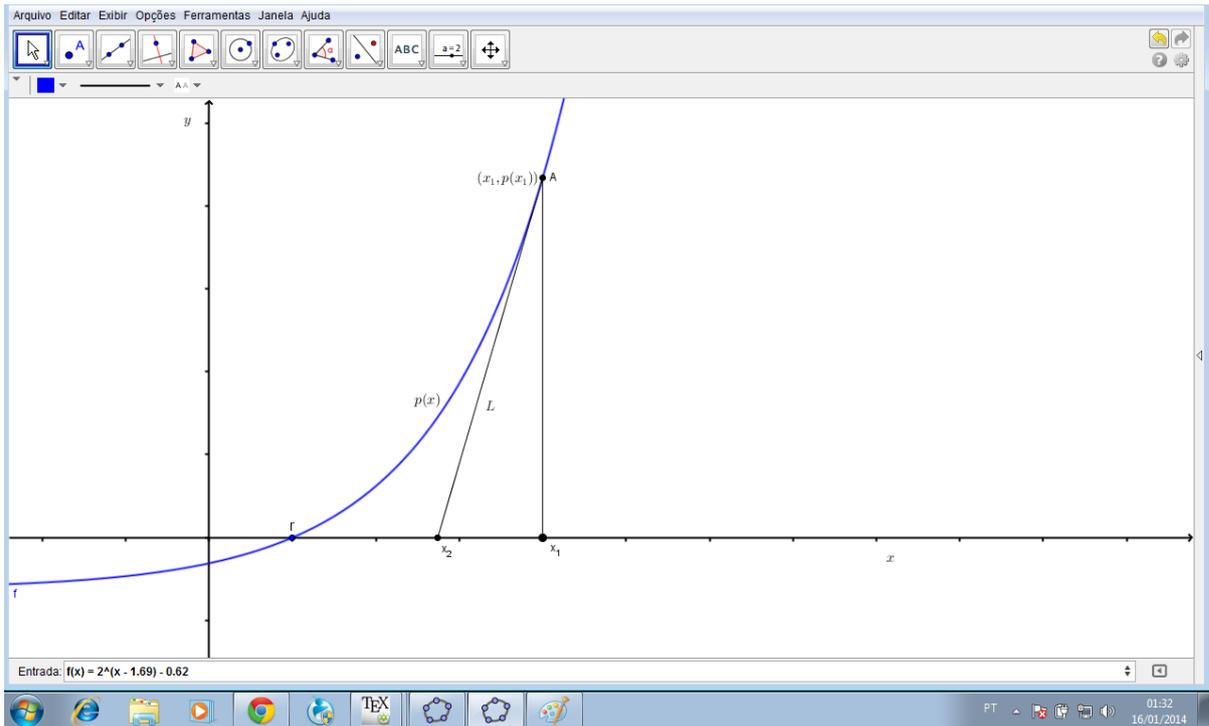


Figura 2.2: Primeira Aproximação

Começamos com uma primeira aproximação x_1 . Uma maneira eficiente de ter certeza que existe alguma raiz num determinado intervalo, digamos $[a, b]$, é encontrando os valores de $p(a)$ e $p(b)$. Se os sinais de $p(a)$ e $p(b)$ são opostos, pelo fato de p ser uma função contínua, o **Teorema do Valor Intermediário** nos garante que existe $c \in [a, b]$ tal que $p(c) = 0$. Consideramos então a reta tangente L à curva $p(x)$ no ponto $(x_1, p(x_1))$. Observamos que L intercepta o eixo x em um ponto que vamos denotá-lo x_2 . A idéia por trás do método é que o intercepto da reta tangente L com o eixo x fica mais próximo da raiz r que o valor inicial x_1 . Como a tangente é uma reta, podemos facilmente encontrar seu intercepto com o eixo x .

Para encontrar uma fórmula para x_2 em termos de x_1 usamos o fato de que a inclinação de L é $p'(x_1)$; assim, sua equação é

$$y - p(x_1) = p'(x_1)(x - x_1)$$

Uma vez que a inteseção de x e L é x_2 , fazemos $y = 0$ e obtemos

$$0 - p(x_1) = p'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Se $p'(x_1) \neq 0$, podemos resolver essa equação para x_2 , que fica:

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)}$$

Usamos então x_2 como segunda aproximação de r .

Repetimos o mesmo procedimento com x_1 substituindo x_2 , usando agora a reta tangente em $(x_2, p(x_2))$. Isso nos dá uma terceira aproximação:

$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)}$$

Se repetirmos esse processo, obteremos uma sequência de aproximações x_1, x_2, x_3, \dots conforme figura abaixo.

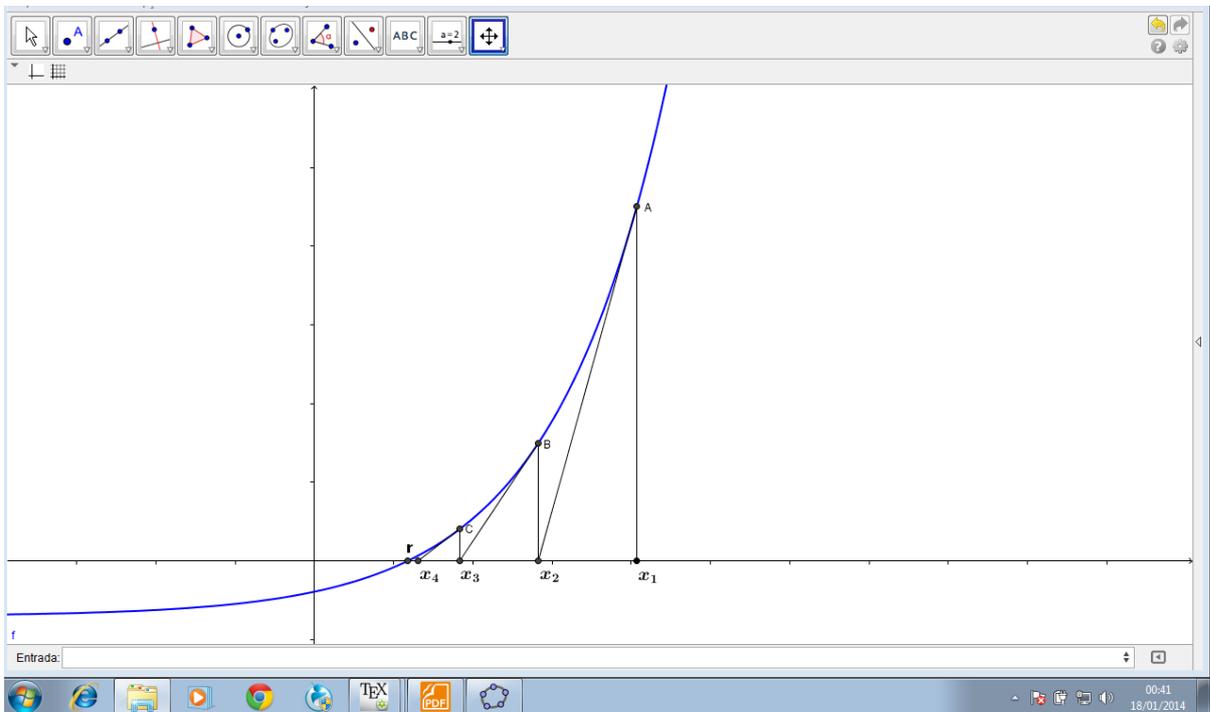


Figura 2.3: Sequência de Aproximações

Em geral, se x_n for a n -ésima aproximação e x_n e $f'(x_n) \neq 0$, então a aproximação seguinte é dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

que é a fórmula geral do **Método de Newton-Raphson**.

Se os números x_n ficam cada vez mais próximos de r a medida que n cresce, diz-se que a sequência *converge* para r e escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

É importante observar que embora em funções do tipo ilustrado anteriormente as aproximações sucessivas convirja para a raiz desejada, em certas circunstâncias a sequência pode não convergir, conforme figura a seguir.

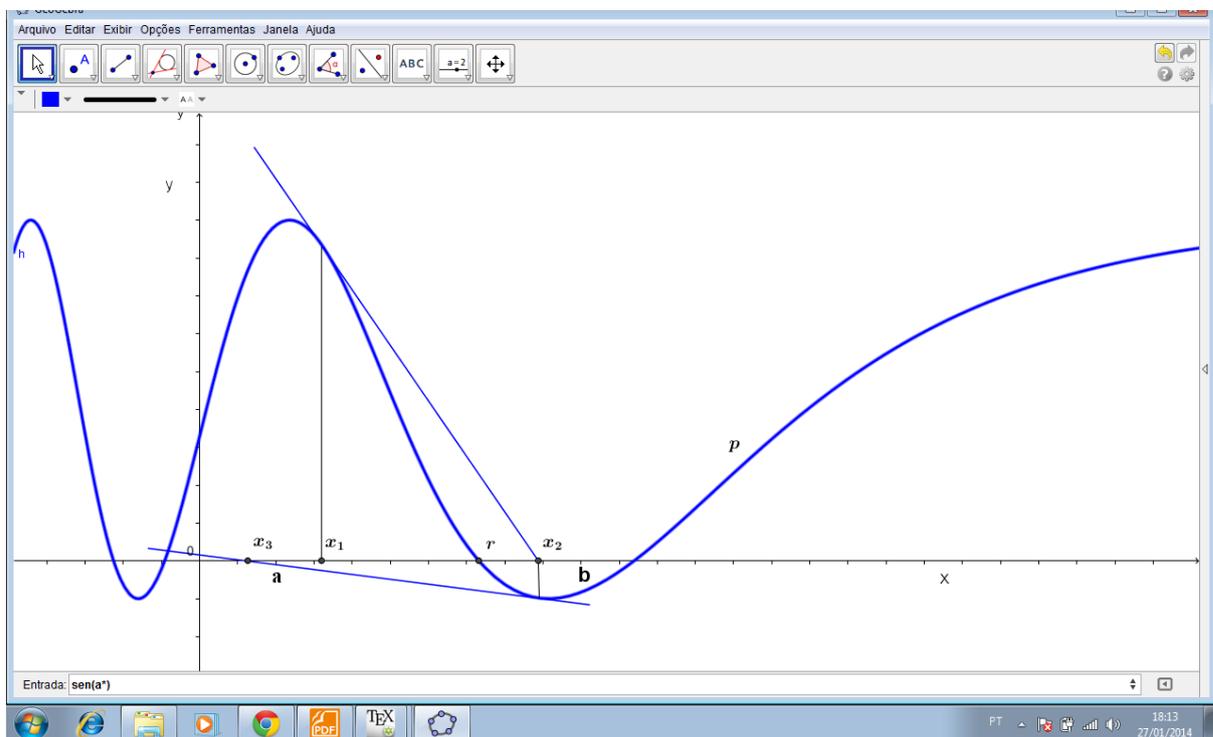


Figura 2.4: Caso em que o Método Falha

Consideramos, nesse caso, um polinômio p e o intervalo $[a, b]$. Sabemos a priori que $f(a)f(b) < 0$. Escolhendo um valor inicial x_1 usamos o método para encontrar a segunda aproximação x_2 . Encontrando x_2 , o usamos para encontrar a terceira aproximação x_3 , que no nosso exemplo, é pior que x_1 , ou mesmo, nem pertence ao intervalo $[a, b]$. Então o Método falha e uma melhor aproximação inicial x_1 deve ser escolhida.

A seguir, são dadas as condições gerais para a convergência do Método. Para maiores detalhes, sugerimos [4] ou [13].

Proposição 2.2: *Seja $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável, com p'' contínua. Suponha que:*

- i) $p(a)p(b) < 0$
- ii) $p'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$
- iii) p'' não muda de sinal em $[a, b]$

Então a sequência gerada pelas iterações do Método de Newton-Raphson utilizando

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge para o único zero r de p , isolado em $[a, b]$, se $x_0 \in [a, b]$ for escolhido convenientemente³.

O item i) nos informa necessariamente que p possui uma raiz no intervalo $[a, b]$, enquanto ii) nos informa que a derivada primeira não deve se anular para nenhum valor de x no intervalo. Caso isso aconteça, não existirá interseção da reta tangente com o eixo x , condição necessária para aproximação do valor da raiz. Por fim, a condição iii), sendo satisfeita, nos garante que o gráfico de p só possui uma concavidade no intervalo $[a, b]$ pois caso a derivada segunda mude de sinal, a interseção da reta tangente, com o eixo x , muda de sentido e, portanto, a sequência de aproximações não converge para a raiz procurada.

³Pode-se, por exemplo, fazer $x_0 = a$ se $x_1 \in [a, b]$ ou $x_0 = b$ caso contrário

Outra utilidade do *Método de Newton-Raphson* é o cálculo aproximado de $\sqrt[n]{c}$. Observamos que encontrar $\sqrt[n]{c}$ equivale a determinar a raiz positiva da equação

$$x^n - c = 0$$

dessa forma, tomamos $f(x) = x^n - c$. Então, pela Proposição 2.1, $f'(x) = nx^{n-1}$ e a fórmula geral do *Método de Newton-Raphson* fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^n - c}{nx_n^{n-1}}$$

2.3 Aplicando o Método

Através dos seguintes exemplos, ilustraremos mais detalhadamente o funcionamento do Método.

Exemplo 1.

Consideramos o polinômio $p(x) = x^3 + 2x - 4$. Pela Proposição 2.1, $p'(x) = 3x^2 + 2$. Localizemos agora uma de suas raízes.

Inicialmente, conjecturamos que existe uma raiz no intervalo $[0, 1]$. Verifiquemos se nossa "suspeita" procede. Observe que $p(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 4 = -4$ e $p(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = -1$. Como $p(0)p(1) = 4 > 0$, não podemos afirmar que existe uma raiz de p entre 0 e 1. Mas como $p(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 - 4 = 8$ e $p(1)p(2) = -8 < 0$, existe (pelo menos uma) raiz de p entre 1 e 2. Utilizando então a fórmula geral do Método, com valor inicial $x_1 = 1$, teremos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 4}{3x_n^2 + 2}$$

Com $n = 1$, temos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1 - 4}{3x_1^2 + 2} \implies x_2 = 1 - \frac{1^3 + 2 \cdot 1 - 4}{3 \cdot 1^2 + 2} = 1,2$$

Então, com $n = 2$, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 + 2x_2 - 4}{3x_2^2 + 2} \implies x_3 = 1,2 - \frac{1,2^3 + 2 \cdot 1,2 - 4}{3 \cdot 1,2^2 + 2} \approx 1,1721$$

Finalmente, com $n = 3$, teremos

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3 + 2x_3 - 4}{3x_3^2 + 2} \implies x_4 = 1,1721 - \frac{1,1721^3 + 2 \cdot 1,1721 - 4}{3 \cdot 1,1721^2 + 2} \approx 1,1795$$

Resulta que esse quarto valor, $x_4 \approx 1,1795$, já apresenta uma boa aproximação para a raiz de p .

Exemplo 2.

Aplicando o Método de Newton-Raphson para encontrar uma boa aproximação para $\sqrt[3]{20}$. Perceba que isso equivale a determinar a raiz positiva da equação $p(x) = x^3 - 20$.

Pela Proposição 2.1 $p'(x) = 3x^2$. Assim, teremos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 20}{3x_n^2}$$

Escolhendo-se $x_1 = 3$ como aproximação inicial, tem-se

$$x_2 \approx 2,74074074$$

$$x_3 \approx 2,71466962$$

$$x_4 \approx 2,71441764$$

$$x_5 \approx 2,71441761$$

$$x_6 \approx 2,71441761$$

que já é uma aproximação com oito casas decimais exatas.

Percebe-se que, de x_5 para x_6 nossa aproximação até a oitava casa decimal permaneceu a mesma. De forma geral, para uma aproximação com k decimais exatos devemos parar as iterações quando duas aproximações sucessivas x_n e x_{n+1} são iguais até a k -ésima casa decimal. Esse fato pode ser provado e sugerimos [4].

Capítulo 3

Aplicação do Método

O material presente nesse Capítulo é a parte mais importante desse trabalho e tem como principal objetivo servir como material de apoio para o desenvolvimento das atividades em sala de aula. O GeoGebra desempenha papel importante, porém poderá ser dispensado. Caberá ao professor decidir pelo seu uso. Caso decida usá-lo, o professor encontrará uma ferramenta valiosa e enriquecedora do aprendizado; se já faz parte na sala de aula, poderá desenvolver as atividades aqui sugeridas seguindo seu próprio roteiro e ferramentas. As três atividades aqui propostas visam criar um campo propício para fundamentar a localização de raízes polinomiais utilizando, para isso, o Método de Newton-Raphson. Ao mesmo tempo, introduz conceitos elementares de cálculo diferencial. O foco desse trabalho são estudantes do 3º ano do Ensino Médio pois é nesta série que se estuda polinômios de uma forma mais completa, nada impedindo porém, que esse material seja aplicado em outras séries. As atividades propostas seguem o seguinte roteiro: na Atividade 1 é introduzida a idéia de limite de uma função. Faremos isso utilizando um polinômio de grau um; em seguida, passo a passo, é mostrado como configurar o GeoGebra para compreender a ideia de limite. Outros polinômios mais elaboradas são deixados como atividade proposta. Em seguida, na Atividade 2, é mostrado o significado geométrico da derivada de um polinômio. Utilizamos como exemplo um polinômio de grau dois, onde é relacionado o conceito visto na Atividade 1 com o de derivada. Finalmente, na Atividade 3 é relacionado a derivada de um polinômio com a localização de sua raiz, o que é a parte central do trabalho.

Acredita-se que quatro aulas são suficientes para cada uma das atividades pro-

postas no entanto, caberá ao Professor essa decisão.

Pretende-se dessa forma alcançar o triplo objetivo de introduzir a ideia de limite de uma função, entender o conceito de derivada de uma função, além de localizar raízes de polinômios. Entende-se que os pré-requisitos necessários para o bom entendimento são os seguintes: raízes polinomiais, construção de gráficos de funções e equação de uma reta. Para atingir nosso objetivo de forma completa, será necessário também o uso de calculadoras e computadores, o software GeoGebra, bem como projetor de imagens.

3.1 Parte 1 - A ideia de Limite de uma função

Vamos introduzir a idéia de limite de uma função utilizando a função afim $f(x) = 2x + 1$ (polinômio de grau 1). Caso utilizar o GeoGebra, seguir os seguintes passos:

- 1 - Na barra de entrada do GeoGebra, digite: $f(x) = 2x + 1$;
- 2 - Marque o ponto $A = (2, f(2))$;
- 3 - Na barra de ferramentas, selecione **controle deslizante**; defina o intervalo **h** ; configure **intervalo min: 0 e intervalo max: 1**, sua amplitude para 1.5 e incremento 0,001;

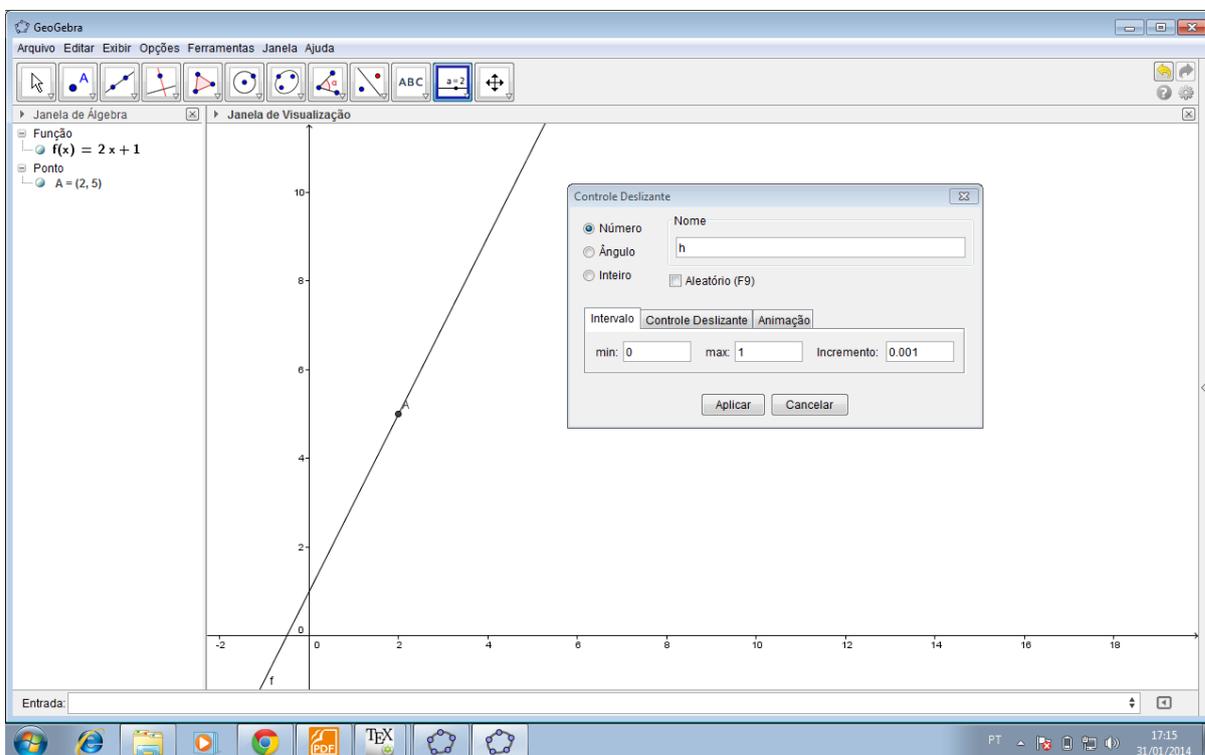


Figura 3.1: Gráfico de $f(x) = 2x + 1$.

4 - Marque os pontos: $B = (x(A) - h, 0)$, $C = (x(A) + h, 0)$, $D = (x(B), f(x(B)))$, $E = (x(C), f(x(C)))$, $F = (0, f(x(B)))$, $G = (0, f(x(C)))$ e $L = (0, f(2))$;

5 - Na barra de ferramentas, selecione "segmento definido por dois pontos", conforme figura abaixo;

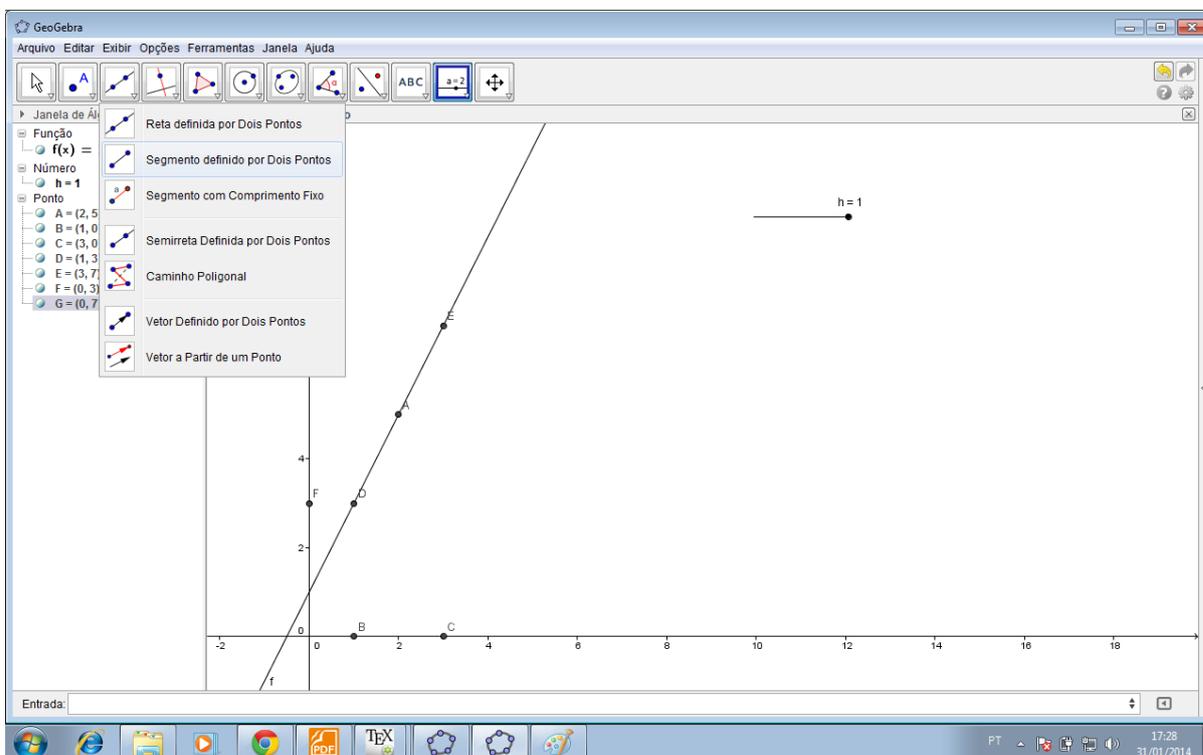


Figura 3.2: Gráfico de $f(x) = 2x + 1$ com Pontos Destacados.

6 - Usando essa função, ligue os pontos B,D,F e C,E,G;

7 - Em seguida, clique sobre h segurando-o com o botão esquerdo do mouse. Se preferir, pode usar a opção "Animar".

Comentário 3.1

Conforme os valores de h são alterados, os pontos G e F se aproximam ou afastam de L. Mais precisamente, quando h "tende" a zero, os pontos G e F se 'aproximam' do ponto L(valor de $f(2)$). Essa é a idéia central! Dito de outra forma, a medida que os pontos B ou C se aproximam do abscissa $x = 2$, os valores que a função assume se aproximam de $f(2)$ (ponto L). Em linguagem matemática, escrevemos $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

Teremos uma imagem, conforme figura a seguir.

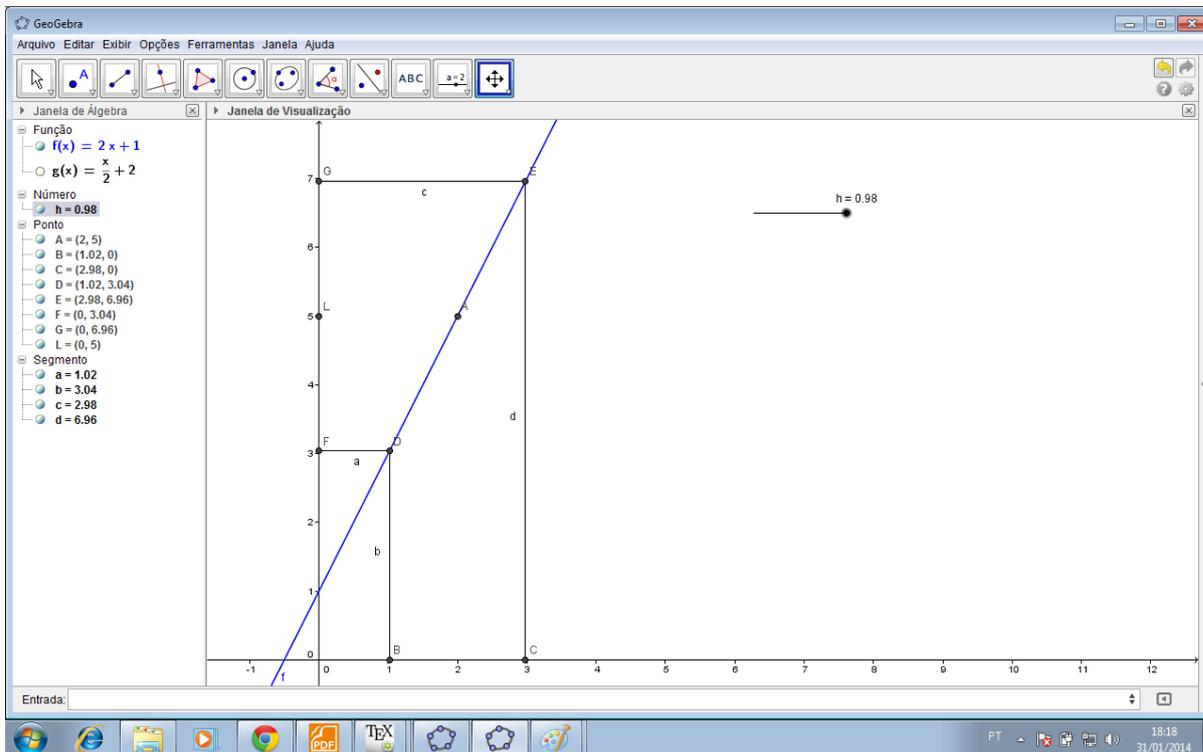


Figura 3.3: Gráfico de $f(x) = 2x + 1$ com Intervalo h Destacado.

Sugestão de atividade

- Peça que os alunos repitam os sete passos, mas com a função $g(x) = \frac{x}{2} + 2$;
- Sugira a função quadrática $g(x) = -x^2 + 6x$, seguindo os passos de 2 a 7.

3.2 Parte 2 - Entendendo a Derivada

O objetivo dessa atividade é relacionar o conceito de limite ao de derivada. A princípio, vamos utilizar uma função não polinomial - a função $h(x) = \cos(x)$.

- Entre com $h(x) = \cos(x)$ na barra de entrada do GeoGebra;
- Marque um ponto qualquer sobre o gráfico de h . Em seguida, na barra de ferramentas, marque a opção "**Reta Tangente**". Clique no ponto marcado sobre o gráfico e, em seguida, em algum outro ponto do gráfico de h .
- Em seguida, na barra de ferramentas, procure a opção "**Inclinação**". Selecione-a e clique novamente no ponto marcado inicialmente.
- Para um melhor efeito, clique com o botão direito do mouse e selecione a opção "**Animar**".

Constroe-se assim uma reta tangente ao gráfico de h no ponto escolhido e através da opção **”Inclinação”** temos um triângulo retângulo que mostra o valor da tangente no ponto escolhido, conforme figura a seguir.

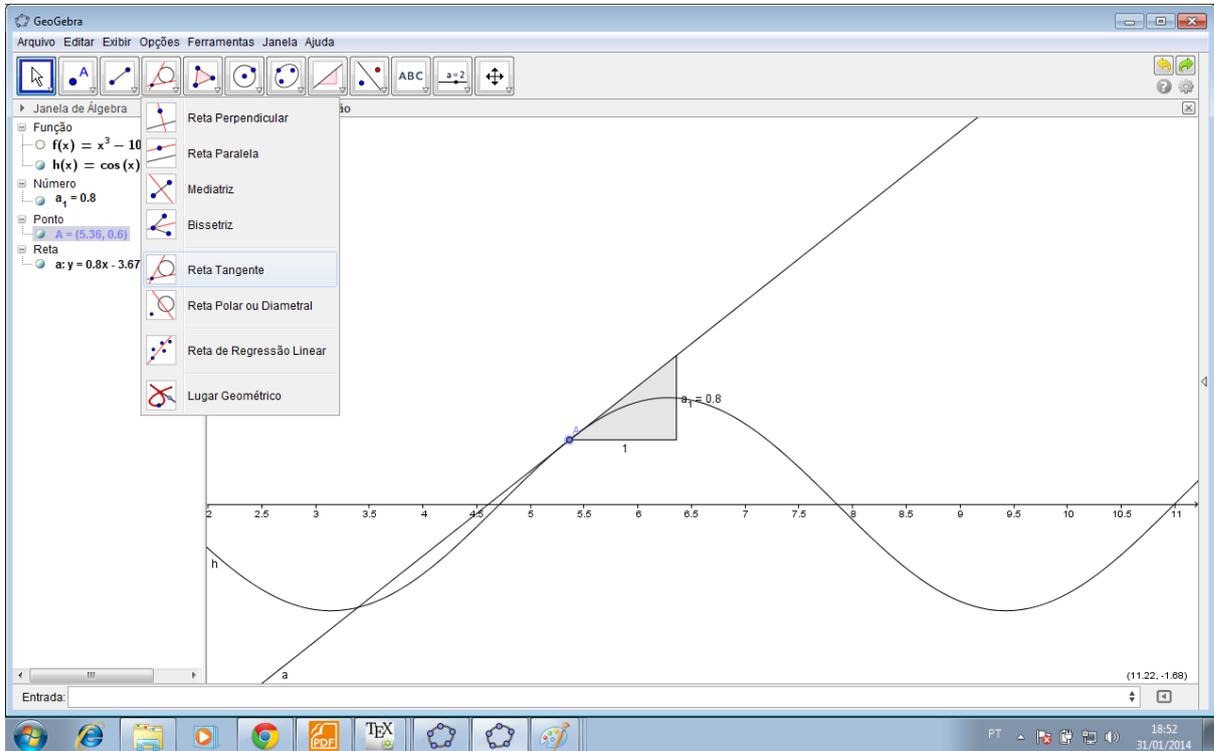


Figura 3.4: Gráfico de $h(x) = \cos(x)$ com a Derivada em Cada Ponto.

Vamos considerar agora o polinômio quadrático $g(x) = -x^2 + 6x$ (item **b**) da Atividade 1).

- 1 - Na barra de entrada do GeoGebra, digite a função $g(x) = -x^2 + 6x$;
- 2 - Repita os passos de 2 a 7 da Atividade 1;
- 3 - Na barra de ferramentas, selecione a opção **”Reta Tangente”**. Conforme feito na função h acima, clique sobre o ponto A e em seguida sobre um ponto qualquer do gráfico de g . Construímos assim uma reta tangente ao gráfico de g no ponto A

Tudo feito de forma correta, teremos construído o gráfico de uma função quadrática com concavidade voltada para cima, conforme figura a seguir.

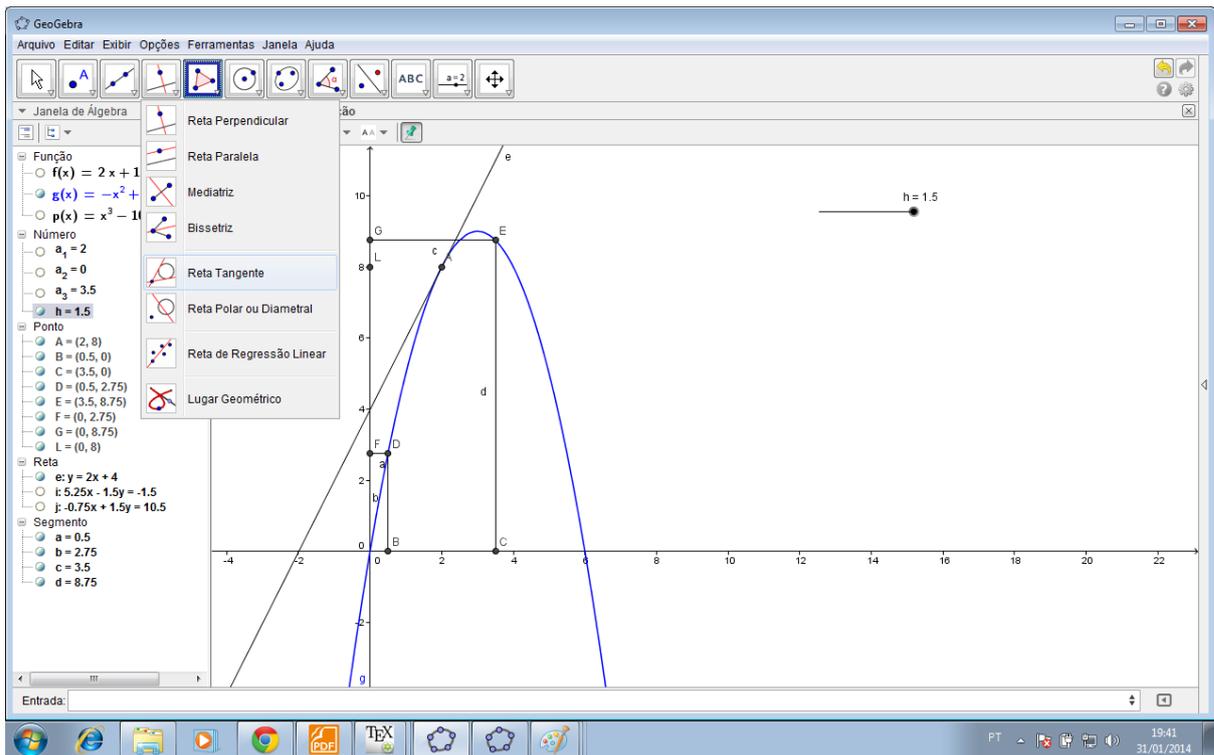


Figura 3.5: Gráfico de $g(x) = -x^2 + 6x$ com a Derivada no Ponto A.

Construiremos agora uma reta **secante** ao gráfico de g , passando pelos pontos A e E. 4 - Seleccionamos na barra de ferramentas a opção **”Reta definida por Dois Pontos”** em seguida, clicamos nos pontos A, e na sequência, no ponto E. Pronto! Movimente agora o controle deslizante **h** e observe como, conforme **h** diminui, a inclinação da reta secante aos pontos A e E vai se aproximando da inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto A.

Comentário 3.2

É possível ainda destacar a inclinação da reta secante seleccionando na barra de ferramentas a opção **”Inclinação”**, em seguida, clicando no ponto A. Com isso, percebe-se que, conforme h tende a zero, o ”valor” do coeficiente angular da reta secante se aproxima do coeficiente angular da reta tangente ao ponto A, que é igual a 2. Essa é a principal ideia da atividade. Mostrar que, conforme um valor x se aproxima do número 2 (tanto pela direita como pela esquerda de 2), a inclinação da reta secante se aproxima da inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $x = 2$.

Seu efeito é mostrado na figura abaixo onde as retas tangente e secante são destacadas.

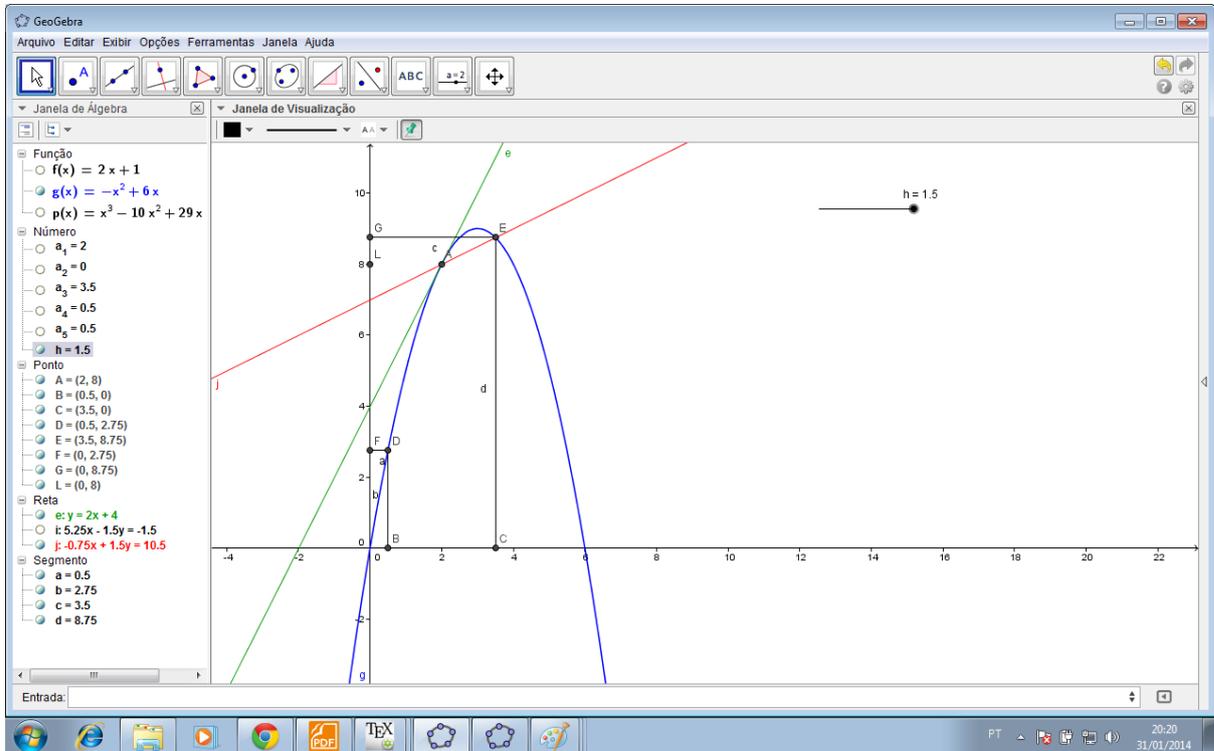


Figura 3.6: Gráfico de $g(x) = -x^2 + 6x$ Destacando sua Derivada e Secante no Ponto A.

Existe uma notação toda especial para essa nova função que ”**deriva**” de g e exibe em cada número de seu domínio uma inclinação particular. Tal função é chamada função derivada de g , ou simplesmente, g' . Matematicamente, escrevemos

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

No nosso caso particular, temos $a = 2$ e $g'(2) = 2$. Logo,

$$g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

Sugestão de atividade

- a) Peça aos alunos que construam o gráfico da função $p(x) = \text{sen}(x)$, em seguida, siga os passos de 2 a 4 do exemplo introdutório da seção para construir uma reta tangente;

b) Sugira o polinômio $p(x) = x^3 - 10x^2 + 29x - 20$ seguindo os passos de 2 a 4 do segundo exemplo da seção;

c) Usando a definição de Limite de uma função, mostre na sala de aula que $g'(2) = 2$;

d) Peça que os alunos encontrem a derivada da função $f(x) = x^2$ nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ utilizando a definição de derivada. Em seguida, use a definição para encontrar f' em um ponto a qualquer. Qual a derivada de f no ponto $a = 10$?

3.3 Parte 3 - Usando o Método

Veremos agora como localizar raízes de equações polinomiais.

Exemplo 3.

Consideremos o polinômio¹ $p(x) = \frac{7x^3}{720} + \frac{11x^2}{144} - \frac{449x}{360} + \frac{19}{9}$.

1 - Digite $p(x) = \frac{7x^3}{720} + \frac{11x^2}{144} - \frac{449x}{360} + \frac{19}{9}$ na barra de entrada do GeoGebra.

Com uso de uma calculadora, verificamos se existe uma raiz de p no intervalo, digamos, $[1, 10]$. Observe que $p(1) \approx 0.95$ e $p(10) = 7$. Como $p(1)p(10) \approx 6.65 > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, não podemos afirmar que existe, nesse intervalo, raiz de p . Partimos para outro intervalo mais restrito, digamos, $[5, 10]$. Temos que $p(5) = -1$ e $p(10) = 7$ e nesse caso, como $p(5)p(10) = -7 < 0$, concluímos que existe pelo menos uma raiz de p no intervalo $[5, 10]$. Portanto, o item i) da *Proposição 2.2* está satisfeito. Verifiquemos ii) e iii). Mas temos que $p'(x) \neq 0 \forall x \in [5, 10]$. Isto pode ser concluído observando que a reta tangente ao gráfico de p em qualquer ponto do intervalo $[5, 10]$ não é paralela ao eixo x . Por outro lado, $p''(x) = \frac{7x}{120} + \frac{11}{72} > 0, \forall x \in [5, 10]$. Logo, ii) e iii) também são satisfeitas e podemos aplicar o Método de Newton - Raphson.

2 - Utilizando a *Proposição 2.1*, concluímos também que $p'(x) = \frac{21x^2}{720} + \frac{11x}{72} - \frac{449}{360}$;

Abaixo, temos o gráfico de p no qual destacamos o intervalo $[5, 10]$:

¹Escolhemos esse polinômio por seu gráfico ilustrar melhor a aplicação do Método

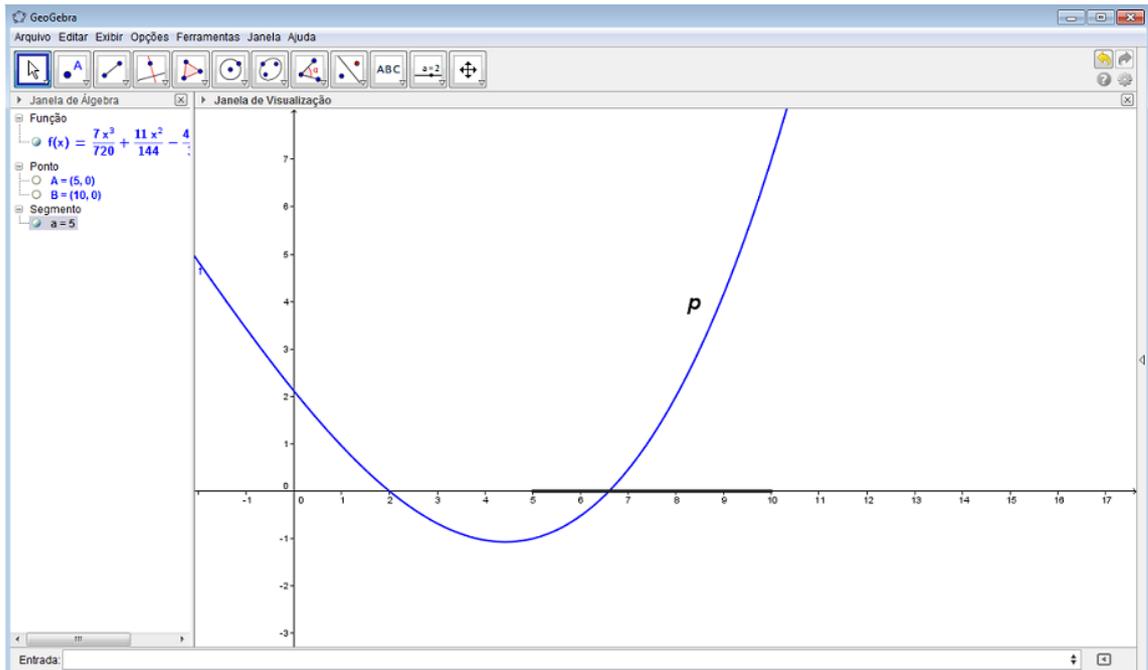


Figura 3.7: Gráfico de p com Intervalo $[5, 10]$ Destacado

3 - Utilizando a fórmula geral do Método, com valor inicial $x_0 = 10$, teremos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{7x_n^3}{720} + \frac{11x_n^2}{144} - \frac{449x_n}{360} + \frac{19}{9}}{\frac{21x_n^2}{720} + \frac{11x_n}{72} - \frac{449}{360}}$$

Com $n = 0$, temos

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} \implies x_1 = 10 - \frac{\frac{7 \cdot 10^3}{720} + \frac{11 \cdot 10^2}{144} - \frac{449 \cdot 10}{360} + \frac{19}{9}}{\frac{21 \cdot 10^2}{720} + \frac{11 \cdot 10}{72} - \frac{449}{360}} \approx 7,810599$$

Com $n = 1$, temos

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} \implies x_2 = 7,810599 - \frac{\frac{7 \cdot 7,810599^3}{720} + \frac{11 \cdot 7,810599^2}{144} - \frac{449 \cdot 7,810599}{360} + \frac{19}{9}}{\frac{21 \cdot 7,810599^2}{720} + \frac{11 \cdot 7,810599}{72} - \frac{449}{360}} \approx 6,847204$$

Com $n = 2$, temos

$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)} \implies x_3 = 6,847204 - \frac{\frac{7 \cdot 6,847204^3}{720} + \frac{11 \cdot 6,847204^2}{144} - \frac{449 \cdot 6,847204}{360} + \frac{19}{9}}{\frac{21 \cdot 6,847204^2}{720} + \frac{11 \cdot 6,847204}{72} - \frac{449}{360}} \approx 6,612587$$

Que nos dá uma boa aproximação para raiz de p .

O gráfico a seguir nos mostra as sequências de aproximações.

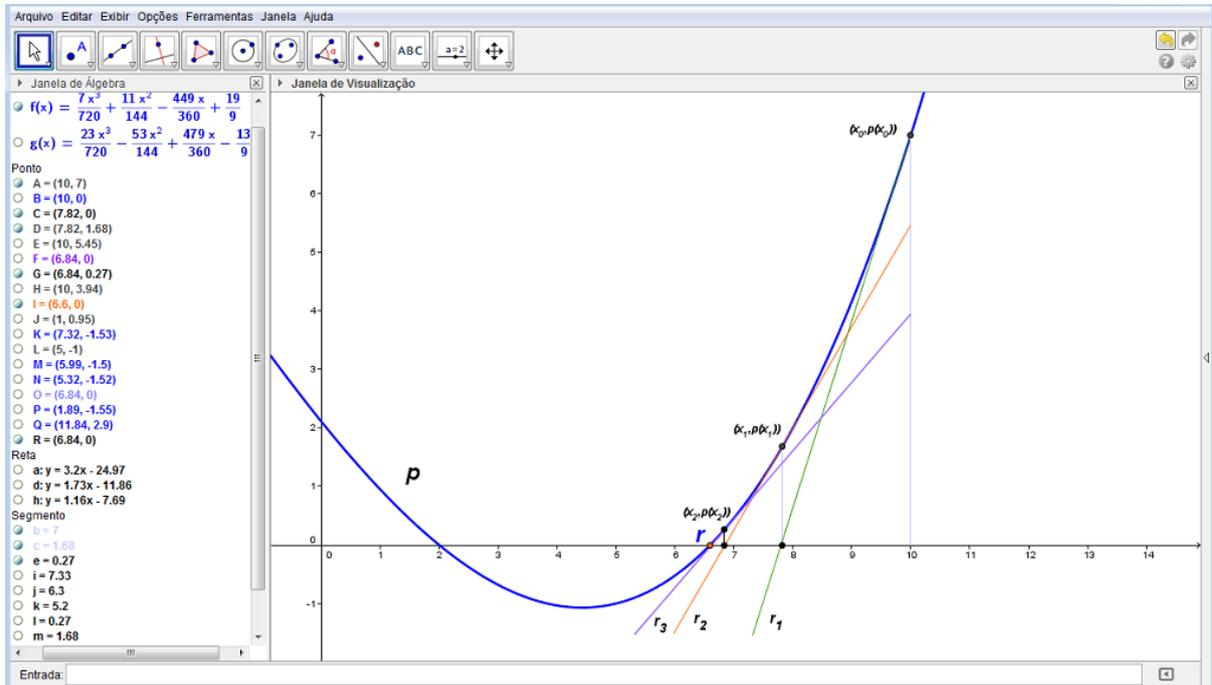


Figura 3.8: Sequências de Aproximações

Veremos agora um caso em que o Método falha por não satisfazer a *Proposição 2.2*.

Exemplo 4.

Consideramos o polinômio $q(x) = -0,6x^4 + 3x^3 - 3x^2$ e o intervalo $[1,3]$. Tem-se que $q(1) = -0,6$ e $q(3) = 5,4$. Como $q(1)$ e $q(3)$ possuem sinais opostos, o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe uma raiz de q no intervalo $[1,3]$. No entanto, o item ii) da *Proposição 2.2* falha pois $q'(x) = 0$ para algum valor de x no intervalo $[1,3]$. Chegamos a essa conclusão observando que o gráfico de q é paralelo ao eixo x em um ponto do intervalo $[1,3]$. Quando isto acontece, a interseção entre a tangente ao gráfico de q e o eixo x se localiza fora do intervalo $[1,3]$, o que fará com que o Método não funcione.

Seu gráfico é mostrado a seguir onde destacamos o intervalo $[1,3]$ juntamente com a tangente r .

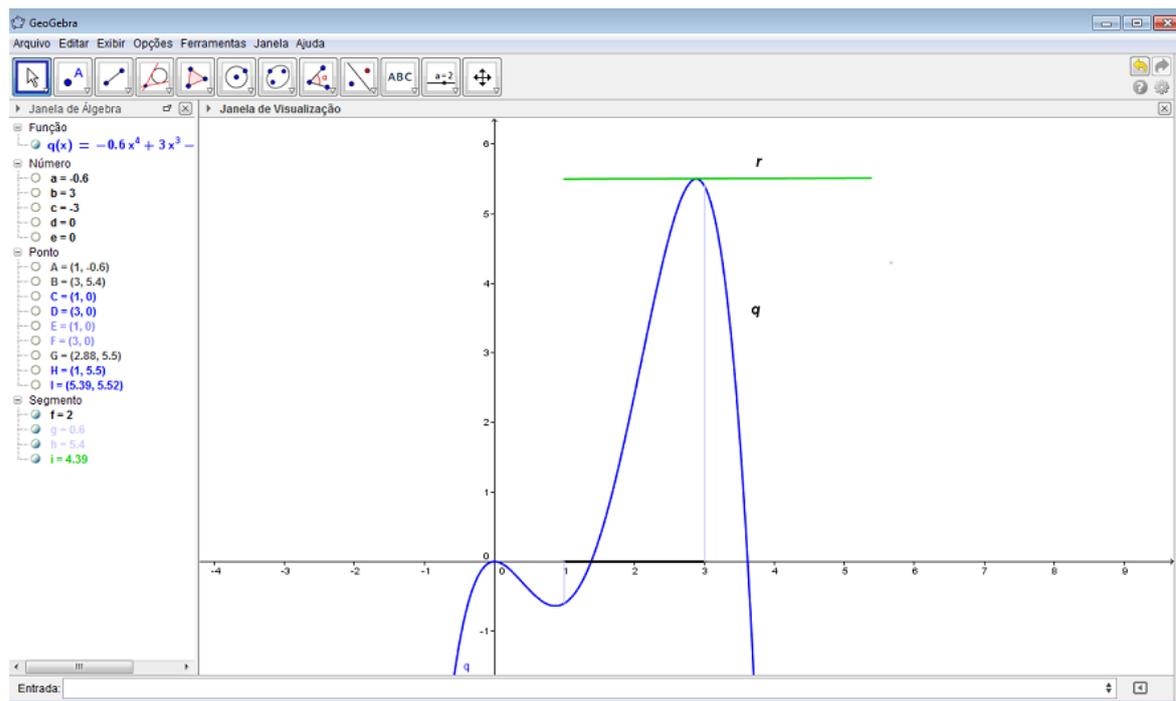


Figura 3.9: Gráfico de q

Outra forma de chegar a mesma conclusão é fazendo $q'(x) = -2,4x^3 + 9x^2 - 6x = 0 \implies x(-2,4x^2 + 9x - 6) = 0$. Resolvendo essa equação, encontramos como uma das soluções $x \approx 2,88$ que pertence ao intervalo $[1,3]$. Logo, não podemos aplicar o Método de Newton - Raphson.

Comentário 3.3

Conforme visto nos exemplos, deve-se localizar um determinado intervalo $[a, b]$ no qual poderá existir alguma raiz do polinômio. Trata-se de um processo de tentativas no qual sugere-se começar por um intervalo mais restrito possível; em seguida, verifica-se se o intervalo considerado satisfaz as três condições da *Proposição 2.2*. Feito isto pode-se aplicar o Método de Newton - Raphson. Importante observar também que existem polinômios² que não possuem raízes reais. Neste caso, obviamente a aplicação do Método de Newton - Raphson não será possível. No entanto, sempre que o grau de determinado polinômio é ímpar, certamente existirá pelo menos uma raiz real. Prova-se esse fato levando-se em consideração que todo polinômio é uma função contínua, juntamente com o Teorema do Valor Intermediário. Esta demonstração encontra-se no Apêndice.

²o grau de tais polinômios é sempre par

Capítulo 4

Considerações Finais

O objetivo principal desse trabalho foi localizar raízes polinomiais motivado pelo fato do professor de Matemática ser frequentemente questionado por seus alunos, no decorrer das aulas de funções polinomiais, de como encontrar suas raízes. A princípio, para o aluno, pode parecer frustrante o fato de um polinômio de grau ≥ 5 não possuir uma fórmula pronta, tal como não acontece com os polinômios de grau 2. A rigor, embora raízes de polinômios de graus 3 e 4 possam ser encontradas utilizando-se expressões radicais complexas (Ver Introdução de [12]), tais dificuldades não devem ser encaradas como obstáculos intransponíveis, mas sim como desafios enriquecedores. Nesse sentido, na busca por contornar a dificuldade por não termos uma fórmula "pronta" para encontrarmos raízes de polinômios de graus ≥ 3 , na visão de nosso trabalho, torna-se necessária e natural a introdução de conceitos novos - como limite e derivada - ao estudante do Ensino Médio. Talvez nesse ponto encontra-se a maior contribuição desse trabalho pois o caminho torna-se tão enriquecedor quanto o próprio objetivo a ser alcançado.

Outro aspecto relevante desse trabalho é quanto ao uso de tecnologias de ensino. A mais importante é sem dúvida o uso do Geogebra pois possibilita uma visão clara e dinâmica dos conceitos de limite e derivada de uma função. Por esse motivo, recomenda-se fortemente seu uso, caso o professor decida utilizar esse trabalho durante suas aulas.

Vale lembrar que não propõe-se com esse trabalho a inclusão de novos conteúdos - como limites e derivadas - ao já abarrotado currículo de Matemática do Ensino Médio mas sim, oferecer a professores um material que possa servi-lhes de apoio sempre que julgar

necessário. Isso justifica, por exemplo, o fato de nos limitarmos a funções polinomiais, pois é conteúdo que já faz parte da grade curricular e portanto não demandaria tempo extra. Deve-se, porém, ressaltar que o *Método de Newton - Raphson* pode ser utilizado para localizar raízes de quaisquer funções, não apenas polinomiais.

Capítulo 5

Apêndice

O século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou. É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

5.1 Derivada

Inicialmente, observamos que as funções afins, ou seja, da forma $g(x) = ax + b$, sendo a e b constantes e cujos gráficos são retas, são funções mais simples de serem manipuladas do que funções cujos gráficos são curvas. Por isto, pode ser útil saber se é possível aproximar uma função qualquer por outra que seja afim. Intuitivamente, dada uma função f , queremos encontrar uma função afim g que mais se pareça com f . Vejamos um exemplo bem familiar para auxiliar nossa intuição.

Consideramos a terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com esfera do que com um plano. Diz-se que Aristóteles¹ reparou isto vendo a sombra da terra sobre a da Lua para poder perceber que a Terra não era plana. Ora, se a Terra parece(ou parecia) plana significa que existe um plano que se parece muito com a Terra. Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante de Tóquio, o plano que mais parece com a Terra não é o mesmo que para nós. Isto indica que esta aproximação de plano é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples(reta, plano, etc) que mais parece com o objeto original(curva, esfera, etc).

Veltemos ao caso de uma função real. Dada uma função f definida numa vizinhança de x_0 , queremos determinar a função afim g , dada por $g(x) = ax + b$, que mais se "pareça" com f nas proximidades de x_0 . Determinar g significa determinar as constantes a e b . Isto será mais conveniente, modificando a constante b e escrevendo a função g na forma $g(x) = a(x - x_0) + b$.

Mas como faremos isto? A resposta depende, claro, do que se entende por "aproximar uma função". Devemos precisar o que significa g ser a função afim que mais se "parece" com f na vizinhança de um ponto. É natural de se exigir que a função g satisfaça as seguintes condições:

- i) $g(x_0) = f(x_0)$;
- ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.

Percebemos que a primeira condição é equivalente a $b = f(x_0)$ pois $g(x_0) = a(x_0 - x_0) + b \Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) = b$. A condição (ii) significa que o erro $r(x) = f(x) - g(x)$ cometido ao aproximar f por g no ponto x fica tão pequeno quanto quisermos bastando para isto tomar x suficientemente próximo de x_0 . Substituindo g por sua expressão em (ii), obtemos

¹Aristóteles: * 384 A.C., Stagirus, Grécia - † 322 A.C., Chalcis, Grécia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - (a(x - x_0) + f(x_0))] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + a(x - x_0)) = f(x_0).$$

Ou seja, afirmar (ii) é equivalente à continuidade de f em x_0 . Porém, observe que este resultado não implica nada sobre a constante a . Será que existe algum valor para a que dê a melhor aproximação?

Consideremos um exemplo simples, porém esclarecedor. Observe as figuras 5.1 e 5.2 abaixo. Elas mostram duas aproximações afins para a função $f(x) = x^2$ em duas vizinhanças de $x_0 = 1$ cada vez menores.

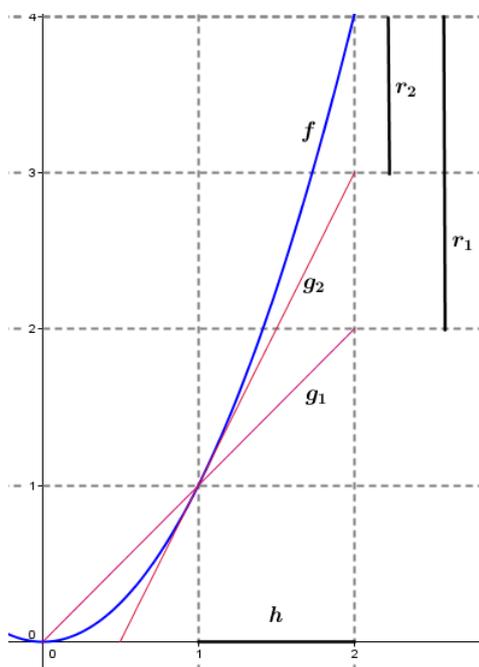


Figura 5.1: Figura com incremento $h=1,0$.

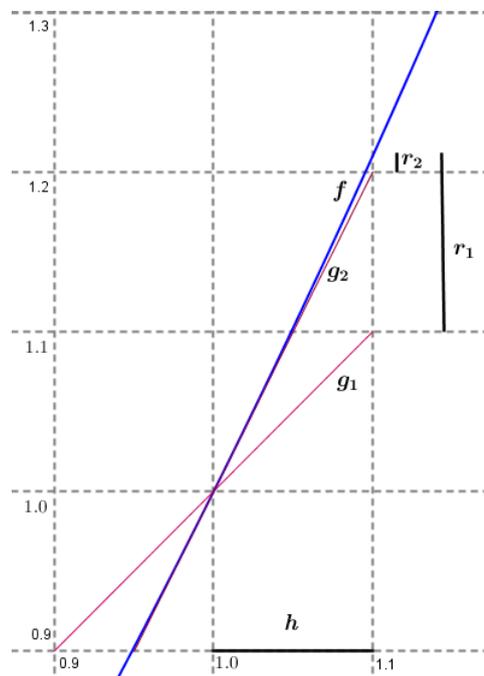


Figura 5.2: Figura com incremento $h=0,1$.

Observe que o gráfico da função f é mais parecido com o gráfico de $g_2 = 2(x - 1) + 1$, do que com o de $g_1 = (x - 1) + 1$. Fazendo um *zoom*, ou seja, tomando valores menores de h , percebemos que quanto mais perto do ponto $(1,1)$ olhamos, maior será a semelhança entre os gráficos de f e g_2 . Podemos ter uma ideia dos valores dos erros $r_2(x) = f(x) - g_2(x)$ e $r_1(x) = f(x) - g_1(x)$ olhando para o extremo direito de cada um dos intervalos, isto é, tomando $x = 1 + h$. Percebemos que $r_1(1 + h)$ se aproxima de zero, mas comparado com h , não é tão pequeno. De fato, $r_1(1 + h)/h$ tende a 1 quando $h \rightarrow 0$.

Por outro lado, $r_2(1+h)$ é pequeno mesmo comparado com h já que $r_2(1+h)/h$ tende a 0 quando $h \rightarrow 0$. É esta propriedade que formaliza o fato de g_2 ser a melhor aproximação afim de f numa vizinhança de 1. É ela também que nos indica qual deve ser o coeficiente angular da melhor aproximação. Naturalmente, segue a seguinte definição.

Definição 5.1: *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é derivável em $x_0 \in A$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = 0$$

A princípio, esta definição difere da definição clássica presente na maioria dos livros de cálculo. A proposição seguinte resolve esta confusão mostrando que as duas definições são equivalentes. A escolha da definição 5.1 se deve ao fato que ela pode ser facilmente generalizada para funções de mais de duas variáveis. Esperamos com isto suavizar as dificuldades que o leitor possa ter com definição de derivabilidade para funções de duas ou mais variáveis.

Proposição 5.1: *Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $x_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se, o limite abaixo existe e é finito.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Neste caso, a constante a em 5.1 é única e igual ao limite acima.

Demonstração: Observamos que

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

A definição seguinte foi feita no Capítulo 2 para o caso particular de polinômios e será generalizada para funções quaisquer.

Definição 5.2: Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é derivável em $x_0 \in A$, então a **derivada** de f em x_0 é denotada por $f'(x_0)$ e definida por

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se f é derivável em todo ponto do seu domínio, então dizemos simplesmente que f é **derivável**. A função f' , definida no conjunto dos pontos onde f é derivável, que a cada x associa $f'(x)$ é chamada de **derivada** de f .

Se f é derivável em x_0 , então a reta de equação $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a reta que melhor aproxima o gráfico de f numa vizinhança de x_0 . Tal reta, como já visto, é chamada de **tangente** ao gráfico de f no ponto x_0 .

5.2 Funções Contínuas e Teorema do Valor Intermediário

Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $a \in A$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a .

Em termos mais precisos, temos a seguinte definição.

Definição 5.3: Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Dizemos que f é **contínua** em x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que } x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dizemos, simplesmente, que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua** quando f for contínua em todos os pontos de X .

Observe que a definição de continuidade tem uma relação muito grande com a definição de limite. Por esta razão, percebemos facilmente que as funções $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = k$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$ para todo $x \in A$, são funções contínuas. A rigor, sejam $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Suponhamos que f e g são contínuas em $a \in A$. Então cf , $f + g$, fg e $f - g$ são funções contínuas em a . Se além disto,

$g(a) \neq 0$, então, f/g também é contínua em a . Conseqüentemente, todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é uma função contínua.

Uma das condições necessária à aplicação do Método de Newton - Raphson utiliza o fato da continuidade de polinômios juntamente com o Teorema do Valor Intermediário. A seguir, tem-se mais detalhes.

Inicialmente, precisaremos da seguinte proposição que enunciaremos como lema.

Lema 5.1: *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $a \in A$. Se $f(a) < l \in \mathbb{R}$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < l$ para todo $x \in A$, com $|x - a| < \delta$. Analogamente, se $f(a) > l$ temos a mesma conclusão.*

Proposição 5.2:(Teorema do Valor Intermediário) *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) < l < f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = l$.*

Demonstração: *Seja $S = \{x \in [a, b]; f(x) \leq l\}$. É imediato que S é não vazio (pois $a \in S$) e limitado superiormente (b é cota superior de S). Sejam $c = \sup S$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ tal que $x \rightarrow c$. Temos que $f(x_n) \leq l$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como f é contínua em c temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c).$$

Portanto, $f(c) \leq l$. Logo, $c < b$.

Suponhamos agora que $f(c) < l$. Pelo Lema 5.1, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in [a, b]$ e $|x - c| < \delta$, então $f(x) < l$. Como $c < b$ podemos tomar $x \in [a, b]$ com $c < x < c + \delta$ para obter que $f(x) < l$. Mas isto implica que $x \in S$ e $x > c = \sup S$, o que é um absurdo.

Mostraremos agora, utilizando o Teorema do Valor Intermediário, que todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

Proposição 5.3: Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com n ímpar. Então p possui pelo menos uma raiz real.

Demonstração: Temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$. Logo, pela Proposição 5.2, existe $c \in (\infty, -\infty)$ ² tal que $p(c) = 0$.

²Obviamente, ∞ e $-\infty$ não devem ser interpretados como números fixos.

Bibliografia

- [1] STEWART, James, "*Cálculo*", Vol.1 5ª Edição, CENGAGE Learning. São Paulo, 2008.
- [2] EVES, Howard, "*Introdução à História da Matemática*" Tradução de Higino H. Domingues, Editora da Unicamp. Campinas-SP, 2004.
- [3] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, Eduardo; MORGADO, A.C. LIMA, Elon Lages, "*A Matemática do Ensino Médio*", Vol.1 Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [4] LIMA, Elon Lages, "*Análise Real*", Vol.1. Coleção Matemática Universitária, IMPA. Rio de Janeiro, 2008.
- [5] MAOR, Eli, "*e: a História de um número*" Tradução de Jorge Calife, Editora Record. Rio de Janeiro, 2008.
- [6] LEITHOLD, Louis, "*O Cálculo com Geometria Analítica*", Vol.1 3ª Edição, Editora HARBRA Ltda. São Paulo, 1994.
- [7] MUNIZ NETO, Antonio Caminha, "*Introdução à Análise*" Tópicos de Matemática Elementar, Vol.3, SBM. Rio de Janeiro, 2012.
- [8] MAOR, Eli, "*e: a História de um Número*" tradução de Jorge Luiz Calife – 4º ed, Record. Rio de Janeiro, 2008.
- [9] SPIVAK, Michael, "*Calculus*" 3ª Edição, Editora Publish or Perish. 1994.
- [10] GUIDORIZZI, Almilton Luis, "*Um Curso de Cálculo*" Vol.1, LTC. Rio de Janeiro, 1986.

- [11] FLEMING, Diva Marília e GONÇALVES, Míriam Boss, "*Cálculo A*", Ed. MAKRON, 5ª Edição. São Paulo, 1992.
- [12] GONCALVES, Adilson, "*Introdução a Álgebra*", IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [13] BARTLE, Robert; SHERBERT, Donald R., "*Introduction to Real Analysis*" 3rd Ed., Copyright. New York, 2000.