



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Poliedros e o Teorema de Euler

José Roberto Penachia Parreira

Goiânia

2014

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

| | | | |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| Autor (a): | José Roberto Penachia Parreira | | |
| E-mail: | betonlinne@gmail.com | | |
| Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? | <input checked="" type="checkbox"/> Sim | <input type="checkbox"/> Não | |
| Vínculo empregatício do autor | Mestrando bolsista | | |
| Agência de fomento: | Coord. Aperf. De Pessoal de Nível Superior | Sigla: | CAPES |
| País: | Brasil | UF: | GO |
| | | CNPJ: | 00889834/0001-08 |
| Título: | Poliedros e o Teorema de Euler | | |
| Palavras-chave: | Teorema de Euler, Polígono, Poliedro, Aplicações do Teorema de Euler | | |
| Título em outra língua: | Polyhedron and Euler's Theorem | | |
| Palavras-chave em outra língua: | Euler's Theorem, Polygon, Polyhedron, Applications of Euler's Theorem. | | |
| Área de concentração: | Matemática do Ensino Básico | | |
| Data defesa: (dd/mm/aaaa) | 21/03/2014 | | |
| Programa de Pós-Graduação: | Mestrado | | |
| Orientador (a): | Prof. Dr. Durval José Tonon | | |
| E-mail: | djtonon@gmail.com | | |
| Co-orientador(a):* | | | |
| E-mail: | | | |

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: ____ / ____ / ____

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

José Roberto Penachia Parreira

Poliedros e o Teorema de Euler

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon

Goiânia

2014

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)

Parreira, José Roberto Penachia.
P258p Poliedros e o Teorema de Euler [manuscrito] / José Roberto Penachia Parreira. – 2014.
80 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras e siglas.

Apêndices.

1. Euler, Teorema de. 2. Polígonos. 3. Poliedros. I. Título.

CDU 514(043)

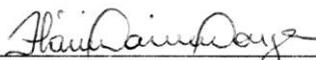
José Roberto Penachia Parreira

Poliedros e o Teorema de Euler

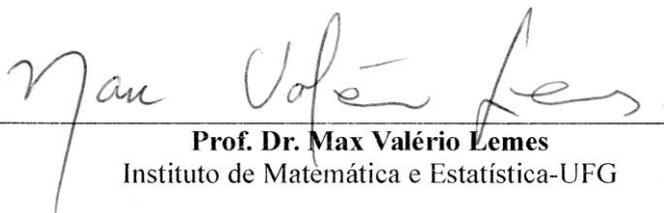
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 21 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
membro IFG-Goiânia



Prof. Dr. Max Valério Lemes
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Roberto Penachia Parreira graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás, durante a graduação foi monitor da disciplina Cálculo I e Cálculo II das turmas subsequentes. Tornou-se especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Gama Filho. É professor da rede Estadual, em Goiás, e Municipal em Aparecida de Goiânia. Atua também como professor do Ensino Médio do Colégio Einstein, em Goiânia, e como professor da área de exatas dos cursos de engenharia pela FAG, Faculdade de Goiânia.

Dedico este trabalho a minha amada esposa Wanessa Manoela, que com muita paciência e carinho me cedeu tempo para a elaboração deste trabalho, e a minha preciosa filha Carmem Nicolle, que apesar das palavras não serem suficientes para expressar meu amor, é talvez o principal motivo pelo qual me dediquei a realizar este sonho.

Agradecimentos

Agradeço à Jeová Deus pela vida.

Agradeço aos pais que ganhei, Cícero Manoel dos Santos e Laurice dos Santos, o carinho e atenção que dedicam a mim.

Agradeço ao Professor Dr. Durval José Tonon, que orientou-me e auxiliou-me, com eficiência, dedicação e paciência, na elaboração deste trabalho.

Agradeço ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, à Universidade Federal de Goiás - UFG e aos professores, em especial ao professor Dr. Rogério de Queirós Chaves, que ministraram todas as disciplinas do curso.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo auxílio financeiro.

Agradeço aos colegas e amigos que conquistei ao longo do curso na turma PROFMAT 2012, amigos estes que me ajudaram e contribuíram fortemente para que eu alcançasse o objetivo.

A vida é muito curta para ser pequena.

Benjamin Disraeli

*Por isso não desistimos; porém, ainda que o homem que somos por fora se definhe,
certamente o homem que somos por dentro está sendo renovado de dia em dia.*

2 Coríntios 4:16

Resumo

Este trabalho tem por objetivo a demonstração do Teorema de Euler para poliedros, dado pela equação $V - A + F = 2$, onde V , A e F são os números de vértices, arestas e faces, respectivamente, do poliedro. Foi elaborada uma pesquisa histórica dos principais personagens que contribuíram para o tema. Foram dadas definições e propriedades de polígonos e poliedros. As demonstrações foram construídas em três caminhos distintos. A primeira por Cauchy, comentada pelo professor Elon Lages Lima. Esta demonstração é válida para qualquer poliedro homeomorfo a uma esfera e tem como caminho a planificação do poliedro retirando-se uma de suas faces. A segunda demonstração foi elaborada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho, válida para qualquer poliedro convexo e tem como caminho a projeção do poliedro num plano e a comparação dos ângulos internos dos polígonos da projeção com os ângulos dos polígonos das faces. A terceira demonstração foi apresentada por Legendre, também válida para qualquer poliedro convexo e tem como caminho a projeção do poliedro em uma superfície esférica. Utiliza-se a Fórmula de Girard, da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, para concluir a demonstração. Este trabalho também sugere metodologias de aplicação da demonstração do Teorema de Euler em sala de aula, para alunos do Ensino Médio, e resolução de exercícios de vestibulares envolvendo o tema.

Palavras-chave

Teorema de Euler, Polígono, Poliedro, Aplicações do Teorema de Euler.

Abstract

This work aims to demonstrate the Euler's Theorem for polyhedra, given by the equation $V - A + F = 2$, where V , A and F are the numbers of vertices, edges and faces, respectively, of the polyhedron. A historical survey of the main characters who contributed to the theme was elaborated. Definitions and properties of polygons and polyhedra were given. The statements were constructed in three distinct ways. The first by Cauchy, commented by Professor Elon Lages Lima. This statement is valid for any polyhedron homeomorphic to a sphere and has the path planning of the polyhedron withdrawing one of its faces. The second statement was prepared by the professor Zoroastro Azambuja Filho, valid for any convex polyhedron, and its path projection of the polyhedron on a plane and comparison of the internal angles of polygons with projection angles of the polygon faces. The third statement was presented by Legendre, also valid for any convex polyhedron, and its path in the projection of a spherical polyhedron surface. We use the Girard's Formula, the sum of the interior angles of a spherical triangle, to complete the demonstration. This work also suggests methods of applying the proof of Euler's Theorem in the classroom for high school students, and resolution of vestibular exercises involving the subject.

Keywords

Euler's Theorem, Polygon, Polyhedron, Applications of Euler's Theorem.

Lista de Figuras

| | | |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Pitágoras de Samos. | 18 |
| 2 | Os cinco poliedros de Platão. | 19 |
| 3 | Espiral de Teodoro, de Cirene. | 20 |
| 4 | Busto de Platão. | 21 |
| 5 | Leonhard Euler 1707 - 1783. | 22 |
| 6 | Pontos A , B e C colineares. | 24 |
| 7 | Pontos A , B e C não colineares. | 24 |
| 8 | Polígono convexo formado por seis pontos. | 24 |
| 9 | Polígono não convexo formado por seis pontos. | 25 |
| 10 | Região poligonal. | 25 |
| 11 | Diagonais do polígono $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ | 26 |
| 12 | Quadrado, Pentágono Regular e Hexágono Regular. | 27 |
| 13 | Um poliedro convexo e um não convexo. | 28 |
| 14 | Projeção esterográfica do poliedro P | 32 |
| 15 | Cubo. | 33 |
| 16 | Planificação do Cubo. | 33 |
| 17 | Polígono diagonalizado. | 33 |
| 18 | Situação do Caso 1. | 33 |
| 19 | Situação do Caso 2. | 34 |
| 20 | Situação do Caso 3. | 35 |
| 21 | O subpoliedro desconexo Q com suas componentes conexas. | 36 |
| 22 | Fase final após sucessivas retiradas de faces triangulares em Q | 36 |
| 23 | Situação do Caso 4. | 37 |
| 24 | O subpoliedro desconexo Q , com suas componentes conexas Q_1 , Q_2 e Q_3 | 38 |
| 25 | Após sucessivas retiradas, restam apenas faces triangulares em cada componente conexa. | 38 |
| 26 | Situação do Caso 5. | 39 |
| 27 | Situação do Caso 6. | 39 |
| 28 | Poliedro convexo P diagonalizado suspenso sobre o plano de apoio α | 41 |
| 29 | Projeção P' , em α , de um poliedro P | 43 |
| 30 | Supefície Esférica. | 45 |
| 31 | Triângulo Esférico. | 46 |
| 32 | Projeção Radial do Poliedro à Superfície Esférica. | 47 |

| | | |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 33 | Projeção radial de uma face. | 48 |
| 34 | Fuso. | 49 |
| 35 | Fuso Completo $\phi = \lambda \cup \lambda'$ | 50 |
| 36 | Triângulo esférico XAB contido no hemisfério H | 51 |
| 37 | Região R_γ em H | 51 |
| 38 | Região R_α em H | 52 |
| 39 | Região R_β em H | 52 |
| 40 | www.europeana.eu - Acesso em 15.10.2012. Adaptado. | 65 |
| 41 | Prisma Hexagonal Regular. Fonte: os autores. | 65 |
| 42 | DANTE, Luiz Roberto, Matemática : contexto e aplicações, São Paulo: Ática, v. 2, 2011, p. 354. | 67 |
| 43 | Icosaedro Regular. Fonte: os autores. | 68 |
| 44 | Esfera de isopor desenhada representando um fuso completo. | 72 |
| 45 | Esfera de isopor desenhada representando a projeção de um poliedro. | 72 |
| 46 | Maurice Fréchet (02/09/1878 - 04/06/1973). | 77 |

Conteúdo

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Capítulo 1: Poliedros e Conceitos Básicos para o Teorema de Euler | 18 |
| 1.1 | Aspectos históricos | 18 |
| 1.2 | Polígonos | 23 |
| 1.3 | Poliedros | 27 |
| 1.4 | Relações entre Arestas, Faces e Vértices | 28 |
| 2 | Capítulo 2 - Teorema de Euler | 30 |
| 2.1 | Demonstração por Cauchy | 30 |
| 2.2 | Demonstração apresentada pelo Professor Zoroastro Azambuja Filho. | 40 |
| 2.3 | Demonstração por Adrien Marie Legendre | 44 |
| 2.4 | Poliedros Regulares | 53 |
| 3 | Capítulo 3 - Bases Legais e Aplicações | 56 |
| 3.1 | Bases Legais | 56 |
| 3.2 | Aplicações do Teorema de Euler nos vestibulares | 64 |
| 3.3 | Atuação em Sala de Aula | 71 |
| 4 | Conclusão | 74 |
| 5 | Apêndice | 76 |

Introdução

Neste trabalho abordaremos o **Teorema de Euler** para poliedros, expresso por:

$$V - A + F = 2,$$

onde, V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do poliedro. Faremos um tratamento analítico e didático-pedagógico deste tema. Analítico por demonstrá-lo de três formas distintas, com colaboração de grandes personagens históricos e grandes professores dos dias atuais. Didático-pedagógico por oferecer ao professor de matemática algumas estratégias para trabalhar este tema em sala de aula, com os alunos do Ensino Médio das escolas que atuam.

A seguir faremos um breve relato acerca do conteúdo de cada um dos capítulos deste trabalho.

O Capítulo 1 oferece definições e propriedades que darão base às demonstrações do Teorema de Euler que se seguem adiante. Iniciamos, na Seção 1.1 deste capítulo, aspectos históricos que fizeram de grandes matemáticos do passado os responsáveis por favorecer a Leonard Euler elaborar o teorema que leva seu nome, dentre outros conceitos matemáticos. Em seguida, definimos *polígonos* na Seção 1.2 e algumas propriedades que permitem dar base aos conceitos que utilizamos para as demonstrações do Teorema de Euler. Logo adiante, na Seção 1.3, definimos *poliedros* com o cuidado necessário para que pudéssemos ter fundamento para demonstrar o teorema. A falta de uma definição precisa do que venham a ser poliedros foi, talvez por isso, responsável pela imprecisão na demonstração elaborada por Augustin-Louis Cauchy, um grande matemático francês do século XVIII. Na Seção 1.4 damos atenção às propriedades particulares entre *arestas*, *faces* e *vértices*. Ali procuramos demonstrar um aspecto importante envolvendo as desigualdades $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$.

As demonstrações do Teorema de Euler serão detalhadas no Capítulo 2, iniciando com a apresentada por Cauchy e comentada pelo professor Elon Lages Lima. Em sua demonstração original, Cauchy a apresenta em quatro etapas. O objetivo é demonstrar

que $V - A + F$ é igual a 2 e Cauchy propõe, com as etapas, mostrar que é válida a afirmação $V - A + F = 1$ retirando-se uma face do poliedro. Assim, na primeira etapa da demonstração, retira-se uma das faces do poliedro. Na segunda etapa, efetua-se a planificação do poliedro. Na terceira, traça-se diagonais em todos os polígonos que formam as faces de modo a aparecer apenas triângulos. Por fim, na quarta etapa, retira-se triângulo por triângulo de modo a restar apenas um, confirmando $V - A + F = 1$, pois o último triângulo possui: $V = 3$, $F = 1$ e $A = 3$. Porém, nesta etapa Cauchy sugere três possibilidades de disposição de triângulos na planificação do poliedro para fazer as retiradas. Mas existem outras quatro possibilidades. Provavelmente pela falta de definição precisa de poliedro, Cauchy não considerou as outras disposições, mas as apresentamos neste trabalho. Esta demonstração é válida para qualquer poliedro homeomorfo a uma esfera.

A segunda demonstração que apresentamos foi elaborada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho e é válida para qualquer poliedro convexo. A demonstração tem por objetivo a comparação dos ângulos internos dos polígonos das faces com os ângulos internos dos polígonos gerados pela projeção do poliedro sobre um plano. Para visualizar a projeção, imagina-se o poliedro iluminado por raios solares, com o sol à pino, e a sombra projetada no chão. Aqui imaginamos que os raios solares, dados por retas paralelas, não são paralelos a nenhuma face do poliedro em questão. A parte iluminada e a parte sombria formam polígonos, geradas pela sombra da ilustração que estamos sugerindo, cujos lados são as arestas do poliedro, e pontos internos ligados por segmentos de reta, que são os demais vértices e arestas iluminadas e sombrias, da parte superior e inferior, respectivamente, do poliedro.

A terceira demonstração que apresentamos foi elaborada por Adrien Marie Legendre, matemático francês, que utilizou-se da Fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Esta demonstração vale também para qualquer poliedro convexo. Do poliedro, traça-se diagonais em todas as faces a fim de gerar apenas triângulos. Projeta-se as arestas e vértices do poliedro em uma esfera contida em seu interior. Deste modo, a superfície esférica conterá triângulos esféricos dispostos do mesmo modo que os triângulos das faces. A soma dos ângulos internos de todos os triângulos esféricos, na superfície esférica, confirmam o Teorema de Euler. Nesta seção, demonstramos também a Fórmula de Girard.

A Seção 2.4, ainda do Capítulo 2, é destinada aos conceitos de poliedros regulares. Mostramos os cinco poliedros regulares, também conhecidos como Poliedros de Platão, tais como *tetraedro*, *hexaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* e *icosaedro*, de 4, 6, 8, 12 e 20 faces regulares, respectivamente. Também mostramos que existem apenas estes cinco poliedros regulares.

O Capítulo 3 é destinado ao tratamento didático-pedagógico do tema do nosso trabalho. Na Seção 3.1 abordamos os aspectos legais que constituem o Sistema Educacional do Brasil e a atual visão didático-metodológica sugerida pelos PCN's, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio. Justificamos o estudo dos poliedros e do Teorema de Euler de modo a atender tais sugestões. Na seção 3.2 propomos 15 exercícios de diversas Universidades espalhadas pelo país, que abordam os conceitos estudados neste trabalho em seus vestibulares. Apresentamos o gabarito das questões no final. Na seção 3.3, descrevemos a experiência de levar as demonstrações elaboradas neste trabalho para a sala de aula. Foram gastas 6 aulas, de 50 minutos cada, para concluir o objetivo. Desde introduzir o conceito de poliedro até resolver os exercícios propostos, os alunos foram levados a acompanhar, imaginar, conferir e discutir os passos utilizados nas demonstrações. Os recursos metodológicos utilizados, como material impresso e fixado no quadro negro, o projetor e as duas esferas de isopor pintadas, foram fundamentais para a visualização e entendimento dos argumentos apresentados.

1 Capítulo 1: Poliedros e Conceitos Básicos para o Teorema de Euler

1.1 Aspectos históricos

Pitágoras nasceu a cerca de 50 km de Mileto, na ilha Jônica de Samos. Os anos de seu nascimento e morte não são precisos, mas estima-se que tenha vivido entre 586 a.C. a 500 a.C.. Segundo [1], muitas histórias sobre Pitágoras são misto de fatos e lendas, tornando-se difícil distinguir uns dos outros. Com base cronológica, Pitágoras certamente foi influenciado pelas obras de Tales de Mileto, pois estima-se que Tales tenha vivido entre 640 a.C. a 564 a.C. e, portanto, Pitágoras tinha por volta de 20 anos de idade quando Tales faleceu. A Figura 1, acessada em www.biografiasyvidas.com, 19/12/2013, ilustra seu busto.

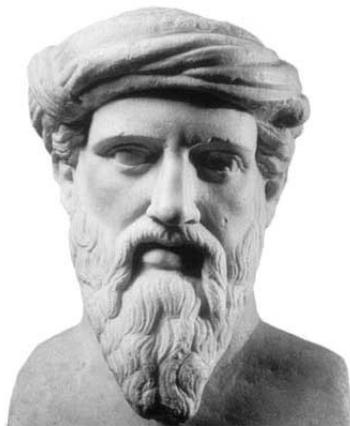


Figura 1: Pitágoras de Samos.

Por conta da formação e expansão do Império Persa, em meados do século VI a.C., as colônias gregas da Jônia foram sendo conquistadas sob domínio do rei persa Ciro e Pitágoras deixou a ilha onde nascera e mudou-se para o Egito, provavelmente na Mesopotâmia. Mais tarde, mudou-se para a cidade de Crotona, ao sul da península italiana. Nesta cidade, por volta de 540 a.C., Pitágoras fundou uma escola com objetivo de estudar Filosofia, Ciências Naturais e Matemática. Esta escola reuniu muitos discípulos interessados nestes assuntos, chegando-se a tornar uma sociedade secreta, os *Pitagóricos*. Algum tempo depois, esta sociedade não foi bem vista pelo povo cro-

tonense. Porém, muitos estudos matemáticos foram desenvolvidos desde então. Os pitagóricos dividiam a Matemática em quatro áreas: **Geometria, Aritmética, Astronomia e Música**.

Na geometria espacial, os pitagóricos já conheciam alguns poliedros regulares, tais como o **tetraedro**, o **cubo** e o **dodecaedro**. Os poliedros **octaedro** e **icosaedro** foram descobertos cerca de um século e meio depois, pelo discípulo de Platão que viveu entre 415 a.C. e 368 a.C., chamado Teeteto. Estes cinco poliedros regulares são conhecidos hoje como **Poliedros de Platão**. Uma visualização deles encontra-se na Figura 2 abaixo, em www.brasilecola.com/matematica/os-solidos-platao.htm, acessado em 18/01/2014.

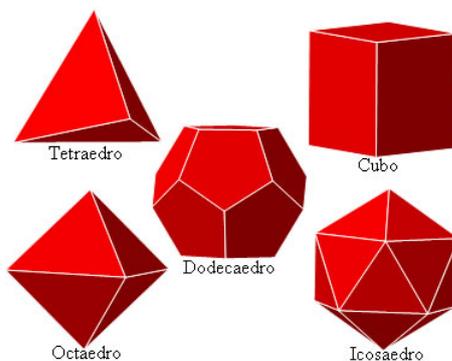


Figura 2: Os cinco poliedros de Platão.

Outras escolas, com o intuito de estudar Matemática, foram criadas com o passar do tempo. A história atribui a alguns geômetras o título *Pré-Platônicos*, tais como: **Hipásus**, de Metaponto, inventor da média harmônica e nascido por volta de 470 a.C., utilizou o recente *Método da Redução ao Absurdo* ou chamada *Prova por Contradição* para provar a existência dos números irracionais; **Zenão**, de Eleia, nascido por volta de 450 a.C. numa cidade ao sul da Itália, ficou famoso por propor um problema intitulado *paradoxo de Aquiles e a tartaruga*, onde afirmava que se Aquiles estivesse perseguindo uma tartaruga correndo à sua frente, ele nunca a alcançaria, pois quando Aquiles chegasse ao ponto onde a tartaruga estava, ela já teria caminhado um pouco mais e estaria mais adiante. Mesmo que as distâncias fossem sendo diminuídas, haveria infinitos trechos a serem cobertos por Aquiles e ele jamais chegaria ao lento animal. Este paradoxo pressupunha que a soma de infinitas parcelas deveria ser infinita. Este problema im-

pulsionou, mais tarde, o estudo das séries infinitas cujas somas convergem para valores finitos; **Hipócrates**, da ilha Jônica de Quios, nascido por volta de 460 a.C. produziu um célebre livro, de modo lógico e organizado, reunindo o conhecimento geométrico da época, que pode ter influenciado o Volume III dos Elementos, de Euclides. Descobriu também áreas de figuras planas delimitadas por linhas curvas, chamadas de *Lúnulas*; **Hípias**, de Élis, cidade na península do Peloponeso, nascido por volta de 460 a.C., era um dos filósofos sofistas que ganhava seu sustento ensinando nas ruas e praças das cidades. Criou uma engenhosa curva chamada *Quadratriz* onde pretendia resolver o problema da trisseção do ângulo; **Demócrito**, de Abdera, cidade grega na costa da Trácia, também nascido por volta de 460 a.C., descobriu que o volume das pirâmides e dos cones são, respectivamente, iguais a $1/3$ dos volumes dos prismas e cilindros de mesma altura e bases equivalentes; **Teodoro**, de Cirene, uma colônia grega do norte da África, nascido por volta de 470 a.C., onde iniciou Platão ao estudo de Geometria. Teodoro provou a irracionalidade de vários números, além da raiz quadrada de 2, criando um dispositivo geométrico para construir as sucessivas raízes quadradas dos números naturais, ilustrado na Figura 3 abaixo.

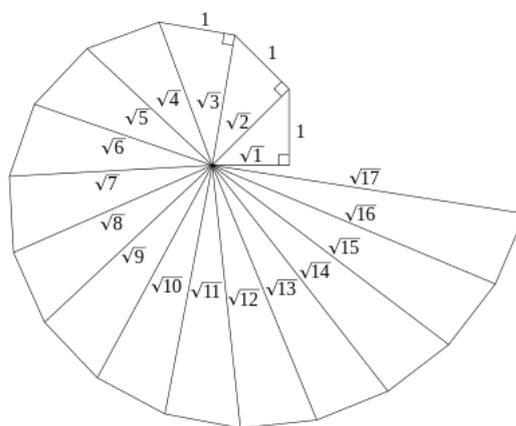


Figura 3: Espiral de Teodoro, de Cirene.

Por fim, o último Pré-Platônio de destaque foi **Árquitas**, de Tarento, uma cidade ao sul da península italiana, nascido em 428 a.C., amigo de Platão. Acredita-se que vários teoremas incluídos nos Elementos, de Euclides, tenham sido descobertos por Árquitas.

Todos estes personagens foram influenciadores da então criada **Academia de**

Platão, que assim como a escola criada por Pitágoras, reuniu grandes geômetras e pensadores da época. Importantes resultados surgiram da Academia, como a *Teoria das Proporções*. **Eudóxio**, de Cnidos, cidade que tem nome atual de Tekir, Turquia, nascido em 408 a.C., foi um dos integrantes da Academia, propôs o *Método da Exaustão* imaginando o círculo como sendo o limite de uma família de polígonos inscritos. Estas ideias, com forte razão, são os fundamentos da Teoria dos Limites e dos cálculos Integral e Diferencial. O último dos grandes geômetras da Academia foi o já citado **Teeteto**, de Atenas, que morreu em 368 a.C., e quem descobriu os poliedros regulares octaedro e icosaedro, de 8 e 20 faces, respectivamente. Acredita-se que o conteúdo do Livro X dos Elementos, de Euclides, veio basicamente dos trabalhos de Teeteto. A partir de então os cinco poliedros da Figura 2 foram atribuídos a Platão. A Figura 4 abaixo ilustra o busto de Platão, acessada em www.educa2.madrid.org, 20/12/2013.

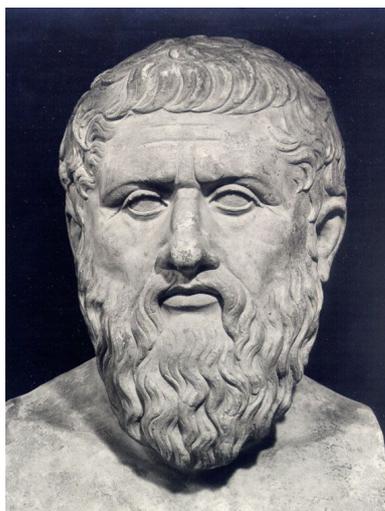


Figura 4: Busto de Platão.

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707 na cidade Basileia, Suíça, filho de pastor calvinista que tinha desejo de fazer seu filho seguir seus caminhos. Faleceu em 18 de setembro de 1783, com 76 anos. Conta-se que de manhã brincou com os netos, tratou de questões matemáticas sobre voo de balões e realizou alguns cálculos sobre a órbita do planeta Urano, descoberto recentemente. À tarde, foi acometido de um forte AVC e não resistiu.

Segundo [1], Euler é o matemático que mais produziu obras, cobrindo todas as áreas

do conhecimento matemático e criando outros novos. Euler escreveu cerca de 900 tratados, livros e estudos. Jornais e editores da época não conseguiam acompanhar a velocidade de sua produção. Isto é notório, pois em 1909, 126 anos após sua morte, a Academia de Ciências da Suíça decidiu editar o conjunto completo de sua obra, começando os trabalhos em 1911, com o título de *Opera Omnia*, e isto permitiu-se que vislumbrássemos o gigantesco material fornecido por Euler. O projeto desenvolveu-se praticamente por todo o século XX e ainda não foi completado. Há 73 grandes volumes da *Opera Omnia* com cerca de 25.000 páginas em Latim, Francês e Alemão, cobrindo variados temas da Matemática pura e aplicada. Euler escreveu sobre Álgebra, Geometria, Teoria dos Números, Topologia, Cálculo, Equações Diferenciais, Geometria Diferencial, Cálculo das Variações, Música, Astronomia, Mecânica, Engenharia, Acústica, Mecânica Celestre, etc.

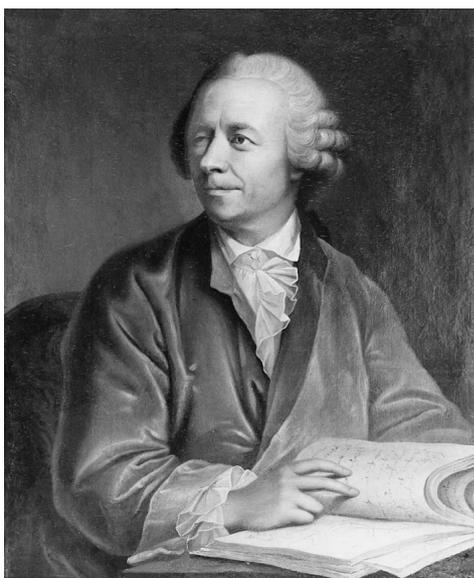


Figura 5: Leonhard Euler 1707 - 1783.

Suas contribuições na Geometria, compiladas em cerca de 1.600 páginas na *Opera Omnia*, apresenta uma descoberta no triângulo no plano euclidiano, que nem os gregos, com tantos séculos de estudos e análises neste polígono conseguiram identificar. Euler provou que em qualquer triângulo o **ortocentro**, que é o ponto de encontro das alturas relativas aos vértices, o **baricentro**, que é o ponto de encontro das medianas relativas aos lados e o **circuncentro**, que é o ponto de encontro das mediatrizes relativas aos

lados, estes três pontos notáveis são colineares, isto é, há uma reta que os contém. Hoje esta reta é conhecida como **Reta de Euler**. Ainda há o teorema sobre as faces, vértices e arestas de poliedros simples, onde afirma que *o número de vértices somado ao número de faces e subtraindo do número de arestas é sempre igual a dois*:

$$V - A + F = 2$$

Esta relação será demonstrada no Capítulo 2. Antes de Euler, Descartes percebera tal relação, mas Euler demonstrou-a e publicou-a, sendo conhecida hoje como Teorema de Euler dos Poliedros. A Figura 5 retrata sua imagem, acessada em www.egamath.narod.ru, 20/12/2013.

1.2 Polígonos

Daremos aqui um tratamento adequado para a definição de polígono, permitindo-nos alcançar o principal objetivo deste trabalho que é a demonstração do Teorema de Euler para poliedros. Imaginamos que o leitor já tenha conhecimento de noções geométricas primitivas como ponto, reta e plano ¹. Conheça também propriedades elementares de figuras geométricas simples como o triângulo, sabendo que a soma de seus ângulos internos equivale a 180° , ou π radianos, e que um triângulo equilátero possui os três lados congruentes e os três ângulos internos congruentes.

De modo geral, os polígonos podem ser identificados como figuras planas fechadas, formadas por finitos segmentos de retas unidos por suas extremidades. Esta informação nos dá uma ideia básica do que seja polígono.

Agora, com mais detalhes, iniciemos considerando três pontos A , B e C no plano. Se o ponto C pertencer a reta \overleftrightarrow{AB} diremos então que A , B e C são **colineares**. Caso contrário, diremos que A , B e C são **não colineares** (Figura 6 e Figura 7).

¹Tais como definidos em [5].

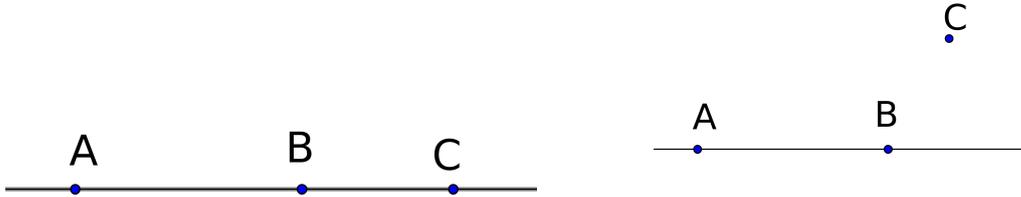


Figura 6: Pontos A , B e C colineares.

Figura 7: Pontos A , B e C não colineares.

Assim, com base em [2], podemos definir polígono como:

Definição 1. *Seja $n \geq 3$ um número natural e $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $V_1V_2V_3 \dots V_n$ é um **polígono convexo** se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{V_iV_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto V_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano dentre os que a reta $\overleftrightarrow{V_iV_{i+1}}$ determina.*

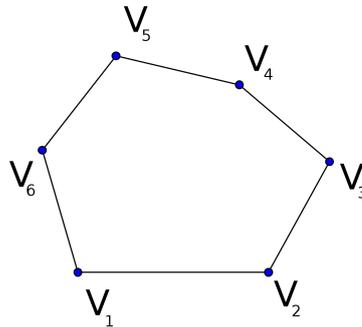


Figura 8: Polígono convexo formado por seis pontos.

No polígono da Figura 8, os pontos V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 e V_6 são chamados de **vértices** e os segmentos de reta $\overline{V_1V_2}, \overline{V_2V_3}, \dots, \overline{V_6V_1}$ são chamados de **lados**.

Definição 2. *Seja $n \geq 3$ um número natural e $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $V_1V_2V_3 \dots V_n$ é um **polígono não convexo**, ou **côncavo** se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{V_iV_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto V_j , mas deixa pelo menos um ponto fora do semiplano que a reta $\overleftrightarrow{V_iV_{i+1}}$ determina com os demais pontos.*

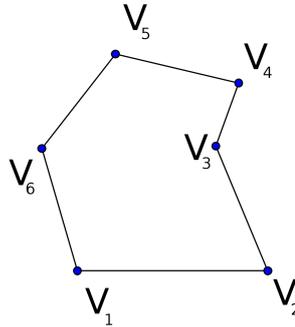


Figura 9: Polígono não convexo formado por seis pontos.

A Figura 9 ilustra um polígono não convexo, conforme a Definição 2, onde o ponto V_4 não está no mesmo semiplano formado pela reta $\overleftrightarrow{V_2V_3}$ com os demais pontos.

Chama-se **região poligonal**, tanto de um polígono convexo quanto de um não convexo, à região do plano delimitada pelos lados do polígono (veja a Figura 10).

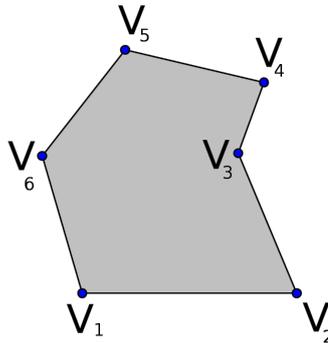


Figura 10: Região poligonal.

Cada vértice do polígono determina um **ângulo interno** e um **ângulo externo** formado pelas aberturas dos lados concorrentes a este vértice. Neste trabalho, fica entendido que quando referirmos ao ângulo interno do polígono, chamaremos apenas de *ângulo*.

Definição 3. O **gênero** F_k , com $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$, de um polígono é a referência ao número de lados, ou vértices, que o forma.

Os polígonos das Figuras 8, 9 e 10 são do gênero F_6 , pois possuem seis lados. O polígono mais simples que pode ser formado é o **triângulo**, do gênero F_3 .

A **diagonal** de um polígono, convexo ou não, é qualquer um dos segmentos $\overleftrightarrow{V_iV_j}$ que não seja um lado. A Figura abaixo ilustra as diagonais do polígono $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ como os segmentos tracejados.

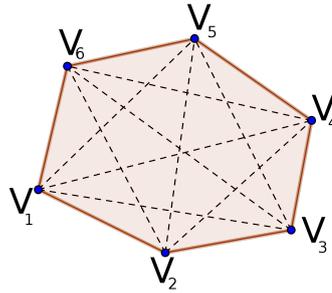


Figura 11: Diagonais do polígono $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$.

Propriedade 1. *De um polígono convexo $V_1V_2 \cdots V_n$, com n um número natural, existem $(n - 3)$ diagonais em cada vértice.*²

Demonstração. Se $n = 3$, então não há diagonal, pois triângulos não têm diagonais ($n - 3 \Rightarrow 3 - 3 = 0$). Tomemos $n \geq 4$. Unindo o vértice V_1 aos $n - 1$ vértices restantes V_2, V_3, \dots, V_n obtemos $n - 1$ segmentos de reta. Destes, dois são lados do polígono (os segmentos $\overline{V_1V_2}$ e $\overline{V_1V_n}$). Assim, sobram $n - 3$ segmentos que são as diagonais. \square

Uma consequência da Propriedade 1 incorre na divisão do polígono $V_1V_2 \cdots V_n$ em $n - 2$ triângulos, pois as $n - 3$ diagonais dividem a região poligonal $V_1V_2 \cdots V_n$ em $n - 2$ regiões triangulares.

Definição 4. *O polígono que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes chama-se **polígono regular**.*³

Exemplos de polígonos regulares ilustrados na Figura 12 a seguir, como o quadrado, pentágono regular e hexágono regular.

²Propriedade também encontrada em [8].

³Definição também estabelecida em [9].

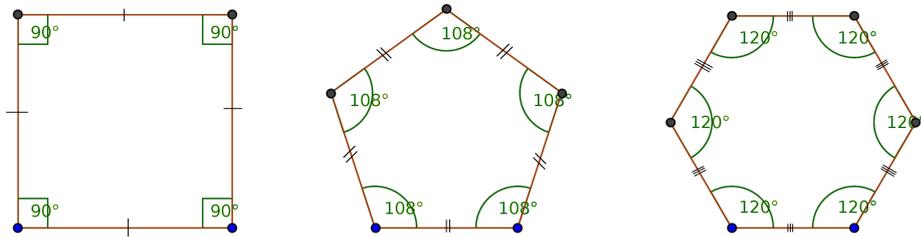


Figura 12: Quadrado, Pentágono Regular e Hexágono Regular.

1.3 Poliedros

De modo geral, *Poliedros* podem ser imaginados como sólidos formados por faces. Esta informação pode dar uma ideia de sua forma, mas uma definição adequada que permita demonstrar as propriedades e teoremas que faremos mais adiante pode ser encontrada em [4] página 283:

Definição 5. *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos denominados faces, de modo que:*

1. *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*
2. *A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.*
3. *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice.*

Chama-se *aresta do poliedro* o lado comum a exatamente duas faces. Chama-se *vértice do poliedro* a cada vértice da face.

Qualquer poliedro, atendendo a definição acima, limita o espaço em duas regiões: interior ao poliedro e exterior a ele. Pode-se dizer que um poliedro é convexo se a região do espaço interior a ele for convexa. Podemos definir *região convexa* da seguinte forma:

Definição 6. *Um conjunto A de pontos no espaço é convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos distintos de A está inteiramente contido em A .*

Para os poliedros, podemos adequar a definição acima por uma equivalente, na forma:

Definição 7. *Um poliedro é convexo se qualquer reta, não contida no plano de alguma de suas faces, o intersecta em no máximo dois pontos distintos.*

A Figura 13 ilustra com clareza a diferença entre poliedro convexo e não convexo.

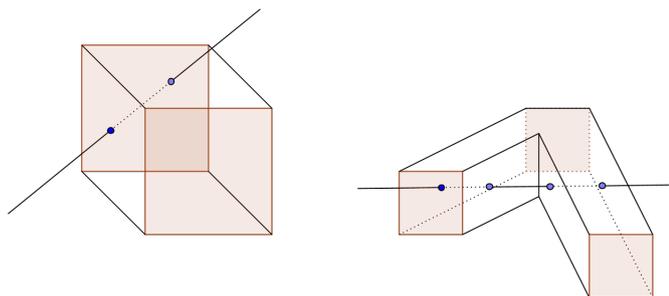


Figura 13: Um poliedro convexo e um não convexo.

1.4 Relações entre Arestas, Faces e Vértices

Dado um poliedro que atenda a Definição 5, vamos verificar as relações entre faces, vértices e arestas. Assim, sejam A o número de arestas, F o número de faces e V o número de vértices. Como os polígonos que formam as faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos por F_n ($n \geq 3$), conforme Definição 3, ao número de faces que possuem n lados. Do mesmo modo, os vértices podem ser de gêneros diferentes, então podemos representá-los por V_n ($n \geq 3$) ao número de vértices nos quais concorrem n arestas. Assim, podemos escrever os números F e V como:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_k = \sum_{n=3}^k F_n,$$

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \cdots + V_j = \sum_{m=3}^j V_m.$$

Agora relacionaremos as arestas do poliedro com suas faces. Para isto, imagine desmontando o poliedro face por face e dispondo estes polígonos sobre uma mesa.

Assim, podemos contar o número de arestas A , somando o número de lados de polígonos formados por triângulos, isto é, de gênero F_3 , também dos quadriláteros, de gênero F_4 e assim por diante. Mas cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces e ao proceder nesta soma, contamos o número de arestas em dobro. Assim,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + kF_k = \sum_{n=3}^k nF_n. \quad (1)$$

Relacionemos, por fim, o número de arestas com o número de vértices do poliedro. Para tanto, basta multiplicar por três o número de vértices do gênero V_3 , multiplicar por quatro o número de vértices do gênero V_4 e assim por diante, somando estes resultados. Neste proceder, contamos o número de arestas em dobro. Assim,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots + jV_j = \sum_{m=3}^j mV_m. \quad (2)$$

Duas desigualdades que ocorrem entre arestas e faces e também entre arestas e vértices são descritas pela seguinte propriedade:

Propriedade 2. *Em todo poliedro que atenda a Definição 5, vale a relação $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$.*

Demonstração. Para o caso de $2A \geq 3F$, temos da relação dada em (1) que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + kF_k.$$

Colocando 3 em evidência, segue-se que:

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots + F_k) + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \cdots + (k-3)F_k \Rightarrow$$

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + 3F_6 + \cdots + (k-3)F_k \Rightarrow$$

$$2A \geq 3F.$$

Observe que a igualdade somente se obtém quando o poliedro tiver apenas faces triangulares, isto é, quando $F_4 = F_5 = \cdots = F_k = 0$. Para a propriedade em que $2A \geq 3V$ a demonstração é de forma análoga. \square

2 Capítulo 2 - Teorema de Euler

Com as definições e propriedades tratadas no Capítulo 1, temos agora condições de demonstrar o **Teorema de Euler** para poliedros. Neste capítulo, apresentaremos três demonstrações do Teorema. A primeira é dada por Cauchy, com análise e comentários de Lima (veja [3]). A segunda é dada pelo Professor Zoroastro Azambuja Filho (veja [6]) e a terceira dada por Adrien Marie Legendre que utiliza-se da fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico (veja [7]). O Teorema de Euler pode ser enunciado como:

Teorema 1. *Em todo poliedro com A o número de arestas, V o número de vértices e F o número de faces, vale a relação:*

$$V - A + F = 2.$$

2.1 Demonstração por Cauchy

Esta demonstração pode ser encontrada em [3], páginas 68-83, onde está comentada por E. Lima. A demonstração de Cauchy é dada em cinco etapas e consiste, basicamente, em retirar uma face do poliedro, planificá-lo, diagonalizar todas as faces de modo a gerar apenas triângulos e, em seguida, retirar todos estes triângulos, deixando apenas um deles. O objetivo da demonstração é mostrar que após realizar todas as retiradas das faces do poliedro planificado, deixando restar apenas um triângulo, é válida a relação $V - A + F = 1$, pois a face triangular final apresenta 3 arestas, 3 vértices e, por ser a última, 1 face. Assim, somando a face retirada no início do processo, a igualdade $V - A + F = 1$ passa a ser $V - A + F = 2$, concluindo sua demonstração. Aqui, a cada etapa apresentada por Cauchy, justificaremos os procedimentos realizados.

Demonstração. Seja P um poliedro com V vértices, A arestas e F faces que atenda a Definição 5.

ETAPA 1: Retira-se uma face de P . Esta ação não altera os números V e A , mas F diminui uma unidade. Vamos mostrar que esta ação faz $V - A + F = 1$.

Ao retirar uma face de P , a figura resultante apresenta *arestas livres*, a saber, os lados da face retirada. Para seguirmos a demonstração, faz-se necessário definirmos que tipo de sólido é este formado a partir de P com uma face retirada.

Definição 8. *Um subconjunto Q de um poliedro P chama-se **subpoliedro de P** quando Q é reunião de algumas das faces de P .*

Definição 9. *Chama-se **bordo**, de um subpoliedro, a reunião de suas arestas livres.*

ETAPA 2: Esticando-se P a partir de suas arestas livres, pode-se achatá-lo de forma que se torne uma figura plana. Este procedimento mantém os números de faces, arestas e vértices.

Isto é possível pois P é homeomorfo⁴ a uma esfera. O achatamento pode ser realizado de forma simples, projetando P sobre um plano a partir de um ponto O próximo à face retirada, externo ao espaço formado por P , de tal modo que P fique entre O e α , onde toda semi-reta com origem em O intersecta P em até um ponto. Este processo é conhecido como *projeção estereográfica*⁵ em que o plano de apoio da projeção é um plano α e os pontos projetados são os das arestas e dos vértices do poliedro. A Figura 14 a seguir ilustra esta projeção.

⁴Veja na seção Apêndice sobre homeomorfismo.

⁵Para mais informações sobre projeção estereográfica, sugerimos consultar [15].

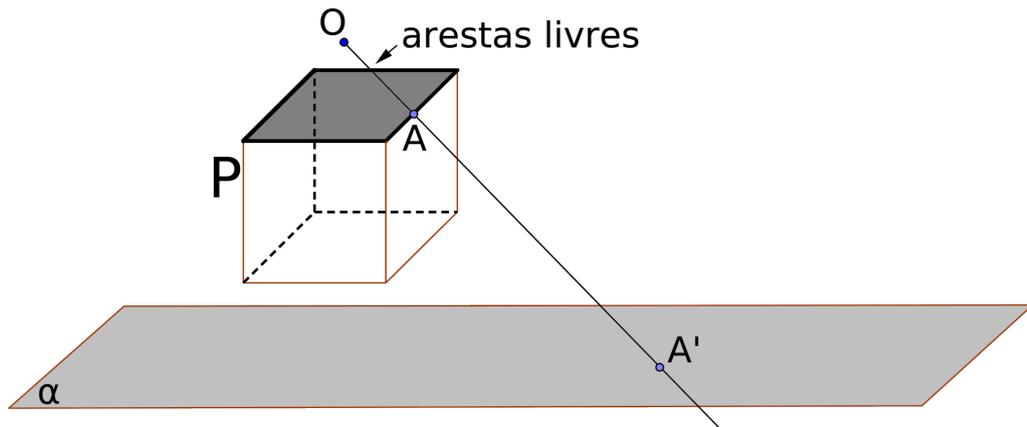


Figura 14: Projeção esterográfica do poliedro P .

Na figura, toda semi-reta com origem no ponto O que intersecta o poliedro P no ponto A tem sua projeção no plano α em um ponto A' . Este processo realiza o achatamento sugerido por Cauchy na Etapa 2. Em destaque na figura da imagem do poliedro está a face retirada apresentando as arestas livres. No plano α teremos um *poliedro planar* limitado pelo bordo.

ETAPA 3: Com P achatado, e portanto plano, traça-se diagonais que não se intersectam em cada face poligonal, formando-se triângulos. Em cada diagonal traçada, o número de vértices V não muda, enquanto o número de arestas A e de faces F aumentam uma unidade. Porém, este processo faz $V - A + F$ não se alterar. Pode-se efetuar o processo de diagonalização até que haja somente triângulos na decomposição dos polígonos internos da planificação de P .

O procedimento de traçar diagonais em cada face é possível conforme permite a Propriedade 1. De fato, o processo de diagonalizar cada face do poliedro planar não altera a expressão $V - A + F$, pois para cada diagonal traçada ocorre

$$V - (A + 1) + (F + 1) = V - A - 1 + F + 1 = V - A + F.$$

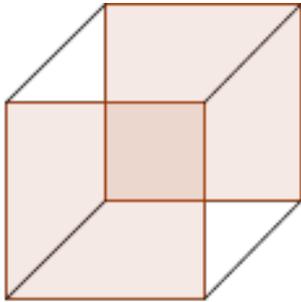


Figura 15: Cubo.

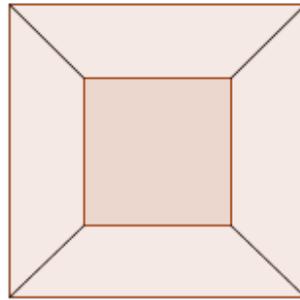


Figura 16: Planificação do Cubo.

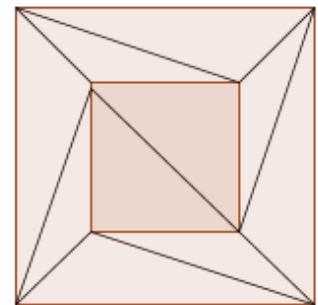


Figura 17: Polígono diagonalizado.

As Figuras 15, 16 e 17 ilustram as Etapas 1, 2 e 3. Na Figura 15 o poliedro em questão é um cubo e escolhe-se uma das faces para ser retirada. Na Figura 16 tem-se a planificação do cubo sobre um plano pelo processo da projeção estereográfica. Na Figura 17 tem-se cada face do poliedro planar diagonalizada, obtendo apenas triângulos.

ETAPA 4: Obtida a situação descrita na Figura 17, começa-se a retirar os triângulos-face que possuem alguma aresta livre. Vamos mostrar que ao retirar-se cada face, o número $V - A + F$ não se altera. Há 6 possibilidades, de retiradas de triângulos, tais como:

Caso 1 O triângulo a ser retirado possui apenas uma aresta livre. Aqui diminui-se uma unidade o número de A e F e este processo mantém $V - A + F$ constante.

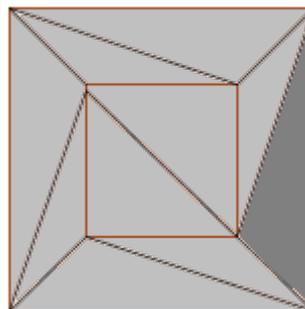


Figura 18: Situação do Caso 1.

O triângulo em destaque na Figura 18 possui uma aresta livre. Ao retirá-lo, temos

$$V - (A - 1) + (F - 1) = V - A + F + 1 - 1 = V - A + F.$$

Caso 2 O triângulo a ser retirado possui duas arestas livres. Neste caso diminui-se um vértice, duas arestas e uma face. Este processo ainda mantém $V - A + F$ constante.

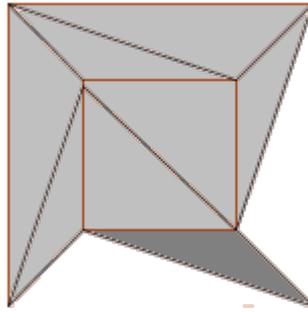


Figura 19: Situação do Caso 2.

Na Figura 19, o triângulo em destaque apresenta duas arestas livres. Ao retirá-lo, temos

$$(V - 1) - (A - 2) + (F - 1) = V - A + F - 2 + 2 = V - A + F.$$

Ao efetuar sucessivas retiradas de triângulos e houver apenas faces triangulares dispostas assim como destacado nos Casos 1 e 2, a expressão $V - A + F$ não se altera até restar a última face triangular. Por fim, a última face apresenta 3 vértices, 3 arestas e 1 face, então:

$$V - A + F \Rightarrow 3 - 3 + 1 = 1. \quad (3)$$

Com o acréscimo da primeira face retirada no início, F aumenta uma unidade, fazendo $V - A + F = 2$. Confirma-se assim o Teorema de Euler.

Porém, há mais 4 casos a considerar pelas possíveis disposição das faces triangulares no subpoliedro Q .

Caso 3 O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum de seus vértices é livre, isto é, seus 3 vértices pertencem também a outras faces que ainda não foram retiradas do poliedro.

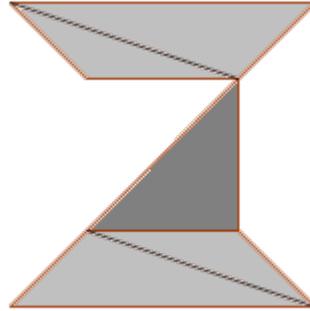


Figura 20: Situação do Caso 3.

A Figura 20 ilustra este triângulo em destaque. Porém, para mostrar o que ocorre com a expressão $V - A + F$ no Caso 3, faz-se necessário incluir algumas definições, tais como:

Definição 10. Um subpoliedro Q , de um poliedro P , é **conexo** quando não é possível escrevê-lo como $Q = Q_a \cup Q_b$ onde Q_a e Q_b são subpoliedros disjuntos de P , ou seja, $Q_a \cap Q_b = \emptyset$.

A Definição 10 acima afirma que se o subpoliedro Q é conexo, então é possível ligar dois vértices quaisquer de Q por alguma poligonal formada por suas arestas. Os subpoliedros das Figuras 18 e 19 são conexos. No caso do subpoliedro da Figura 20, sem retirar o triângulo em destaque, continua sendo conexo. Mas ao retirar tal triângulo, passamos a ter um subpoliedro desconexo, pois não é mais possível ligar quaisquer dois vértices por uma poligonal formada por arestas.

Definição 11. Um **ciclo** de um subpoliedro é uma linha poligonal fechada, tendo como lados as arestas de Q . Um ciclo $\gamma \subset Q$ é um bordo quando existe algum subpoliedro $Q_1 \subset Q$ onde γ é o conjunto das arestas livres de Q_1 .

Ao retirarmos o triângulo em destaque do subpoliedro Q da Figura 20, geramos Q desconexo, como já dito acima. Assim, passamos a ter os subpoliedros conexos Q_1 e Q_2 com bordos γ_1 e γ_2 , respectivamente, formadas pelos ciclos em destaque na Figura 21 a seguir. Chamamos Q_1 e Q_2 de *componentes conexas*.

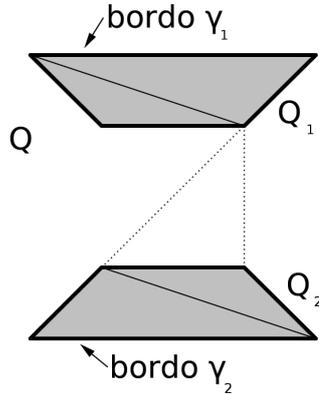


Figura 21: O subpoliedro desconexo Q com suas componentes conexas.

Com a retirada deste triângulo, mantém-se o número V , diminui-se F em uma unidade e A em duas unidades. Assim, a expressão $V - A + F$ passa a ser

$$V - (A - 2) + (F - 1) = V - A + F + 1.$$

Porém, o número de componentes conexas também aumenta em uma unidade. Ao efetuarmos sucessivas retiradas de faces triangulares dos subpoliedros Q_1 e Q_2 , e houver apenas faces dispostas conforme descrito nos Casos 1 e 2, teremos no final uma face triangular em cada componente conexa, conforme ilustra a Figura 22 abaixo. As sucessivas retiradas não alteram o número $V - A + F$, como já descrevemos, mantendo assim $V - A + F + 1$ para Q .

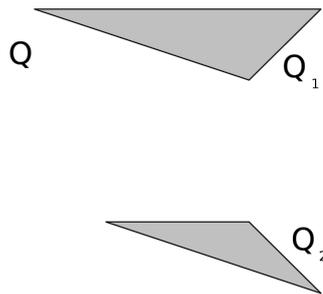


Figura 22: Fase final após sucessivas retiradas de faces triangulares em Q .

Por fim, retira-se uma face triangular, ou Q_1 ou Q_2 . A expressão $V - A + F + 1$ passa a ser $(V - 3) - (A - 3) + (F - 1) + 1 = V - A + F - 3 + 3 - 1 + 1 = V - A + F$. Com a última face triangular disposta, o Teorema de Euler se confirma de modo análogo ao

exposto na igualdade (3).

O mesmo ocorre se, ainda que na retirada de um triângulo dentro das condições do Caso 3, o subpoliedro Q já seja desconexo, isto é, já apresenta componentes conexas, então o número de componentes conexas também aumenta em uma unidade e a demonstração é feita de modo análogo.

Caso 4 O triângulo a ser retirado tem as três arestas livres mas nenhum de seus vértices é livre.

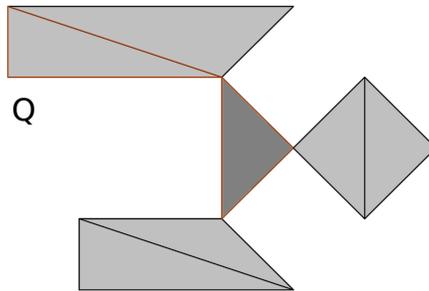


Figura 23: Situação do Caso 4.

Para o caso da Figura 23, o subpoliedro Q é conexo e ao retirar o triângulo destacado, o número $V - A + F$ passa a ser

$$V - (A - 3) + (F - 1) = V - A + F + 3 - 1 = V - A + F + 2,$$

pois com a face retirada mantém-se o número V , o número A diminui 3 unidades por causa das arestas livres da face retirada e o número F diminui uma unidade. Porém, Q torna-se desconexo (veja Figura 24 a seguir), aumentando em duas unidades suas componentes conexas.

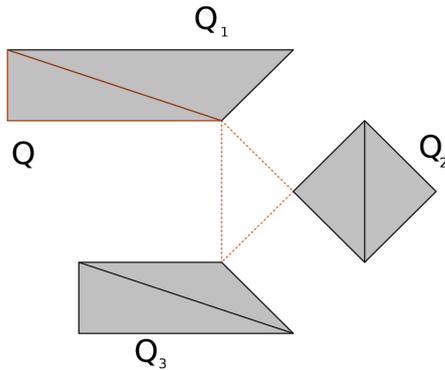


Figura 24: O subpoliedro desconexo Q , com suas componentes conexas Q_1 , Q_2 e Q_3 .

A partir das três componentes conexas Q_1 , Q_2 e Q_3 geradas, efetua-se sucessivas retiradas de faces triangulares. Se ocorrer apenas faces dispostas assim como tratado nos Casos 1, 2 e 3, teremos no final a situação destacada na Figura 25 abaixo.

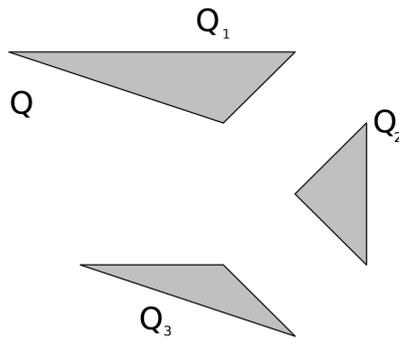


Figura 25: Após sucessivas retiradas, restam apenas faces triangulares em cada componente conexa.

Por fim, retira-se duas faces triangulares de quaisquer dos subpoliedros Q_1 , Q_2 ou Q_3 . O número $V - A + F + 2$ passa a ser

$$(V - 6) - (A - 6) + (F - 2) + 2 = V - A + F - 6 + 6 - 2 + 2 = V - A + F.$$

Com a última face triangular disposta, novamente o Teorema de Euler se confirma de modo análogo à igualdade (3).

Se Q é desconexo no momento de se retirar a face triangular nas condições do Caso 4, Q continua desconexo e aumenta em duas unidades suas componentes conexas. A

demonstração é análoga ao apresentado aqui.

Caso 5 O triângulo a ser retirado tem três arestas e um vértice livres.

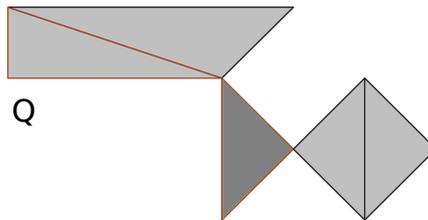


Figura 26: Situação do Caso 5.

O caso da Figura 26 é análogo ao caso da Figura 20.

Caso 6 O triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres.

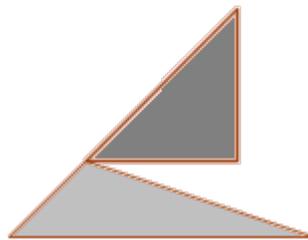


Figura 27: Situação do Caso 6.

Por fim, para o caso da Figura 27, a retirada deste triângulo não altera o número $V - A + F$, pois V diminui duas unidades, A diminui 3 unidades e F diminui uma unidade. Ao restar a última face triangular, a igualdade (3) confirma o Teorema de Euler. \square

Assim, a demonstração do Teorema de Euler por Cauchy, incrementada por [3] foi apresentada.

2.2 Demonstração apresentada pelo Professor Zoroastro Azambuja Filho.

Esta demonstração pode ser encontrada em [3], páginas 85-90. A demonstração do Teorema de Euler apresentada pelo Professor Zoroastro baseia-se na comparação entre os ângulos internos das faces do poliedro convexo e os ângulos internos do polígono gerado pela *sombra* da projeção do poliedro em um plano de apoio, tanto da parte *iluminada* quanto da parte *sombria*. As faces do poliedro são diagonalizadas, isto é, todos os polígonos que compõem as faces tornam-se triângulos.

Seja P um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces que atenda a Definição 5.

Propriedade 3. *Se um poliedro P é convexo, então todas as suas faces são polígonos convexos.*

Demonstração. Faremos a demonstração por contradição. Suponha que em um poliedro convexo P haja uma face não convexa. Então, existe uma reta s tal que intercepta o polígono formado pela referida face em mais de dois pontos. Então, existe alguma reta paralela a s , suficientemente próxima a s , que intercepta o poliedro P em mais de dois pontos, o que é absurdo pois P é convexo. Portanto, se P é convexo, todas as suas faces são polígonos convexos. \square

Com a Propriedade 3 acima estabelecida, iniciemos a demonstração apresentada pelo Professor supracitado.

Demonstração. Pela Propriedade 3, podemos diagonalizar cada face de P conforme a Propriedade 1 a fim de obter apenas triângulos. Em seguida, vamos projetar o poliedro P em um plano de apoio.

Escolhe-se uma reta r tal que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P . Toma-se o plano α tal que $\alpha \cap P = \emptyset$ e que seja perpendicular a r . O plano

α é chamado de *plano de apoio* e as demais retas paralelas a r , isto é, perpendiculares a α , são chamadas de *retas verticais*. Assim, α divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém P . Veja a Figura 28 abaixo.

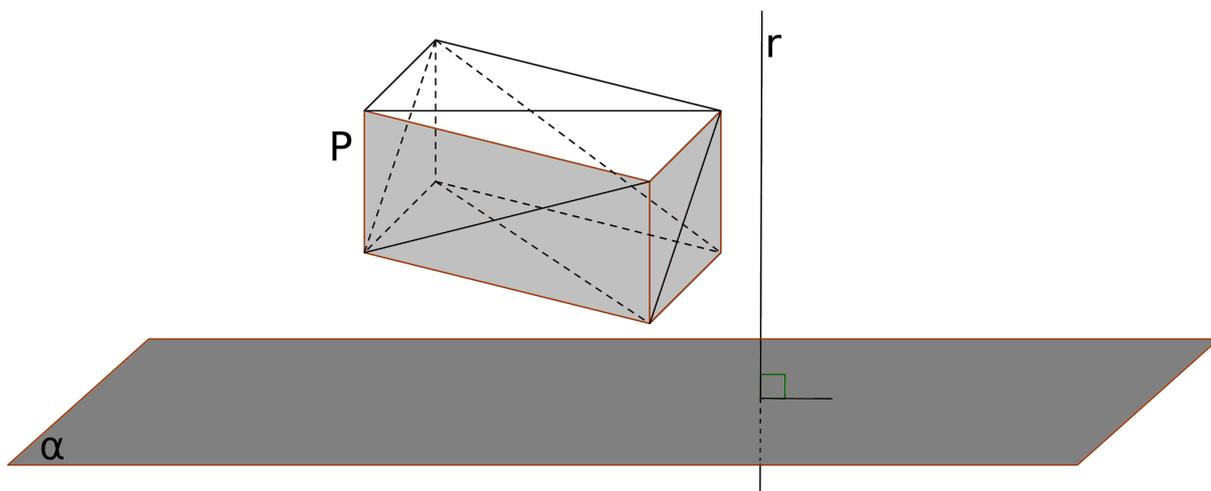


Figura 28: Poliedro convexo P diagonalizado suspenso sobre o plano de apoio α .

Para fixar as ideias, imagina-se que P esteja contido no semi-espaço *superior*, o qual é formado por todos os pontos acima de α . Para melhor visualizar o proposto, além da Figura 28, imagina-se o Sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior de modo que seus raios solares sejam as retas verticais. Desta forma, é possível associar uma função tal que relaciona cada ponto X do semi-espaço superior a um ponto X' de α , pertencentes a uma mesma reta vertical, numa relação sobrejetora. Matematicamente falando, seja $A = \{\text{semi-espaço superior}\}$ o conjunto formado por todos os pontos X , definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \alpha \\ X &\longmapsto X'. \end{aligned}$$

A imagem da aplicação f é a projeção do semi-espaço superior no plano α . Aqui, chamaremos X' de *sombra* de X . Assim adotaremos a seguinte convenção:

Definição 12. *A sombra de qualquer conjunto B , contido no semi-espaço superior, é o conjunto B' , contido em α , formado pelas sombras dos pontos de B .*

Seja P' a sombra de P contida em α . Como P é convexo, cada ponto de P' é sombra de um ou dois pontos de P . Por consequência, a sombra P' tem como contorno

um polígono conexo D' , que é sombra de uma poligonal fechada D formada por algumas arestas de P . Então, cada ponto de D' é sombra de exatamente um ponto de P . Chama-se de *contorno aparente* do poliedro P a poligonal D . Cada ponto interior de P' , que não pertence a D' , é sombra de exatamente dois pontos de P . Para distingui-los, o ponto mais alto de P , isto é, que está mais distante de α chama-se *ponto iluminado* e o mais baixo de *ponto sombrio*.

Destas afirmações, temos que a soma dos ângulos internos de uma face de P é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra, pois ambos polígonos são do mesmo gênero. Sejam V_i o número de vértices iluminados, V_s o número de vértices sombrios e V_c o número de vértices do contorno aparente D . Então, o número total de vértices é dado por $V = V_c + V_i + V_s$. Note que V_c é o número de vértices da poligonal D' do contorno P' .

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_c vértices em seu contorno e V_i pontos interiores, que são as sombras dos vértices iluminados de P . A soma de todos os ângulos deste polígono é:

$$S_1 = 2\pi V_i + \pi(V_c - 2). \quad (4)$$

Para que a equação (4) fique mais clara, observe a Figura 29 a seguir, onde temos a sombra da parte iluminada de P .

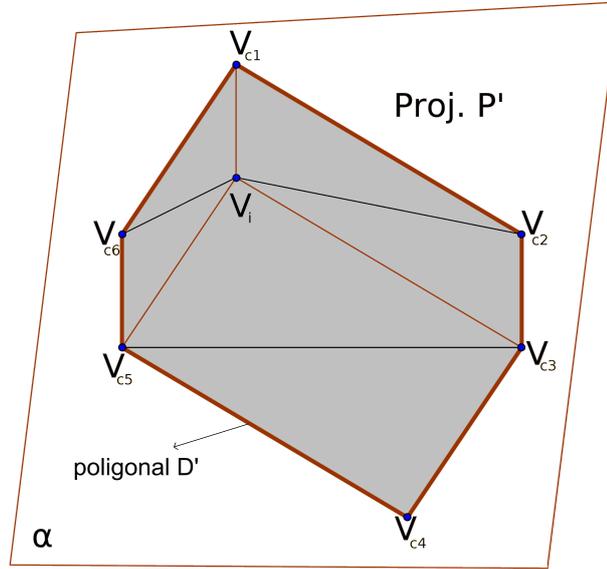


Figura 29: Projeção P' , em α , de um poliedro P .

Na Figura 29 acima, o polígono de exemplo é a sombra de um poliedro em forma de paralelepípedo retangular, assim como o ilustrado na Figura 28, com projeção dos pontos iluminados. Temos a poligonal D' , em destaque na figura e dada por $V_{c1}V_{c2}V_{c3}V_{c4}V_{c5}V_{c6}$, isto é, seis vértices do contorno aparente D , e um vértice V_i , isto é, um vértice iluminado. Na equação (4), $2\pi V_i$ indica a soma dos ângulos formados ao redor de cada ponto V_i no interior do polígono gerado pela projeção, enquanto $\pi(V_c - 2)$ indica a soma dos ângulos formados em cada vértice da poligonal D' .

De forma análoga, a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias é:

$$S_2 = 2\pi V_s + \pi(V_c - 2). \quad (5)$$

Somando as equações (4) e (5), obtemos:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \Rightarrow \\ S &= 2\pi V_i + 2\pi V_s + 2\pi(V_c - 2) \Rightarrow \\ S &= 2\pi(V_i + V_s + V_c - 2) \Rightarrow \\ S &= 2\pi(V - 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Concluimos, até aqui, que a soma dos ângulos internos dos polígonos gerados pela projeção de um poliedro P sobre um plano, considerando a projeção dos vértices ilu-

minados e sombrios, é dada pela igualdade (6).

O poliedro P foi dividido em F triângulos pela diagonalização, como fizemos no início da demonstração. Então, a soma S_3 dos ângulos de todas as faces é dada $S_3 = \pi F$. Porém, pela Propriedade 2, temos $2A = 3F$ pois o poliedro possui apenas faces triangulares. Podemos escrever, então, $F = 2A - 2F$. A soma dos ângulos das faces passa a ser:

$$\begin{aligned} S_3 &= \pi(2A - 2F) \Rightarrow \\ S_3 &= 2\pi(A - F). \end{aligned} \tag{7}$$

Para concluir, as equações (7) e (6) são iguais, pois a projeção de uma face e a própria face têm a mesma soma dos ângulos internos, já que são polígonos de mesmo gênero. Portanto:

$$\begin{aligned} 2\pi(A - F) &= 2\pi(V - 2) \Rightarrow \\ A - F &= V - 2 \Rightarrow \\ V - A + F &= 2. \end{aligned}$$

□

Assim, mais uma demonstração do Teorema de Euler é apresentada.

2.3 Demonstração por Adrien Marie Legendre

Adrien Marie Legendre foi um matemático francês nascido em 1752, apresentou a primeira demonstração inteligível do Teorema de Euler utilizando geometria não-euclidiana, precisamente a Geometria Esférica, com base na fórmula de Girard da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Sua demonstração baseia-se em poliedros convexos, conforme Definição 7. Toma-se uma superfície esférica com centro no interior do poliedro. As aplicações que se seguirão têm como base a superfície esférica contida no poliedro. Para o poliedro contido no interior da superfície esférica, a demonstração é inteiramente análoga. Do poliedro convexo, considera-se todas as faces em forma de triângulos. Isto é possível por meio da diagonalização das faces poligonais que não sejam triângulos, pois a cada diagonal traçada não altera-se o número de

vértices V e aumenta-se uma unidade o número de arestas A e faces F . Este acréscimo se anula na expressão $V - A + F$.

A seguir apresentaremos algumas definições que darão base às demonstrações do Teorema de Euler por Legendre.

Definição 13. *Seja O um ponto e r um número real positivo. Chama-se **circunferência** de centro O e raio r ao conjunto de pontos P do plano onde a distância euclidiana entre O e P seja igual a r , isto é, $d(O, P) = r$.*

Definição 14. *Seja O um ponto e r um número real positivo. Chama-se **esfera** de centro O e raio r ao conjunto de pontos P do espaço onde a distância entre O e P seja menor ou igual a r , isto é, $d(O, P) \leq r$.*

Definição 15. *Chama-se **superfície esférica** de centro O e raio r ao conjunto de pontos P do espaço, onde a distância de P a O seja igual a r , isto é, $d(O, P) = r$.*

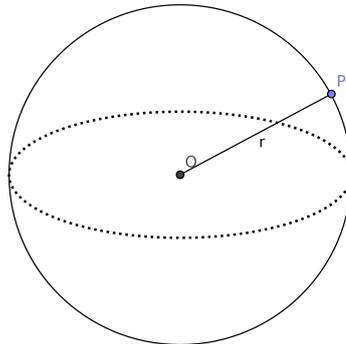


Figura 30: Superfície Esférica.

Propriedade 4. *A interseção de uma superfície esférica e um plano que passa por seu centro é uma circunferência tal que possui mesmo centro e mesmo raio da superfície esférica.*

Demonstração. Seja E' a superfície esférica de uma esfera E com centro O e raio r . Seja α o plano que passa por O . Assim, a interseção $\alpha \cap E'$ é o conjunto de pontos de α que estão a uma distância r do ponto O . Portanto, a interseção de α e E' é uma circunferência. \square

Definição 16. A circunferência que se trata a Propriedade 4 é chamada **circunferência máxima**.

Pela Definição 16, a *circunferência máxima* é a circunferência com maior raio contida na esfera, isto é, o raio da circunferência máxima possui o mesmo comprimento do raio da esfera.

Definição 17. Chamemos por **Hemisfério** a superfície formada por uma semi-esfera, isto é, uma superfície esférica dividida por alguma circunferência máxima.

Definição 18. Chamemos por **Triângulo Esférico** uma figura sobre a superfície esférica que está contida em algum hemisfério cujos três lados são arcos de círculos máximos, ambos menores do que uma semi-circunferência.

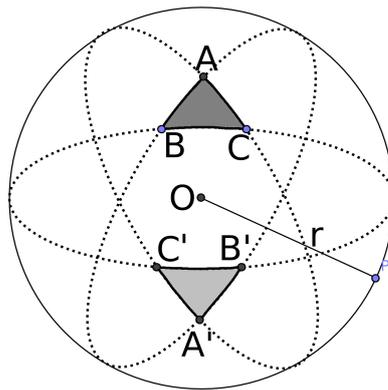


Figura 31: Triângulo Esférico.

A Figura 31 apresenta dois triângulos esféricos em hemisférios opostos.

Definidos alguns elementos esféricos, retomemos os caminhos para a demonstração do Teorema de Euler por Legendre. Como dito, considera-se a superfície esférica E com centro O no interior do poliedro P . Projetando radialmente o poliedro P sobre a superfície esférica E , conforme a Figura 32 a seguir, temos que o ponto A' da superfície esférica E é a projeção radial do ponto A do poliedro P .

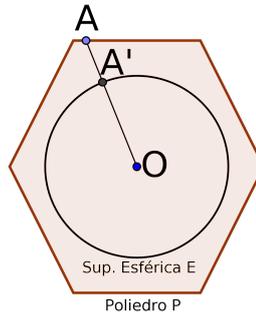


Figura 32: Projeção Radial do Poliedro à Superfície Esférica.

Com efeito, é possível estabelecer uma função tal que relaciona a cada ponto A do poliedro P a um ponto A' da superfície esférica E pertencente a um mesmo segmento de reta com extremos nos pontos A e O . Podemos então escrever,

$$f : P \longrightarrow E$$

$$A \longmapsto A'.$$

Note que f é função sobrejetora, pois todo ponto em E possui projeção radial de algum ponto de P . Note ainda que f é injetora, pois pontos distintos em P são projetados em pontos distintos de E .

Pela função f , obtem-se uma decomposição de E em F triângulos esféricos, no formato da Definição 18, dispostos de modo semelhante às faces de P , contendo A lados e V vértices.

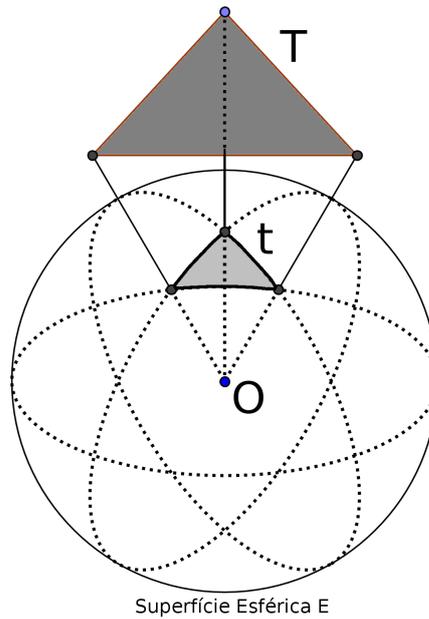


Figura 33: Projeção radial de uma face.

Na Figura 33 temos a ilustração da projeção radial de uma face triangular T do poliedro P em um triângulo esférico t da superfície esférica E pela função f .

Legendre utilizou-se da Fórmula de Girard, enunciada abaixo, para concluir sua demonstração.

Teorema 2. (Fórmula de Girard) *Se os ângulos internos α , β e γ de um triângulo esférico forem medidos em radianos, então a soma $\alpha + \beta + \gamma$ é dada pela fórmula: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{r^2}$, onde S é a área do triângulo esférico.*

Para demonstrar o Teorema 2, faz-se necessário definirmos mais alguns elementos esféricos, tais como:

Definição 19. *Chamemos de **Fuso** a uma região da superfície esférica compreendida entre duas circunferências máximas.*

As duas circunferências máximas que formam o fuso têm, por construção, dois pontos em comum diametralmente opostos. Define-se ainda *ângulo* do fuso ao ângulo formado entre as duas circunferências máximas que constituem os lados do fuso.

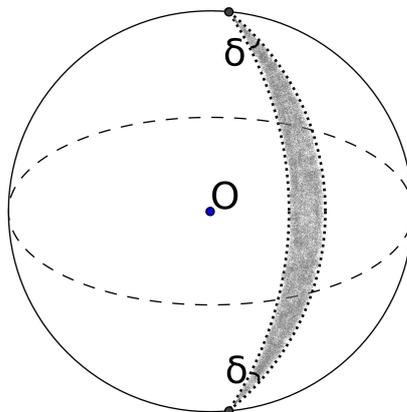


Figura 34: Fuso.

A Figura 34 representa um fuso com ângulo δ . Quanto a área do fuso, podemos estabelecer a seguinte propriedade:

Propriedade 5. A área S' do fuso de ângulo δ é dada por $S' = 2\delta r^2$.

Demonstração. Sabe-se que a área S da superfície esférica é dada pela fórmula

$$S = 4\pi r^2,$$

mas podemos associar proporcionalmente a área S em função do ângulo δ do fuso, isto é, $S = 2\delta r^2$, pois a superfície esférica é um fuso de ângulo $\delta = 2\pi$ radianos. \square

Definição 20. Dado um ponto X da superfície esférica, então a **antípoda** X' de X é o único ponto da superfície esférica tal que pertence ao segmento de reta $\overline{XX'}$ que passa pelo centro O .

Assim, pela Definição 20, pode-se afirmar que os pontos X e X' são diametralmente opostos.

Definição 21. Dado um fuso λ formado pelas antípodas X e X' da superfície esférica, o fuso λ' é também formado pelas antípodas de λ e está contido no hemisfério oposto ao de λ .

Propriedade 6. A área do fuso λ é igual a área do fuso λ' .

Demonstração. O ângulo δ do fuso λ é igual ao ângulo δ' do fuso λ' , pois são opostos pelo vértice. Então, $2\delta r^2 = 2\delta' r^2$. \square

Definição 22. A reunião $\phi = \lambda \cup \lambda'$ é chamado **fuso completo**.

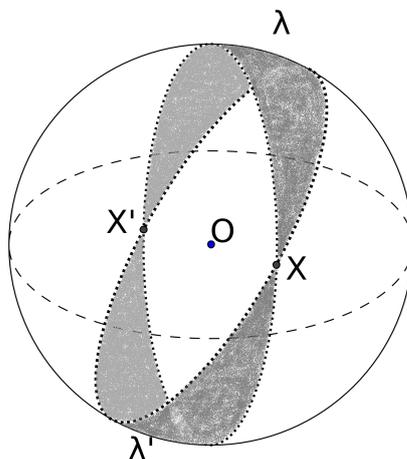


Figura 35: Fuso Completo $\phi = \lambda \cup \lambda'$.

Agora, demonstraremos o Teorema 2:

Demonstração. Consideremos um hemisfério H de uma superfície esférica de raio r que contenha o triângulo esférico XAB de área S , cujos ângulos são α , β e γ , conforme Figura 36 a seguir. O hemisfério H é a semi-esfera visível da superfície esférica, em destaque nesta figura, formado pela circunferência máxima C .

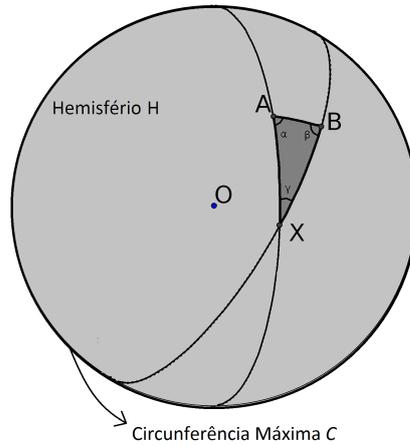


Figura 36: Triângulo esférico XAB contido no hemisfério H .

Consideremos agora três regiões contidas em H . A primeira região, que podemos denominar de R_γ , é formada prolongando, nos dois sentidos, os arcos XB e XA que formam o ângulo γ . A Figura 37 abaixo ilustra a região R_γ em destaque no hemisfério H .

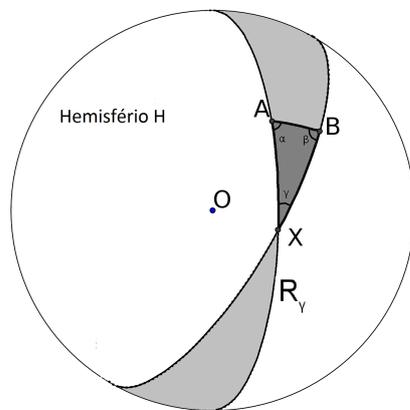


Figura 37: Região R_γ em H .

A segunda região, agora denominada R_α , é formada prolongando, também nos dois sentidos, os arcos AB e AX que formam o ângulo α . A Figura 38 a seguir ilustra a região R_α em destaque no hemisfério H .

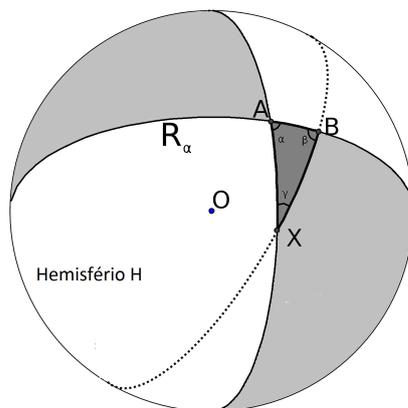


Figura 38: Região R_α em H .

A terceira região, que denominamos R_β , é formada prolongando, ainda nos dois sentidos, os arcos BA e BX que formam o ângulo β . A Figura 39 abaixo ilustra a região R_β em destaque no hemisfério H .

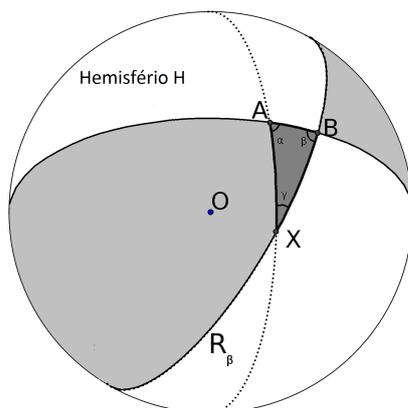


Figura 39: Região R_β em H .

Pela Propriedade 5, temos que as áreas das regiões R_γ , R_α e R_β são dadas pelas expressões $2\gamma r^2$, $2\alpha r^2$ e $2\beta r^2$, respectivamente. A soma destas três áreas equivale a área do hemisfério H , que é a metade da área da superfície esférica, acrescida ao dobro da área do triângulo esférico, pois a área deste triângulo foi contada três vezes ao somarmos as áreas das regiões R_γ , R_α e R_β . Temos, então

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2S.$$

Simplificando a igualdade acima por $2r^2$, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{r^2}.$$

□

Esta demonstração foi feita por Albert Girard, geômetra francês, em 1629.

Como dito anteriormente, o poliedro fica decomposto na superfície esférica em F triângulos esféricos, A lados e V vértices. Para cada triângulo t , ilustrado na Figura 33, vale a Fórmula de Girard. Se K_t é a soma dos ângulos internos do triângulo t , então $K_t = \pi + \frac{S_t}{r^2}$, onde S_t é a área de t . Como temos F faces, somando os ângulos internos de todas elas, temos

$$\sum K_t = F\pi + \frac{\sum S_t}{r^2}. \quad (8)$$

De (8), temos que $\sum K_t = 2\pi V$ já que o ângulo em torno de cada vértice é 2π . Ainda, $\sum S_t = 4\pi r^2$ pois a soma de todas as faces triangulares cobre a área total da superfície esférica E . Então, a equação (8) fica:

$$\begin{aligned} 2\pi V &= F\pi + \frac{4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow \\ 2\pi V &= F\pi + 4\pi \Rightarrow \\ 2V - F &= 4. \end{aligned} \quad (9)$$

Como todo triângulo é formado por 3 lados e cada aresta é lado a exatamente dois triângulos, temos $3F = 2A$ (conforme demonstrado na Propriedade 2). Podemos escrever $3F = 2A$ como $F = \frac{2A}{3}$ e substituir em (9), obtemos:

$$\begin{aligned} 2V - 2A + 2F &= 4 \Rightarrow \\ V - A + F &= 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Assim, a igualdade (10) confirma o Teorema de Euler.

2.4 Poliedros Regulares

Os poliedros regulares, também conhecidos como poliedros de Platão (mais detalhes de sua história na Seção 1.1), têm como faces polígonos regulares. O *tetraedro* possui

4 faces em forma de triângulos equiláteros. O *hexaedro*, também chamado *cubo*, possui 6 faces em forma de quadrados. O *octaedro* e o *icosaedro* possuem, respectivamente, 8 e 20 faces em forma de triângulos equiláteros. O *dodecaedro* possui 12 faces em forma de pentágonos regulares. A Figura 2 ilustra tais poliedros. Diversos elementos da natureza apresentam estes formatos, como alguns minerais e compostos químicos ⁶.

Com o Teorema de Euler para poliedros demonstrado, faremos uso deste para demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3. *Existem apenas cinco poliedros regulares.*

Demonstração. Seja l o número de lados de cada face e seja a o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos, assim, $2A = lF = aV$ pelas equações (1) e (2) da Seção 1.4. Separando cada parcela, temos:

$$A = \frac{lF}{2}, \quad (11)$$

$$V = \frac{lF}{a}. \quad (12)$$

Substituindo as equações (11) e (12) no Teorema de Euler, temos:

$$\begin{aligned} \frac{lF}{a} - \frac{lF}{2} + F &= 2 \Rightarrow \\ 2lF - alF + 2aF &= 4a \Rightarrow \\ F(2l - al + 2a) &= 4a \Rightarrow \\ F &= \frac{4a}{2l - al + 2a}. \end{aligned} \quad (13)$$

Da última igualdade e como F é inteiro e positivo, concluímos que:

$$\begin{aligned} 2l - al + 2a &> 0 \Rightarrow \\ 2l + 2a &> al \Rightarrow \\ 2(l + a) &> al \Rightarrow \\ 2 &> \frac{al}{l + a}. \end{aligned} \quad (14)$$

⁶A estrutura molecular do gás metano CH_4 e do solvente diclorometano CH_2Cl_2 apresentam-se na forma de tetraedro, segundo [14].

Temos $l \geq 3$ e $a \geq 3$, pois o poliedro atende a Definição 5. Da desigualdade (14), tomando $a = 3$, l fica:

$$\begin{aligned} 2 &> \frac{3l}{l+3} \Rightarrow \\ 2l+6 &> 3l \Rightarrow \\ l &< 6. \end{aligned}$$

Tomando $l = 3$, de modo análogo temos $a < 6$. Assim, $l, a \in \{3, 4, 5\}$.

Analisando os casos para l , pela igualdade (13), temos que:

- $l = 3 \Rightarrow F = \frac{4a}{6 - 3a + 2a} = \frac{4a}{6 - a}$.

Aqui, se $a = 3$, $F = 4$. Se $a = 4$, $F = 8$ e se $a = 5$, $F = 20$.

- $l = 4 \Rightarrow F = \frac{4a}{8 - 4a + 2a} = \frac{4a}{8 - 2a}$.

Aqui, $a = 3$ faz $F = 6$.

- $l = 5 \Rightarrow F = \frac{4a}{10 - 5a + 2a} = \frac{4a}{10 - 3a}$.

Aqui, $a = 3$ faz $F = 12$.

□

Assim, o número de faces obtidas foram 4, 6, 8, 12 e 20, formando os poliedros regulares tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, respectivamente, mencionados no início desta seção.

3 Capítulo 3 - Bases Legais e Aplicações

Nesta seção apresentaremos as bases legais do Sistema Educacional Brasileiro, tais como a LDB, PCN e outros, que versam sobre o conteúdo de poliedros e Teorema de Euler. Fizemos uma coletânea de questões dos vestibulares em diversas Universidades que envolvem os conceitos aqui abordados do Teorema de Euler. Um relatório do desempenho dos alunos na resolução e discussão das questões apresentadas ajuda como referência didático-pedagógica no trabalho do professor em sala de aula nas ocasiões que os conceitos sobre o Teorema de Euler se fizer presente.

3.1 Bases Legais

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 20 de dezembro de 1996⁷, também conhecida com LDB, versa sobre a formação básica do estudante para o Ensino Fundamental do seguinte modo:

Art. 32°. O ensino fundamental, com duração mínima de oito anos, obrigatório e gratuito pela escola pública, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante:

1. O desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
2. A compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores que fundamentam a sociedade;
3. O desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e

⁷Veja em [16].

valores;

4. O fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

Nesta perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais prevêem que os objetivos do Ensino Fundamental sejam:

- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
- perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
- conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- utilizar as diferentes linguagens - verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal - como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos

e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;

- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação([17], páginas 55 e 56).

Para o Ensino Fundamental, a matemática deve possibilitar a inserção dos alunos como cidadãos no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Pelo fato da matemática estar inserida no cotidiano das pessoas, fazendo-as "quantificar, calcular, localizar um objeto no espaço, ler gráficos e mapas, fazer previsões (PCN [17] página 59), os conteúdos matemáticos devem cumprir os seguintes requisitos:

- incorporam o estudo dos recursos estatísticos constituindo um bloco de conteúdos denominado Tratamento de Informação;
- indicam aspectos novos no estudo dos números e operações, privilegiando o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão de diferentes significados das operações;
- propõem novo enfoque para o tratamento da álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo;
- enfatizam a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e espacial;
- destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações;
- apresentam uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições;
- recomendam o uso de calculadoras nas aulas de Matemática ([17], página 60).

Com atenção especial sobre articulação da geometria plana e espacial para a exploração do espaço e suas representações, os conceitos básicos de Poliedros e o Teorema

de Euler podem ser inseridos nos conteúdos de matemática do Ensino Fundamental, para que os estudantes desta etapa da Educação Básica construam noções básicas sobre arestas, vértices e faces, reconhecendo diversos objetos do cotidiano que podem assumir o formato de um poliedro. Ainda nestes conteúdos, há espaço para a exploração de planificações dos poliedros, desenvolvendo habilidades intelectuais.

Agora sobre o Ensino Médio, a LDB versa sobre sua finalidade como etapa final da educação básica na formação do estudante, como:

Art. 35º. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

1. A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos;
2. A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
3. O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
4. A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Com base na continuidade dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio prevêm maior maturidade por parte do aluno, de modo que "...os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (PCN [18], página 6)." Os objetivos do ensinar matemática, para os PCN's, baseiam-se em:

Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que corres-

pondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico (PCN [18], página 6).

Os PCN's dividem as disciplinas do Ensino Médio em três áreas de conhecimento, a saber: a área de *Linguagens e Códigos*, a de *Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias* e a de *Ciências Humanas*. As competências e habilidades trabalhadas nesta etapa da Educação Básica, quanto a **Representação e Comunicação** são:

Desenvolver a capacidade de comunicação.

- Ler e interpretar textos de interesse científico e tecnológico;
- Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...);
- Expressar-se oralmente com correção e clareza, usando a terminologia correta;
- Produzir textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões;
- Utilizar as tecnologias básicas de redação e informação, como computadores;
- Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos;
- Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade;
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações;
- Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos (PCN [18], página 12).

As competências e habilidades quanto a **Investigação e Compreensão** são:

- Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções.
- Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender.
- Formular questões a partir de situações reais e compreender aquelas já enunciadas;
- Desenvolver modelos explicativos para sistemas tecnológicos e naturais;
- Utilizar instrumentos de medição e de cálculo;
- Procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Elaborar estratégias de enfrentamento das questões;
- Interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações;
- Articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar;
- Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais;
- Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades;
- Fazer uso dos conhecimentos da Física, da Química e da Biologia para explicar o mundo natural e para planejar, executar e avaliar intervenções práticas;
- Aplicar as tecnologias associadas às Ciências Naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida (PCN [18], página 12).

E, por fim, as competências e habilidades quanto a **Contextualização Sócio-Cultural** são:

- Compreender e utilizar a ciência, como elemento de interpretação e intervenção, e a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático.
- Utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais;
- Associar conhecimentos e métodos científicos com a tecnologia do sistema

produtivo e de serviços;

- Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio;
- Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolveram por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade;
- Entender a relação entre o desenvolvimento de Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuser e se propõe solucionar;
- Entender o impacto das tecnologias associadas às Ciências Naturais, na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social (PCN [18], página 13).

O conteúdo de Poliedros e o Teorema de Euler no ensino médio proporciona experimentação das competências e habilidades destacadas acima. O conhecimento geométrico necessário para compreensão dos elementos dos poliedros e do Teorema de Euler aperfeiçoa a leitura e a ação sobre a realidade em objetos do cotidiano do aluno. A demonstração sobre a existência de apenas cinco poliedros regulares, por exemplo, pode ser trabalhada em sala de aula com o objetivo de desenvolver habilidades como dedução lógica, interpretação algébrica e análise qualitativa de possibilidades. A demonstração do Teorema de Euler proposta por Legendre, como outro exemplo, pode ser abordada em sala de aula com recursos didáticos que favoreçam a compreensão das etapas da demonstração, como figuras impressas e esfera de isopor desenhada com as arestas do poliedro projetado na superfície esférica. Este procedimento sistematiza informações importantes para compreensão da situação-problema abordada. Proporciona também interpretação e crítica a partir da demonstração.

As diversas relações sociais, culturais e profissionais requerem alguma competência em Matemática. O aluno em formação necessita dominar certos conceitos matemáticos “tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (PCN [18], página 40).” As competências e habilidades específicas em Matemática são:

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática;
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- Expressar-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta;
- Produzir textos matemáticos adequados;
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação;
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc);
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sócio-cultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade;
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas li-

mitações e potencialidades (PCN [18], página 46).

Mais uma vez, o conteúdo de Poliedros e o Teorema de Euler podem contribuir fortemente para desenvolver as competências e habilidades sugeridas acima, principalmente no campo da Investigação e Compreensão, pois formular hipóteses e prever resultados, selecionar estratégias de resolução de problemas e distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos são explorados no tratamento das demonstrações e, principalmente, na resolução dos exercícios propostos.

Nas unidades temáticas, os conteúdos de poliedros e o Teorema de Euler estão colocados com o tema **Geometria Espacial**, conforme [19] páginas 123 à 125.

3.2 Aplicações do Teorema de Euler nos vestibulares

Aqui apresentamos 15 questões selecionadas em vestibulares recentes cobradas para o acesso em Universidades espalhadas pelo Brasil.

Questão 01 - IFSP 2013

A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.



Figura 40: www.europeana.eu - Acesso em 15.10.2012. Adaptado.

Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é:

- a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Questão 02 - IBMEC SP 2012 (Adaptada)

De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.

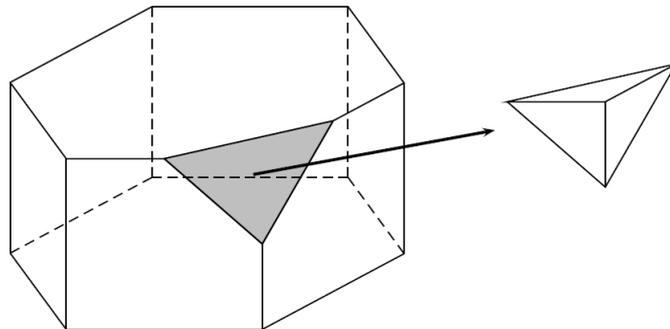


Figura 41: Prisma Hexagonal Regular. Fonte: os autores.

O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é

- a) 24 b) 20 c) 18 d) 16 e) 12

Questão 03 - UEM PR 2012 (Adaptada)

Assinale o que for correto.

1. Considerando que a distância entre dois átomos de hidrogênio é diferente da distância entre um átomo de nitrogênio e um átomo de hidrogênio, pode-se afirmar que a geometria molecular da molécula de amônia é representada por uma forma geométrica classificada como poliedro convexo regular.
2. A geometria molecular do PCl_5 é representada por uma forma geométrica classificada como poliedro convexo não-regular.
3. A geometria molecular do BrF_5 é representada por uma forma geométrica classificada como poliedro convexo regular.
4. A relação de Euler $V - A + F = 2$ (onde V = número de vértices, A = número de arestas, F = número de faces) é válida para a figura geométrica formada pela molécula de SF_6 .
5. Na figura geométrica formada pela molécula de metano, não existe paralelismo entre duas arestas quaisquer no espaço, enquanto que para a figura geométrica formada pela molécula SF_6 existe.

Questão 04 - UFPE 2012 (Adaptada)

Para embalar uma bola cheia, perfeitamente esférica, procura-se armar uma caixa poliédrica que se ajuste completamente à bola, cuja superfície deve ficar tangente a todas as faces do poliedro. Para isso, servem os seguintes poliedros:

1. Um tetraedro regular.
2. Um cubo.
3. Um octaedro regular.
4. Um prisma regular, com a altura escolhida adequadamente.
5. Um tronco de pirâmide regular, com a altura escolhida adequadamente.

Questão 05 - UECE 2012

Se um poliedro convexo tem exatamente 20 faces e todas são triangulares, então o número de vértices deste poliedro é

- a) 16 b) 14 c) 12 d) 10

Texto comum à Questão 6

Em 1985, foi divulgada, numa publicação científica, a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam vértices de um poliedro convexo com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais. Em homenagem ao arquiteto norte-americano Buckminster Fuller, a molécula foi denominada fulereno. (GIOVANNI, BONJORNO, 2011).

GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto, **Matemática:** uma nova abordagem. São Paulo: FTD, v. 2, 2011.

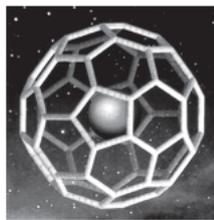


Figura 42: DANTE, Luiz Roberto, **Matemática:** contexto e aplicações, São Paulo: Ática, v. 2, 2011, p. 354.

Questão 06 - UEFS BA 2012

A partir dessa informação, pode-se concluir que o número de átomos de carbono em uma molécula de fulereno é

- a) 56 b) 60 c) 64 d) 68 e) 72

Questão 07 - FAVIP PE 2012 (Adaptada)

O icosaedro regular ilustrado a seguir, juntamente com sua planificação, tem sua superfície formada por 20 triângulos equiláteros com lado medindo 2 cm. Assinale a alternativa incorreta referente ao icosaedro.

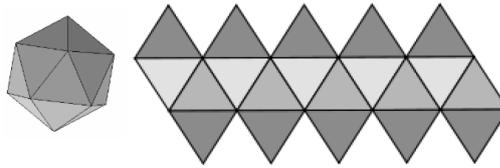


Figura 43: Icosaedro Regular. Fonte: os autores.

1. O icosaedro tem 30 arestas.
2. O icosaedro tem 14 vértices.
3. A área da superfície do icosaedro mede $20\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
4. O icosaedro tem 66 diagonais.
5. Usando 5 cores diferentes podemos colorir as faces do icosaedro, de tal maneira que faces adjacentes tenham cores distintas.

Questão 08 - UFPE 2011 (Adaptada)

Existem 5 e apenas 5 poliedros regulares convexos. Tal afirmação é verdadeira considerando-se o seguinte argumento: cada vértice de um poliedro é determinado por pelo menos três de suas faces. O ângulo formado por essas faces deverá ser menor que 360° para que o poliedro seja regular. Com relação a esse argumento, podemos afirmar que:

1. O argumento é falso quando as faces do poliedro forem hexágonos regulares.
2. O argumento é verdadeiro apenas quando as faces são quadrados ou triângulos equiláteros.
3. O argumento é falso quando as faces do poliedro são pentágonos regulares.
4. O argumento é verdadeiro para o octaedro e o tetraedro.
5. O argumento é verdadeiro apenas para o tetraedro e o icosaedro.

Questão 09 - UPE 2011

Um poliedro convexo possui 8 (oito) faces, todas triangulares. Nestas condições, assumindo que tal poliedro exista, o número esperado de vértices para este será:

- a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

Questão 10 - ITA SP 2011

Considere as afirmações:

- I. Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $a = 120^\circ$.
- II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30° , 45° , 50° , 50° e 170° .
- III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.
- IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880° .

Destas, é(são) correta(s) apenas:

- a) II b) IV c) II e IV d) I, II e IV e) II, III e IV
-

Questão 11 - ESPM SP 2011

A superfície de um poliedro convexo é formada por 3 quadrados e 6 triângulos. O número de vértices desse poliedro é:

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9
-

Questão 12 - UECE SP 2010

O número de arestas de uma pirâmide que tem 12 faces é:

- a) 14 b) 16 c) 18 d) 22
-

Questão 13 - UEPG PR 2010 (Adaptada)

Dado que um poliedro convexo tem 2 faces pentagonais, 4 faces quadrangulares e n faces triangulares, assinale o que for correto.

- 1. Se o número de vértices do poliedro é 11, então $n = 4$.
- 2. Se o número de faces do poliedro é 16, então $n = 10$.
- 3. O menor valor possível para n é 1.
- 4. Se a soma dos ângulos de todas as faces do poliedro é 3600° , então $n = 6$.
- 5. Se o número de arestas do poliedro é 25, então $n = 8$.

Questão 14 - UEPB 2009

Um poliedro convexo tem 25 arestas e todas as suas faces pentagonais. Então o número de faces e de vértices do poliedro são respectivamente:

- a) 14 e 16 b) 12 e 14 c) 10 e 14 d) 10 e 12 e) 10 e 17
-

Questão 15 - UEPG PR 2009 (Adaptada)

Ligando-se os vértices de um polígono convexo contido no plano α a um ponto qualquer fora desse plano, obtém-se um poliedro convexo. A respeito desse poliedro assim formado, assinale o que for correto.

1. Se ele tem 7 vértices, a soma dos ângulos de todas as suas faces é 1.800° .
2. Ele sempre tem um número par de arestas.
3. Se ele tem 8 faces, o número de suas arestas é 14.
4. O número de faces e o número de vértices são sempre iguais.
5. Se ele tem 20 arestas, o número de seus vértices é 11.

Gabarito das questões propostas:

| | | |
|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| Questão 01 - A | Questão 02 - B | Questão 03 - 2, 4 e 5 |
| Questão 04 - Todas verdadeiros | Questão 05 - C | Questão 06 - B |
| Questão 07 - 2 | Questão 08 - 1 e 4 | Questão 09 - E |
| Questão 10 - C | Questão 11 - D | Questão 12 - D |
| Questão 13 - 1, 2 4 e 5 | Questão 14 - E | Questão 15 - Todas verdadeiras. |

3.3 Atuação em Sala de Aula

O conteúdo deste trabalho foi aplicado aos alunos do 3º ano do Ensino Médio. Foram previstas 6 aulas para todo o desenvolvimento. Na primeira aula, os alunos tiveram contato com a definição formal de poliedro e tiveram revisão de algumas propriedades dos polígonos, como soma dos ângulos internos e diagonalização. Para a definição e visualização de diversos poliedros, convexos e não-convexos, foi utilizado um projetor e slides. A revisão das propriedades dos polígonos foi realizada no quadro negro. Na segunda aula, foi demonstrada as relações entre vértices, arestas e faces, com foco nas desigualdades $2A \geq 3F$ e $2A \geq 3V$, e os alunos conheceram os cinco poliedros regulares. Nesta aula, para a demonstração das relações, foi utilizado o quadro negro. Os cinco poliedros regulares foram impressos, em tamanho grande e em papel comum, e fixados no quadro negro com fita adesiva. Ao lado de cada figura, foi elaborada uma tabela com as características de cada poliedro. Na terceira aula, foi demonstrado o Teorema de Euler por Legendre. Foi impresso, em tamanho grande e em papel comum, uma figura que ilustra o triângulo esférico e fixado no quadro negro com fita adesiva. Em seguida foi demonstrada a Relação de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Para esta demonstração, foi utilizada uma esfera de isopor com desenho de um fuso completo (conforme Figura 44 abaixo). Para os alunos visualizarem as regiões R_α , R_β e R_γ , conforme demonstrado no Teorema 2, foram utilizadas novamente figuras impressas, em tamanho grande, e fixadas no quadro negro com fita adesiva, acompanhando o texto escrito da demonstração.

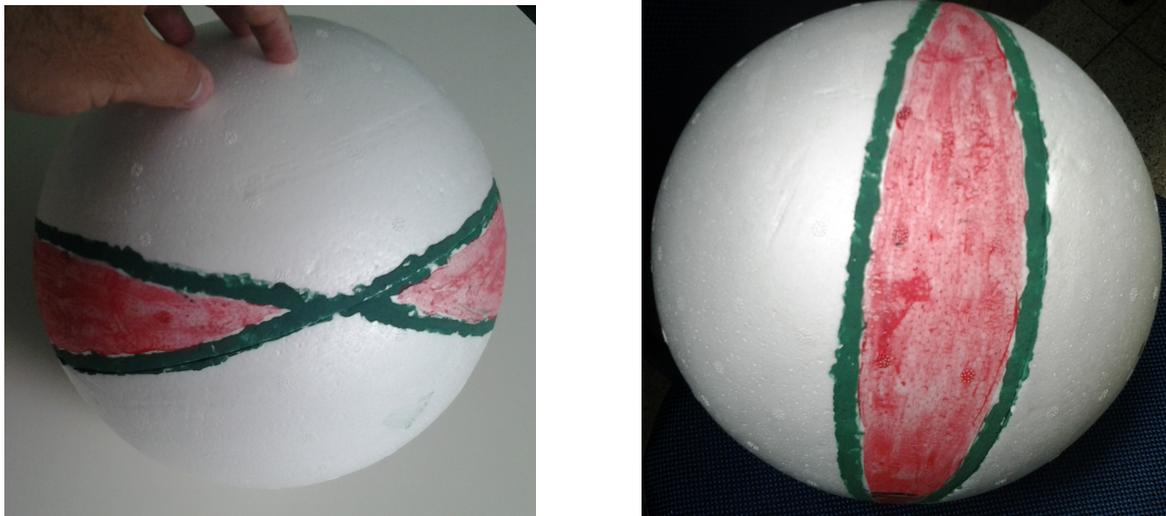


Figura 44: Esfera de isopor desenhada representando um fuso completo.

Provada a Relação de Girard, a aula foi concluída com a demonstração do Teorema de Euler pela soma dos ângulos internos dos triângulos esféricos gerados pela projeção do poliedro numa superfície esférica. Para esta projeção, foi utilizada uma segunda esfera de isopor, pintada com tinta de tecido (veja Figura 45 abaixo), simulando uma projeção de algum poliedro. A esfera pintada favoreceu a compreensão dos alunos para a equação (8), finalizando assim a demonstração.



Figura 45: Esfera de isopor desenhada representando a projeção de um poliedro.

Para a quarta aula, foi demonstrado aos alunos que existem apenas cinco poliedros regulares, os mesmos mostrados na primeira aula. A demonstração seguiu a

apresentada neste trabalho. As duas aulas seguintes foram destinadas para resolução e discussão das quinze questões propostas. A questão 03 necessita que conhecimentos da disciplina de química. Para facilitar aos alunos, foram impressos modelos das estruturas moleculares e fixados no quadro negro. Após este recurso, a maioria dos alunos conseguiu julgar corretamente os itens. A questão 04 gerou boa discussão entre os alunos quanto a possibilidade de escolher uma caixa, nos formatos fornecidos, para embalar uma bola. Porém, a Questão 08 foi a que apresentou maior dificuldade para ser respondida, pois os alunos tiveram dificuldades para interpretar o argumento e julgar os itens. A questão 10 exigiu habilidade algébrica dos alunos para ser respondida. Por fim, as questões 13 e 15 também exigiram dos alunos interpretação do enunciado e um manejo algébrico adequado para conferir e julgar os itens apresentados.

4 Conclusão

Foi gratificante construir este trabalho. Mais gratificante ainda poder aplicá-lo em sala de aula e saborear os frutos das novas descobertas pelos alunos. Tenho vivo na memória, no momento que eu apresentava os cinco poliedros regulares a turma, deixei uma pergunta que seria respondida, e demonstrada, na aula seguinte: “Será que existem somente estes cinco poliedros regulares?” A turma, praticamente em peso, afirmou que poderiam existir infinitos poliedros regulares, visto que é possível imaginar infinitos poliedros convexos de variadas formas. Ao trazer, na aula seguinte, a demonstração algébrica da existência de somente cinco poliedros regulares, pude perceber no olhar espantado, e ao mesmo tempo vibrante dos alunos no final, certa dose de satisfação. Um deles relatou-me: “Professor, não imaginava que dava pra verificar isso matematicamente.”

Outro momento que também ficou marcante foi no tratamento do triângulo esférico, algo novo para os alunos. São raras as ocasiões em que o conteúdo geométrico, abordado em sala de aula, extrapola o euclidiano e toma outros rumos. Iniciei as explicações instigando os alunos com a pergunta: “Em qualquer triângulo plano, a soma dos ângulos internos é igual a 180° . Esta propriedade também vale para o triângulo esférico?” Aqueles que responderam rapidamente “Sim”, pararam um momento para refletir melhor. Quando percebi que alguns alunos arregalaram os olhos e subiram as sobrancelhas ao olharem um triângulo esférico desenhado numa esfera de isopor que levei para a aula, entendi que expandiram seu raciocínio dedutivo, e alguns outros alunos puderam dizer: “Professor, parece que a soma dos ângulos supera muito 180° !” Quando apresentei a Relação de Girard no quadro negro, alguns murmuraram que seria algo impossível de se trabalhar. Mas a demonstração desta Relação, com apoio de uma esfera de isopor pintada e material impresso ilustrando as regiões R_α , R_β e R_γ fixados no quadro negro, tornaram a demonstração inteligível e acessível aos alunos. Com estas experiências exitosas, posso dizer que valeu a pena.

Durante a construção do trabalho, nos aspectos históricos, tornei-me admirador do personagem central de nosso trabalho, Leonard Euler. Somente depois percebi o certo

senso de frustração do autor Gilberto Geraldo Garbi, do livro *A Rainha das Ciências*, quando outros pensadores e autores classificam Euler em patamares levemente mais baixos comparado a outros grandes personagens da história da matemática, alguns até contemporâneos, como Carl Friedrich Gauss ou Isaac Newton. Euler produziu cerca de 900 tratados e livros, em todos os temas da matemática de sua época, chegou ainda a criar novos temas. A *Opera Omnia*, elaborada pela Academia de Ciências da Suíça, iniciou uma compilação de seus trabalhos em 1911 e ainda não foi concluído. Até sem poder enxergar, por um problema nos olhos, não o impediu de continuar produzindo.

Ao escrever a primeira demonstração do Teorema de Euler no nosso trabalho, apresentada por Cauchy, foi a que mais demandou cuidado. No livro *Meu Professor de Matemática*, escrito pelo professor Elon Lages Lima, as justificativas para a correção da argumentação de Cauchy são densas, não facilmente observáveis. Tornar tais justificativas acessíveis e resumidas foi um grande desafio. Os desenhos geométricos que constantemente estão presentes neste trabalho se deram graças ao programa GEOGEBRA, de geometria dinâmica, que possui ferramentas poderosas na construção geométrica. Escrever a segunda demonstração, apresentada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho, e a terceira, apresentada pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre, foi mais divertido. A elegância da demonstração de Legendre, utilizando geometria esférica, motivou-me a escolhê-la para compartilhar com meus alunos. O transcorrer dos acontecimentos, que relatei logo no início desta seção, mostraram-me que foi uma escolha bem sucedida.

5 Apêndice

Nesta seção, tendo como base [10] e [11], daremos uma rápida introdução ao conceito topológico de **homeomorfismo**, um termo utilizado na Seção 2.1 para dar base à demonstração do Teorema de Euler por Cauchy, aperfeiçoada por Lima em [3].

Em [11], Lima nos coloca que uma das ideias mais importantes da Matemática é a de continuidade. Este conceito está estritamente relacionado com casos de convergência e limites. Assim, dada uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ definida no conjunto X para valores do conjunto Y , dizemos que f é *contínua* no ponto $a \in X$ quando é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que se tome x suficientemente próximo de a . De modo análogo, dizemos que uma sequência de pontos $(x_i), i \in \mathbb{N}$ que pertencem ao conjunto X *converge* para o ponto $a \in X$ quando é possível tornar x_i arbitrariamente próximo de a , desde que se tome i suficientemente grande. Porém, estas definições de continuidade e convergência não têm sentido em quaisquer conjuntos X e Y . Para que signifiquem algo, é necessário que nos conjuntos envolvidos haja alguma estrutura que permita falar em proximidades de pontos. Estes conjuntos são chamados *Espaços Topológicos*. A Topologia é a disciplina matemática que se destina ao estudo de funções contínuas de um espaço topológico em outro.

A maneira natural de se verificar qual dos pontos $x, y \in X$ está mais próximo de $a \in X$ é medir e comparar as distâncias de x e y ao ponto a . Isto é possível quando é previamente definida a noção de *distância* no conjunto X . Assim, espaços topológicos são conjuntos onde tem sentido falar de distância entre dois pontos. Tais conjuntos são denominados *Espaços Métricos*. O conceito de espaço métrico é devido à Maurice Fréchet, que o introduziu em 1906 em sua tese de doutorado. A Figura 46 abaixo ilustra a imagem de seu busto, acessada em www.librarything.com, 17/01/2014.



Figura 46: Maurice Fréchet (02/09/1878 - 04/06/1973).

Definição 23. Uma **Métrica** num conjunto M é uma função $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ a um número real não-negativo $d(x,y)$, chamado de **distância** do ponto x ao ponto y , de modo que:

- 1 - $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$ se $x \neq y$;
- 2 - $d(x,y) = d(y,x)$;
- 3 - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in M$.

Com a métrica de um conjunto definida, temos:

Definição 24. Um **Espaço Métrico** é um par (M,d) formado por um conjunto M não-vazio e uma métrica d em M .

Com estes termos definidos, podemos dizer que dada uma aplicação $f : M \rightarrow N$ de um espaço métrico M num espaço métrico N , com algum $a \in M$, f é contínua se atende a seguinte definição:

Definição 25. Uma função f é **contínua no ponto a** se dado qualquer $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Quando dissermos que $f : M \rightarrow N$ é contínua, conforme Definição 25, estamos dizendo que f é contínua em todos os pontos de M .

Agora, sobre homeomorfismo, pode haver uma aplicação biunívoca $f : M \rightarrow N$ de um espaço métrico M em um espaço métrico N contínua que apresenta sua inversa $h = f^{-1} : N \rightarrow M$ não contínua. Para exemplos desta situação, sugerimos ao leitor pesquisar em [11] página 42. Homeomorfismo é definido como:

Definição 26. Um **Homeomorfismo** é uma aplicação contínua e biunívoca

$$f : M \rightarrow N,$$

de um espaço métrico M sobre um espaço métrico N , tal que sua inversa

$$f^{-1} : N \rightarrow M$$

também é contínua.

Afirmamos, na Seção 2.1, que era possível esticar o poliedro P a partir de suas arestas livres achatando-o de forma a se tornar uma figura plana pois P é homeomorfo a uma esfera. De fato, é possível estabelecer uma função $f : P \rightarrow E$, assim como fizemos na Seção 2.3, onde P é o conjunto dos pontos que formam o poliedro, e P atende a Definição 24, podendo ser chamado de espaço métrico P , associado ao conjunto E formado pelos pontos da superfície esférica, que também atende a Definição 24 e também pode ser chamado de espaço métrico E . Temos f contínua em todos os pontos de P . A função $f^{-1} : E \rightarrow P$ também é contínua em todos os pontos de E . Portanto, pela propriedade 26, o poliedro P é homeomorfo à esfera E .

Referências

- [1] GARBI, GILBERTO GERALDO *A rainha das Ciências*, Editora Livraria da Física, 5ª Edição (2001). São Paulo.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.
- [3] LIMA, ELON LAGES *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, SBM, Edição 1991. Rio de Janeiro
- [4] LIMA, ELON LAGES. CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO. WAGNER, EDUARDO. MORGADO, AUGUSTO CÉSAR. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*, SBM Coleção do Professor de Matemática. 6ª Edição (2006). Rio de Janeiro.
- [5] EUCLIDES *Os elementos*, Editora Unesp, tradução de Irineu Bicudo, 2009. Rio de Janeiro.
- [6] SBM *Revista do Professor de Matemática n° 03*
- [7] SBM *Revista do Professor de Matemática n° 05*
- [8] IEZZI, GELSON. DOLCE, OSVALDO. DEGENSZAJN, DAVID. PÉRIGO, ROBERTO. *Matemática*, Volume Único, Editora Atual. 5ª Edição, 2011. São Paulo.
- [9] MELLO, JOSÉ LUIZ PASTORE *Matemática: construção e significado*, Volume Único, Editora Moderna. 1ª Edição, 2005. São Paulo.
- [10] LIMA, ELON LAGES. *Elementos de Topologia Geral* Editora da Universidade de São Paulo, 1970, Rio de Janeiro.
- [11] LIMA, ELON LAGES. *Espaços Métricos* 2ª Edição, Editora do IMPA, 1983, Rio de Janeiro.
- [12] GIOVANNI, JOSÉ RUY. BONJORNO, JOSÉ ROBERTO. *Matemática: uma nova abordagem* Volume 2, Editora FTD, 2011, São Paulo.
- [13] DANTE, LUIZ ROBERTO *Matemática: contexto e aplicações* Volume 2, Editora Ática, 2011, São Paulo.
- [14] USBERCO, JOÃO. SALVADOR, EDGARD *Química: essencial* Volume Único, 8ª Edição, Editora Saraiva, 2010, São Paulo.
- [15] SILVA, EDVALDO LIMA DA. *Sítio: <http://sorzal-df.fc.unesp.br/edvaldo/projecao.htm>*, acessado em 30/01/2014.

- [16] *Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.*
- [17] *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental.* Brasília, MEC/SEF, 1998.
- [18] *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília, MEC/SEMT, 1998.
- [19] *Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio - Orientações Curriculares Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais,* MEC/SEMT, 2002.