UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Evandro Marques das Neves

Rigidez dos triângulos

São José do Rio Preto

2014

Evandro Marques das Neves

Rigidez dos triângulos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pavani Lamas

São José do Rio Preto

2014

Neves, Evandro Marques das.
Rigidez dos triângulos / Evandro Marques das Neves. -- São José do Rio Preto, 2014
58 f. : il.

Orientador: Rita de Cassia Pavani Lamas
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Triângulo - Estudo e ensino. 3. Congruências (Geometria) 4. Matemática – Metodologia. I. Lamas, Rita de Cassia Pavani. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.1(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Evandro Marques das Neves

Rigidez dos triângulos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pavani Lamas

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Rita de Cássia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. José Antonio Salvador
UFSCAR – São Carlos

Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
25/agosto/2014

RESUMO

Este trabalho tem por escopo apresentar um método pedagógico para utilização no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, baseado na investigação matemática via atividades experimentais, com o objetivo de despertar o interesse dos alunos para a compreensão de conteúdos específicos da matemática, melhorar a sua aprendizagem e compreensão da necessidade de demonstração matemática. São propostas questões a serem respondidas durante o desenvolvimento das atividades experimentais, que levem os alunos a refletir, permitindo, assim, que eles conjecturem sobre a existência de um triângulo e sua rigidez. Neste método, o professor tem o papel de mediador. A rigidez do triângulo é demonstrada de duas formas alternativas, através de um caso de congruência e pela lei dos cossenos. Para tanto, é apresentada uma descrição da utilização dos triângulos desde os primórdios da história antiga, aspectos da metodologia da investigação matemática, propostas de atividades experimentais e fundamentação teórica. Os primeiros resultados de aplicação da proposta em sala de aula foram positivos, junto aos alunos do nono ano do ensino fundamental.

Palavras-chave: Triângulo. Rigidez. Investigação Matemática. Construção. Materiais Lúdicos.

ABSTRACT

This work has the purpose to present a teaching method for use in Secondary School and High School, based on mathematical research via experimental activities, in order to awaken the interest of the students for understanding of specific math content, improve their learning and understanding of the need for mathematical demonstration. Questions to be answered during the development of experimental activities that take students to reflect, thus allowing them conclude on the existence of a triangle and its stiffness are proposed. In this method, the teacher has the role of mediator. The rigidity of the triangle is shown in two alternative ways, through a case of congruence and the law of cosines. Therefore, a description of the use of triangles since the early days of ancient history, aspects of the methodology of mathematical research, and experimental activities proposed theoretical framework is presented. The first results of implementing the proposal in the classroom were positive, with students of the ninth year of elementary school.

Keywords: Triangle. Rigidity. Mathematical Research. Construction. Ludical Stuff.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Ao se observar diversos objetos e coisas do cotidiano, verifica-se a presença de triângulos. Eles são utilizados na carpintaria, na arquitetura, na engenharia, na arte, nas estruturas de telhados, portões, torres etc.

A Torre de Tóquio, construída em 1958, tem uma altura de 333 metros e peso de 4 mil toneladas (Figura 1).

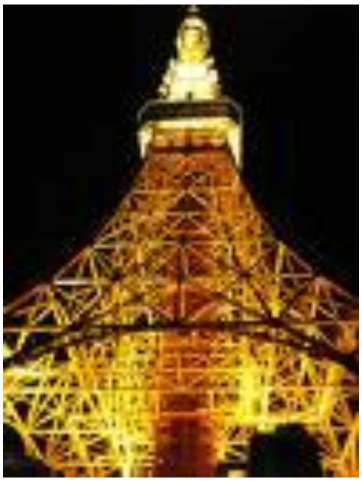

Figura 1: Torre de Tóquio
Fonte: Webquestbrasil.org

Observa-se que sua estrutura é composta por diversos triângulos, chamados de treliças, que possuem uma propriedade que nenhum outro polígono possui, permitindo que a torre fique "em pé".

Estas estruturas são capazes de aguentar muito peso, como uma ponte, por onde circulam diversos veículos e até locomotivas com seus numerosos vagões carregados com produtos (Figura 2).

Figura 2: pontes formadas por treliças.
Fonte: dennysfs.blogspot.com.br

Um dos motivos da grande utilização dos triângulos na construção de diversas estruturas está relacionado a sua rigidez, isto é, não é possível alterar os ângulos internos de um triângulo mantendo as medidas dos seus lados fixas. O mesmo não ocorre com os demais polígonos. Uma estrutura formada por triângulos não se desfaz facilmente, não se deformam.

Um telhado, por exemplo, tem a base de sua estrutura formada por diversos triângulos em sua parte frontal, conhecido como tesoura ou treliça, a qual impede que um vento abale sua estrutura, devido à rigidez que apresenta (Figura 3).

Figura 3: Estrutura do telhado de uma casa.

A mesma segurança não seria possível se a base da estrutura do telhado fosse formada por quadriláteros.

Os triângulos são estudados no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio de uma forma superficial, não sendo dada ênfase suficiente às suas propriedades, não permitindo que os alunos descubram quando se obtém um triângulo e como utilizá-los no cotidiano.

Este trabalho tem por escopo apresentar um método pedagógico para utilização no Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, para despertar o interesse dos alunos por meio de investigação matemática, partindo-se de aplicações concretas e manipulações de triângulos congruentes, respondendo a perguntas que os levem a refletir, permitindo, assim, que eles descubram porque o triângulo é rígido, tirando suas próprias conclusões, com a orientação do professor, a fim de que percebam a importância da rigidez dos triângulos na construção de prédios, casas, pontes, torres, portões, "outdoor", enfim, em várias situações do dia-a-dia.

Para tanto, no capítulo 2, é apresentada uma descrição de sua utilização desde os primórdios da história antiga; no capítulo 3, aspectos da metodologia da investigação matemática; e no capítulo 4 são propostas algumas atividades que os alunos poderão desenvolver para descobrirem algumas propriedades dos triângulos, sendo introduzidas demonstrações da condição de existência dos triângulos, dos seus casos de congruência, bem como da Lei dos Senos e dos Cossenos, chegando-se assim a subsídios suficientes para demonstrarem a rigidez do triângulo.

Espera-se que os alunos se interessem em descobrir os vários aspectos dos triângulos, as propriedades de seus lados e de seus ângulos, sua inter-relação, bem como as suas diversas aplicações e utilizações no cotidiano, pela investigação dessas figuras que tanto tem auxiliado a humanidade.

2. UM POUCO DE HISTÓRIA

Nesta análise histórica sobre os triângulos consta que as figuras planas existiam, mas pouco se escrevia sobre elas. É o que nos revela Boyer (2010, p. 4), no qual descreve que: "Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita".

Não existe alguma referência precisa de como e quando surgiu o triângulo, sendo que os triângulos mais antigos que se têm registro são os que foram utilizados na arquitetura (Figura 4).

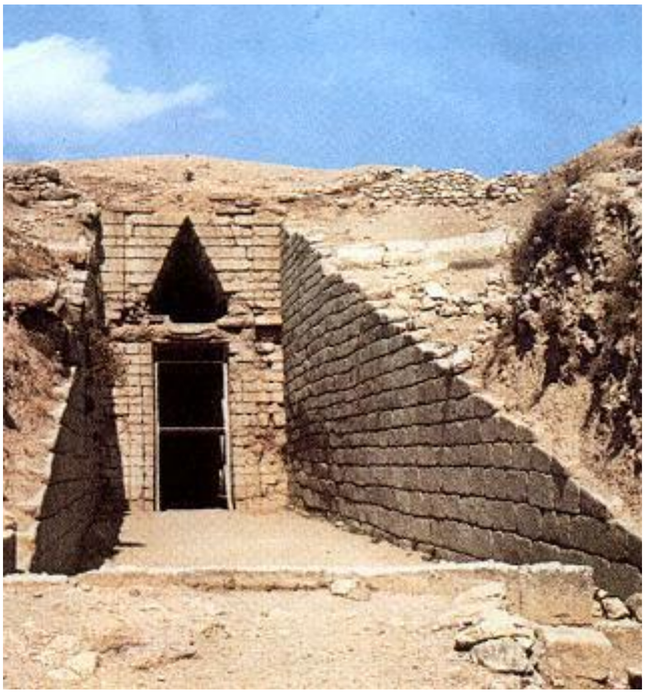

Figura 4: Foto de construção antiga que utilizava triângulo.
Fonte: http://www.prof2000.pt

Muito antes da compilação dos conhecimentos existentes, os homens criaram as bases da Geometria por meio das experiências. Realizavam operações mentais para, depois, serem concretizadas nas figuras geométricas.

A Geometria (do grego "*medida da terra*") surgiu devido às necessidades do dia-a-dia, tais como partilhar terras, construção de casas, observação e previsão dos movimentos dos astros.

No Egito antigo, por volta de 4000 e 3000 a.C., a matemática era empregada na astronomia, porém de forma prática, sem princípios e teorias básicas de geometria. Estas aplicações na astronomia utilizavam triângulos para se calcular distâncias entre astros.

Os mesopotâmicos faziam figuras simples, apenas para ilustrar um problema, mas que não interferiam na solução. Tais figuras não obedeciam proporções. Também não havia definições e teoremas.

Devido à necessidade de um maior rigor nas utilizações dos triângulos e os respectivos registros e descobertas, os matemáticos passaram a apresentar trabalhos escritos.

A exemplo da matemática grega, que é riquíssima em trabalhos escritos sobre geometria, por um período de tempo que se iniciou em 600 a.C. até 600 d.C., se espalhando por outras partes do mundo civilizado.

Dos gregos anteriores a Euclides, Arquimedes e Apolônio, consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates. E o resumo feito por Proclo ao comentar os "Elementos" de Euclides, obra que data do século V a.C., refere-se a Tales de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

Uma das fontes de ideias científicas dos gregos é a obra "História da Geometria", escrito em 330 a.C., por Eudemo de Rodes, um discípulo de Aristóteles. Esta obra se perdeu com o tempo e é considerada o primeiro livro da História da Matemática (BOYER, 2010, p. 32).

Tales de Mileto (625 - 558 a.C.) (Figura 5) é considerado o primeiro filósofo e o primeiro matemático da história. Mileto, na Ásia Menor (hoje, Turquia), foi a primeira cidade a despontar culturalmente.

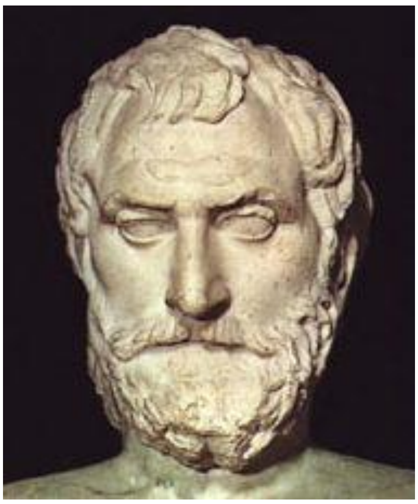

Figura 5: Busto do filósofo Tales de Mileto.
Fonte: www.greciantiga.org

Tales é considerado o criador do método dedutivo, provando algumas proposições importantes, a exemplo dos ângulos iguais na base do triângulo isósceles.

Hipócrates de Chios (460 - 370 a.C.) (Figura 6) viveu na Grécia e produziu a obra "Elementos da geometria", organizando de modo lógico a geometria da época.

Figura 6: Imagem do filósofo Hipócrates de Chios.
Fonte: www.greciantiga.org

Pitágoras de Samos (570 - 495 a.C.) (Figura 7) deu nome a um importante teorema sobre o triângulo retângulo, através de uma demonstração matemática.

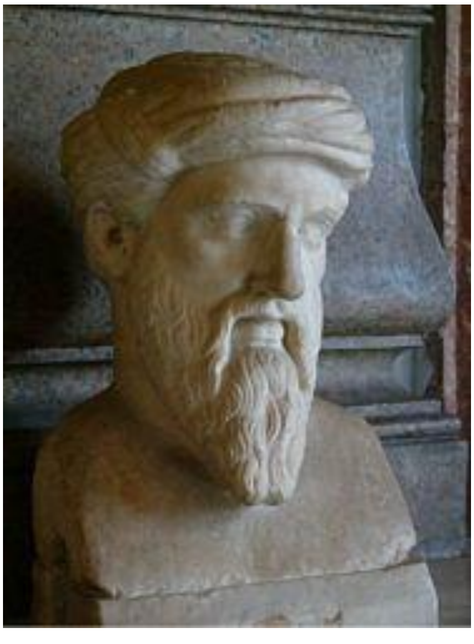

Figura 7: Busto de Pitágoras.
Fonte: www.greciantiga.org

Enquanto a escola pitagórica do século VI a.C. constituía uma espécie de seita filosófica, envolvendo mistérios em seus conhecimentos, os "Elementos" de Euclides surgem para representar o surgimento de um método consistente que contribui há mais de vinte séculos para o progresso das ciências.

Trata-se do sistema axiomático, o qual parte de conceitos e proposições admitidos sem demonstração (postulados e axiomas) para construir de maneira lógica todo o mais. Assim, três conceitos fundamentais - o ponto, a reta e o círculo - e cinco postulados a eles referentes servem de base para toda a Geometria, chamada euclidiana, útil até o presente momento.

Portanto, foi com Euclides de Alexandria (360 - 295 a.C.) (Figura 8) que houve a sistematização de grande parte dos trabalhos de Eudoxo (408 - 355 a.C.), demonstrando de maneira irrefutável certas proposições que os seus antecessores não trataram com tanto rigor.

Figura 8: Imagem de Euclides
Fonte: www.greciaantiga.org.

A obra de Euclides - Elementos - serviu de base a quase todo o ensino dito elementar por quase 2000 anos, considerada no mundo grego como obra definitiva. Esta obra é constituída de 13 livros, sendo que provavelmente 9 volumes foram escritos por Hipócrates.

Dentre estes volumes, tem-se o Livro I, que trata das construções elementares, teoremas de congruência, área de polígonos, Teorema de Pitágoras. Neste Livro I, pelo Postulado 5: "se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos."

Na época, houve uma certa confusão sobre o significado deste postulado. Uma representação do que Euclides quis dizer encontra-se na Figura 9.

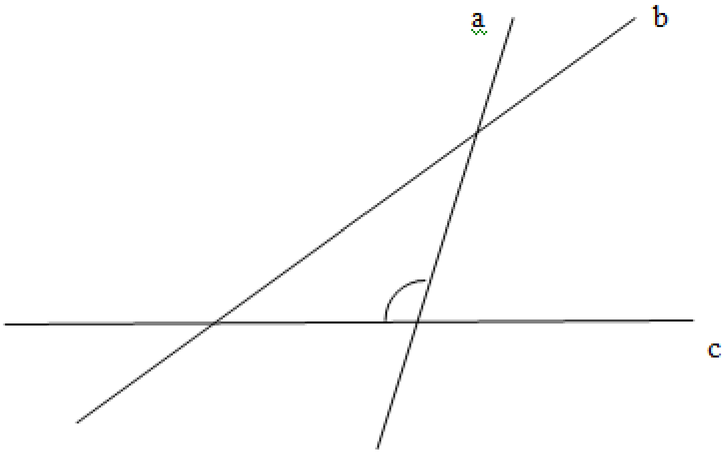

Figura 9: Um triângulo descrito por Euclides.

Para se medir os campos, tanto os sumérios como os egípcios se utilizavam do formato retangular, pois os campos tinham essa forma.

Os edifícios tinham plantas regulares, obrigando os arquitetos da época construírem muitos ângulos retos (de 90º).

Para conseguirem estes ângulos, apesar do pouco conhecimento intelectual, os arquitetos conseguiam traçar segmentos perpendiculares. Os antigos geômetras utilizavam três cordas colocadas de modo a formar os lados de um triângulo retângulo. Estas cordas tinham comprimentos equivalentes a 3, 4 e 5 unidades, respectivamente. O Teorema de Pitágoras explicou este fato. Estas medidas foram padronizadas na forma de esquadros.

Os antigos sacerdotes, que eram encarregados de arrecadar os impostos sobre a terra, provavelmente calculavam a extensão dos campos planos por meio de um simples golpe de vista.

É o que relata Eves (2004), nos seguintes termos:

> "A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), [...]" (p. 60).

Quando se deparavam com uma superfície irregular, não formando retângulos e nem triângulos, os primeiros cartógrafos e agrimensores utilizavam um artifício: a *triangulação*: começando num ângulo qualquer, traçavam linhas a todos os demais ângulos visíveis do campo, e assim este ficava completamente dividido em porções triangulares, cujas áreas somadas davam a área total. Esse método - em uso até hoje - produzia pequenos erros, quando o terreno não era plano ou possuía bordos curvos (Figura 10).

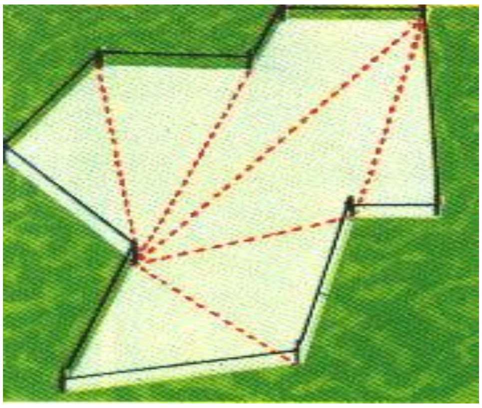

Figura 10: Triangulação de uma superfície irregular.
Fonte: http://www.somatematica.com.br

Conforme explicita o Professor Pedroso (2009, p.32): "Os autores gregos fazem particular menção dos métodos de agrimensura usados pelos egípcios, devido às cheias do Nilo que destruíam as demarcações".

O Dicionário Enciclopédico Conhecer - Abril Cultural (disponível em http://www.somatematica.com.br) traz um pouco da história da geometria, descrevendo que, por volta de 500 a.C., as primeiras universidades eram fundadas na Grécia. Tales e seu discípulo Pitágoras coligiram todo o conhecimento do Egito, da Etúria, da Babilônia, e mesmo da Índia, para desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação e religião. A curiosidade crescia e os livros sobre Geometria eram muito procurados. Um compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos, e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. O conhecimento do Universo aumentava com rapidez e a escola pitagórica chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Surgiam novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros eram agora fáceis de calcular.

Uma dessas figuras foi chamada *polígono*, do grego *polygon*, que significa "muitos ângulos". Atualmente até rotas de navios e aviões são traçadas por intermédio de avançados métodos de Geometria, incorporados ao equipamento de radar e outros aparelhos. O que não é de estranhar" desde os tempos da antiga Grécia, a Geometria sempre foi uma ciência aplicada, ou seja, empregada para resolver problemas práticos. Dos problemas que os gregos conseguiram solucionar, dois merecem referência: o cálculo da distância de um objeto a um observador e o cálculo da altura de uma construção.

Conforme descrito acima, a distância de um barco até a costa era calculada da seguinte forma: dois observadores se postavam de maneira que um deles pudesse ver o barco sob um ângulo de 90º com relação à linha da costa e o outro sob um ângulo de 45º; a nave e os dois observadores ficavam exatamente nos vértices de um triângulo isósceles, porque os dois ângulos agudos mediam 45º cada um, e portanto os catetos eram iguais. Assim, bastava medir a distância entre os dois observadores para conhecer a distância do barco até a costa (Figura 11).

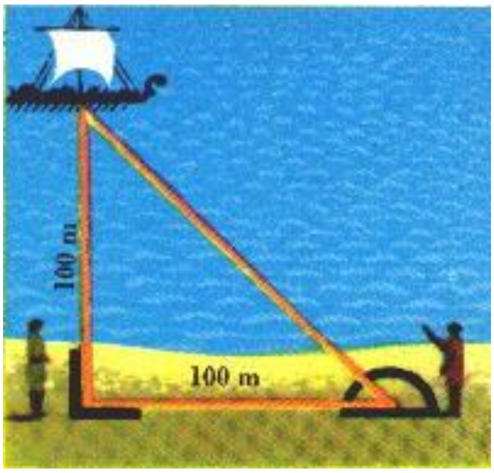

Figura 11: Distância entre o barco e a costa.
Fonte: http://www.somatematica.com.br

Outrossim, o cálculo da altura de uma construção, de um monumento ou de uma árvore é também muito simples: crava-se verticalmente uma estaca na terra e espera-se o instante em que a extensão de sua sombra seja igual à sua altura. O triângulo formado pela estaca, sua sombra e a linha que une os extremos de ambos é isósceles. Basta medir a sombra para conhecer a altura.

Nos casos de congruência de triângulos, Euclides, em "Elementos", demonstrou todos os casos possíveis, mas utilizou para o 1º caso um argumento de superposição (coincidência por superposição).

Percebe-se, assim, que desde a antiguidade, os matemáticos se utilizavam de aplicações práticas para se chegar a um resultado que pudesse ser aplicado em diversas situações semelhantes, fazendo investigações para se chegar a uma conclusão a respeito.

3. INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Nos dias atuais, não é de se surpreender que há professores de matemática que apresentam fórmulas prontas para seus alunos, sem que demonstre como obtê-las, por acharem que é dispensável, ou que os alunos não terão interesse em tal demonstração.

Assim, os conteúdos de matemática vão ficando cada vez mais difíceis de se entender, a não ser que sejam decorados e repetidos através de diversos exercícios repetitivos.

> "A aprendizagem é o centro da atividade escolar. Por extensão, o professor caracteriza-se como um profissional da aprendizagem. O professor apresenta e explica conteúdos, organiza situações para a aprendizagem de conceitos, de métodos, de formas de agir e pensar, em suma, promove conhecimentos que possam ser mobilizados em competências e habilidades que, por sua vez, instrumentalizam os alunos para enfrentar os problemas do mundo" (SÃO PAULO, 2012, p. 18).

Neste trabalho, a proposta é apresentar atividades para instigar os alunos a descobrirem propriedades geométricas através de investigações geométricas, com o auxílio do material pedagógico proposto.

É óbvio que não há tempo hábil para se desenvolver todo o conteúdo da matemática através de descobertas por parte dos alunos, mas alguns conceitos importantes devem ser trabalhados assim, para que se haja um alicerce bem forte na construção do seu conhecimento.

> "Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas - a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição...
> Investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades." (PONTE, 2006, p. 23 e 13).

Ou seja, investigar é construir de forma experimental, indutiva, através de problemas propostos aos alunos, aguçando sua curiosidade para resolvê-los.

Através da resolução destes problemas, outras descobertas são feitas, até mais importantes que aqueles.

As investigações matemáticas devem fazer parte do cotidiano dos alunos em sala de aula e fora dela.

> "Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode ser inundado pela paixão 'detetivesca' indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender

> Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar na bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles." (BRAUMANN, 2002, apud PONTE, 2006, p. 19).

Portanto, não se pode privar os alunos da investigação matemática e de sua amplitude de conhecimento que proporciona, pois só assim serão descobertas novas mentes matemáticas brilhantes, que podem chegar além do imaginável.

Para se realizar uma investigação matemática, o professor deve criar condições para que seus alunos reconheçam a situação proposta, através de formulação de questões.

Após, os alunos devem formular conjecturas (opiniões e hipóteses) a respeito da situação proposta, seguido de realização de testes, permitindo o descarte de algumas conjecturas feitas inicialmente.

Por fim, os alunos terão condições de argumentar e demonstrar a solução da situação inicialmente proposta, com avaliação final do trabalho realizado. Essa foi a metodologia adotada neste trabalho.

O professor de matemática deve preparar situações que permitam ao aluno entender o problema de forma clara, fazendo com que eles formulem questões a respeito, causando o envolvimento do aluno de tal forma que sua aprendizagem se torne significativa, pois ele terá que lançar mão de seus recursos cognitivos e afetivos para alcançar uma solução para a situação apresentada.

Não se pode deixar de lado que deve haver articulação do currículo, de tal forma que se torne interessante para o aluno e equilibrado para os diferentes níveis de cognição deles.

De uma forma simplista, uma investigação matemática deve se iniciar pela apresentação da tarefa proposta pelo professor à sala, à investigação em pequenos grupos, por meio de discussões entre eles, terminando com a elaboração de resultados, que devem ser discutidos no grande grupo.

Tudo o que for desenvolvido pelos alunos, deve ser compartilhado com a classe, de tal forma que haja uma discussão e argumentação entre eles e o professor, para que cheguem a um resultado. Caso contrário, o trabalho se perde e o desinteresse surgirá.

O professor deve funcionar como um mediador e orientador, permitindo que o aluno trabalhe de forma totalmente autônoma.

Em um primeiro momento, por não estarem acostumados a este tipo de trabalho, os alunos ficarão esperando o professor resolver o problema, sendo necessário que este apresente esta nova forma de trabalho para eles.

O ponto chave da aula, após apresentada a situação, é a formulação de perguntas pelos próprios alunos com base no problema apresentado, podendo o professor dar algumas pistas para exploração.

O tempo é fundamental para os alunos desenvolverem pensamentos a respeito, devendo ser valorizadas todas as manifestações, certas ou erradas. Estas últimas devem ser orientadas pelo professor de tal forma que o aluno consiga perceber onde errou, e retorne a uma linha de pensamento correta.

Os alunos devem se sentir desafiados a resolver a situação apresentada, devendo o professor dividir em pequenos grupos heterogêneos, onde uns ajudarão os outros a raciocinarem juntos e chegarem a um resultado comum. O professor deve observar cada grupo e orientá-los, sem apresentar a solução de imediato e nem corrigi-los rapidamente, levando-os a refletir sobre o caminho que percorreram e porque não deu certo, se for o caso.

Apresentada uma pequena e simples forma de se trabalhar em sala de aula, resta ao professor utilizá-la e colher bons frutos com seus alunos.

4. ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

As atividades apresentadas neste capítulo são subsídios para o professor utilizar com seus alunos e permitir que estes descubram as propriedades geométricas, mais especificamente propriedades nomeadas de Existência de Triângulos e os Casos de Congruência de Triângulos. Tais atividades foram elaboradas com base na metodologia de investigação matemática, conforme descrição no capítulo 3, e manipulação de materiais didáticos de baixo custo, confeccionados com canudos, barbante, EVA e papel cartão.

Espera-se que os alunos, ao desenvolver as atividades 1 e 2, conjecturem as propriedades citadas e sejam motivados a conhecer as demonstrações das mesmas, as quais se encontram no capítulo 5.

4.1 Existência de triângulo

A atividade a seguir foi adaptada de Lamas (2006) desenvolvida no trabalho intitulado "Atividades Experimentais de Geometria no Ensino Fundamental", coordenado pela Professora Doutora Rita de Cássia Pavani Lamas, na Unesp de São José do Rio Preto, Estado de São Paulo.

Quanto ao professor, este deve deixar bem definido o que pretende com esta atividade, esclarecendo todas as dúvidas dos alunos quanto a ela, sendo importante destacar que eles estarão realizando uma investigação a respeito da existência de triângulos.

"Tendo sido assegurada, mediante o momento inicial, a compreensão dos alunos acerca da atividade que se irá realizar, o professor passa a desempenhar um papel mais de retaguarda" (PONTE, 2006, p. 29).

Na atividade proposta a seguir os canudos têm espessura. No entanto, serão utilizados para representar segmentos de reta.

4.2 Atividade 1

Objetivo: Induzir a existência de triângulos.

Material utilizado: canudos, tesoura, régua e barbante.

1º) Cortem os canudos com as medidas específicas dadas em cada grupo (I a VI) da Tabela 1. Experimentem montar triângulos para cada grupo, com o uso de barbante.

Tabela 1: Medidas dadas

	a	**b**	**c**	**Foi possível montar o triângulo?**	**a + b**	**Compare** (> , < ou =)
I	6 cm	8 cm	16 cm			a + b ______ c
II	6 cm	8 cm	12 cm			a + b ______ c
III	6 cm	8 cm	14 cm			a + b ______ c
IV	5 cm	7 cm	12 cm			a + b ______ c
V	5 cm	7 cm	10 cm			a + b ______ c
VI	5 cm	7 cm	13 cm			a + b ______ c

2º) Considere que cada canudo representa um segmento de reta com as medidas dadas. Completem a Tabela 1 na coluna "Foi possível montar o triângulo?".

3º) Em seguida, completem a Tabela 1, somando as medidas **a** e **b** em cada grupo (de I a VI) e comparem com a medida **c**, utilizando os sinais > (maior que) , < (menor que) ou **=** (igual a).

4º) Analise os resultados obtidos. Era isso que esperavam?

____

____

5º) Também com canudos experimentem confeccionar um quadrilátero, bem como outros polígonos. Agora, experimentem movimentar os triângulos que foram confeccionados no 1º passo e os demais polígonos. Eles são rígidos, ou seja, é possível movimentar os seus lados? Justifiquem a sua resposta.

____

____

____

6º) Onde você observa a aplicação dessa rigidez?

____

____

____

Os alunos deverão fazer a soma das medidas das colunas **a** e **b** e anotar o resultado na coluna **a + b**, escrevendo a relação que há entre **a + b** e **c**, utilizando os sinais < (menor que), > (maior que) ou = (igual a).

Ao final, o professor deverá levar seus alunos a refletirem sobre qual a relação envolvendo as medidas **a**, **b** e **c**, para garantirmos a existência do triângulo, formalizando as conclusões através de registro escrito.

A conjectura que deverão chegar é: para se garantir a existência de um triângulo, a medida de um lado qualquer dele não pode ser maior que a soma dos outros dois.

Com relação à rigidez do triângulo, verifica-se que, após fixadas as medidas dos lados dele, os ângulos não se alteram, garantindo, assim, que os lados não vão se mover.

4.3 Congruência de Triângulos

Definição 4.3.1: Os segmentos AB e CD são congruentes quando têm a mesma medida.

A representação $\overline{AB} = \overline{CD}$ será utilizada para indicar que a medida do segmento AB é igual à medida do segmento CD, enquanto que AB = CD representará que o segmento AB é congruente ao segmento CD.

Definição 4.3.2: Os ângulos A e C são congruentes quando têm a mesma medida. Isso será representado por $\hat{A} = \hat{C}$.

Definição 4.3.3: Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Denotar-se-á a congruência de dois triângulos ABC e DEF por Δ ABC = Δ DEF. Quando se escreve Δ ABC = Δ DEF significa que a ordem de correspondência entre os vértices deve ser mantida, isto é, o vértice A corresponde ao vértice D, B ao E e C ao F, assim como os lados com os respectivos vértices. Um exemplo é dado na figura 12.

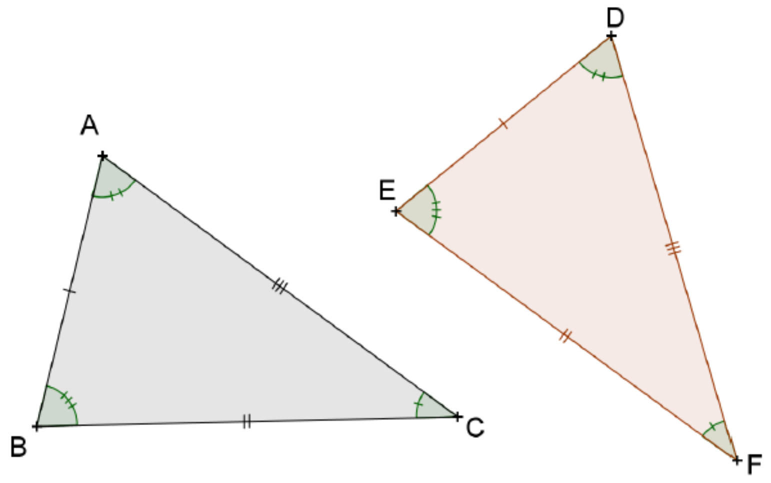

Figura 12: Triângulos congruentes.
Extraído de COSTA (2012, p. 15)

Em atividades experimentais, quando dois triângulos são congruentes eles se sobrepõem perfeitamente.

As propriedades reflexiva, simétrica e transitiva são válidas para a congruência de triângulos.

A proposta na próxima atividade é utilizar as definições em 4.3 para que os alunos possam conjecturar sobre os casos de congruência de triângulos, a partir da manipulação do modelo de congruência de triângulos, descrito a seguir.

4.4 Modelo de congruência de triângulos

O modelo de Congruência de Triângulos é composto por três grupos, com três triângulos cada um. Um molde particular para confeccionar os triângulos desses Grupos é dado pelos triângulos da figura 13, onde o Grupo 1 é formado pelos triângulos 1, 4 e 8, o Grupo 2, pelos triângulos 3, 6 e 9, e o Grupo 3, pelos triângulos 2, 5 e 7.

Eles estão dispostos de forma a aproveitar ao máximo o tamanho total do EVA no momento do recorte, de tal forma que permita o recorte de outros triângulos.

Esses triângulos devem ser confeccionados em EVA e encaixados em uma base retangular, também em EVA, de preferência de cor distinta dos triângulos (Figura 14), para que os alunos os manipulem. Os dados dos triângulos (lados e ângulos) são especificados em cada grupo. Ângulos congruentes são pintados da mesma cor. Medidas distintas serão utilizadas nos modelos para possibilitar a generalização dos resultados, bem como verificar que as propriedades são válidas para modelos distintos.

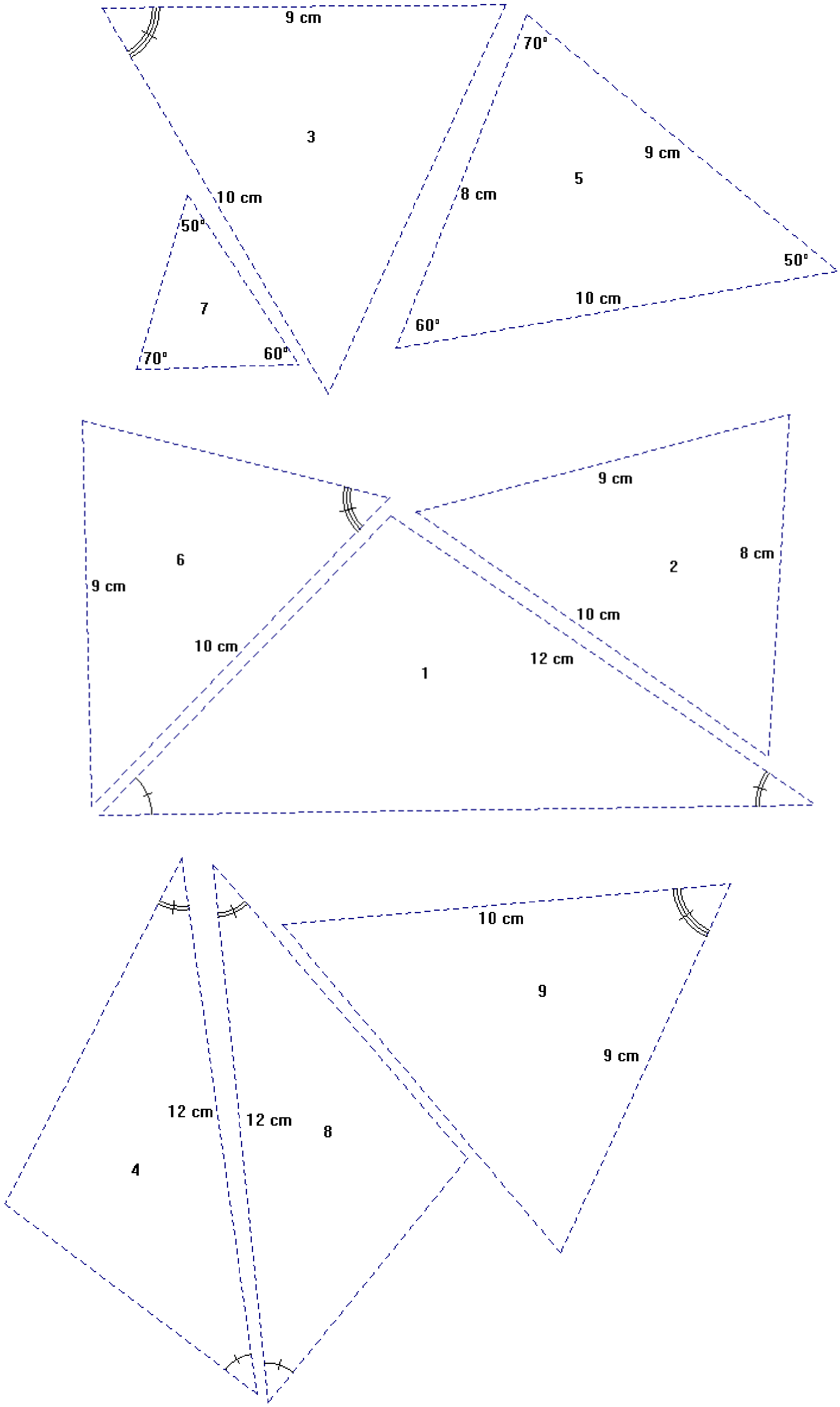

Figura 13: Molde dos Grupos.
Extraído de LAMAS (2006)

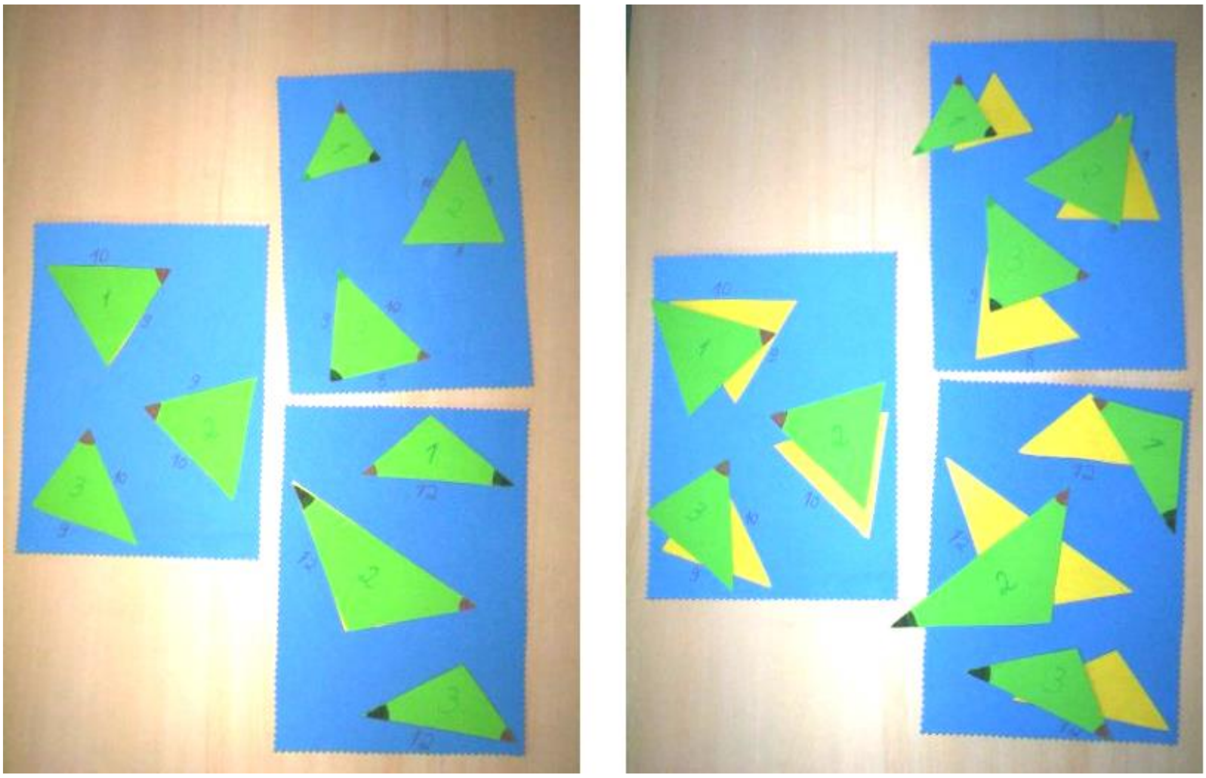

Figura 14 : Modelo dos Casos de Congruência de triângulos.
Extraído de LAMAS (2006)

O modelo é para ser utilizado em grupos de até três alunos, com cada grupo tendo à sua disposição um modelo. As conclusões de cada grupo devem ser expostas para toda a turma, com o objetivo que cheguem a conjecturar cada caso de congruência correspondente a seu Grupo.

O professor tem papel fundamental na aplicação do modelo. É ele que verificará se os alunos já aprenderam o conceito de congruência de triângulos pela definição e se estão verificando a definição ao manipular os triângulos do modelo.

4.5 Atividade 2

Objetivo: Reforçar a definição de congruência de triângulos pela sobreposição e induzir os seus casos de congruência.

Material utilizado: modelo de congruência de triângulos, formado por 3 grupos, com 3 triângulos cada: **Grupo 1** – Triângulos 3, 6 e 9; **Grupo 2** – Triângulos 1, 4 e 8; **Grupo 3** – Triângulos 2, 5 e 7 (Figura 14).

1º) Manipulem o **Grupo 1** do Modelo de Congruência: os três triângulos são congruentes? Por quê?

____

____

____

____

2º) Há diferenças entre os triângulos do **Grupo 1**? Quais?

____

____

____

____

____

3º) Além da definição de triângulos congruentes, podemos concluir sobre a congruência de dois triângulos de outra maneira? (Sugestão: encaixe os triângulos do Grupo 1 na base e observem as medidas dadas.)

____

____

____

____

____

4º) E para o **Grupo 2**: os três triângulos são congruentes? Por quê?

____

____

____

____

____

5º) Quais as diferenças encontradas nas medidas dos triângulos do **Grupo 2**?

____

____

____

____

6º) Qual a condição observada no **<u>Grupo 2</u>**?

____

____

____

7º) Agora, façam o mesmo com o **<u>Grupo 3</u>**.

____

____

____

____

____

8º) Qual o número mínimo de comparações (com relação aos 6 elementos – 3 ângulos e 3 lados) que precisamos fazer para decidirmos se dois triângulos são congruentes?

____

____

____

____

____

Os alunos deverão visualizar que deve haver uma relação entre os lados, entre os ângulos ou entre lados e ângulos para ocorrer a Congruência de Triângulos. Eles devem chegar à conclusão de que não é necessário conhecer todos os lados e todos os ângulos para verificar que dois triângulos são congruentes e conjecturar os casos de congruência de triângulos (LAL, ALA e LLL), motivando-os a conhecer as suas demonstrações, conforme apresentado no próximo capítulo.

5. EXISTÊNCIA E CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

As atividades experimentais propostas no capítulo 4 não são suficientes para mostrar que de fato as propriedades por elas induzidas são verdadeiras. É preciso demonstrá-las matematicamente. Esse é o objetivo deste capítulo.

5.1 Condição de Existência dos Triângulos

Teorema 5.1.1: A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.

Demonstração: Dado um triângulo qualquer ABC, será mostrado que $\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC}$.

Seja D um ponto da semirreta oposta à semirreta BA, tal que $\overline{BD}=\overline{BC}$ (Figura 15).

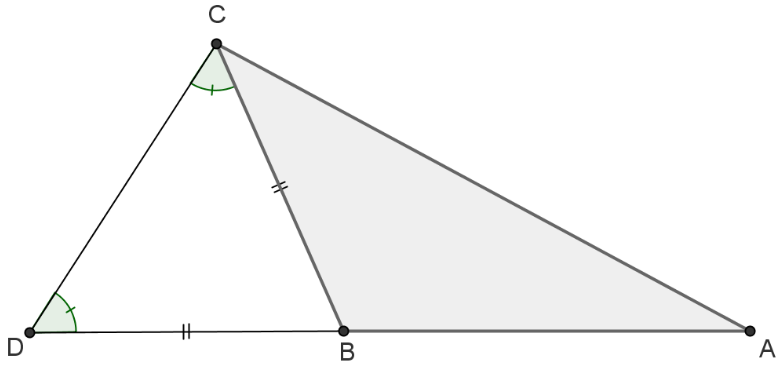

Figura 15: Configuração proposta.

Como A, B e D são colineares e B está entre A e D,

$$\overline{DA}=\overline{DB}+\overline{BA}.$$

Substituindo $\overline{DB}$ por $\overline{BC}$,

$$\overline{DA}=\overline{BC}+\overline{BA}.$$

Por construção, o triângulo BCD é isósceles com base CD. Logo, $B\hat{C}D=B\hat{D}C$. Ainda, $B\hat{D}C=A\hat{D}C$ e $A\hat{C}D=A\hat{C}B+B\hat{C}D$.

Assim, $A\hat{D}C=B\hat{C}D<A\hat{C}D$.

Sabe-se que em um triângulo, o maior ângulo opõe-se ao maior lado. Logo, no triângulo ACD, $\overline{AD}>\overline{AC}$. Substituindo em $\overline{DA}$, $\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC}$.

Analogamente, $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$ e $\overline{BC}+\overline{AC}>\overline{AB}$.

Corolário 5.1.2: Se $a\geq b+c$ ou $b\geq a+c$ ou $c\geq a+b$, onde a, b e c são números reais positivos, então não existe um triângulo com lados medindo a, b e c.

Prova: Basta verificar que a afirmação é a equivalência lógica do Teorema 5.1.1.

<u>Proposição 5.1.3</u> (Condição de Existência de Triângulo): Sejam a, b e c três números positivos. Se $|a-b|<c<a+b$, então existe um triângulo cujos lados medem a, b e c.

Prova: Considere uma reta r e, sobre ela, dois pontos A e B, tais que $\overline{AB}=c$. Sejam λ_1 e λ_2 as circunferências de centros A e B e raios a e b, respectivamente (Figura 16).

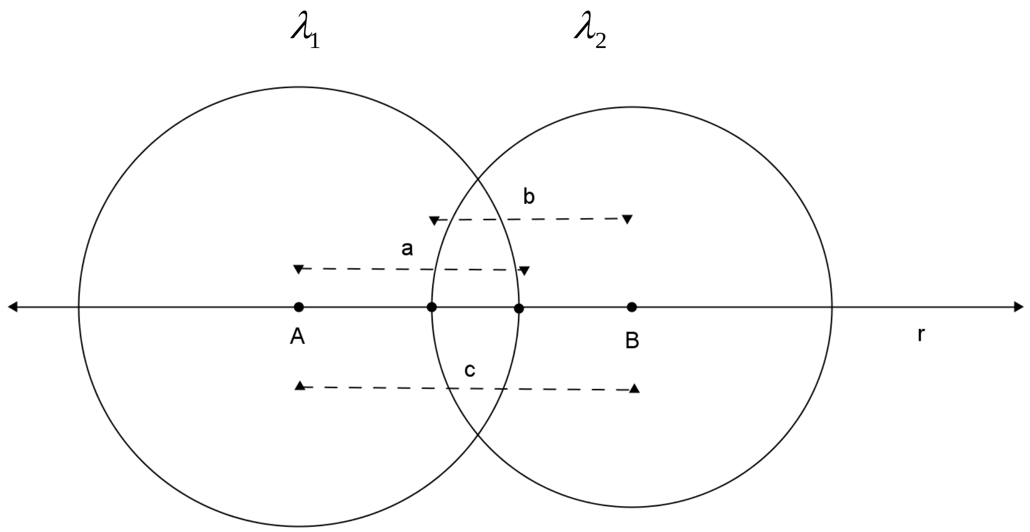

Figura 16: Circunferências de centro *A* e *B* e raio *a* e *b*, respectivamente.

Como $|a-b|<c<a+b$, as duas circunferências se intersectam. Seja C qualquer um dos pontos desta intersecção. O triângulo ABC tem lados medindo a, b e c, como desejado (Figura 17).

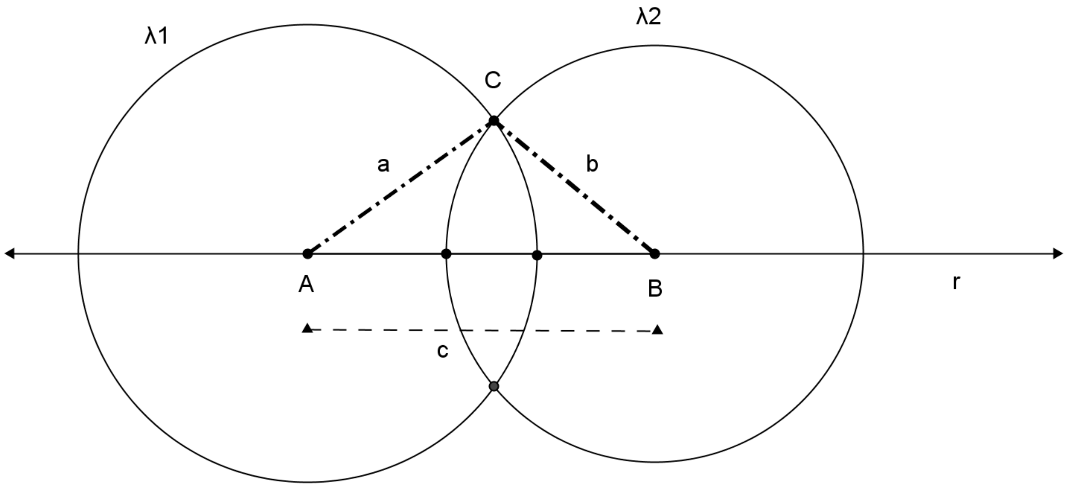

Figura 17: Triângulo ABC, formado pela intersecção das circunferências.

Observa-se que $|a-b|<c<a+b$ é equivalente a $a<b+c$ e $b<a+c$ e $c<a+b$.

De fato, $c < a + b$, e $|a - b| < c$ equivale a $-c < a - b < c$, que por sua vez equivale a:

$$b < a + c \quad \text{e} \quad a < b + c.$$

5.2 Aplicação

É possível formar um triângulo com três segmentos de reta medindo 8 cm, 10 cm e 14 cm? E com segmentos medindo 2 cm, 5 cm e 10 cm?

<u>Solução</u>: Tem-se que

$10 < 14 + 10$,

$8 < 14 + 10$,

$14 < 10 + 8$.

Pela Proposição 5.1.3 (Condição de Existência de um Triângulo), existe um triângulo com as medidas dos lados 8 cm, 10 cm e 14 cm.

No segundo caso, pode ser observado que:

$5 < 10 + 2$ (verdadeiro),

$2 < 10 + 5$ (verdadeiro),

$10 < 5 + 2$ (falso).

Como a Condição de Existência de Triângulo não se verifica, devido a $10 < 5 + 2$ ser falso, não existe um triângulo de lados que meçam 5 cm, 2 cm e 10 cm.

5.3. Casos de Congruência de Triângulos

Há condições mínimas para a congruência de triângulos:

> "A definição de congruência de triângulos dá *todas* as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados casos ou critérios de congruência" (DOLCE, 1993, p. 39).

O primeiro caso de congruência de triângulos, também chamado de Caso Lado-Ângulo- Lado (LAL), é admitido como um axioma (COSTA, 2012, p. 15), e os demais, Caso Ângulo- Lado- Ângulo (ALA) e Lado- Lado- Lado (LLL), são decorrentes deste, conforme segue.

<u>Axioma 5.3.1</u> (LAL – <u>1º caso</u>): Se dois triângulos tiverem dois lados respectivamente congruentes, formando ângulos congruentes, então eles são congruentes.

Por este axioma, um triângulo fica definido unicamente se for fixado um ângulo e sobre cada um dos seus lados forem marcados segmentos de medidas dadas.

A Figura 18 mostra dois triângulos, ABC e DEF, com $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\overline{AC} = \overline{DF}$. Portanto, pelo Axioma 5.3.1, eles são congruentes.

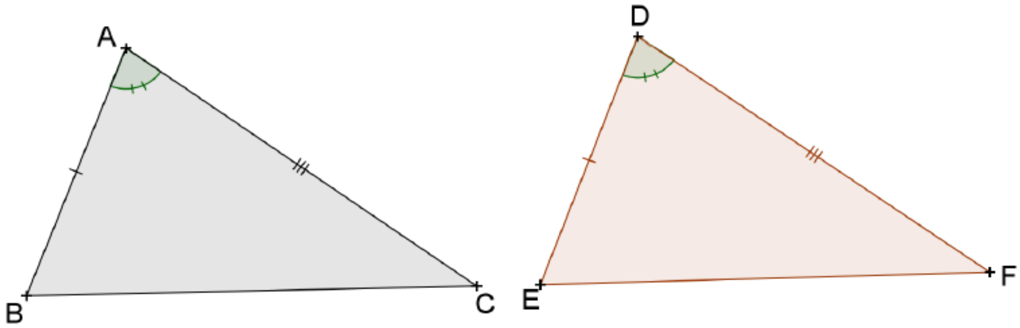

Figura 18: Triângulos congruentes pelo caso LAL.
Extraído de Costa (2012, p. 15)

Uma excelente observação feita por Pinho (2010, p. 91), faz-se notar "que um critério do tipo lado-lado-ângulo, ou seja, onde os ângulos congruentes não são formados pelos lados congruentes, pode não determinar um único triângulo, e, portanto, **não** é um critério de congruência".

Isso pode ser verificado para os triângulos ABC e ABC', tal que $\overline{BC} = \overline{BC'}$ (Figura 19).

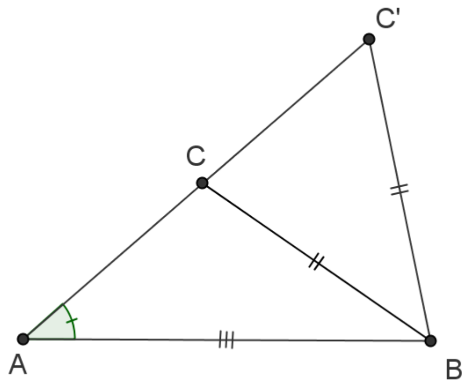

Figura 19: Triângulos ABC e ABC' não congruentes.

<u>Teorema 5.3.2</u> (ALA- <u>2º caso</u>): Se dois triângulos têm um lado correspondente congruente e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

Demonstração: Sejam os triângulos ABC e DEF, tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$ (Figura 20):

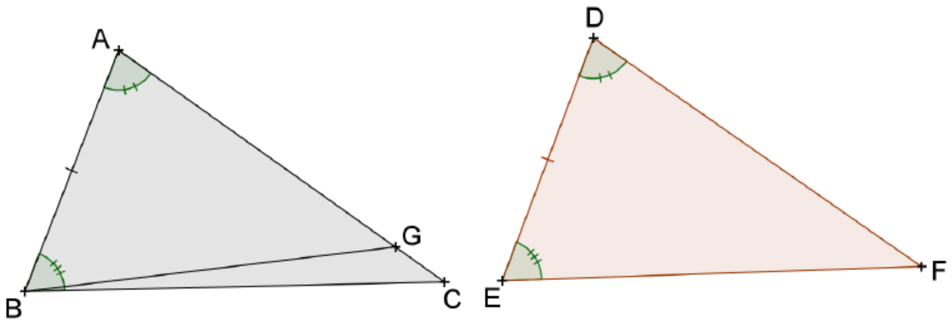

Figura 20: Representação dos triângulos ABC e DEF com os dados.
Extraído de Costa (2012, p. 16)

Pelo Axioma 5.3.1, para mostrar que os triângulos ABC e DEF são congruentes, resta provar que $\overline{AC} = \overline{DF}$.

Suponhamos que isso não ocorra. Logo, $\overline{AC} < \overline{DF}$ ou $\overline{AC} > \overline{DF}$.

Considere-se $\overline{AC} > \overline{DF}$. Desta forma, existe G, um ponto em $\overline{AC}$, tal que $\overline{AG} = \overline{DF}$ (Figura 20). Então $\overline{AG} < \overline{AC}$. Assim, nos triângulos ABG e DEF, $\overline{AG} = \overline{DF}$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Pelo caso LAL (Axioma 5.3.1), o triângulo ABG é congruente ao triângulo DEF.

Como consequência, $A\hat{B}G = \hat{E}$, o que contraria a hipótese ($A\hat{B}C = \hat{E}$), uma vez que G está entre A e C, e portanto $A\hat{B}G < A\hat{B}C$.

Para o caso $\overline{AC} < \overline{DF}$ a demonstração é análoga.

Logo, $\overline{AC} = \overline{DF}$.

Teorema 5.3.3 (LLL- 3º caso): Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes congruentes, então esses triângulos são congruentes.

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos, tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$. Será provado que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF.

No semiplano de origem $\overline{BC}$ que não contém o ponto A, considere uma semirreta de origem C, tal que $B\hat{C}G = \hat{F}$ e $\overline{CG} = \overline{DF}$.

Seja H o ponto onde o segmento AG corta a reta que passa pelos pontos B e C. Há três casos a considerar:

1º) H é um ponto entre B e C (Figura 21):

Pelo Axioma 5.3.1, os triângulos BCG e EFD são congruentes. Resta mostrar que os triângulos EFD e BAC são congruentes.

Por construção, $\overline{CG} = \overline{DF}$, e por hipótese, $\overline{DF} = \overline{AC}$. Logo, $\overline{CG} = \overline{AC}$. Portanto, o triângulo AGC é isósceles e consequentemente $G\hat{A}C = A\hat{G}C$.

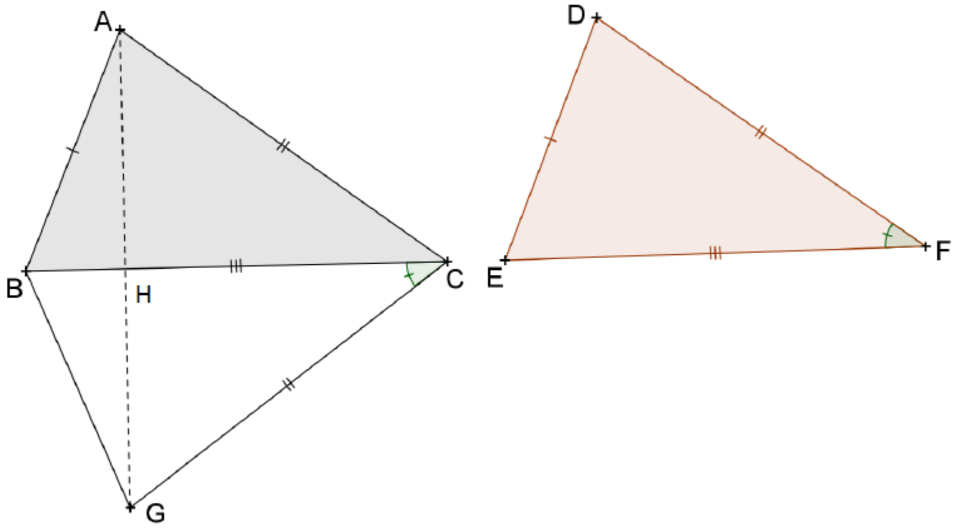

Figura 21: Uma possível configuração para o ponto H.
Extraído de Costa (2012, p. 18)

Como os triângulos BCG e EFD são congruentes, $\overline{BG} = \overline{DE}$. Por hipótese, $\overline{DE} = \overline{AB}$. Logo, $\overline{BG} = \overline{AB}$, o triângulo ABG também é isósceles, com $B\hat{A}G = B\hat{G}A$.

Substituindo em:

$$B\hat{A}C = B\hat{A}G + G\hat{A}C,$$

$$B\hat{A}C = B\hat{G}A + A\hat{G}C = B\hat{G}C.$$

Assim, $\overline{BA} = \overline{BG}$, $B\hat{A}C = B\hat{G}C$ e $\overline{AC} = \overline{GC}$. Pelo Axioma 5.3.1, o triângulo GBC é congruente ao triângulo ABC.

Pela transitividade da congruência de triângulos, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF.

2º) H coincide com a extremidade de BC (com o ponto B ou com o ponto C) (Figura 22).

Consideremos que o ponto H coincide com B. No caso em que a semirreta AG corta $\overline{BC}$ no ponto C, a demonstração é análoga.

Por construção, $B\hat{C}G = \hat{F}$ e $\overline{CG} = \overline{DF}$.

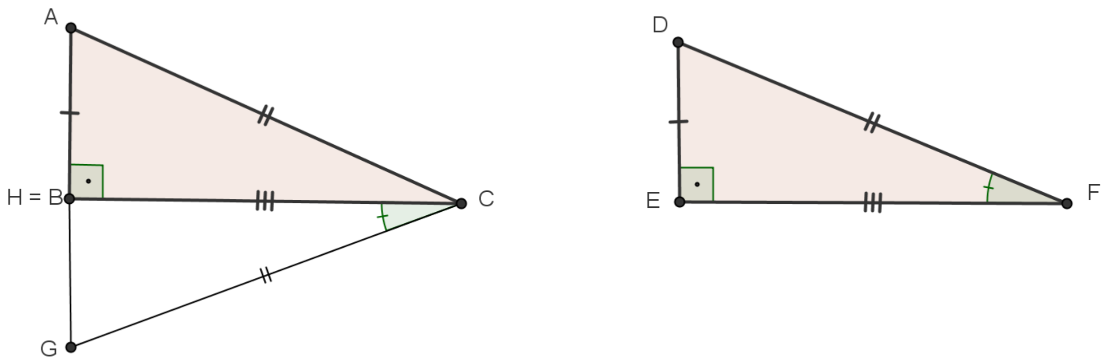

Figura 22: Configuração para o caso quando B e H coincidem.

Analogamente ao caso anterior, os triângulos BCG e EFD são congruentes. Assim, $\overline{BG} = \overline{ED}$. Como $\overline{ED} = \overline{AB}$ (por hipótese), $\overline{BG} = \overline{AB}$. Tem-se que $\overline{DF} = \overline{GC}$ (por construção) e $\overline{DF} = \overline{AC}$ (por hipótese), e, portanto, $\overline{GC} = \overline{AC}$. Logo, o triângulo AGC é isósceles e $C\hat{A}G = C\hat{G}A$.

De $\overline{BA} = \overline{BG}$, $B\hat{A}C = B\hat{G}C$ e $\overline{AC} = \overline{GC}$, o triângulo GBC é congruente ao triângulo ABC.

Pela transitividade da congruência de triângulos, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF.

3º) O segmento AG intersecta a reta BC em um ponto que não pertence ao segmento BC.

Considere uma semirreta BC, tal que o ponto G está no semiplano de origem BC que não contém A. Seja H a intersecção de AG com a reta BC, onde H não pertença ao segmento BC (Figura 23).

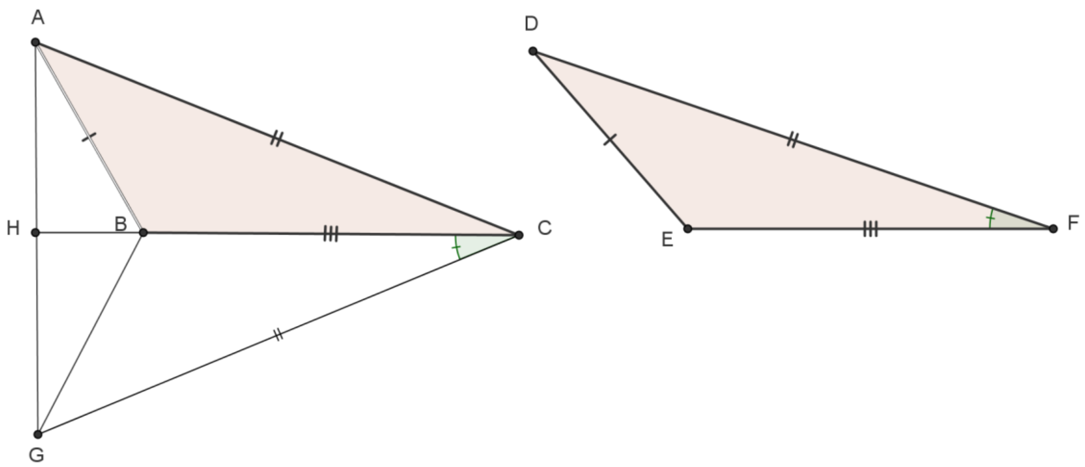

Figura 23: Demonstração do Caso LLL.

Então, pelo Axioma 5.3.1 (1º caso de congruência - LAL), os triângulos BCG e EFD são congruentes.

No triângulo AGC, $\overline{CG} = \overline{FD} = \overline{CA}$. Então, o triângulo AGC é isósceles e $C\hat{A}G = C\hat{G}A$.

No triângulo AGB, $\overline{AB} = \overline{GB}$. Assim, o triângulo AGB também é isósceles e $B\hat{A}G = B\hat{G}A$.

Portanto:

$$B\hat{A}C = C\hat{A}G - B\hat{A}G = C\hat{G}A - B\hat{G}A = B\hat{G}C.$$

Assim, tem-se que $\overline{BA} = \overline{BG}$, $B\hat{A}C = B\hat{G}C$ e $\overline{AC} = \overline{GC}$. Pelo Axioma 5.3.1, o triângulo GBC é congruente ao triângulo ABC. E, pela transitividade da congruência de triângulos, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF.

5.4. Primeira demonstração da Rigidez do Triângulo

<u>Corolário 5.3.4</u>: O triângulo é uma figura rígida, isto é, uma vez fixadas as medidas dos lados, as medidas dos ângulos não se alteram.

Prova: Se as medidas dos ângulos se alterassem, existiriam dois triângulos, ABC e DEF, com medidas dos lados fixas (lados congruentes) e ângulos não congruentes, o que contraria o Teorema 5.3.3.

A Demonstração do Corolário 5.3.4 (Rigidez dos Triângulos) é indicada tanto para o 9º ano do Ensino Fundamental como para o 1º ano do Ensino Médio.

Uma prova alternativa pode ser desenvolvida no Ensino Médio com as Leis do Seno e Cosseno, apresentadas no capítulo 6.

6. LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

Em todo triângulo, existem relações entre os seus ângulos e os seus lados, chamadas de Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

Conforme descreve Lima (2006, p. 235): "As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando são dados três deles, desde que um seja lado, conforme os casos clássicos de congruência de triângulos".

6.1 Lei dos Senos

Proposição 6.1.1: Se um triângulo está inscrito em uma circunferência e um de seus lados é um diâmetro, então este triângulo é retângulo, com a hipotenusa sendo o diâmetro.

Demonstração: Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência, tal que o segmento BC é diâmetro. Será provado que Δ ABC é retângulo, com hipotenusa BC. Considere O o centro da circunferência (Figura 24). Assim:

1º) $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$ (raio da circunferência)

2º) $A\hat{B}O = B\hat{A}O$, pois o triângulo AOB é isósceles.

3º) $A\hat{C}O = C\hat{A}O$, pois o triângulo AOC é isósceles.

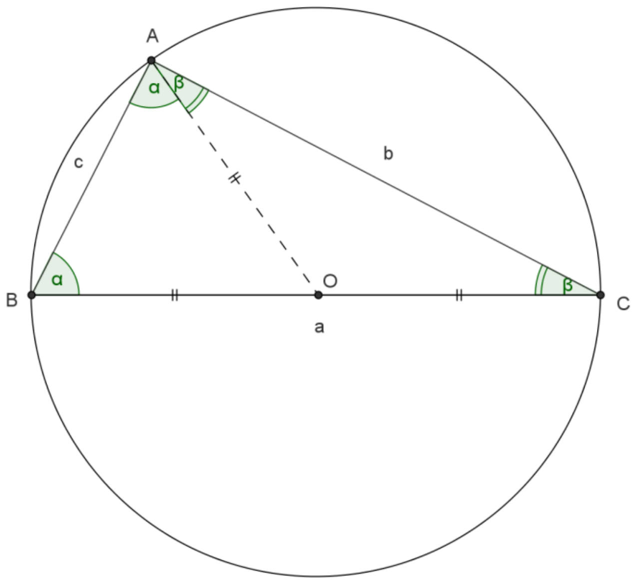

Figura 24: triângulo ABC inscrito em uma circunferência.

Tomando $A\hat{B}C = \alpha$ e $A\hat{C}B = \beta$, tem-se que

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180º$,

$2\alpha + 2\beta = 180^{o}$,

$\alpha + \beta = 90^{o}$.

Ou seja, $B\hat{A}C = 90^{o}$.

Teorema 6.1.2: Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. (MORGADO, 2002, p. 101)

Demonstração: Considere o triângulo ABC (Figura 25), onde $\overline{CH} = h$ é a medida da altura relativa ao lado AB, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

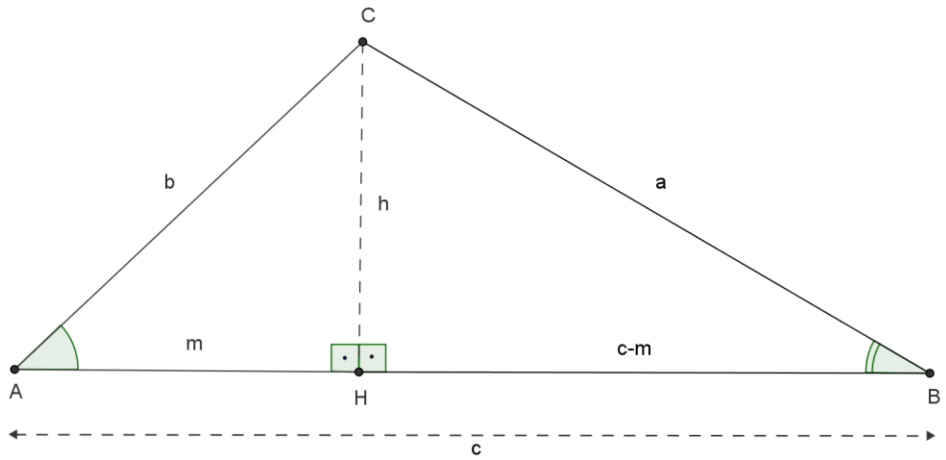

Figura 25: Triângulo ABC com altura $\overline{CH}$.

No triângulo ACH, $sen\hat{A} = \dfrac{h}{b}$.

Assim,

$$h = b.sen\hat{A}. \qquad (\text{I})$$

No triângulo BCH, $sen\hat{B} = \dfrac{h}{a}$.

Assim,

$$h = a.sen\hat{B}. \qquad (\text{II})$$

De (I) e (II), $b.sen\hat{A} = a.sen\hat{B}$.

Logo,

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}}.$$

Considerando a altura relativa ao lado BC (Figura 26), procedendo-se de forma análoga:

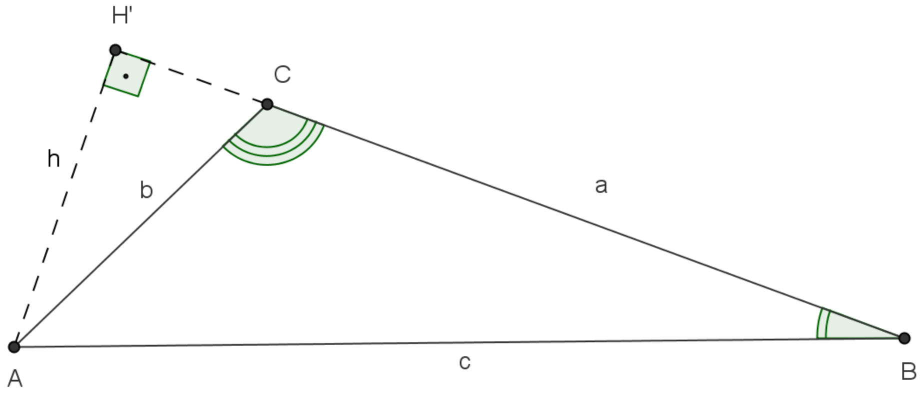

Figura 26: Triângulo ABC obtusângulo em C e com altura $\overline{AH}$.

No triângulo ABH’, $sen\hat{B} = \frac{h}{c}$.

Assim,

$$h = c.sen\hat{B} . \qquad \text{(III)}$$

No triângulo ACH, $sen(180^o - \hat{C}) = \frac{h}{b}$.

Assim,

$$h = b.sen(180^o - \hat{C}) . \qquad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV), obtém-se $c.sen\hat{B} = b.sen(180^o - \hat{C})$.

Como $sen(180^o - \hat{C}) = sen\hat{C}$, $c.sen\hat{B} = b.sen\hat{C}$.

Logo,

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} .$$

Portanto, $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$.

Resta mostrar que, em todo triângulo, a razão entre a medida de cada lado e o seno do ângulo oposto a este lado é uma constante igual a 2R, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$.

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito na circunferência de raio R. Tomando como base do triângulo o lado $\overline{BC}$, constroi-se um novo triângulo BCA', de tal modo que $\overline{BA'}$ seja um diâmetro da circunferência. Pela Proposição 6.1.1, este novo triângulo é retângulo em C (Figura 27).

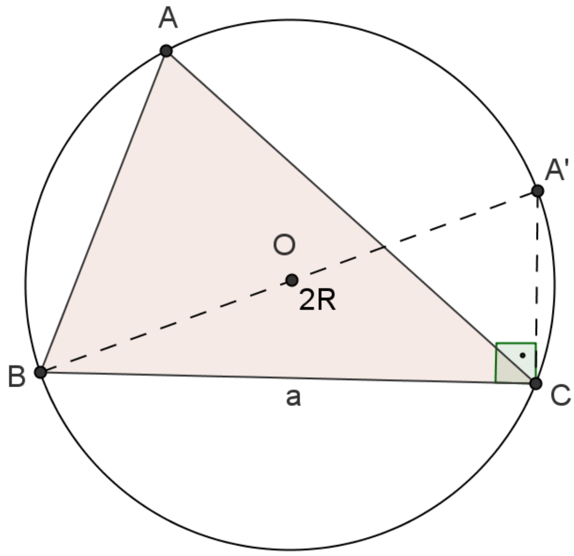

Figura 27: Triângulo ABC inscrito em uma circunferência.

Na sequência, há três casos a se considerar, dependendo se o triângulo ABC é acutângulo, obtusângulo ou retângulo.

1. <u>Triângulo acutângulo</u> ($\hat{A} < 90^o$): Os ângulos correspondentes aos vértices A e A' são congruentes, pois são ângulos inscritos à circunferência que correspondem a um mesmo arco BC (Figura 28). Assim,

$$sen\hat{A}' = sen\hat{A} = \frac{a}{2R},$$

Logo, $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = 2R$.

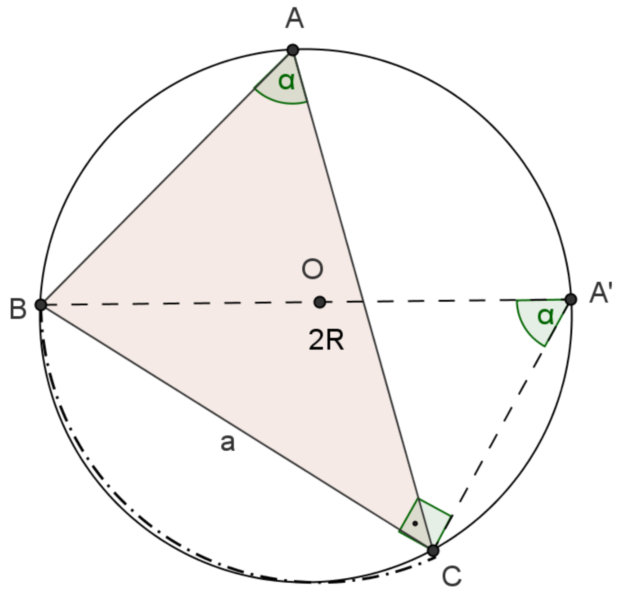

Figura 28: Triângulo ABC acutângulo.

Portanto, $\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\hat{C}} = 2R$.

2. Triângulo obtusângulo ($\hat{A} > 90^o$): Seja $B\hat{A}C = \hat{A}$ e $B\hat{A}'C = \hat{A}'$, a relação entre eles é dada por $\hat{A}' = \alpha = \pi - \hat{A}$, pois são ângulos opostos e suplementares (soma 180º) inscritos na circunferência, correspondentes a arcos replementares (soma 360º) BAC e $BA'C$.

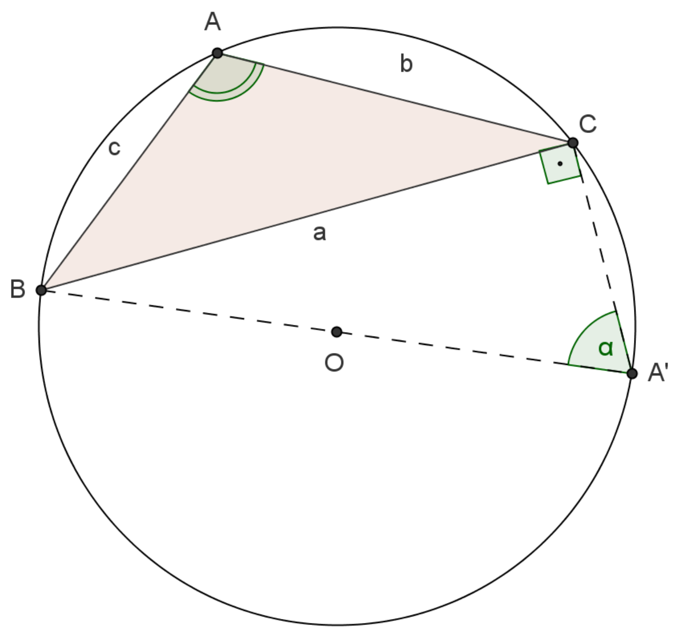

Figura 29: Triângulo ABC obtusângulo.

Desta forma, $\frac{a}{2R} = sen(\pi - \hat{A}) = sen\hat{A}$.

Logo, $\frac{a}{sen\hat{A}} = 2R$.

Portanto, $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$.

3. <u>Triângulo retângulo</u> ($\hat{A} = 90^o$): Tomando como base do triângulo o lado $\overline{BC}$, um diâmetro da circunferência, constroi-se um novo triângulo BCA'. Como o triângulo ABC é um triângulo retângulo em $\hat{A}$, $sen\hat{B} = \frac{b}{a}$, $sen\hat{C} = \frac{c}{a}$ e $sen\hat{A} = sen\frac{\pi}{2} = 1$ (Figura 30).

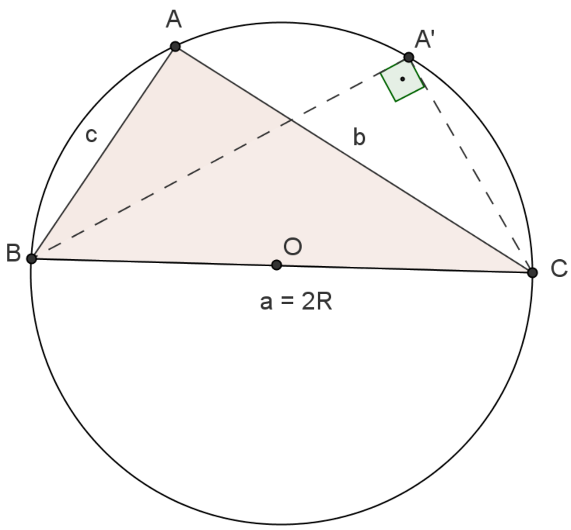

Figura 30: Triângulo ABC retângulo.

Como, neste caso $a = 2R$, $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$.

A relação $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$ é chamada de Lei dos Senos (DOLCE, 1993). Ela determina que a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante em um mesmo triângulo.

6.2. Lei dos Cossenos

Teorema 6.2.1: Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um dos lados é igual à diferença da soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados pelo dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles (MORGADO, 2002, p. 100).

Isto é, para um triângulo ABC de medidas a, b e c, opostas aos ângulos A, B e C, respectivamente, valem as relações

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}.$$

Demonstração: Há três casos a se considerar, se o triângulo ABC é acutângulo, obtusângulo ou retângulo.

1º) <u>Triângulo acutângulo</u> ($\hat{B} < 90^o$): Seja $\overline{BD}$ a altura do Δ ABC, relativa ao lado AC. Considere as medidas a, b, c, m, n e h, como na Figura 31. Pode-se observar três triângulos, ABC, BCD e BAD, onde são válidas as seguintes relações:

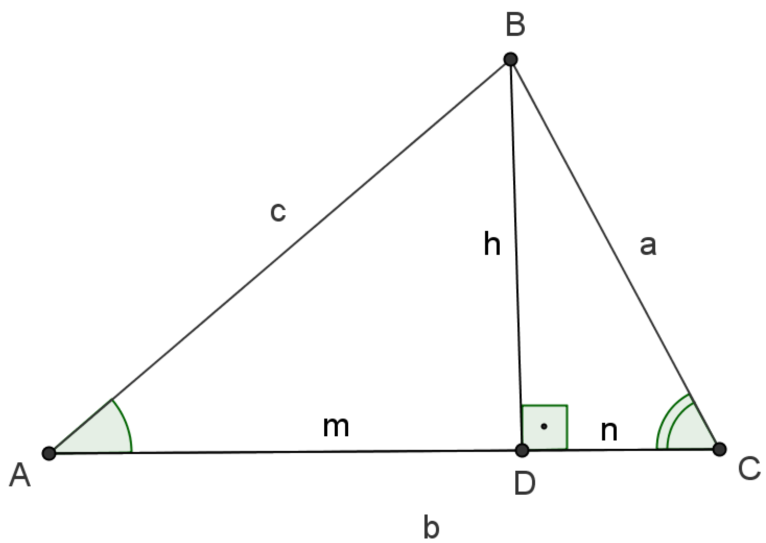

Figura 31: Triângulo ABC com altura $\overline{BD}$.

No triângulo ABC, $b = n + m$, ou seja,

$$n = b - m. \qquad (\text{I})$$

No triângulo ABD, $\cos\hat{A} = \dfrac{m}{c}$, ou seja,

$$m = c.\cos\hat{A}. \qquad \text{(II)}$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCD,

$$a^2 = n^2 + h^2. \qquad \text{(III)}$$

Também, pelo Teorema de Pitágoras, que diz que, em um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos, no triângulo BAD, $c^2 = m^2 + h^2$, ou seja,

$$h^2 = c^2 - m^2. \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo (I) e (IV) em (III):

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 =$$

$$= b^2 - 2.b.m + m^2 + c^2 - m^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.m. \qquad \text{(V)}$$

Substituindo (II) em (V),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}.$$

Analogamente, podem ser demonstradas as demais relações, conforme segue.

No triângulo ABC,

$$m = b - n. \qquad \text{(VI)}$$

No triângulo BCD, $\cos\hat{C} = \dfrac{n}{a}$, ou seja,

$$n = a.\cos\hat{C}. \qquad \text{(VII)}$$

De (III),

$$h^2 = a^2 - n^2. \qquad \text{(VIII)}$$

De (IV),

$$c^2 = m^2 + h^2. \qquad \text{(IX)}$$

Substituindo (VI) e (VIII) em (IX):

$$c^2 = (b-n)^2 + a^2 - n^2 =$$

$$= b^2 - 2.b.n + n^2 + a^2 - n^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.b.n. \qquad \text{(X)}$$

Substituindo (VII) em (X),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}.$$

Agora, considere a altura AD' correspondente ao lado BC (Figura 32).

No triângulo ABC, $a = m' + n'$, ou seja,

$$m' = a - n'. \qquad (\text{ XI })$$

No triângulo ABD', $\cos\hat{B} = \frac{n'}{c}$, ou seja,

$$n' = c.\cos\hat{B}. \qquad (\text{ XII })$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD',

$$b^2 = (m')^2 + (h')^2. \qquad (\text{ XIII })$$

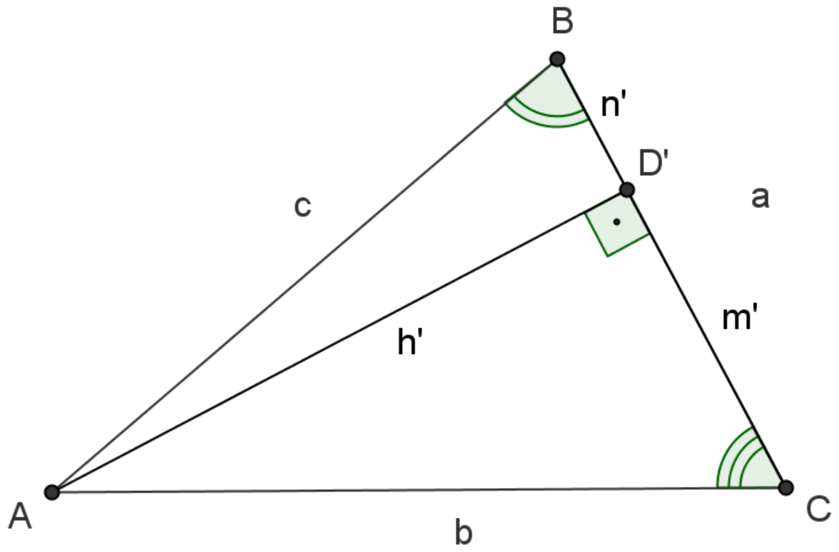

Figura 32: Triângulo ABC com altura $\overline{AD}$.

Também, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ABD', $c^2 = (n')^2 + (h')^2$

, ou seja,

$$(h')^2 = c^2 - (n')^2. \qquad (\text{ XIV })$$

Substituindo (XI) e (XIV) em (XIII):

$$b^2 = (a - n)^2 + c^2 - n^2 =$$

$$= a^2 - 2.a.n + n^2 + c^2 - n^2,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.n'. \qquad (\text{ XV })$$

Substituindo (XII) em (XV),

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}.$$

2º) <u>Triângulo obtusângulo</u>:

Seja ABC o triângulo obtuso em $\hat{A}$, com $\overline{BD}$ sua altura relativa ao lado AC. Considere as medidas a, b, c, m e h, como na Figura 33.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDC,

$$a^2 = h^2 + (b+m)^2 =$$

$$= h^2 + (b^2 + 2.b.m + m^2),$$

$$a^2 = b^2 + (h^2 + m^2) + 2.b.m. \qquad \text{(I)}$$

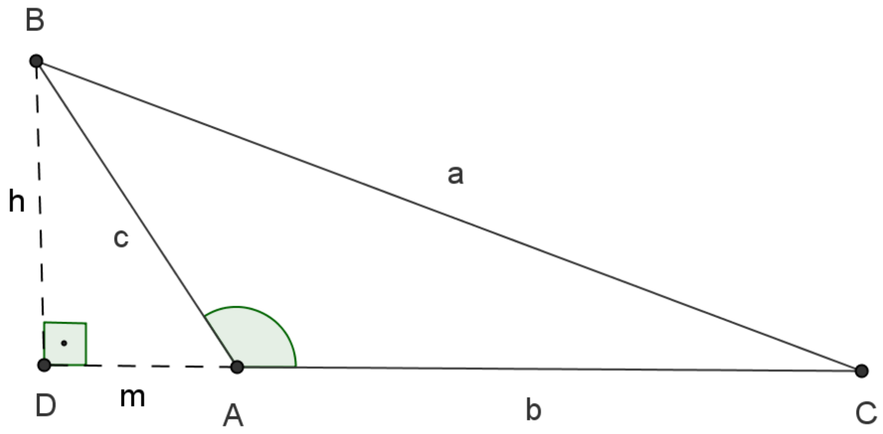

Figura 33: Triângulo obtusângulo.

No triângulo BDA, observa-se que

$$c^2 = h^2 + m^2. \qquad \text{(II)}$$

$\cos(\pi - \hat{A}) = \dfrac{m}{c} = -\cos\hat{A}$, isto é,

$$m = -c.\cos\hat{A}. \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtém-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}.$$

Analogamente, obtém-se

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}.$$

3º) Triângulo retângulo:

Considere-se o triângulo ABC, retângulo em C e as medidas a, b e c, como na Figura 34.

Pelo Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2 =$

$$= a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos 90^o = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}.$$

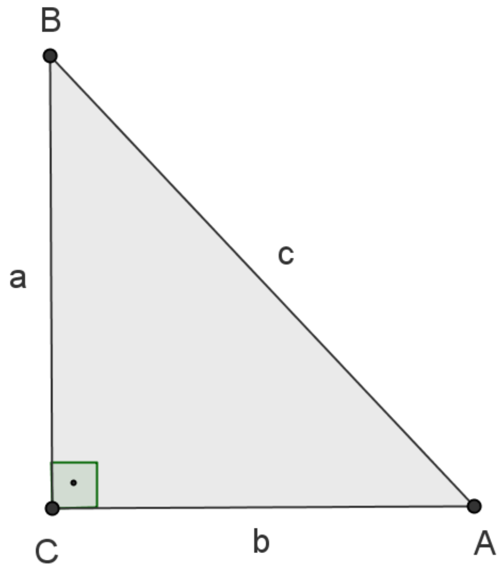

Figura 34: Triângulo ABC retângulo em $\hat{C}$.

Seguem alguns exemplos de aplicação da Lei dos Senos e dos Cossenos.

6.3. Aplicação da Lei dos Senos e dos Cossenos

O professor poderá retomar a Atividade 1, deste trabalho e utilizar os exemplos dos triângulos de medidas II e IV para a aplicação da Lei dos Senos e dos Cossenos, possibilitando a compreensão de que, uma vez fixados os lados, os ângulos do triângulo são únicos, ou seja, não podem ser alterados sem que os lados também o sejam.

Problema 6.3.1: Após ter montado o triângulo II, da Tabela 1, da Atividade 1, deste trabalho, responda o que se pede:

a) Faça um esboço do triângulo em questão;

b) Calcule os seus ângulos internos, utilizando a Lei dos Cossenos;

c) Quantas medidas de ângulos para cada vértice foram encontradas?

d) Uma vez fixadas as medidas dos lados do triângulo, o que se pode concluir?

Resolução esperada:

a) Esboço do triângulo ABC (Figura 35):

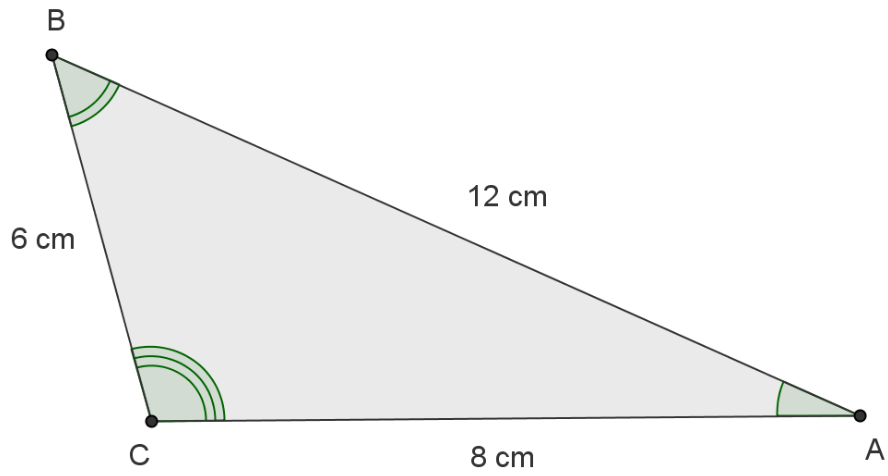

Figura 35: Triângulo ABC.

b) Aplicando a Lei dos Cossenos, obtém-se:

- o ângulo A:

$6^2 = 8^2 + 12^2 - 2.8.12.\cos\hat{A}$,

$36 = 64 + 144 - 192.\cos\hat{A}$,

$192.\cos\hat{A} = 172$,

$\cos\hat{A} \cong 0{,}896$.

Logo, $\hat{A} \cong 26^o$.

- o ângulo B:

$8^2 = 6^2 + 12^2 - 2.6.12.\cos\hat{B}$,

$64 = 36 + 144 - 144.\cos\hat{B}$,

$144.\cos\hat{B} = 116$,

$\cos\hat{B} \cong 0{,}805$.

Logo, $\hat{B} \cong 36^o$.

Por fim, para o cálculo do ângulo C, basta lembrar-se que a soma dos ângulos internos do triângulo resulta em 180º:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$,

$26^o + 36^o + \hat{C} = 180^o$,

$\hat{C} = 118^o$.

c) Foram encontradas apenas uma medida de ângulo para cada vértice.

d) Conclui-se que, uma vez fixadas as medidas dos lados do triângulo, os seus ângulos não podem ser alterados, ou seja, o triângulo é rígido.

Uma alternativa para a solução em (b) é encontrar o ângulo B pela Lei dos Cossenos e A pela Lei dos Senos. Neste caso particular, o fato de $b = 8 > a = 6$ garante que $\hat{B} > \hat{A}$ e, portanto, A também será um ângulo agudo. É o que se fez no problema 6.3.2.

Problema 6.3.2. Após ter montado o triângulo IV, da Tabela 1, da Atividade 1, deste trabalho, responda o que se pede:

a) Faça um esboço do triângulo em questão;

b) Calcule os seus ângulos internos, utilizando a Lei dos Senos e dos Cossenos;

c) Quantas medidas de ângulos para cada vértice foram encontradas?

d) Uma vez fixadas as medidas dos lados do triângulo, o que se pode concluir?

Resolução esperada:

a) Esboço do triângulo DEF (Figura 36):

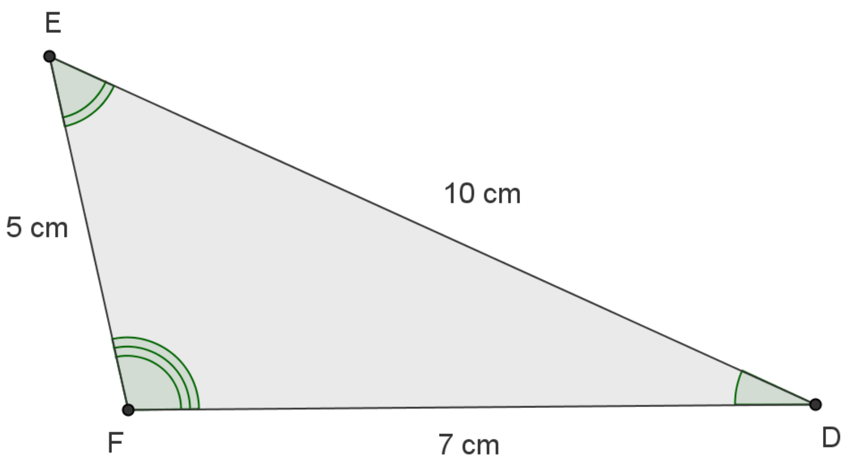

Figura 36: Triângulo DEF.

b) Aplicando a Lei dos Cossenos, obtém-se:

$$5^2 = 7^2 + 10^2 - 2.7.10.\cos\hat{D}$$

$$25 = 49 + 100 - 140.\cos\hat{D}$$

$$140.\cos\hat{D} = 124$$

$$\cos\hat{D} \cong 0{,}886$$

Logo, $\hat{D} \cong 28^o$.

Em seguida, utilizando a Lei dos Senos, pode-se calcular o ângulo E:

$$\frac{5}{sen28^o} = \frac{7}{sen\hat{E}}$$

Como $sen28^o = 0{,}469$,

$$sen\hat{E} = \frac{7.0{,}469}{5},$$

$$sen\hat{E} = 0{,}657.$$

Como $sen41^o = sen139^o \cong 0{,}657$, pelo fato de $e = 7 > d = 5$ garante que $\hat{E} > \hat{D}$ e, portanto, Ê também será um ângulo agudo.

Logo, $\hat{E} \cong 41^o$.

Por fim, calculando o ângulo F:

$$\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^o,$$

$$28^o + 41^o + \hat{F} = 180^o,$$

$$\hat{F} = 111^o.$$

c) Foram encontradas apenas uma medida de ângulo para cada vértice.

d) Conclui-se que, uma vez fixadas as medidas dos lados do triângulo, os seus ângulos não podem ser alterados, ou seja, o triângulo é rígido.

6.4. Segunda demonstração da Rigidez do Triângulo

Uma demonstração alternativa do Corolário 5.3.4 segue.

Seja o triângulo ABC com medidas dos lados a, b e c. Pela Lei dos Cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}.$$

Como $0^o < A, B < 180^o$, os ângulos A e B são únicos. De, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$, $\hat{C}$ também é único.

7. APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

As Atividades 1 e 2, do capítulo 4, foram aplicadas aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, conforme segue.

7.1 Atividade 1

No início da Atividade 1, foi apresentado aos alunos o método investigativo, que os levaria a fazerem descobertas a respeito dos triângulos.

Os alunos ficaram bem interessados e foram divididos em 9 grupos, pois a classe tinha 36 alunos presentes. Foi distribuída a folha de orientações e perguntas, a qual foi lida pelo professor.

Em seguida, os grupos de alunos começaram a tentar montar os triângulos com as medidas propostas, utilizando a tesoura para cortar os diferentes tamanhos dos lados dos triângulos, e o barbante para unir os canudos (Figura 37).

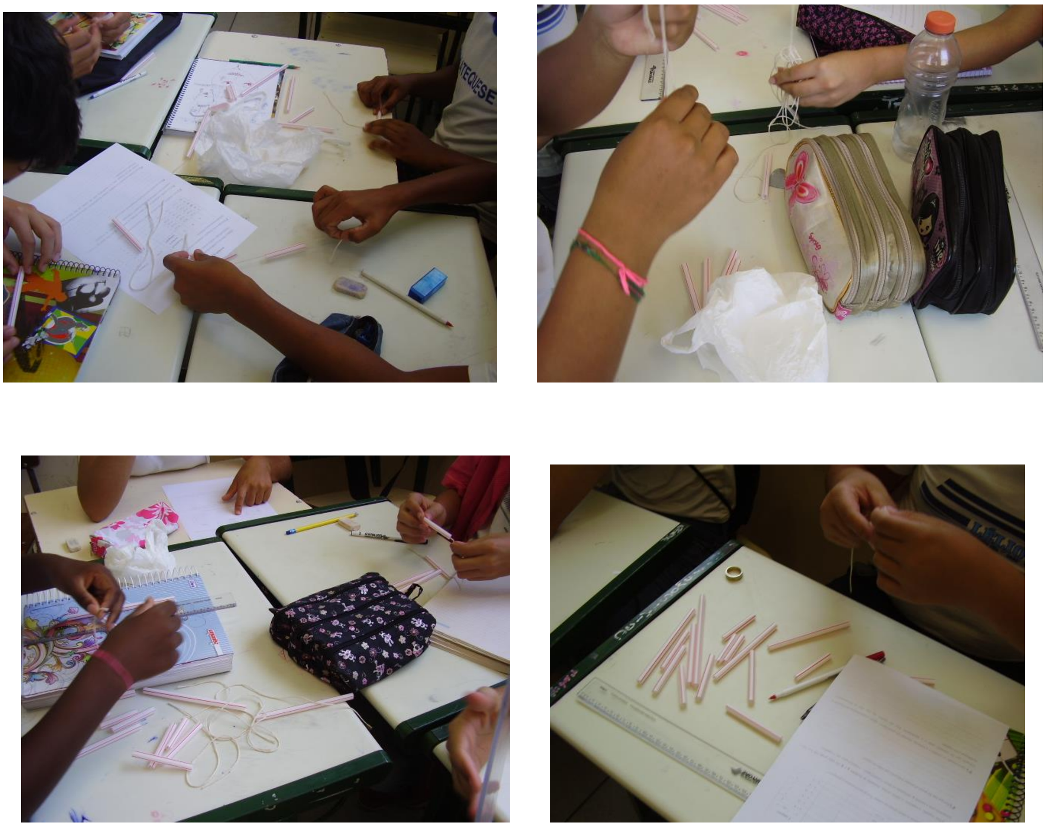

Figura 37-a: Fotos dos grupos de alunos desenvolvendo a Atividade 1.

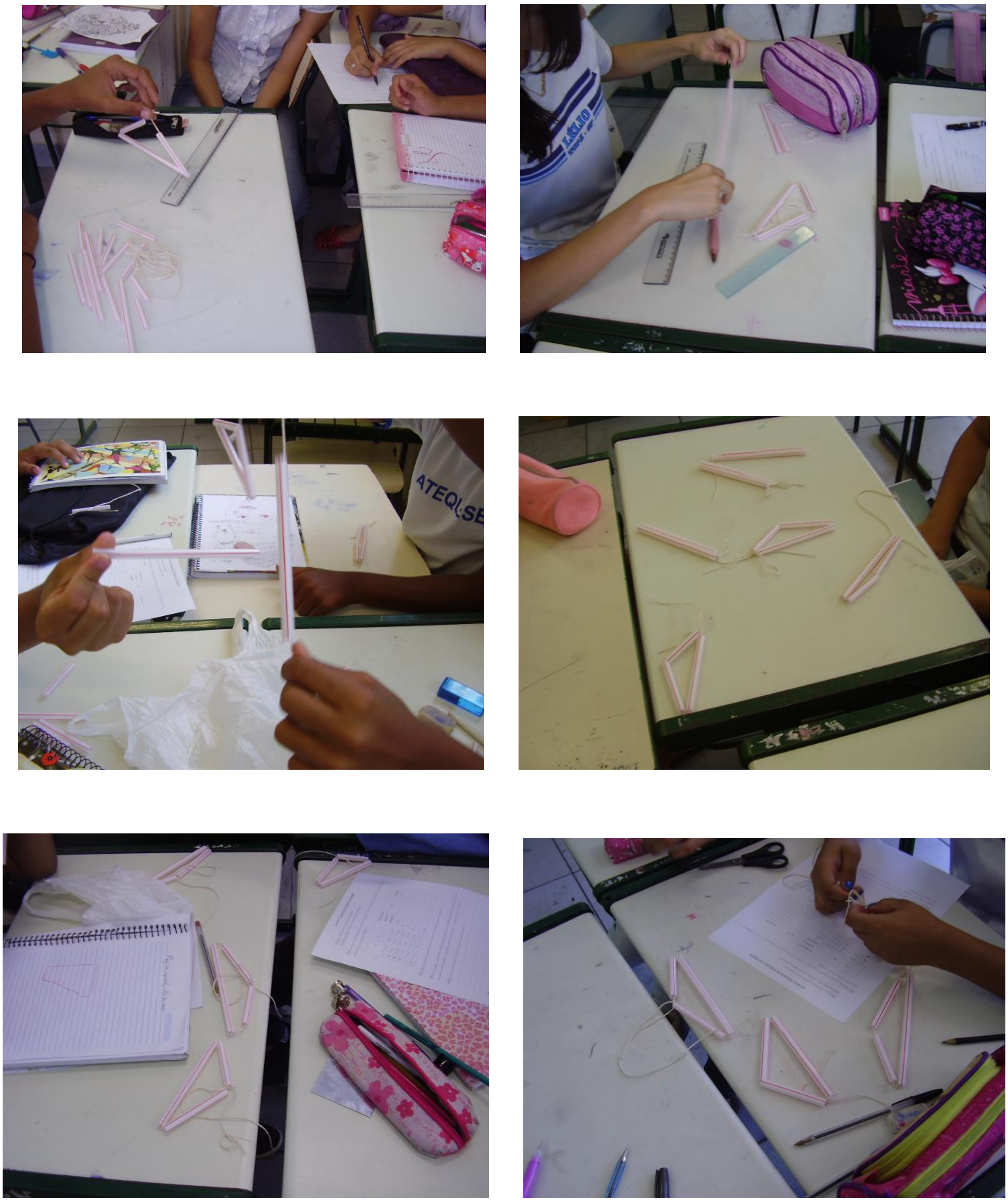

Figura 37-b: Fotos dos grupos de alunos desenvolvendo a Atividade 1.

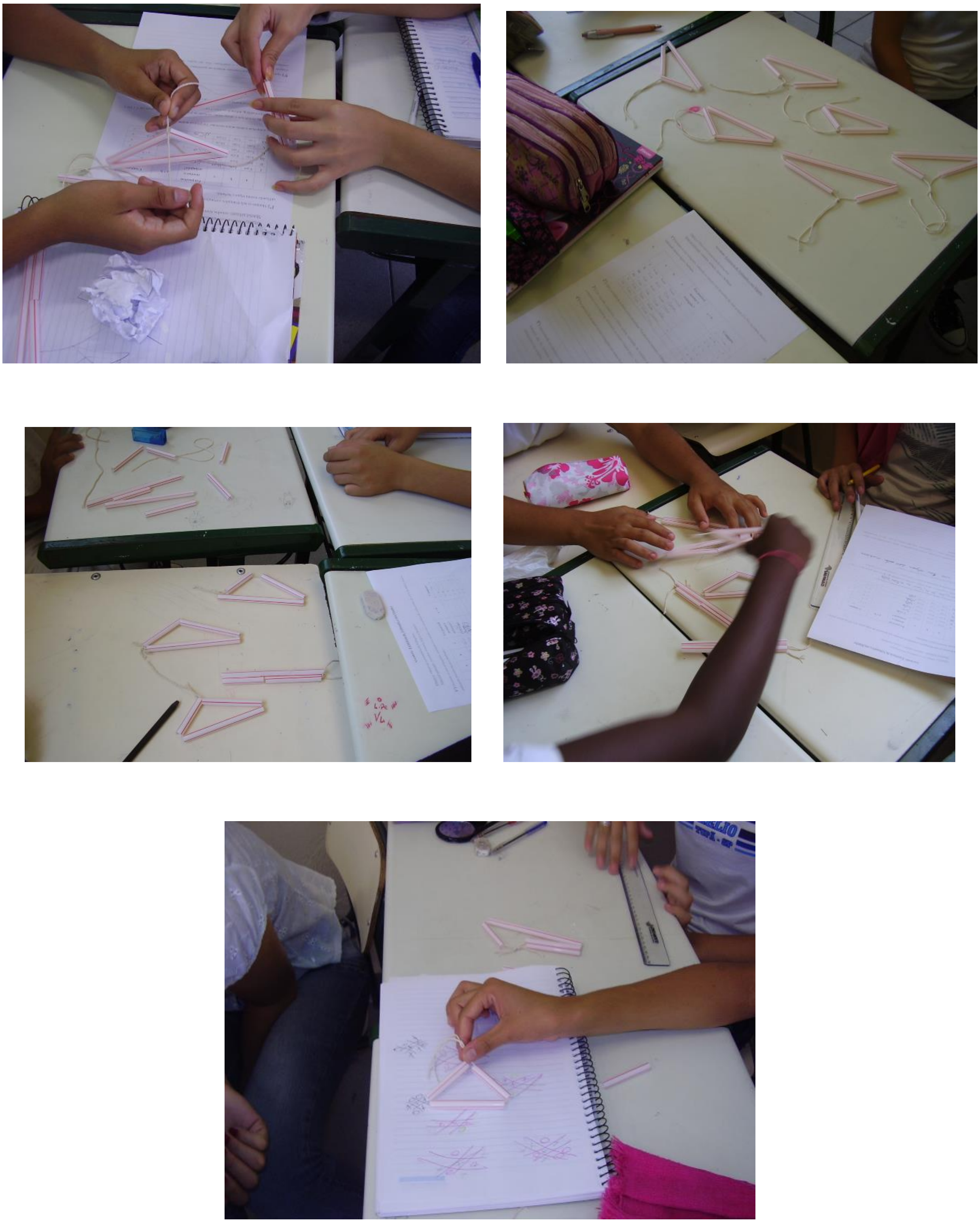

Figura 37-c: Fotos dos grupos de alunos desenvolvendo a Atividade 1.

Durante a montagem, alguns alunos alegaram que não estavam conseguindo montar um triângulo com algumas medidas, trocando ideias com os demais grupos e descobrindo que realmente não era possível montar um triângulo em alguns casos propostos.

A seguir, o professor pediu para os alunos efetuarem a soma dos lados ***a*** e ***b***, compararem com o lado ***c*** e completarem a tabela.

Enquanto faziam as comparações, os alunos passaram a perceber que era necessário que a soma dos dois lados precisava ser maior que o terceiro lado para se formar um triângulo, e compartilharam esta descoberta com os demais grupos.

Por fim, foi pedido para os alunos montarem um quadrilátero com os canudos, utilizando o barbante, e que, após, o movimentassem. Eles espontaneamente disseram que o quadrilátero ficou "mole", pois se movimentava para um lado e para outro.

Também foi pedido para que os grupos tentassem movimentar os triângulos formados, ficando constatado que eles não se moviam para os lados, surgindo a pergunta "por quê?".

Alguns alunos que tinham um maior conhecimento de geometria alegaram que era por causa dos ângulos internos dos triângulos, que não estavam "mudando", enquanto que os ângulos do quadrilátero aumentavam ou diminuíam conforme eram mexidos.

Portanto, os alunos conseguiram visualizar que o triângulo é uma figura rígida, isto é, uma vez fixadas as medidas dos lados, as medidas dos ângulos não se alteram.

Isso os motivou para a próxima atividade e para as demonstrações do capítulo 5.

7.2 Atividade 2

Em relação à Atividade 2, os alunos também foram separados em grupos e novamente foi explicado sobre a investigação na matemática.

Foram entregues os três grupos de triângulos para cada grupo de alunos, bem como foi entregue a folha contendo as orientações e o questionário para ser respondido (Figura 38). Também foi explicado o que significava sobreposição de figuras e quando dois triângulos eram congruentes.

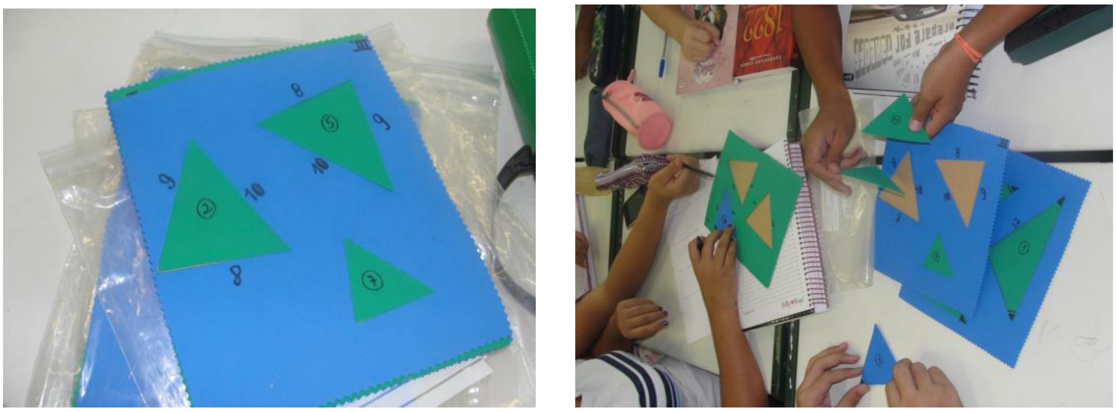

Figura 38-a: Fotos dos grupos de triângulos da Atividade 2 e o grupo de alunos.

Figura 38-b: Fotos dos grupos de triângulos da Atividade 2 e o grupo de alunos.

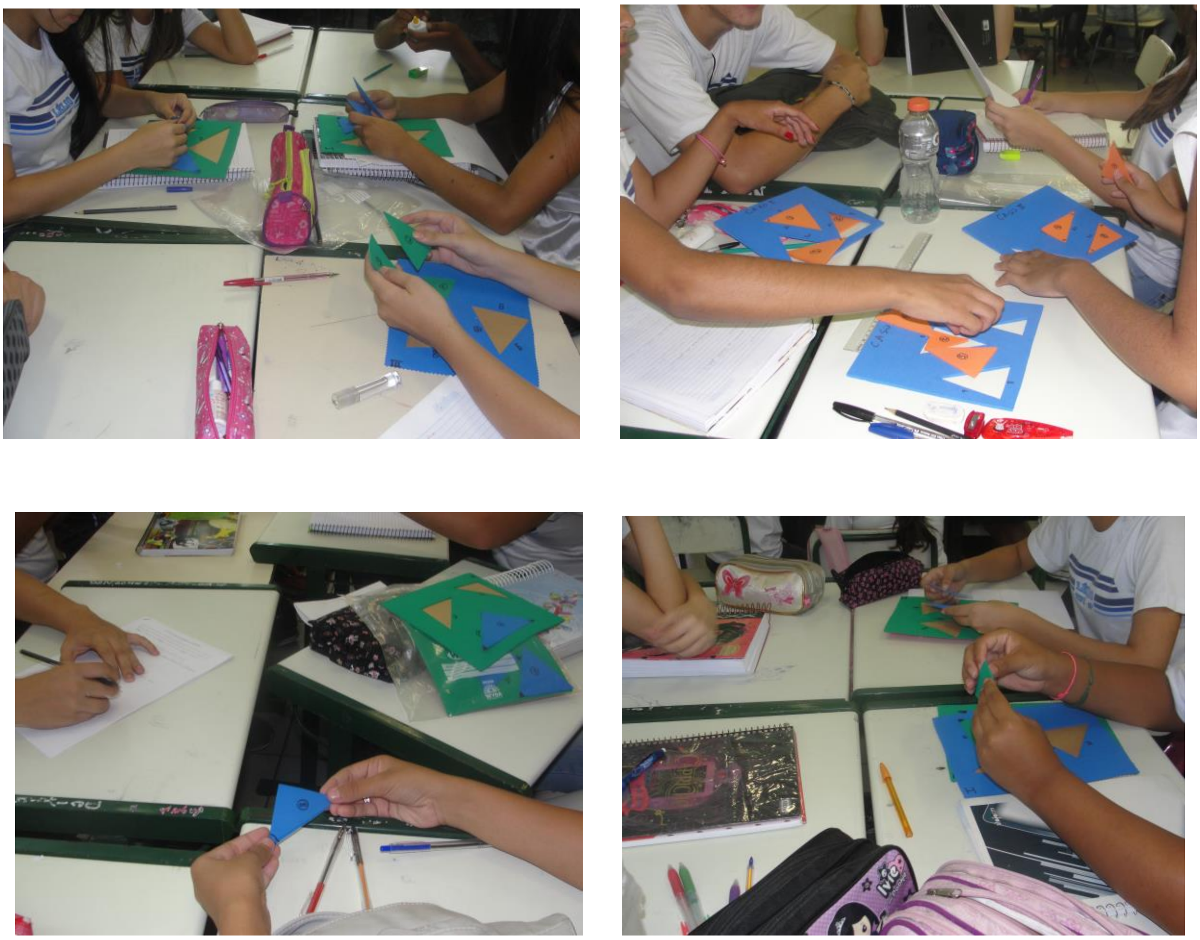

Figura 38-c: Fotos dos grupos de triângulos da Atividade 2 e o grupo de alunos.

Ao compararem os triângulos, verificaram de imediato que apenas dois deles eram congruentes e o terceiro tinha "tamanho diferente" dos demais, que sobrava ou faltava "um pedaço".

Perguntado aos alunos se poderiam verificar a congruência dos triângulos de outra forma, eles verificavam que os ângulos e os lados estavam relacionados entre si, mas não definiram em um primeiro momento os casos.

Com o auxílio do professor, os alunos puderam visualizar que bastava comparar os lados e os ângulos, três a três, e descobriram os três casos de congruência: LAL (lado-ângulo-lado), ALA (ângulo-lado-ângulo) e LLL (lado-lado-lado).

Os alunos ficaram surpresos ao descobrirem que bastava comparar dois lados e um ângulo entre eles, por exemplo, para verificar que os triângulos eram congruentes. Com isso, eles foram motivados a entender a demonstração dos casos de congruência.

Estas Atividades foram trabalhadas como forma de demonstrar que sua aplicação é simples e eficaz.

Assim, esta Atividade 2 também pode ser trabalhada no 1º ano do Ensino Médio para se demonstrar as Leis dos Senos e dos Cossenos, pois é necessário recordar os casos de congruência de triângulos, aplicados para demonstrar a rigidez dos triângulos, conforme apresentado no Capítulo 6 deste trabalho.

8. RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma forma alternativa de ensinar a existência e a congruência de triângulos. Ao invés do método tradicional, foi utilizada a investigação matemática.

Tais fatos foram fundamentais para demonstrar que um triângulo é rígido, isto é, um triângulo não tem a sua estrutura alterada sem a alteração de seus lados, o que justifica o seu uso em diferentes construções (telhado de casa, pontes, armários etc.). Isso foi aplicado para os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental II e foi verificado ser possível desenvolver os conteúdos tidos por difíceis de uma forma interessante, e de forma a motivar os alunos a fazerem conjecturas matemáticas e entender as suas demonstrações.

Uma alternativa de demonstração para a rigidez do triângulo é apresentada pela Lei do Cosseno, como proposta de aplicação no 2º ano do Ensino Médio. Isso está previsto para um futuro trabalho.

Cabe ressaltar, que as demonstrações dos casos de congruência de triângulos e das Leis do seno e cosseno, e o fato do triângulo ser rígido foram encontrados em diferentes referências. No entanto, a demonstração do último não, o que engrandece ainda mais esse trabalho.

Espera-se que os professores de matemática desenvolvam esta técnica investigativa com seus alunos, para que a matemática seja vista como uma disciplina cada vez mais interessante e intrigante, afastando todo o medo e toda a incompreensão destes, aguçando a sua curiosidade e atraindo seu interesse em descobrir toda a grandeza e exatidão destes conteúdos que vem percorrendo séculos e séculos, cada vez com novas descobertas.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

COSTA, D. M. B. et al. **Elementos de geometria**. 3. ed. Paraná: UFPR, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática**: volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9**: geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993.

Euclides de Alexandria. Apresenta informações sobre a geometria de Euclides. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/euclides.htm>. Acesso em: 22 out. 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

Fundamentos da Geometria Euclidiana. Apresenta informações sobre geometria. Disponível em: <www.mat.ufpb.br/ead>. Acesso em: 05 dez. 2013.

Grécia antiga. Apresenta informações sobre a Grécia antiga. Disponível em: <http://greciantiga.org/arquivo.asp?>. Acesso em: 22 out. 2013.

História da Geometria. Apresenta informações sobre a história da geometria. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/geometria.php>. Acesso em: 01 out. 2013.

LAMAS, R.C.P.; CÁCERES, A.R.; CHIRE, V.A.Q; MAURI, J. **Atividades de geometria no ensino fundamental**. In: Núcleos de Ensino da Unesp. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2006, p. 576-584.

LAMAS, R.C.P. **Congruência e semelhança de triângulos através de modelos**. In: Núcleos de Ensino da Unesp. São Paulo: Pró Reitoria de Graduação, 2007, p. 373-380.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**: vol. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MORGADO, A.C. et al. **Geometria I**. 5. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1990.

MORGADO, A.C. et al. **Geometria II: métrica plana**. 1. ed. Rio de Janeiro: F.C. Araújo da Silva, 2002.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora do IM-UFRJ, 2010. P. 53-66.

O triângulo. Apresenta informações sobre a importância do triângulo na vida humana. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/Secjeste/MODTRI01/Pg000650.htm>. Acesso em: 22 out. 2013.

PEDROSO, H. A. **História da Matemática**. São José do Rio Preto, SP, 2009. No prelo.

PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. C. **Geometria I**. 2. ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Ponte treliça. Apresenta informações sobre pontes e treliças. Disponível em: <http://dennysfs.blogspot.com.br/2011/06/ponte-trelica.html> Acesso em: 07 jan. 2014.

SÃO PAULO. **Currículo do Estado de São Paulo**: matemática e suas tecnologias. 1. ed. atual. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação, 2012.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008.

Rigidez dos triângulos. Apresenta informações sobre os matemáticos gregos. Disponível em: <http://www.webquestbrasil.org/criador/webquest/soporte_tabbed_w.php?id_actividad=14448&id_pagina=1>. Acesso em: 17 out. 2013.

Rigidez dos triângulos. Apresenta informações sobre triângulos. Disponível em: <http://www.webquestbrasil.org/criador/webquest/soporte_tabbed_w5.php?id_actividad=14448&id_pagina=5>. Acesso em: 22 nov. 2013.