UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Mário Pinto Carneiro Junior

Algumas técnicas de construção de alguns poliedros e suas aplicações no ensino

São José do Rio Preto
2014

Mário Pinto Carneiro Junior

Algumas técnicas de construção de alguns poliedros e suas aplicações no ensino

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador:
Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez.

São José do Rio Preto
2014

Carneiro Junior, Mário Pinto.
Algumas técnicas de construção de alguns poliedros e suas aplicações no ensino / Mário Pinto Carneiro Junior. -- São José do Rio Preto, 2014
176 f. : il., tabs.

Orientador: Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria sólida. 3. Poliedros. 4. Geometria – Ensino. 5. Ensino – Metodologia. I. Apaza Rodriguez, Jaime Edmundo. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.3

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Mário Pinto Carneiro Junior

Algumas técnicas de construção de alguns poliedros e suas aplicações no ensino

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
UNESP – Campus de Ilha Solteira
Orientador

Profª. Drª. Sílvia Regina Vieira da Silva
UNESP – Campus de Ilha Solteira

Profª. Drª. Eugenia Brunilda Opazo Uribe
UFMS – Campus de Três Lagoas

São José do Rio Preto
08 de agosto de 2014

Dedico a todos que têm admiração e fascínio pela Geometria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente...

A Deus, por tudo;
Aos meus pais, Mário Pinto Carneiro e Maria Francisca da Silva Carneiro, por sempre estarem por perto;
Aos colegas e aos professores do PROFMAT, pelas partilhas de conhecimentos valiosos;
Ao meu orientador prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez, pela confiança depositada na concretização deste trabalho;
À minha namorada linda, Lilian Soares Cardoso, pela força e apoio;
Ao meu pai, Mário Pinto Carneiro, e aos amigos Erlon Batista Nogueira, Nathália Mantovanelli Bevilaqua e Levi Jacinto Vieira Junior pelo auxílio em algumas tomadas fotográficas;
Às funcionárias da seção de pós-graduação Silvia Mara Vicentini de Carvalho (Ibilce) e Márcia Regina Nagamachi Chaves (Feis), por todos os serviços prestados.
Aos funcionários da biblioteca (Feis) João Josué Barbosa e Raiane da Silva Santos e à funcionária da biblioteca (Ibilce) Luciane Passoni, pelo valioso auxílio.

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo mostrar algumas possibilidades de ensino da geometria sólida a partir de modelos de poliedros regulares convexos, prismas e pirâmides, para os quais são apresentadas algumas técnicas de construção utilizando materiais de fácil acesso e manipulação, tais como: papel, folha plástica, varetas de metal e madeira, ímãs, esferas de aço, entre outros. Os sólidos geométricos assim construídos podem ser aplicados nos ensinos fundamental e médio como material de apoio, recreação ou curiosidades, ou ainda, como motivação para a investigação de algumas propriedades desses sólidos, podendo-se dizer que algumas dessas construções indicadas se tratam de uma inovação didática. As montagens e aplicações sugeridas atendem aos princípios educacionais apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Essas técnicas podem facilmente ser aproveitadas aos demais poliedros que se deseja trabalhar no ensino.

Palavras-chave: sólidos geométricos; técnicas de construção; ensino de geometria; inovação didática.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is exploring some teaching solid geometry possibilities starting from models of regular convex polyhedra and of prisms and pyramids, for which we introduce some construction techniques using materials accessible and easy to manipulate, such as paper, plastic sheet, metal and wooden rods, magnets, steel balls, among others. The geometric solids thus constructed can be applied in primary and secondary schools as support material, recreation or curiosities, or as motivation for investigating properties of these solids, could say that some of these are indicated constructs a didactic innovation. Assemblies and suggested applications meet the educational principles presented in the National Curricular Parameters. These techniques can be easily applied to other polyhedra we wish to work in teaching.

***Keywords**: geometric solids, construction techniques, teaching, didactic innovation.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 *Fotografia de alguns sólidos geométricos montados como recursos didáticos.* 20
Figura 2 *Os cinco poliedros regulares convexos.* 23
Figura 3 *Quantidades de faces triangulares com um vértice comum em um poliedro regular convexo.* 24
Figura 4 *Quantidade de faces quadradas com um vértice comum em um poliedro regular convexo.* 25
Figura 5 *Quantidade de faces pentagonais regulares com um vértice comum em um poliedro regular convexo.* 25
Figura 6 *Tetraedro regular e seus elementos principais para a determinação de seu volume.* 31
Figura 7 *Hexaedro regular e a representação de suas diagonais internas.* 33
Figura 8 *Octaedro regular e seus principais elementos para a determinação de seu volume.* 35
Figura 9 *Diagonais internas de um octaedro regular.* 36
Figura 10 *Decomposição do dodecaedro regular para o cálculo de seu volume.* 38
Figura 11 *Diagonais internas em um dodecaedro regular.* 42
Figura 12 *Representação de pontos, segmentos e planos para o auxílio na determinação do volume de um icosaedro regular.* 44
Figura 13 *Diagonais internas de um icosaedro regular.* 46
Figura 14 *Definição de um prisma convexo.* 48
Figura 15 *Definição de uma pirâmide convexa.* 49
Figura 16 *Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume.* 50
Figura 17 *Representação em perspectiva de um objeto.* 51
Figura 18 *Projeções do objeto em três planos ortogonais.* 52
Figura 19 *Representação das vistas frontal, lateral esquerda e superior.* 53
Figura 20 *Processo de planificação de um tronco tetraedro.* 55

Figura 21 *Processo de planificação de um octaedro não regular originado de um cubo duplamente seccionado.* 56
Figura 22 *Processo de planificação de um cubo seccionado por um plano contendo dois vértices diagonalmente opostos e pontos médios de duas arestas.* 57
Figura 23 *Processo de planificação de um cubo seccionado por um plano contendo dois vértices diagonalmente opostos e pontos médios de duas arestas.* 57
Figura 24 *Planificação de um prisma hexagonal convexo reto.* 58
Figura 25 *Planificação de uma pirâmide pentagonal convexa reta.* 59
Figura 26 *Planificação de um prisma hexagonal convexo reto seccionado.* 60
Figura 27 *Fotografia de um tetraedro regular confeccionado com o uso de palitos para churrasco.* 61
Figura 28 *Planificação da peça representativa do vértice do tetraedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).* 62
Figura 29 *Fotografia do processo de construção de um tetraedro regular com uso de palitos para churrasco.* 63
Figura 30 *Fotografia de parte do tetraedro montado.* 63
Figura 31 *Fotografia do tetraedro regular finalizado com arestas de 21 cm.* 64
Figura 32 *Fotografia de um hexaedro regular confeccionado com varetas em fibra de vidro para pipas.* 65
Figura 33 *Planificação da peça representativa do vértice de um hexaedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).* 65
Figura 34 *Fotografia de parte do processo de montagem do hexaedro regular.* 66
Figura 35 *Fotografia mostrando o hexaedro regular concluído com as suas diagonais internas.* 67
Figura 36 *Planificação da peça representativa do vértice de um octaedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).* 68
Figura 37 *Fotografia do octaedro regular montado com varetas em fibra de vidro para pipas.* 69
Figura 38 *Fotografia do octaedro regular com o acréscimo de suas três diagonais.* 69

Figura 39 *Planificação da peça representativa do vértice de um icosaedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).* 70
Figura 40 *Fotografia mostrando o icosaedro regular montado com varetas de fibra de vidro para pipas.* 71
Figura 41 *Fotografia mostrando o icosaedro regular e suas 36 diagonais.* 72
Figura 42 *Fotografia do icosaedro regular destacando a formação, por parte de suas diagonais, de um dodecaedro regular.* 73
Figura 43 *Fotografias mostrando o pequeno dodecaedro estrelado formado pelas diagonais do icosaedro regular (esquerda) e o mesmo sólido, montado em papel, para comparação (direita).* 73
Figura 44 *Fotografias mostrando o dodecaedro regular montado com arame de aço e a representação de suas 100 diagonais internas.* 75
Figura 45 *Fotografias do processo de montagem de um dodecaedro regular com um cubo (na cor laranja) em seu interior.* 76
Figura 46 *Planificação de uma pirâmide quadrangular destacando os pontos de interesse para a construção das peças representativas dos vértices.* 77
Figura 47 *Planificação das peças representativas dos vértices da base (quatro peças, à esquerda) e do ápice (uma peça, à direita) da pirâmide quadrangular reta.* 77
Figura 48 *Fotografia mostrando o início da montagem da pirâmide quadrangular reta.* 78
Figura 49 *Fotografia mostrando a pirâmide de base quadrangular reta finalizada.* 78
Figura 50 *Fotografia mostrando outros elementos da pirâmide, tais como: o apótema piramidal, apótema da base, a diagonal da base e a altura da pirâmide.* 79
Figura 51 *Planificação da pirâmide hexagonal reta, destacando as peças representativas dos vértices.* 80
Figura 52 *Planificação das peças representativas dos vértices da base (seis peças, à esquerda) e do ápice (uma peça, à direita) da pirâmide hexagonal reta.* 80
Figura 53 *Fotografia mostrando o início da montagem da pirâmide hexagonal reta.* 81

Figura 54 *Fotografia da pirâmide de base hexagonal reta concluída.* 81
Figura 55 *Fotografia mostrando outros elementos da pirâmide hexagonal, tais como: o apótema piramidal, apótema da base, uma diagonal da base e a altura da pirâmide.* 82
Figura 56 *Preparação dos canudos plásticos para a montagem de poliedros.* 83
Figura 57 *Redução apropriada do canudo plástico para a confecção do dodecaedro regular.* 84
Figura 58 *Fotografias mostrando o processo de junção entre os canudinhos. Na 1ª imagem, o canudo da esquerda, com o corte longitudinal, encaixando internamente ao canudo da direita (que não tem corte). Na 2ª imagem, os dois canudos unidos.* 84
Figura 59 *Diversas formas geométricas facilmente obtidas pelas junções dos canudinhos.* 85
Figura 60 *União dos pentágonos utilizando uma fita adesiva.* 85
Figura 61 *Levantamento das faces laterais do dodecaedro regular.* 86
Figura 62 *Fotografia mostrando o dodecaedro regular montado com canudos plásticos sanfonados.* 86
Figura 63 *Tetraedro regular montado com canudos plásticos sanfonados.* 87
Figura 64 *Componentes de um tetraedro regular truncado.* 88
Figura 65 *Tetraedro regular truncado montado com canudos plásticos sanfonados.* 88
Figura 66 *Prisma triangular montado com canudo sanfonado. O prisma central é caracterizado como reto e os da esquerda e direita são oblíquos, mas trata-se do mesmo objeto.* 89
Figura 67 *Fotografia mostrando a montagem de duas peças idênticas que unidas formarão um tetraedro regular.* 90
Figura 68 *Fotografia mostrando a colagem de um pedaço de manta magnética em uma das duas peças que formarão o tetraedro regular.* 91
Figura 69 *Fotografia das duas peças originadas do seccionamento do tetraedro regular.* 91
Figura 70 *Fotografia mostrando a formação do tetraedro regular com as duas partes unidas magneticamente.* 92

Figura 71 *Planificação das peças seccionadas do tetraedro regular. São necessárias duas peças para obtenção do sólido.* 93
Figura 72 *Fotografia mostrando a colagem de ímãs circulares para a montagem de um tetraedro seccionado por um plano paralelo à base.* 93
Figura 73 *Fotografias das partes do tetraedro regular seccionado por plano paralelo à base (esquerda) e a recombinação das peças unidas magneticamente (direita).* 94
Figura 74 *Planificação das peças seccionadas do tetraedro regular. No processo, foi formado um pequeno tetraedro regular (direita) e um tronco-tetraedro (esquerda).* 94
Figura 75 *Fotografia mostrando o seccionamento do cubo por um plano passando em somente três vértices, originando um tetraedro tri-retangular e um heptaedro.* 95
Figura 76 *Fotografia mostrando a regeneração do cubo a partir do tetraedro e heptaedro formados pelo seccionamento.* 95
Figura 77 *Planificação da peça maior seccionada do hexaedro regular.* 96
Figura 78 *Planificação da peça menor seccionada do hexaedro regular (não está na mesma escala que a figura 77).* 96
Figura 79 *Fotografia mostrando o seccionamento do hexaedro regular por um plano que contém os pontos médios de quatro arestas paralelas.* 97
Figura 80 *Regeneração do cubo a partir dos paralelepípedos originados pela seção citada.* 97
Figura 81 *Planificação de uma das peças da seção do cubo mostrada na figura 79. São necessárias duas destas peças para a regeneração do cubo.* 98
Figura 82 *Fotografia mostrando outra maneira de seccionar o cubo de modo a obter uma seção quadrada.* 98
Figura 83 *Figura que auxilia na determinação dos pontos em que o plano paralelo a quatro arestas deve passar para se obter uma seção quadrada no cubo de aresta a.* 99
Figura 84 *Regeneração do cubo a partir de um prisma triangular e um prisma pentagonal irregular.* 100

Figura 85 *Planificações das peças geradas do seccionamento do cubo mostradas na figura 84. À esquerda, um prisma pentagonal irregular e à direita, um prisma triangular.* 100
Figura 86 *Planificação de uma das peças de um cubo seccionado por um plano que contém duas arestas paralelas opostas. É um prisma triangular.* 101
Figura 87 *Fotografia das peças mostrando a seção do cubo em forma de losango.* 101
Figura 88 *Fotografia da regeneração do cubo a partir das peças mostradas na figura 87 (prisma quadrangular truncado).* 102
Figura 89 *Planificação de uma das peças de um cubo seccionado por um plano que contém dois vértices diagonalmente opostos e pontos médios de duas arestas. É um prisma quadrangular truncado.* 102
Figura 90 *Fotografia das peças de um cubo seccionado, mostrando uma seção pentagonal.* 103
Figura 91 *Planificações das peças originadas do seccionamento do cubo, cuja seção é um pentágono.* 103
Figura 92 *Fotografia de peças mostrando a seção do cubo em forma de hexágono regular.* 104
Figura 93 *Regeneração do cubo a partir de dois heptaedros idênticos.* 104
Figura 94 *Planificação de uma das peças do seccionamento do cubo, originando um hexágono regular como uma das faces.* 105
Figura 95 *Fotografia mostrando um multisseccionamento do cubo, que resultou em um tetraedro regular e quatro tetraedros tri-retangulares.* 105
Figura 96 *Fotografia das peças planificadas para o multisseccionamento do cubo.* 106
Figura 97 *Sequência de fotografias que mostra a recomposição do cubo a partir dos cinco tetraedros montados.* 106
Figura 98 *Fotografia mostrando a preparação da montagem de um dodecaedro regular multisseccionado, utilizando ímãs e finas chapas de aço.* 107
Figura 99 *Fotografia mostrando as peças prontas de um dodecaedro regular multisseccionado.* 108

Figura 100 *Regeneração do dodecaedro a partir das peças do multisseccionamento.* 108
Figura 101 *Fotografia do dodecaedro regular regenerado.* 109
Figura 102 *Material utilizado para a confecção de um icosaedro regular com múltiplas seções.* 110
Figura 103 *Fotografia mostrando a colagem das chapas de aço e ímãs de neodímio nas peças seccionadas do icosaedro regular.* 110
Figura 104 *Icosaedro dividido em quatro peças que auxiliam no cálculo de seu volume.* 111
Figura 105 *Sequência de imagens das peças em que o icosaedro está dividido.* 111
Figura 106 *Fotografia mostrando a preparação da montagem de um prisma triangular reto fracionado em três pirâmides de mesmo volume, utilizando ímãs e finas chapas de aço.* 112
Figura 107 *Fotografia das pirâmides de mesmo volume que compõem o prisma triangular reto.* 113
Figura 108 *Fotografia mostrando a recomposição do prisma triangular reto.* 113
Figura 109 *Fotografia do material utilizado na confecção das unidades magnéticas.* 115
Figura 110 *Fotografia mostrando o preparo das hastes flexíveis para montagem.* 116
Figura 111 *Fotografia mostrando as etapas de produção das hastes magnéticas.* 117
Figura 112 *Fotografia mostrando uma estrutura com triângulos em que é possível observar a permutação entre os polos magnéticos nas junções.* 117
Figura 113 *Fotografias mostrando estruturas com triângulos para representações dos ângulos poliédricos dos sólidos regulares.* 118
Figura 114 *Representações das medidas elementares das hastes magnéticas.* 119
Figura 115 *Fotografias de representações de um cubo e dois romboedros com as hastes magnéticas em dois comprimentos distintos.* 120
Figura 116 *Fotografias de estruturas com hastes magnéticas de variados tamanhos e cores.* 120

Figura 117 *Fotografias de alguns outros exemplos de montagens com hastes magnéticas.* 121
Figura 118 *Fotografia mostrando a tentativa frustrada de montar um icosaedro regular com tetraedros regulares.* 122
Figura 119 *Fotografias mostrando o traspassamento de poliedros por um plano de luz.* 123
Figura 120 *Fotografias mostrando a conversão de um feixe cilíndrico de laser em um plano de luz, através do acoplamento de um pequeno bastão de vidro.* 124
Figura 121 *Fotografias mostrando partes do apontador laser utilizado na montagem.* 125
Figura 122 *Partes do apontador laser utilizado na montagem.* 126
Figura 123 *Nossa máquina para visualização de seções em sólidos geométricos.* 127
Figura 124 *Esquema da máquina para visualização de seções em sólidos geométricos, mostrando a região onde devem ser posicionados os sólidos.* 127
Figura 125 *Esquema de como ajustar os planos de luz.* 128
Figura 126 *Interruptor, pilhas e esquema elétrico para a alimentação das fontes de luz laser.* 129
Figura 127 *Esquema de montagem para uma moldura menor. À esquerda, a moldura original e à direita, uma opção de menor tamanho, porém com oito fontes de luz.* 129
Figura 128 *Uso de motores para a montagem da máquina visualizadora de seções.* 131
Figura 129 *Fotografias mostrando seções produzidas com laser sobre cubo de plástico.* 131
Figura 130 *Fotografias mostrando seções triangular e quadrada sobre um tetraedro regular.* 132
Figura 131 *Seções produzidas com laser sobre superfícies cilíndricas de plástico.* 132
Figura 132 *Seções produzidas com laser sobre superfícies cônicas de plástico.* 133

Figura 133 *Manufatura de um cubo utilizando folha plástica para encadernação.* 134
Figura 134 *Fotografia do cubo, tetraedro, dodecaedro e de superfícies cilíndrica e cônica montados com folha plástica para encadernação.* 134
Figura 135 *Fotografias do cone e duplo cone montados com folhas plásticas para visualização de seções.* 135
Figura 136 *Elementos do cone circular reto e sua planificação.* 135
Figura 137 *Tetraedro regular no interior de um cubo, montados em folhas plásticas.* 137
Figura 138 *Fotografia do início da montagem de uma composição de um cubo dentro de um dodecaedro regular.* 138
Figura 139 *Fotografia da composição do tetraedro no interior do cubo no interior do dodecaedro.* 138

LISTA DE TABELAS

Quadro 1 *Números de faces, arestas e vértices dos cinco poliedros regulares convexos* 29

Quadro 2 *Poliedros regulares e suas planificações com abas de colagem* 54

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 19
2 POLIEDROS 22
2.1 Poliedros 22
2.2 Poliedros Regulares Convexos 23
2.2.1 Tetraedro Regular 30
2.2.2 Hexaedro Regular 32
2.2.3 Octaedro Regular 33
2.2.4 Dodecaedro Regular 36
2.2.5 Icosaedro Regular 43
2.3 Prismas e Pirâmides 47
2.3.1 Prisma 47
2.3.2 Pirâmide 48
2.3.3 Decomposição do prisma 49
3 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS 51
3.1 Representação de vistas 51
3.2 Planificações de poliedros 53
3.2.1 Planificações de variantes dos sólidos regulares 55
3.2.2 Planificações de prismas e pirâmides 58
4 TÉCNICAS DE MONTAGEM 61
4.1 Montagem com varetas 61
4.2 Montagem com canudo plástico sanfonado 82
4.3 Montagem com papel e ímãs 89
4.4 Montagem com esferas, ímãs e varetas 114
4.5 Máquina para visualização de seções em sólidos 122
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 139
REFERÊNCIAS 142
APÊNDICES 144
APÊNDICE A – Peças representativas dos vértices 144
APÊNDICE B – Planificações dos sólidos apresentados 147
APÊNDICE C – Moldes para montagem em folha plástica 173

1 INTRODUÇÃO

Geralmente boa parte dos alunos de matemática tem dificuldade na aprendizagem da geometria espacial pelo fato de não conseguir modelar mentalmente objetos tridimensionais, ou mesmo por não conseguir compreender a representação de tais objetos projetados no plano, como os apresentados em livros. Com a visualização e manipulação de objetos, acreditamos ser possível reduzir as dificuldades desses alunos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000), a Geometria se faz presente em formas naturais e artificiais e é essencial à descrição, à representação e à medição de uma grande quantidade de objetos e espaços da vida cotidiana e, ainda, no ensino médio, trata das formas bidimensionais e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações e modelos.

> "Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas" (BRASIL, 2000, p.123).

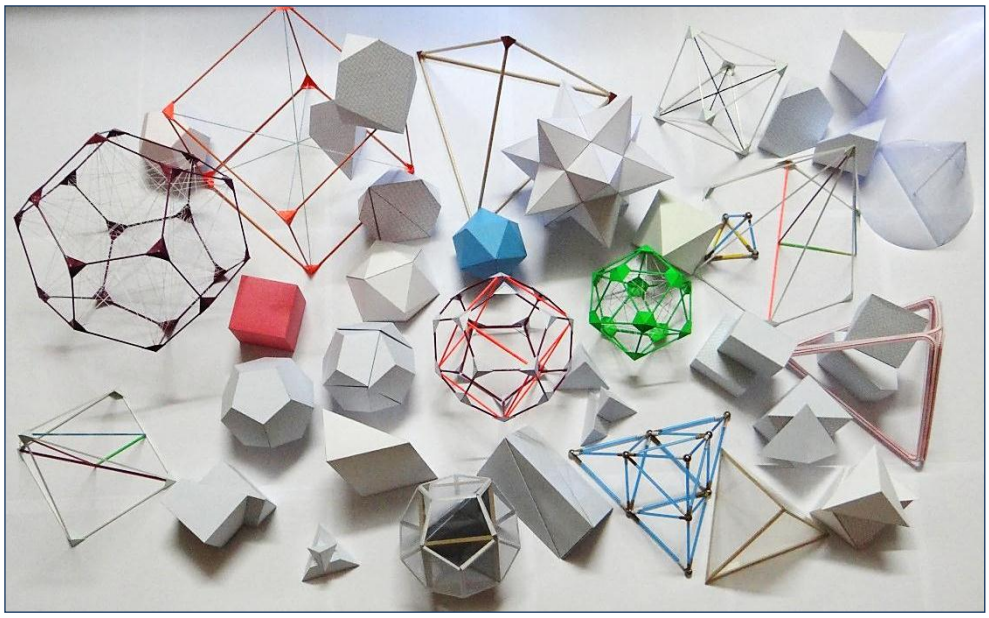
> "Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos" (BRASIL, 2000, p.123).

O que este trabalho propõe são algumas técnicas para construções de alguns sólidos geométricos, a fim de que estes sólidos, construídos pelo professor (ou até mesmo por alunos), possam ser apresentados aos alunos dos ensinos fundamental e médio e manipulados por estes, de modo que os principais elementos (como vértices, arestas, faces e diagonais) de tais objetos sejam mais facilmente identificados e seus conceitos e definições sejam melhores absorvidos e, ainda, tenham maior facilidade para observação de posições relativas entre segmentos de reta no espaço. Além disso, alguns desses materiais podem ser trabalhados com

alunos portadores de deficiência visual, ajudando-os a transpor suas dificuldades no aprendizado. As atividades que podem ser trabalhadas estão de acordo com os princípios educacionais dos PCN.

Dentre as construções sugeridas, apresentaremos maneiras de exibir as diagonais internas de um dodecaedro, de um cubo ou de um icosaedro, podendo a técnica ser estendida a outros sólidos; de representar a altura de uma pirâmide, bem como seus apótemas; de construir diversos sólidos seccionados, contando com dispositivos práticos que permitem unir essas partes seccionadas; de confeccionar hastes magnéticas para montagens rápidas e práticas de estruturas diversas e explorar essas possibilidades de montagem e, por fim, mostraremos um dispositivo a *laser* que pode ser um grande atrativo para visualizações de seccionamento de sólidos geométricos variados. São mostrados na Figura 1 alguns dos sólidos geométricos que este trabalho aborda, construídos em diversos materiais.

Figura 1 – Fotografia de alguns sólidos geométricos montados como recursos didáticos.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para as definições gerais dos poliedros, nos baseamos em autores como Lima (2006) e Dolce (2005), pois têm grande clareza em seus enunciados, entretanto, utilizamos somente o necessário para o entendimento e andamento do trabalho. Conceitos e técnicas de planificações foram utilizados, em parte, de French (1995), dos quais, também, utilizamos apenas o essencial para esta dissertação.

Trabalhos similares, no que diz respeito ao uso de materiais concretos no ensino de geometria espacial, podemos destacar Kaleff (2010) e Vidaletti (2009).

O segundo capítulo tratará de alguns assuntos teóricos pertinentes aos poliedros, como o histórico, definições, conceitos e propriedades da geometria sólida. O capítulo seguinte mostrará alguns métodos de planificação e, para isso, o uso de representações de três vistas de um objeto deverá ser feito. No quarto capítulo serão mostrados artifícios de montagem dos poliedros propostos, que é o principal objetivo desta dissertação. E nos apêndices estarão as planificações utilizadas ou sugeridas neste trabalho.

2 POLIEDROS

Neste capítulo abordaremos apenas os principais elementos e definições, referentes aos poliedros convexos, pois, são alguns desses elementos que se farão necessários na elucidação dos cálculos envolvendo áreas, volumes, diagonais internas, entre outros. E daremos prosseguimento até o objetivo principal do trabalho, que é a construção de alguns sólidos geométricos utilizando algumas técnicas desenvolvidas pelo autor ou adaptações.

2.1 Poliedros

Chama-se poliedro à reunião de um número finito de polígonos planos, denominados faces do poliedro, em que cada lado de um desses polígonos é lado de um, e somente um, outro polígono. Para quaisquer duas faces do poliedro a interseção ou é um lado comum, denominado aresta, ou é um ponto comum, denominado vértice, ou é vazia (LIMA et al., 2006).

Para se evitar a formação de objetos unidos por um vértice e classifica-los como um único poliedro, de acordo com a definição dada acima, cabe acrescentar que é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra face, sem passar por nenhum vértice, ou seja, cruzando apenas arestas (LIMA et al., 2006).

Consideremos, agora, somente os polígonos planos convexos em um número finito *n* ($n \geq 4$), tais que:

a) Dois desses polígonos convexos não sejam coplanares;
b) Cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
c) O plano que contém cada polígono deixa os demais polígonos em um mesmo semiespaço.

Nestas condições, ficam determinados *n* semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os polígonos restantes. A interseção desses semiespaços é chamada poliedro convexo (DOLCE e POMPEO, 2005).

Em outras palavras, um poliedro convexo é aquele em que o poliedro está inteiramente contido em um dos semiespaços originados pelo plano que contém qualquer uma das faces do poliedro.

Uma relação matemática importante que surge na investigação de propriedades dos poliedros convexos é a relação de Euler, e ela diz que para todo poliedro convexo vale a igualdade

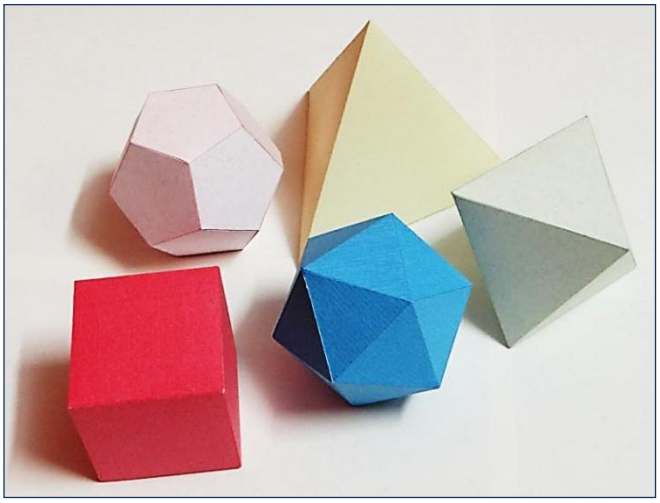
$$\mathbf{V - A + F = 2} \qquad \text{(Equação 1)}$$

em que **V** representa o número de vértices do poliedro, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces. Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros eulerianos.

2.2 Poliedros Regulares Convexos

Poliedros convexos são ditos regulares quando todas as suas faces forem polígonos regulares e congruentes e por todos os seus vértices concorrerem o mesmo número de arestas (DOLCE e POMPEO, 2005). Existem apenas cinco poliedros regulares convexos: o tetraedro regular, o hexaedro regular ou cubo, o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular. Estes sólidos estão ilustrados na Figura 2.

Figura 2 – Os cinco poliedros regulares convexos.

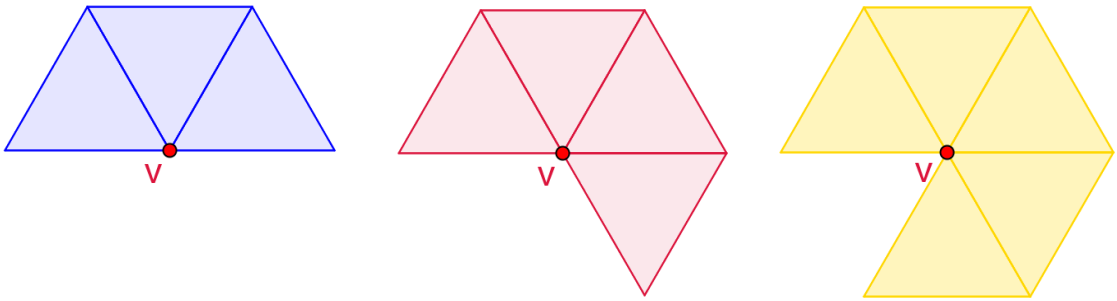


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Uma maneira informal de mostrar que existem apenas cinco poliedros regulares convexos é verificar a quantidade possível de combinações de polígonos regulares, compartilhando um único vértice, no plano, de modo que a soma dos ângulos no vértice comum seja inferior a 360° (BERLINGHOFF, 2010).

Comecemos com o polígono regular mais simples, ou seja, com um triângulo equilátero. Um poliedro regular convexo que contenha apenas triângulos terá um vértice compartilhado por, no mínimo, três destes triângulos e no máximo cinco. Na Figura 3 podemos observar três casos possíveis para a formação de poliedros regulares convexos com triângulos equiláteros. Na combinação de triângulos à esquerda, temos a soma dos ângulos, em torno do vértice V, igual a 180°, para a combinação ao centro, temos um ângulo total de 240° e para a combinação à direita temos uma soma de 300°. Ainda, analisando a figura à direita, podemos perceber que se introduzíssemos outro triângulo, com um de seus vértices em V e lado coincidente com o lado de outro triângulo, a soma dos ângulos em torno de V seria 360°, ou seja, não conseguiríamos montar o sólido, pois estas faces triangulares não sairiam do plano.

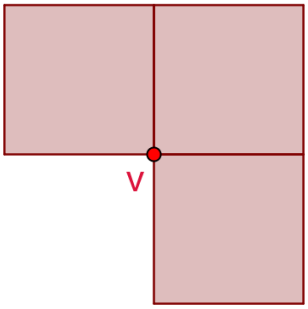
Figura 3 – Quantidades de faces triangulares com um vértice comum em um poliedro regular convexo.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Para o próximo polígono regular, o quadrado, temos apenas um caso para analisar. Vemos na Figura 4, três quadrados com um vértice em comum, em que a soma dos ângulos em torno de V é igual a 270°. Se encaixássemos mais um quadrado, teríamos 360° em torno do vértice, impossibilitando a montagem do sólido, pois estas faces seriam coplanares.

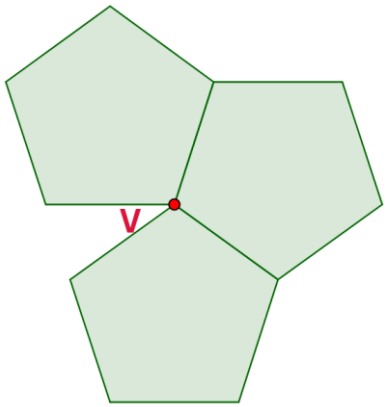
Figura 4 – Quantidade de faces quadradas com um vértice comum em um poliedro regular convexo.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Para o caso seguinte, o do pentágono regular, também temos apenas uma ocorrência. Na Figura 5 é ilustrada a combinação de pentágonos em torno do vértice V, cuja soma dos ângulos em torno deste ponto é de 324°. Colocar mais um pentágono ali não é possível.

Figura 5 – Quantidade de faces pentagonais regulares com um vértice comum em um poliedro regular convexo.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Com polígonos regulares de seis lados ou mais não há possibilidade de montagem, pois, no caso do hexágono regular, a soma dos ângulos em torno de V já somam 360° com três hexágonos e para heptágonos regulares ou polígonos regulares com número maior de lados ultrapassam essa soma, com o mesmo número de polígonos em torno de V.

Assim, o número de poliedros regulares convexos existentes são apenas cinco.

Agora, utilizando uma explicação formal, sejam ***F***, o número de faces do poliedro regular convexo, ***V***, o número de vértices, ***A***, o número de arestas, ***n***, o número de lados de cada face e ***m***, o número de arestas concorrentes em cada vértice. Temos que

$$\mathbf{n \cdot F = 2A} \qquad \text{(Equação 2)}$$

pois, como cada aresta do sólido é formada a partir da junção dos lados, dois a dois, de cada polígono, então o produto de ***n*** por ***F*** deve ser o dobro do número de arestas do sólido.

E, também, temos que

$$\mathbf{m \cdot V = 2A} \qquad \text{(Equação 3)}$$

pois, como cada dois lados do polígono concorrem em um vértice e, na formação do poliedro, esses lados se fundem a outros lados de outros polígonos para formarem arestas, que concorrem em vértices que coincidem com vértices dos polígonos, então o produto de ***m*** por ***V*** deve ser o dobro do número de arestas concorrentes em um vértice do sólido.

Das equações 2 e 3, obtemos que

$$\mathrm{n \cdot F = m \cdot V} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{V = \frac{n \cdot F}{m}} \qquad \text{(Equação 4)}$$

Isolando ***A*** da equação 2 e substituindo na relação de Euler (equação 1), juntamente com o resultado da equação 4, temos

$$\frac{n \cdot F}{m} - \frac{n \cdot F}{2} + \mathrm{F = 2} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{2n \cdot F - m \cdot n \cdot F + 2m \cdot F = 4m} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F = \frac{4m}{2n - m \cdot n + 2m}} \qquad \text{(Equação 5)}$$

Como todos os parâmetros da equação 5 devem ser números naturais, dentre outras condições, então o seu denominador deve ser maior que zero. Assim,

$$2n - n \cdot m + 2m > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -n \cdot m + 2m > -2n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m(2 - n) > -2n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m(n - 2) < 2n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m < \frac{2n}{n-2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{2n}{n-2} > m}$$

Como o número de arestas concorrentes em cada vértice do poliedro deve ser maior ou igual a três ($m \geq 3$), então, pela desigualdade anterior, podemos determinar o intervalo em que ***n*** deve assumir, ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} > 3 \quad \Rightarrow \quad 2n > 3(n-2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2n > 3n - 6 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n < 6}$$

Logo, pela última desigualdade, ***n*** só pode assumir valores menores que seis. Ou seja, ***n*** pode ser 3, 4 ou 5. Portanto, só podemos formar sólidos regulares com triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares.

Para o número de faces ***F*** teremos, pela equação 5:

- com $n = 3$ (triângulos equiláteros),

$$\mathrm{F} = \frac{4m}{2n - m \cdot n + 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} = \frac{4m}{6 - 3m + 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{\boldsymbol{4m}}{\boldsymbol{6 - m}}$$

- para $m = 3$, $\mathrm{F} = \frac{4 \cdot 3}{6-3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F = 4}$;
- para $\mathrm{m} = 4$, $\mathrm{F} = \frac{4 \cdot 4}{6-4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F = 8}$;
- para $m = 5$, $\mathrm{F} = \frac{4 \cdot 5}{6-5} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F = 20}$;
- para $m \geq 6$, não há solução ou não há solução natural.

➢ com $n = 4$ (quadrados),

$$\mathrm{F} = \frac{4m}{2n - m \cdot n + 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} = \frac{4m}{8 - 4m + 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} = \frac{4m}{8 - 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{\boldsymbol{2m}}{\boldsymbol{4 - m}}$$

- para $m = 3$, $\mathrm{F} = \frac{2 \cdot 3}{4-3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F = 6}$;
- para $m \geq 4$ não há solução ou não há solução natural.

➢ com $n = 5$ (pentágonos regulares),

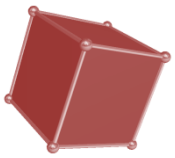
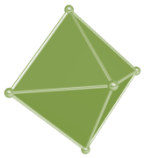
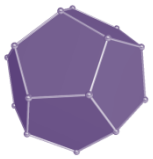
$$\mathrm{F} = \frac{4m}{2n - m \cdot n + 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} = \frac{4m}{10 - 5m + 2m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{\boldsymbol{4m}}{\boldsymbol{10 - 3m}}$$

- para $m = 3$, $\mathrm{F} = \frac{4 \cdot 3}{10 - 3 \cdot 3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F = 12}$;
- para $m \geq 4$ não há solução natural.

Vemos, então, que é possível obtermos três poliedros regulares com faces triangulares, um poliedro regular com faces quadradas e um poliedro regular com faces pentagonais.

Portanto, há apenas cinco poliedros regulares convexos e seus números de faces, arestas e vértices, bem como as figuras representativas de cada um deles, estão dispostos no quadro 1.

Quadro 1 – Números de faces, arestas e vértices dos cinco poliedros regulares convexos.

Poliedro	n° Faces	n° Arestas	n° Vértices	Figura
Tetraedro Regular	4	6	4	
Hexaedro Regular	6	12	8	
Octaedro Regular	8	12	6	
Dodecaedro Regular	12	30	20	
Icosaedro Regular	20	30	12	

Fonte das imagens: Versão de demonstração do software “Great Stella v. 4.4”.

Outro elemento importante sobre poliedros (além dos vértices, arestas e faces), discutido neste trabalho, são as diagonais. Dois vértices quaisquer de um poliedro podem ser unidos por segmentos que representam ou arestas, ou diagonais de faces ou diagonais do poliedro. Usando a Análise Combinatória, podemos inferir a seguinte fórmula para os poliedros regulares convexos:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{A} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{F}} \qquad \text{(Equação 6)}$$

em que

d representa o número de diagonais internas em um poliedro convexo;

$\mathbf{C}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{2}}$ representa a combinação do número de vértices V, tomados dois a dois, ou seja, $C_V^2 = \frac{V!}{2! \cdot (V-2)!}$;

A representa o número de arestas;

F representa o número de faces;

$\mathbf{d_F}$ representa o número de diagonais de uma face, podendo ser calculado por $\mathrm{d_F} = \frac{\mathrm{n(n-3)}}{2}$, sendo n, o número de lados dessa face.

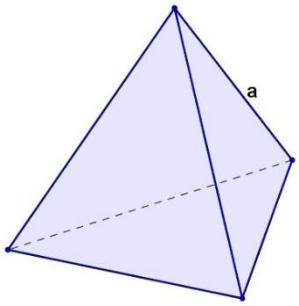
A seguir, mostraremos algumas propriedades de cada poliedro regular convexo.

2.2.1 Tetraedro Regular

O mais simples dos sólidos regulares é composto por quatro faces triangulares equiláteras.

- Área total do tetraedro regular

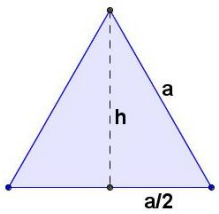
Seja ***a*** a medida da aresta de um tetraedro regular, temos que:



$$A = 4 \cdot A_F$$

sendo A_F, a área da face.

Aplicando o teorema de Pitágoras em parte do triângulo que representa a face do tetraedro, vem:



$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

logo,

$$A_F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

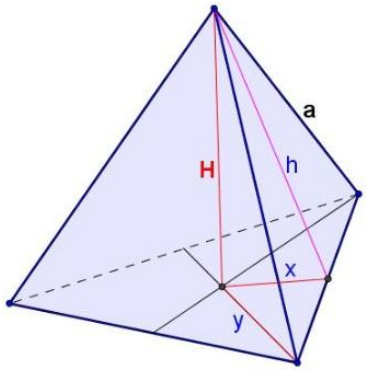
$$A = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A = a^2\sqrt{3}}$$

- Volume do tetraedro regular

Consideremos a Figura 6, ***H*** representa a altura do tetraedro regular, ***h*** é a altura da face e ***a***, a medida da aresta.

Figura 6 – Tetraedro regular e seus elementos principais para a determinação de seu volume.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Vamos inicialmente determinar o valor de ***x***, sabendo que o ângulo formado entre a bissetriz de um dos ângulos do triângulo equilátero e um dos lados desse triângulo é de 30°, teremos:

$$tg30° = \frac{x}{a/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{a/2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

Aplicando teorema de Pitágoras para a determinação de ***H***, vem:

$$H^2 = h^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{2}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Como o volume de uma pirâmide é dado pela terça parte do produto da área da base pela altura, então:

$$V = \frac{1}{3}A_F \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

- Diagonais internas de um tetraedro

É fácil perceber que em um tetraedro regular não há diagonais. Vamos mostrar isso com o auxílio da análise combinatória.

Sejam $\mathrm{F} = 4$, $\mathrm{V} = 4$ e $\mathrm{A} = 6$, os números de faces, vértices e arestas, respectivamente, tal como informado no quadro 1. A combinação dos vértices, tomados dois a dois, podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$C_V^2 = \frac{V!}{2! \cdot (V-2)!} \quad \Rightarrow \quad C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \boldsymbol{6}$$

Este resultado representa todas as possíveis ligações dos vértices do tetraedro, entre arestas, diagonais de faces e diagonais internas. Mas todas as faces do tetraedro são triangulares e triângulos não têm diagonais e, ainda, o valor encontrado coincide com o número de arestas do sólido, então, concluímos que o número de diagonais de um tetraedro é nulo.

2.2.2 Hexaedro Regular

- Área total do hexaedro regular

A área total de um cubo, sendo ***a*** a medida de sua aresta, deve ser dada por

$$\boldsymbol{A = 6 \cdot a^2}$$

pois, o cubo é formado por 6 quadrados de área a^2 cada um.

- Volume de um hexaedro regular

O volume de um cubo, sendo ***a*** a medida de sua aresta, é dado por

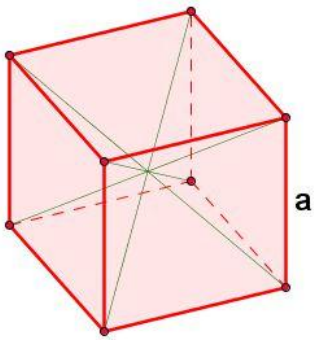
$$\boldsymbol{V = a^3}$$

pois, em um paralelepípedo reto-retângulo o volume é dado pelo produto de suas dimensões.

- Diagonais internas de um hexaedro regular

As diagonais de um cubo são facilmente contabilizadas e representadas. Na Figura 7 são representadas as quatro diagonais do cubo.

Figura 7 – Hexaedro regular e a representação de suas diagonais internas.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Pelo quadro 1 e utilizando a equação 6, temos:

$$\mathrm{F} = 6,\ \mathrm{V} = 8 \text{ e } \mathrm{A} = 12$$

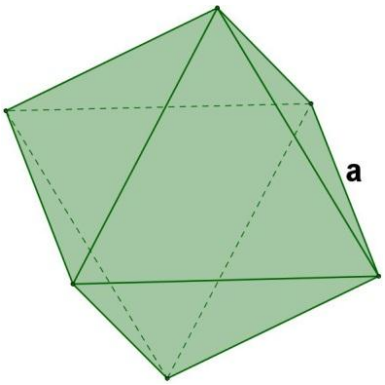
$$\mathrm{d} = \mathrm{C}_{\mathrm{V}}^{2} - \mathrm{A} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}_{\mathrm{F}} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} - 12 - 6 \cdot 2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d = 4}$$

2.2.3 Octaedro Regular

- Área total do octaedro regular

Como todas as faces do octaedro regular são triângulos equiláteros e congruentes, então sua área total pode ser dada por:



$$A = 8 \cdot A_F$$

em que $\boldsymbol{A_F}$ representa a área da face e seu valor pode ser calculado por

$$A_F = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

sendo ***a*** a medida da aresta do octaedro regular.

Logo,

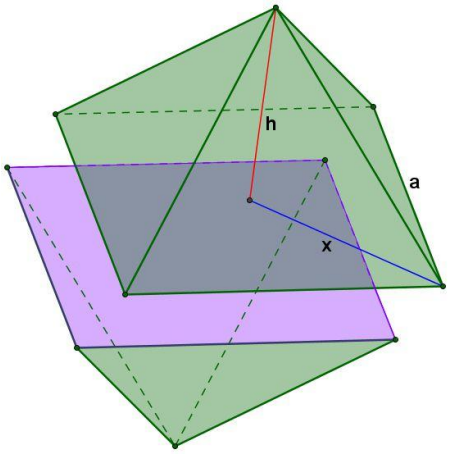
$$A = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A = 2a^2\sqrt{3}}$$

- Volume de um octaedro regular

Podemos visualizar um octaedro regular como duas pirâmides quadrangulares unidas pela base. Sejam ***x***, a medida da metade da diagonal da seção quadrada do octaedro regular, ***h***, a altura de uma das pirâmides separadas pela seção quadrangular e ***a***, a medida da aresta, como mostrado na Figura 8.

Figura 8 – Octaedro regular e seus principais elementos para a determinação de seu volume.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Desse modo, podemos calcular seu volume por:

$$V = 2V_P$$

em que $\mathbf{V_P}$ representa o volume da pirâmide quadrangular e, utilizando os elementos da Figura 8 como auxílio, este volume pode ser encontrado da seguinte maneira:

$$h^2 = a^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Logo,

$$V_P = \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_P = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}}$$

como

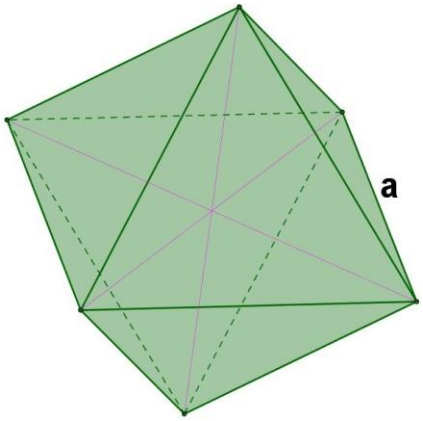
$$V = 2 \cdot V_P \quad \Rightarrow \quad V = 2 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$$

- Diagonais internas de um octaedro regular

Tal como no cubo, no octaedro também se contabiliza facilmente a quantidade de diagonais internas como pode ser verificado pela Figura 9.

Figura 9 – Diagonais internas de um octaedro regular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Pelo quadro 1 e utilizando a equação 6, temos:

$$\mathrm{F} = 8,\ \mathrm{V} = 6 \text{ e } \mathrm{A} = 12$$

$$\mathrm{d} = \mathrm{C}_{\mathrm{V}}^{2} - \mathrm{A} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}_{\mathrm{F}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} - 12 - 8 \cdot 0$$

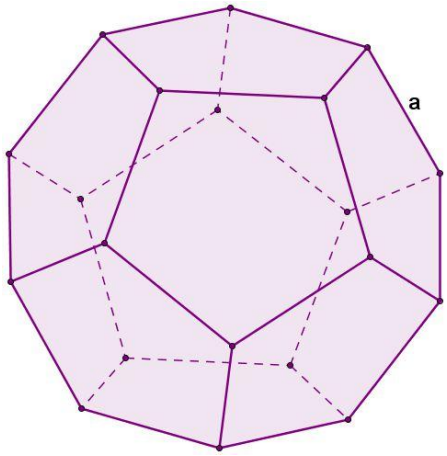
$$\therefore \quad \boldsymbol{d = 3}$$

2.2.4 Dodecaedro Regular

- Área total do dodecaedro regular

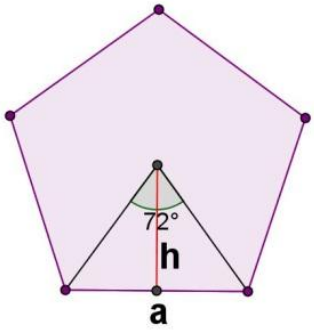
Como todas as faces do dodecaedro regular são pentágonos regulares e congruentes, então sua área total pode ser dada por:

$$A = 12 \cdot A_F$$



em que $\boldsymbol{A_F}$ representa a área da face e seu valor pode ser determinado como se segue.

Vamos inicialmente calcular a área do triângulo em destaque da figura seguinte. O quíntuplo de seu valor será a área do pentágono regular. Assim,



$$A_\Delta = \frac{a \cdot h}{2}$$

mas, pelas relações trigonométricas, temos

$$tg\ 36° = \frac{a/2}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{2 \cdot tg\ 36°}$$

Logo,

$$A_\Delta = \frac{a \cdot \frac{a}{2 \cdot tg\ 36°}}{2} \quad \Rightarrow \quad A_\Delta = \frac{a^2}{4 \cdot tg\ 36°}$$

Então,

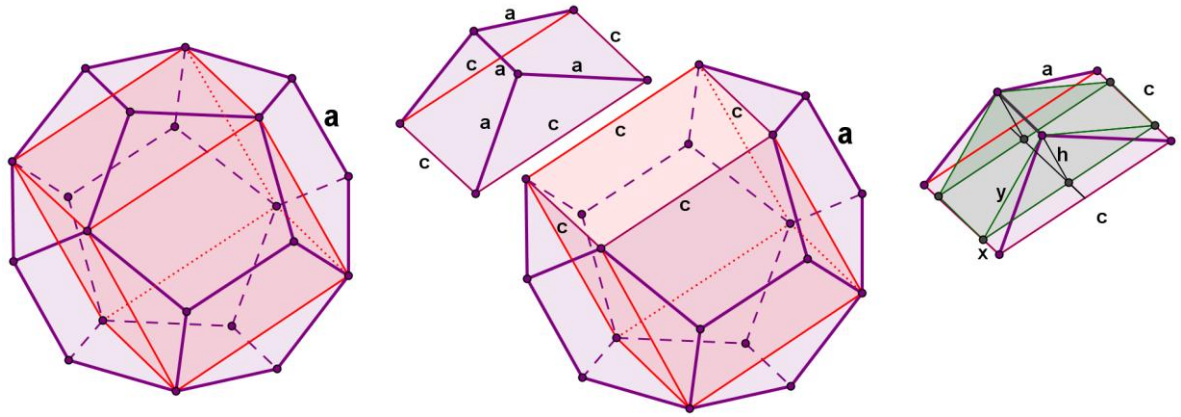
$$\therefore \qquad A_F = \frac{5a^2}{4 \cdot tg\ 36°} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{A = \frac{15a^2}{tg\ 36°}}$$

- Volume do dodecaedro regular

A descrição e a forma de calcular o volume do dodecaedro regular é uma adaptação da resolução descrita por Rowland (2014). Uma maneira de resolução que geralmente surge em nossa mente para encontrar o valor do volume de um dodecaedro regular, é a de calcular o volume de uma pirâmide, cuja base seja uma das faces pentagonais e sua altura seja o comprimento que vai do centro do

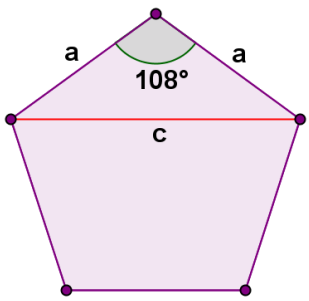
dodecaedro até o centro de sua face e depois multiplicar o resultado por doze. Entretanto, devido à dificuldade em determinar essa altura da pirâmide, veremos outro modo de calcular o volume. Neste método, decompomos o dodecaedro em um cubo e seis outros poliedros, conforme podemos ver na Figura 10. No capítulo 4, sugerimos a montagem do dodecaedro regular multisseccionado, apresentando, para isso, as planificações das partes e suas montagens, como podem ser vistas nas Figura 98, Figura 99, Figura 100 e Figura 101, que podem ser úteis na compreensão da determinação do volume deste sólido.

Figura 10 – Decomposição do dodecaedro regular para o cálculo de seu volume.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Pela imagem à esquerda da Figura 10, notamos que a aresta do cubo inscrito ao dodecaedro tem uma das arestas coincidente com uma das diagonais do pentágono que forma a face do dodecaedro. Sabendo que os ângulos internos de um pentágono regular são de 108° e considerando suas arestas com medida ***a*** e a aresta do cubo com medida ***c***, então, pela lei dos cossenos, temos:



$$c^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 108° = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos 108°$$

mas, $\cos 108° = -\cos 72°$, então

$$c^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 72° = 2a^2 \cdot (1 + \cos 72°)$$

Logo,

$$c = a \cdot \sqrt{2 \cdot (1 + \cos 72°)}$$

Poderíamos continuar os cálculos com este resultado encontrado para ***c***, no entanto, vamos encontrar o valor de cos 72° para facilitar o tratamento algébrico. Assim, utilizando as identidades trigonométricas para arcos duplos e triplos, temos:

$$\cos 72° = -\cos 108° \quad \Rightarrow \quad \cos(2 \cdot 36°) = -\cos(3 \cdot 36°)$$

Aplicando as identidades

$$\cos(2\theta) = 2 \cdot cos^2\theta - 1 \quad \text{e} \quad \cos(3\theta) = 4 \cdot cos^3\theta - 3 \cdot \cos\theta,$$

vem

$$2 \cdot cos^2\theta - 1 = -4 \cdot cos^3\theta + 3 \cdot \cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4 \cdot cos^3\theta + 2 \cdot cos^2\theta - 3 \cdot \cos\theta - 1 = 0$$

Fazendo $\cos\theta = t$, fica

$$4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t + 1) \cdot (4t^2 - 2t - 1) = 0$$

e, assim, encontramos as raízes

$$\left\{-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right\}$$

Destas, utilizaremos apenas a raiz positiva. Então,

$$\cos\theta = t \quad \Rightarrow \quad \cos 36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

daí

$$\cos 72° = \cos(2 \cdot 36°) = 2 \cdot cos^2 36° - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Então, reescrevendo o valor de ***c***, temos

$$c = a \cdot \sqrt{2 \cdot (1 + \cos 72°)} = a \cdot \sqrt{2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)} = a \cdot \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c = a \cdot \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}} = a \cdot \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}} = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Notando que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ representa o número áureo e o mesmo pode ser denotado por φ, então

$$c = a \cdot \varphi$$

As peças que estão sobre cada face do cubo são compostas por um prisma triangular, cuja base tem medidas ***c*** e ***h*** (altura do triângulo) e a altura do prisma é ***a***, e por duas pirâmides de base retangular, cujas medidas são ***x*** e ***c*** (bases) e ***h*** (altura da pirâmide), como mostrado na imagem à direita da Figura 10.

Para determinarmos ***x*** e ***h***, usaremos o teorema de Pitágoras:

$$y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{c^2}{4} + h^2 \qquad \text{(I)}$$

e, também

$$a^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = a^2 - x^2$$

note que $x = \frac{c-a}{2}$, então

$$y^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = a^2 - \frac{(c-a)^2}{4} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), vem

$$\frac{c^2}{4} + h^2 = a^2 - \frac{(c-a)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3a^2 - 2c^2 + 2a \cdot c}{4}$$

sendo $c = a \cdot \varphi$, então

$$h^2 = \frac{3a^2 - 2a^2\varphi^2 + 2a^2\varphi}{4} = \frac{a^2(3 - 2\varphi^2 - 2 + 2\varphi)}{4}$$

mas, $\varphi^2 = \varphi + 1$, então

$$h^2 = \frac{a^2[3 - 2(\varphi + 1) - 2 + 2\varphi]}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{2}$$

Então, o volume do prisma será

$$V_{Prisma} = \frac{c \cdot h}{2} \cdot a = \frac{a \cdot \varphi \cdot \frac{a}{2} \cdot a}{2} = \frac{a^3\varphi}{4}$$

Na Figura 10, à direita, vemos duas pirâmides, uma à frente do prisma e outra atrás. Unindo-as, obtemos uma só pirâmide cuja base será um retângulo de medidas ***2x*** e ***c*** e sua altura continua valendo ***h***. Assim,

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot c \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2\frac{(c-a)}{2} \cdot c \cdot \frac{a}{2} = \frac{c^2 a - c \cdot a^2}{6} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{Pirâmide} = \frac{a^2\varphi^2 \cdot a - a \cdot \varphi \cdot a^2}{6} = \frac{a^3(\varphi + 1) - a^3\varphi}{6} = \frac{a^3}{6}$$

Calculando o volume do cubo e finalmente o volume do dodecaedro:

$$V_{Cubo} = c^3 = a^3 \cdot \varphi^3 = a^3(2\varphi + 1)$$

então,

$$V = V_{Cubo} + 6 \cdot (V_{Prisma} + V_{Pirâmide}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = a^3(2\varphi + 1) + 6 \cdot \left(\frac{a^3\varphi}{4} + \frac{a^3}{6}\right) = \frac{4a^3\varphi + 2a^3 + 3a^3\varphi + 2a^3}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{7a^3\varphi + 4a^3}{2} = \frac{a^3(7\varphi + 4)}{2}$$

substituindo φ,

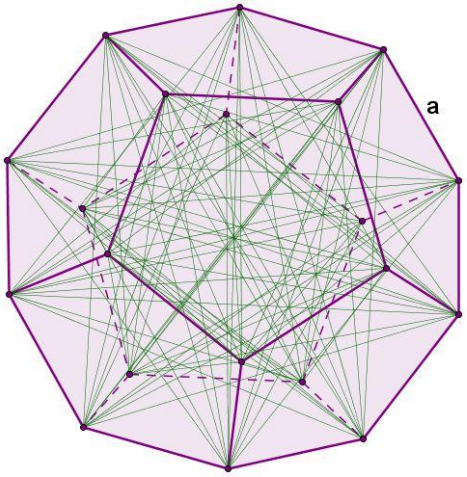
$$V = \frac{\left(\frac{7(1+\sqrt{5})}{2} + 4\right)}{2} \cdot a^3 = \frac{7 + 7\sqrt{5} + 8}{4} \cdot a^3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \cdot a^3}$$

- Diagonais internas de um dodecaedro regular

Diferentemente do cubo e octaedro, a contagem de diagonais internas em um dodecaedro regular não é tão evidente assim, como pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Diagonais internas em um dodecaedro regular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Pelo quadro 1 e utilizando a equação 6, temos:

$$\mathrm{F} = 12,\ \mathrm{V} = 20 \text{ e } \mathrm{A} = 30$$

$$\mathrm{d} = \mathrm{C}_{\mathrm{V}}^{2} - \mathrm{A} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}_{\mathrm{F}} \quad \Rightarrow$$

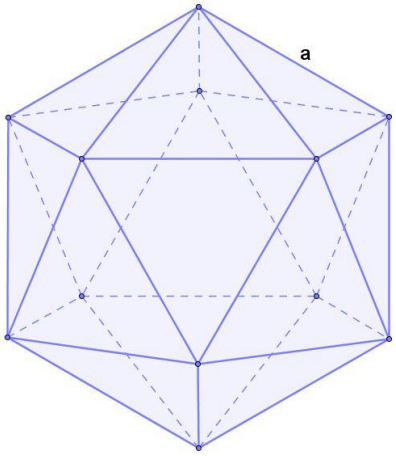
$$\Rightarrow \quad d = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} - 30 - 12 \cdot 5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} - 90$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d = 100}$$

2.2.5 Icosaedro Regular

- Área total do icosaedro regular



Como o icosaedro regular é formado por 20 faces triangulares regulares e congruentes, podemos dizer que a sua área total é dada por:

$$A = 20 \cdot A_F$$

Em que $\mathbf{A_F}$ é a área de cada face triangular. Assim,

$$A_F = \frac{a \cdot a \cdot sen\ 60°}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Logo,

$$A = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{A = 5a^2\sqrt{3}}$$

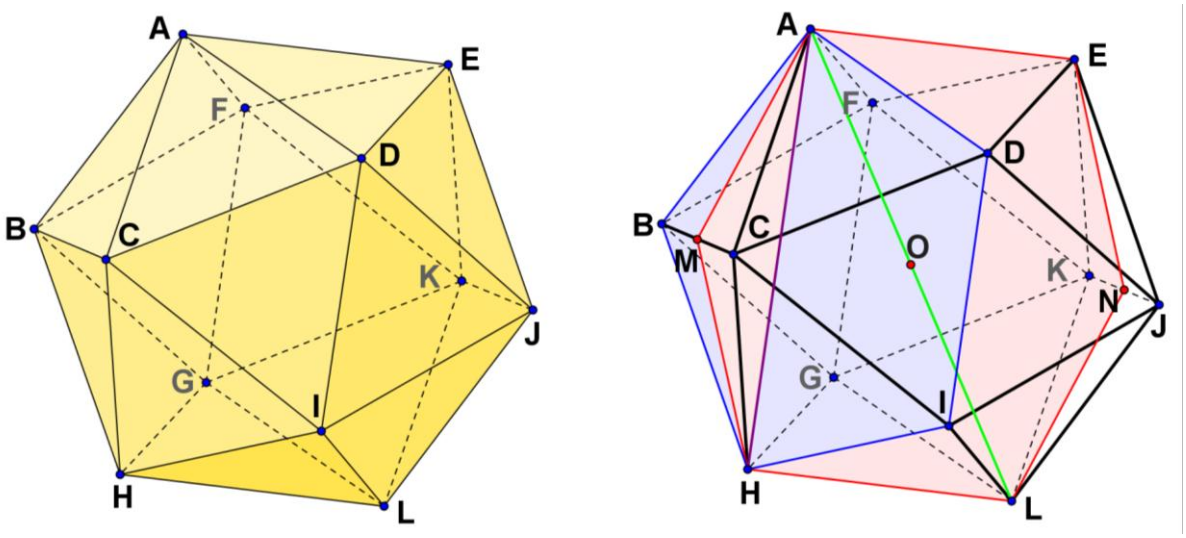
- Volume do icosaedro regular

A princípio podemos pensar que o volume do icosaedro regular de aresta *x* pode ser encontrado pelo produto do volume de um tetraedro regular, de lado também *x*, por vinte. Entretanto, esta é uma suposição falsa e podemos verificar isso experimentalmente através da montagem sugerida no capítulo 4, seção 4.5.

A forma de calcular o volume do icosaedro regular, mostrada a seguir, é uma adaptação da solução encontrada na Revista do Professor de Matemática, no artigo de Granja (2011).

Seja o icosaedro regular ABCDEFGHIJKL, mostrado na Figura 12 (à esquerda), de aresta com medida ***a***, nele podemos ligar alguns vértices e formar um pentágono regular ABHID, como mostrado à direita, em azul, e, simultaneamente, destacamos um hexágono semirregular AENLHM, em rosa, sendo M e N pontos médios das arestas BC e JK, respectivamente, sendo AM, MH, EN e NL congruentes e correspondentes à altura da face triangular do icosaedro regular e AE e HL têm medidas ***a***.

Figura 12 – Representação de pontos, segmentos e planos para o auxílio na determinação do volume de um icosaedro regular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

A interseção entre os dois polígonos citados gera o segmento AH, cuja medida pode ser calculada, como mostrado anteriormente no cálculo do volume do dodecaedro regular, e seu valor é $a\varphi$.

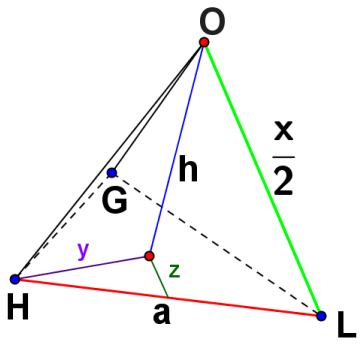
A ideia é calcular AL, pois a metade dessa medida (OA ou OL) corresponderá à aresta lateral de um dos vinte tetraedros congruentes que podem ser posicionados com o vértice comum no centro O para formar o icosaedro.

Ainda, pela Figura 12, podemos perceber, por simetria, que HE deve ser congruente a AL e isso fará com que o quadrilátero AHLE seja retângulo. Então, fazendo $\mathrm{AL} = \mathrm{x}$, $\mathrm{AH} = \mathrm{a}\varphi$, $\mathrm{HL} = \mathrm{a}$, e lembrando que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi^2 = 1 + \varphi$, temos:

$$x^2 = a^2 + (a\varphi)^2 = a^2 + a^2(\varphi + 1) = a^2(2 + \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = a\sqrt{2 + \varphi}$$

Destacando um dos vinte tetraedros (não regulares), para nos auxiliar na realização dos cálculos, temos



$$y^2 = z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

(***z*** é um terço da medida da altura da base do tetraedro)

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3}$$

Agora, calculando ***h***, temos:

$$h^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{\left(a\sqrt{2+\varphi}\right)^2}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2(2+3\varphi)}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+3\varphi}}{\sqrt{3}}$$

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta} \cdot h$$

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+3\varphi}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{Tetraedro} = \frac{a^2\sqrt{2+3\varphi}}{24}$$

Logo,

$$V = 20 \cdot V_{Tetraedro} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{2+3\varphi}}{24} = \frac{5a^3\sqrt{2+3\varphi}}{6} = \frac{5a^3}{6} \cdot \sqrt{2+3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \quad \Rightarrow$$

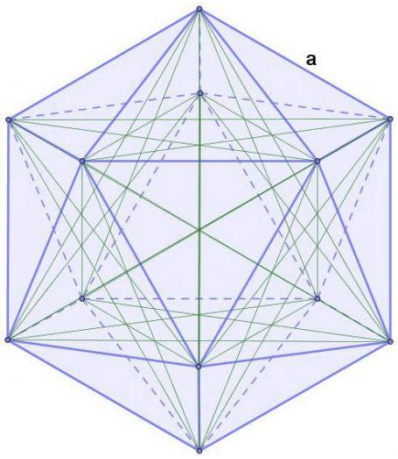
$$\Rightarrow \quad V = \frac{5a^3}{6} \cdot \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} = \frac{5a^3}{6} \cdot \frac{\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{2} = \frac{5a^3}{12}\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \frac{5a^3}{12}\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3}$$

- Diagonais internas de um icosaedro regular

São representadas, na Figura 13, as diagonais internas de um icosaedro regular.

Figura 13 – Diagonais internas de um icosaedro regular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Pelo quadro 1 e utilizando a equação 6, temos:

$$\mathrm{F} = 20,\ \mathrm{V} = 12 \text{ e } \mathrm{A} = 30$$

$$\mathrm{d} = \mathrm{C}_{\mathrm{V}}^{2} - \mathrm{A} - \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}_{\mathrm{F}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{12!}{2! \cdot (12-2)!} - 20 - 20 \cdot 0 \quad \Rightarrow$$

$$d = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 10!} - 20$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{d = 36}$$

2.3 Prismas e Pirâmides

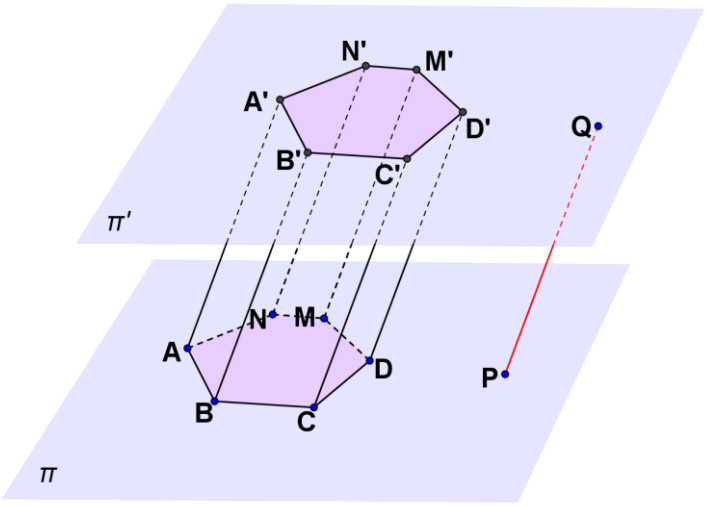
Ressaltamos que este trabalho tem o principal objetivo de mostrar algumas técnicas de construção de poliedros, sendo o principal interesse em poliedros regulares convexos, entretanto é muito importante fazermos menção a duas grandes classes de poliedros, os prismas e as pirâmides, para melhor referência dos elementos.

2.3.1 Prisma

Consideremos um polígono convexo ABCD...MN, contido em um plano π, e um segmento de reta PQ, cuja reta suporte intercepta o plano π, como ilustra a Figura 14. Chama-se prisma à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do polígono ABCD...MN e situados em um mesmo semiespaço dos determinados por π (DOLCE e POMPEO, 2005).

São denominadas bases do prisma os polígonos ABCD...MN e A’B’C’D’...M’N’.

Figura 14 – Definição de um prisma convexo.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Como principais elementos de um prisma convexo, de base com ***n*** lados, destacam-se: duas bases congruentes, ***n*** faces laterais, ***(n+2)*** faces, ***n*** arestas laterais, ***3n*** arestas e ***2n*** vértices.

Um prisma será denominado reto quando as arestas laterais forem perpendiculares aos planos das bases e, nesse caso, todas as faces laterais serão retangulares.

Um prisma será denominado oblíquo quando as arestas laterais forem oblíquas aos planos das bases.

Um prisma será denominado regular quando for reto e as bases forem polígono regulares.

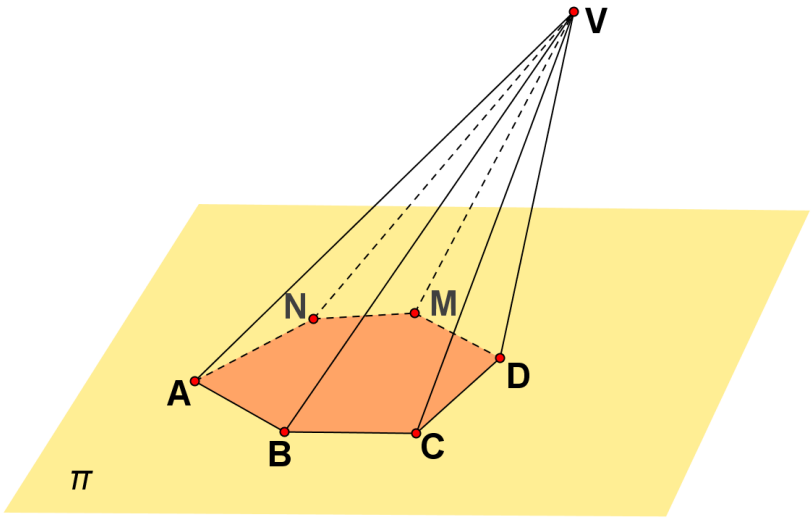
O volume de um prisma pode ser encontrado multiplicando-se a área da base pela altura do sólido. E a área total será a soma das áreas das bases com as áreas laterais.

2.3.2 Pirâmide

Consideremos um polígono convexo ABCD...MN contido em um plano π e um ponto V fora de π. Denomina-se pirâmide à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. V é o vértice da pirâmide e o polígono ABCD...MN é a base (DOLCE e POMPEO, 2005).

A definição dada acima pode ser visualizada na Figura 15.

Figura 15 – Definição de uma pirâmide convexa.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Como principais elementos de uma pirâmide convexa, de base com ***n*** lados, destacam-se: uma base, ***n*** faces laterais, ***(n+1)*** faces, ***n*** arestas laterais, ***2n*** arestas e ***(n+1)*** vértices.

Pirâmide regular é aquela em que a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Em uma pirâmide regular as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

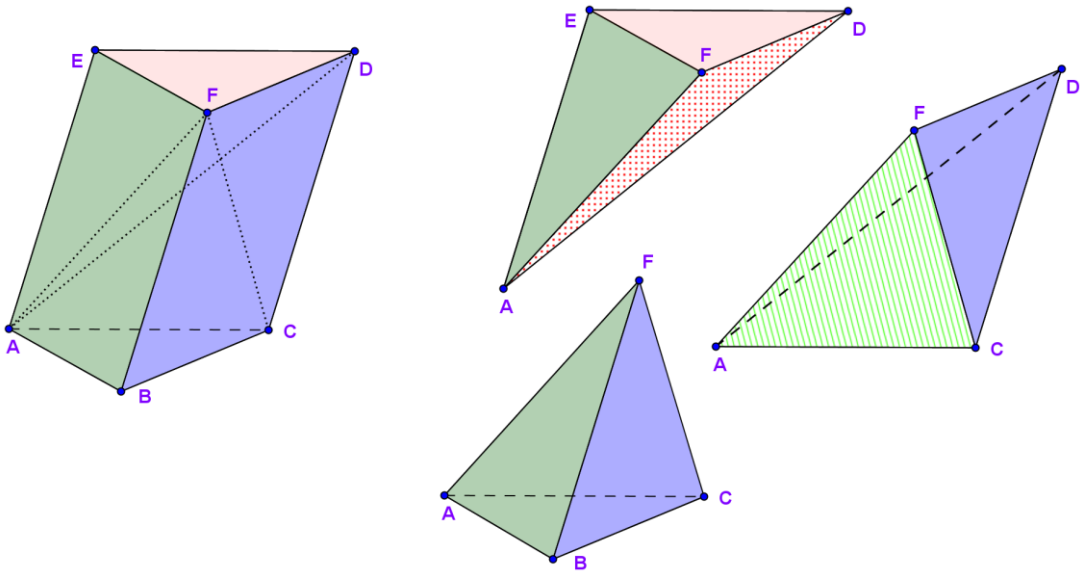
Denomina-se apótema de uma pirâmide regular à altura, relativa ao lado da base, de uma face lateral.

A área total de uma pirâmide será a soma da área da base com as áreas laterais e o seu volume será dado pelo um terço do produto da área da base pela medida da altura.

2.3.3 Decomposição do prisma

Todo prisma triangular é soma de três pirâmides triangulares com volumes iguais entre si. São indicados, na Figura 16, o prisma (à esquerda) e suas respectivas partes piramidais (à direita), de mesmo volume, referidas na demonstração a seguir.

Figura 16 – Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Seja o prisma triangular ABCDEF (Figura 16). Cortando esse prisma pelo plano que passa pelos vértices A, C e F, obtemos a pirâmide P_1 = ABCF. Passando outro plano no prisma pelos pontos A, F e D, obtemos ainda as pirâmides P_2 = DEFA e P_3 = CDFA.

Temos, então, que o prisma

$$ABCDEF = P_1 + P_2 + P_3 \Rightarrow V_{Prisma} = V_{P1} + V_{P2} + V_{P3}$$

Ora, as pirâmides P_1 e P_2 têm o mesmo volume, pois possuem as bases ABC e DEF, respectivamente, congruentes e possuem a mesma altura. Logo, $V_{P1} = V_{P2}$.

As pirâmides P_1 e P_3 têm o mesmo volume, pois possuem as bases BCF e CDF, respectivamente, congruentes (são triângulos formados pela presença da diagonal CF no paralelogramo CDFB) e possuem a mesma altura (distância do vértice A ao plano CDFB). Logo, $V_{P1} = V_{P3}$.

$$\therefore \quad V_{P1} = V_{P2} = V_{P3}$$

No capítulo 4, seção 4.3, é proposta a construção, em papel e ímãs, de um prisma decomposto em três pirâmides de mesmo volume, para o auxílio da demonstração vista anteriormente.

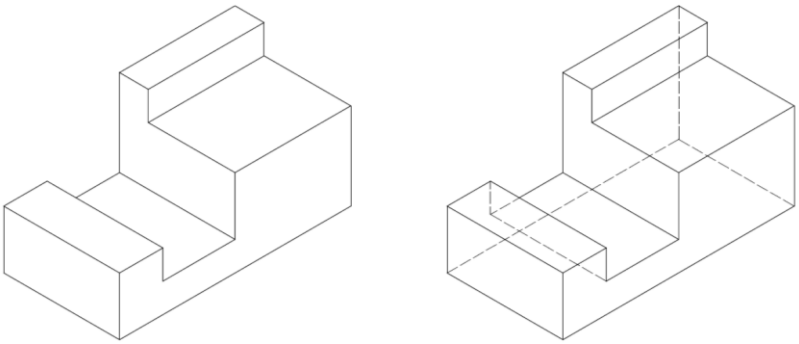
3 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Neste capítulo abordaremos apenas o necessário para discutirmos sobre a forma de representar alguns poliedros e suas projeções no plano, usando alguns conceitos abordados em desenho técnico. Isto se torna indispensável para podermos tratar sobre algumas planificações mais complexas e trabalhar com algumas construções sugeridas no capítulo final. As planificações (técnica de posicionar adequadamente todas as faces do sólido em um plano, de modo que se possa reconstitui-lo) podem ser feitas com o auxílio de instrumentos como régua, compasso, esquadros ou transferidores, mas fizemos uso de um software gratuito do gênero CAD (Computer Assisted Design – Desenho Assistido por Computador), gênero este muito utilizado nas áreas de engenharia, arquitetura, design, geologia, entre outras, e que, em nosso caso, agiliza bastante o arranjo de planificações de sólidos de interesse, além da grande precisão proporcionada.

3.1 Representação de vistas

Na Figura 17 é representado um objeto em perspectiva, que tomaremos como exemplo para falarmos sobre as múltiplas projeções que podem ser tomadas. Na imagem, o mesmo sólido é mostrado de duas maneiras levemente distintas: a figura da esquerda representa a forma mais próxima de como veríamos no real e na da direita temos a representação, em linha tracejada, das arestas que nos são ocultas.

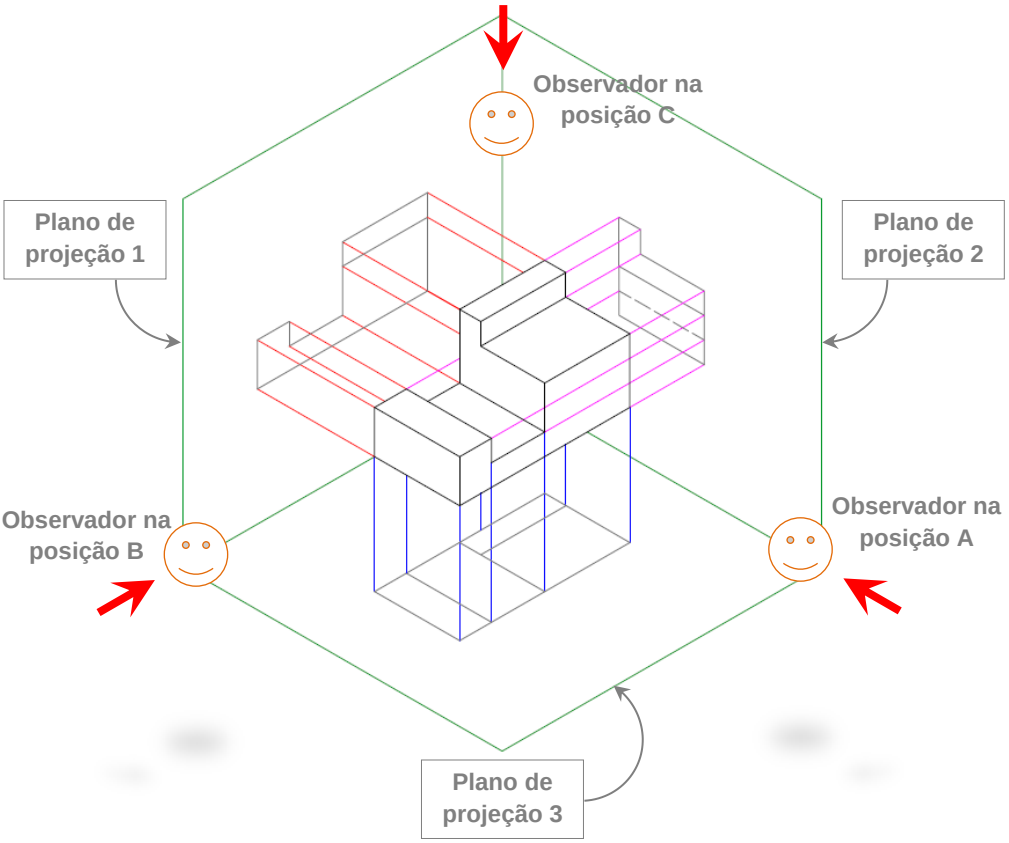
Figura 17 – Representação em perspectiva de um objeto.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Na maioria das vezes, em desenho técnico, é utilizada a projeção ortogonal de um objeto em cada um dos três planos ortogonais e, fazendo-se o rebatimento desses planos para ficarem coplanares, obtém-se, assim, as três vistas em que o objeto pode ser descrito, que são a vista frontal, a vista superior e a vista lateral esquerda. Temos, na Figura 18, a representação do objeto, as posições do observador e os planos ortogonais de projeção.

Figura 18 – Projeções do objeto em três planos ortogonais.



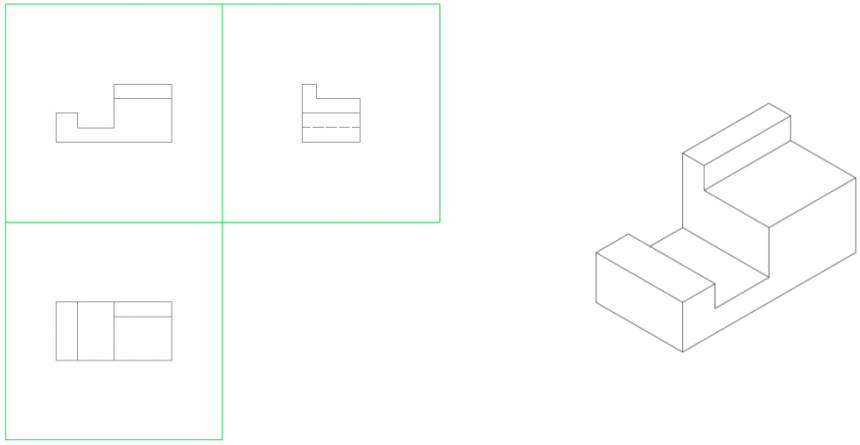
Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Vemos, ainda na Figura 18, o objeto sendo observado de três pontos distintos. O observador estando na posição A verá a frente do objeto e o que ele visualiza será representado no plano de projeção 1, atrás do objeto. A este tipo de vista dá-se o nome de *vista frontal*. A peça sendo observada da posição B, a lateral esquerda do objeto, terá a projeção formada no plano de projeção 2, no plano à direita da peça. A este tipo de vista dá-se o nome de *vista lateral esquerda*. E, finalmente, se a peça é observada do alto, posição C, ela terá a projeção formada no plano de projeção 3, no plano abaixo do objeto. Este tipo de vista recebe o nome de *vista superior*.

Na verdade a projeção mencionada é do tipo ortográfica e é obtida considerando o observador no infinito ou fazendo com que cada ponto do objeto seja levado ao plano, deslizando através de uma reta ortogonal a esse plano.

Depois de realizadas essas projeções em cada um dos planos ortogonais, imaginamos estes planos sendo rebatidos até que ocupem todos o mesmo plano. É como se abríssemos uma caixa de papelão (somente com as três faces, como mostrado na figura anterior) cortando uma das arestas. Pela Figura 19, podemos visualizar a mesma peça representada em suas três projeções, agora em um mesmo plano. As duas regiões superiores representam a vista frontal e lateral esquerda e a região de baixo, representa a vista superior.

Figura 19 – Representação das vistas frontal, lateral esquerda e superior.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

As arestas do objeto que não podemos ver, devem ser representadas por linhas tracejadas e, para as arestas ou contornos que são visíveis, devemos representar por linha contínua.

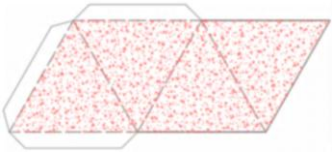
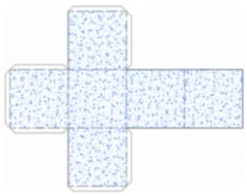
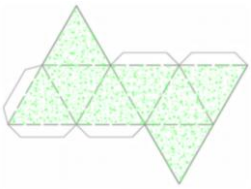
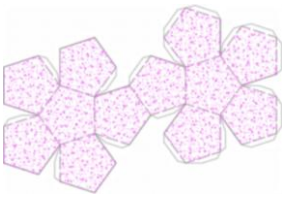
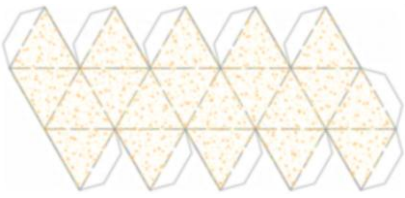
3.2 Planificações de poliedros

Planificação ou desenvolvimento de um poliedro consiste em representar todas as faces planas desse poliedro em verdadeira grandeza e essas faces serem ligadas, ordenadamente, através de suas arestas comuns, de maneira que todas elas fiquem em um mesmo plano (FRENCH e VIERCK, 1995).

Entenda-se como verdadeira grandeza a medida real da aresta de um sólido, não a medida de sua projeção, salvo se a projeção ocorrer em um plano paralelo a essa aresta, pois a projeção ortográfica de um segmento paralelo a um plano de projeção é sempre um segmento que tem a mesma medida do segmento tomado.

Quando estamos interessados em modelar o sólido em papel, é necessário acrescentar às planificações abas de colagem, de modo que essas abas se unam internamente à face respectiva. Existem muitos modos de se planificar um mesmo sólido e no quadro 2 são mostradas as planificações mais comuns para os poliedros regulares, bem como o número total de possíveis combinações (WOLFRAM, 2014).

Quadro 2 – Poliedros regulares e suas planificações com abas de colagem.

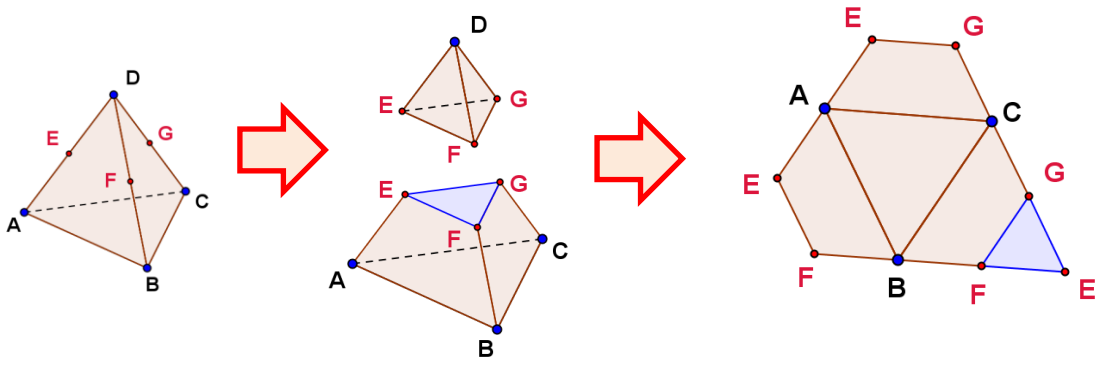
Poliedro	**Planificação mais comum**	**Número de planificações distintas**
Tetraedro regular		2
Cubo		11
Octaedro regular		11
Dodecaedro regular		43380
Icosaedro regular		43380

Fonte das imagens: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

3.2.1 Planificações de variantes dos sólidos regulares

Tomando-se por base os sólidos geométricos mais simples, como o tetraedro regular, o cubo e o prisma, fica fácil obtermos variações desses poliedros. Por exemplo, se quisermos confeccionar um tronco tetraedro, com seção contendo os pontos médios das arestas (como se pode ver no capitulo 4, seção 4.3), podemos realizar o processo como ilustrado na Figura 20.

Figura 20 – Processo de planificação de um tronco tetraedro.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

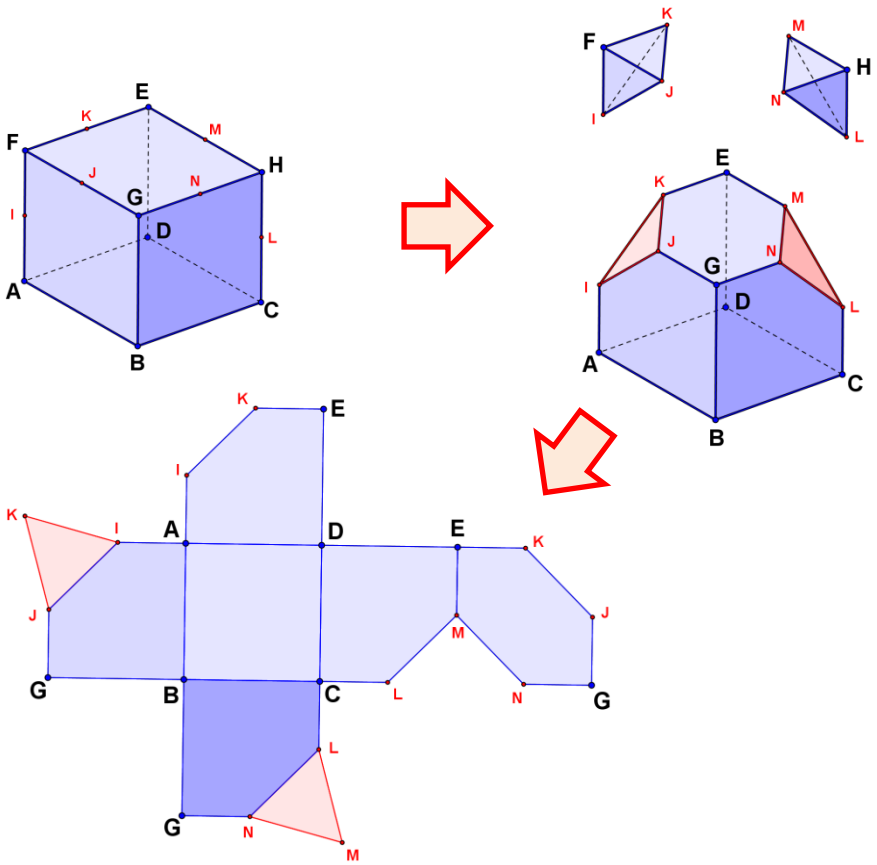
Observamos que, ainda na Figura 20, a seção do sólido nos pontos indicados, originou um novo tetraedro regular e sua planificação pode ser representada como a do quadro 2. E originou também uma figura denominada tronco tetraedro, que apresenta como faces dois triângulos equiláteros e três trapézios isósceles. Com a base ABC fixa, podemos imaginar a realização de um corte nas arestas BF, FE, EG, GC e AE e fazemos a abertura do sólido obtendo, assim, sua planificação.

Vamos, agora, realizar um processo semelhante em um cubo. Na Figura 21 podemos ver os passos seguidos para a planificação de um cubo duplamente seccionado. Passamos um plano pelos pontos médios I, J e K das arestas AF, FG e FE, respectivamente e um plano pelos pontos médios L, M e N das arestas CH, HE e HG, respectivamente, originando dois tetraedros tri-retangulares congruentes e um octaedro convexo não regular. Do octaedro ABCDEKIJGNML, podemos notar uma face quadrada ABCD (a única que não foi afetada pelos cortes e constitui a base do cubo original), quatro pentágonos com três ângulos retos cada um, dois triângulos equiláteros congruentes e um hexágono com dois ângulos retos.

Podemos observar que, para a formação do pentágono e a formação do hexágono, basta retirar partes das faces quadrangulares do cubo e que, neste caso, essas partes estão associadas aos pontos médios.

A planificação do octaedro foi feita abrindo-se o sólido pelas arestas DE, EK, KI e IA, por KJ, JG e GB, e por GN, NM, ML e LC. Os dois tetraedros congruentes são formados, cada um, por três triângulos retângulos isósceles e um triângulo equilátero.

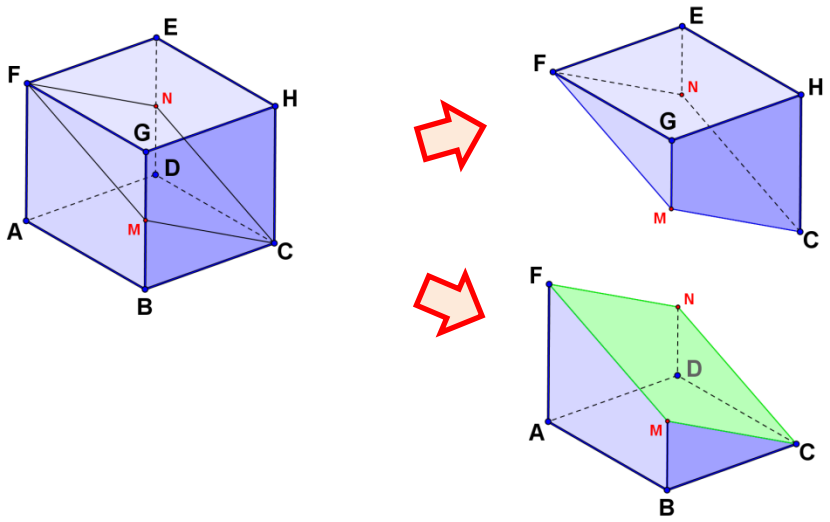
Figura 21 – Processo de planificação de um octaedro não regular originado de um cubo duplamente seccionado.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Se quisermos seccionar um cubo por um plano que passe por dois vértices opostos diagonalmente e por pontos médios de duas arestas, podemos proceder como sugerido na Figura 22.

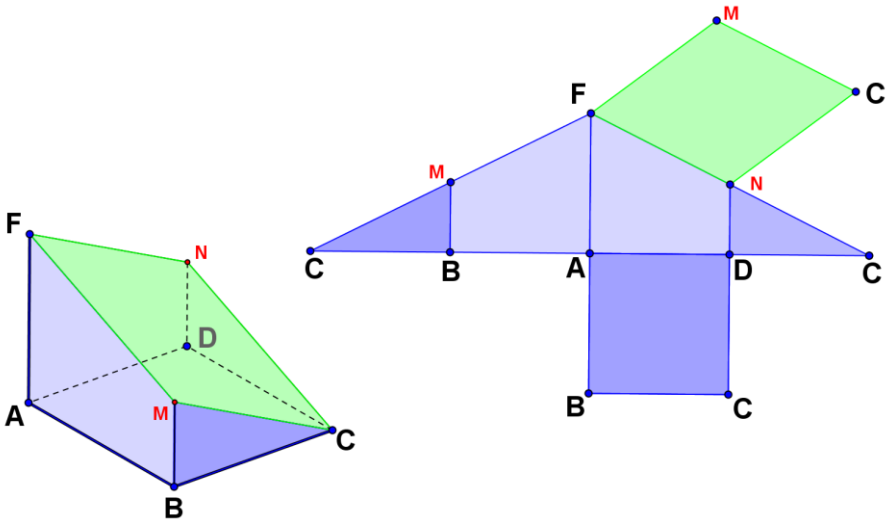
Figura 22 – Processo de planificação de um cubo seccionado por um plano contendo dois vértices diagonalmente opostos e pontos médios de duas arestas.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Os pontos M e N são pontos médios das arestas BG e DE, respectivamente. Ligando os pontos F, M, C e N, formamos o paralelogramo (um losango, pra ser mais específico) FMCN, que é o plano de seção do sólido. Aliás, essa seção divide o cubo em duas peças que são congruentes. Do sólido ABCDNFM, temos a planificação mostrada na Figura 23.

Figura 23 – Processo de planificação de um cubo seccionado por um plano contendo dois vértices diagonalmente opostos e pontos médios de duas arestas.



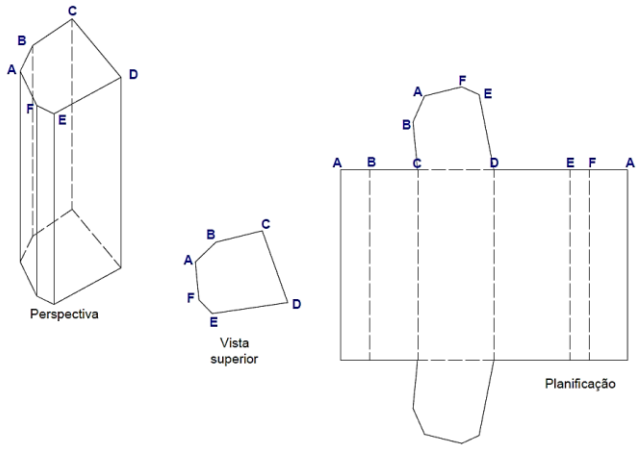
Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

O desenho do losango FNCM é obtido quando conseguimos o comprimento do eixo maior FC no sólido. Na planificação devemos encontrar a interseção entre a circunferência centrada em F e raio FC e a circunferência centrada em N e raio NC. Esta interseção será o ponto C do losango. FM é paralelo a NC e MC é paralelo a FN. Perceba que nos dois primeiros casos de planificação deste tópico (mostrados nas Figura 20 e Figura 21), partimos de planos suportados por três pontos no sólido. Sabemos que por três pontos define-se um plano, mas no último caso (Figura 22) temos quatro pontos escolhidos no sólido, que foram dois vértices opostos pela diagonal do cubo, um ponto médio de uma aresta e um ponto médio da aresta oposta à primeira pela diagonal da base. Pode acontecer desses quatro pontos, ou mais, não serem coplanares e estes só o foram por estarem em um prisma retangular. No próximo tópico, haverá um exemplo de planificação em que não há de se preocupar com esse tipo de problema e, para isso, usaremos as projeções em vistas.

3.2.2 Planificações de prismas e pirâmides

Planificar um prisma convexo reto é bem fácil, pois basta desenvolvermos sobre uma linha reta, todos os segmentos da base, um conectado ao outro, que compõe este prisma, levantar a altura do prisma sobre cada uma dessas conexões e acrescentar, adequadamente, as bases. Na Figura 24 podemos ver a planificação de um prisma hexagonal reto.

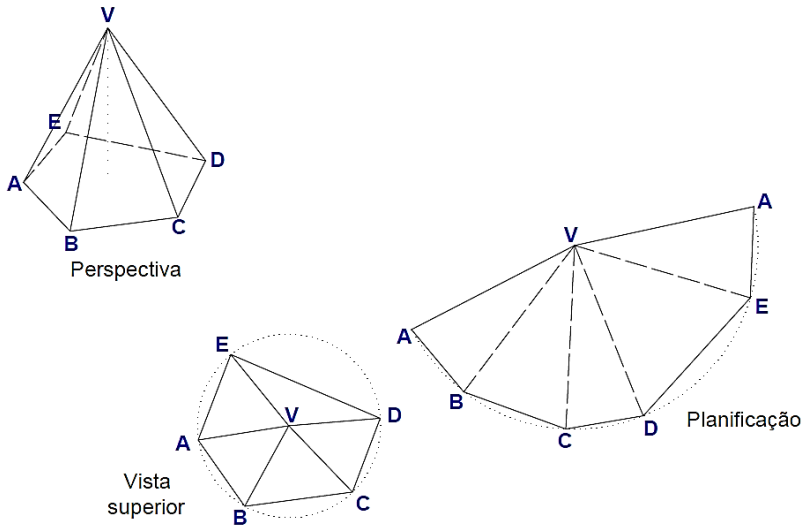
Figura 24 – Planificação de um prisma hexagonal convexo reto.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Para planificar uma pirâmide convexa reta também não há dificuldades (desde que a base seja inscrita a uma circunferência), pois basta inscrever os segmentos da base, em sequência, a um arco com raio de medida igual a da aresta lateral da pirâmide. Na Figura 25 podemos ver a planificação de uma pirâmide pentagonal convexa reta.

Figura 25 – Planificação de uma pirâmide pentagonal convexa reta.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

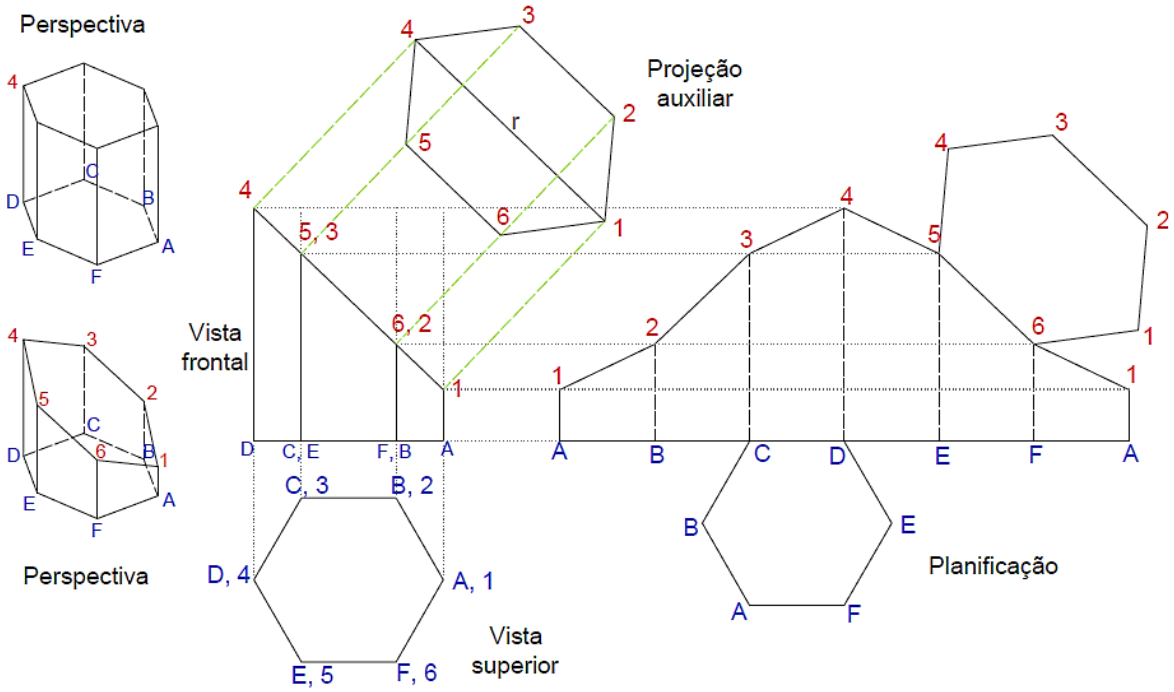
Para planificações de prismas truncados, precisaremos das representações de vistas citadas na seção 3.1. Nos casos mais básicos, apenas as vistas superior e frontal serão o suficiente.

Faremos uma adaptação de French (1995), para darmos um exemplo de como representar um prisma truncado.

Desenhamos primeiro uma projeção tomada de uma direção perpendicular a uma seção reta (uma seção ou corte feito por um plano perpendicular ao eixo do prisma) e depois desenhamos uma vista tomada de uma direção perpendicular às arestas laterais. A base ABCDEF, da Figura 26, é uma seção reta que aparece em sua verdadeira grandeza. Marcar na linha AA o desenvolvimento do perímetro da base (como foi feito para o prisma hexagonal da Figura 24). Pelos pontos A, B, C, D, E e F, levantam-se perpendiculares e sobre elas são marcadas cada comprimento dos segmentos A1, B2, C3, D4, E5 e F6. Os pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são ligados sucessivamente para completar o desenvolvimento das superfícies laterais. Ligam-se à superfície lateral a base e a face superior em sua verdadeira grandeza. A

determinação da verdadeira grandeza da face superior pode ser feita através de uma projeção ortogonal auxiliar em uma reta *r*, paralela ao segmento do corte.

Figura 26 – Planificação de um prisma hexagonal convexo reto seccionado.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

O segmento de reta com extremidades nos pontos 5 e 3 tem seu comprimento determinado com a medida de EC, o mesmo pode ser feito para o segmento de reta com extremidades nos pontos 6 e 2, que tem o mesmo valor para o segmento FB. Uma vez definida a face superior do prisma truncado, se faz a transferência para o restante do desenvolvimento, acoplando os lados correspondentes.

Utilizando este método apresentado, pode-se realizar qualquer tipo de seccionamento em um prisma mais simples, como, por exemplo, em um cubo. A planificação do exemplo dado na Figura 22, poderia ser obtida empregando este método.

Para uma pirâmide, pode-se fazer um processo semelhante, usando-se as projeções citadas e utilizando o método apresentado para traçar sua planificação.

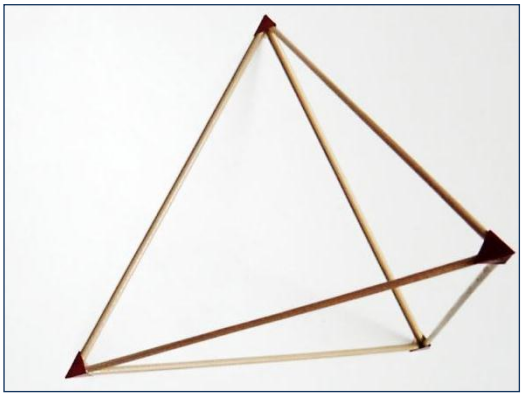
4 TÉCNICAS DE MONTAGEM

Neste capítulo, visando atingir o principal objetivo deste trabalho, trataremos das montagens dos sólidos regulares (e algumas de suas variantes), alguns prismas e pirâmides, utilizando materiais baratos, de fácil acesso e manipulação. Estes sólidos poderão servir como um reforço ou auxílio em aulas de geometria espacial ou como simples curiosidades matemáticas ou recreação.

4.1 Montagem com varetas

Este tipo de montagem pode ser bastante útil, pois permite mostrar aos alunos elementos representativos, tais como a altura de uma pirâmide, apótemas, diagonais internas, centro da esfera inscritível, além, é claro, de ressaltar quem são as arestas e vértices do sólido considerado. Há também a possibilidade de facilitar o aprendizado da geometria espacial para pessoas portadoras de deficiência visual. Para a montagem de poliedros utilizando varetas, fizemos as planificações e as montagens de pequenas partes do poliedro desejado, que representam seus vértices e também servem de apoio para as varetas. É exemplificado, na Figura 27, um tetraedro regular confeccionado com palitos para churrasco (arestas) e papel de densidade 180 g/m^2. Vale lembrar que este tipo de montagem finaliza em uma estrutura bastante rígida, adequando-se ao manuseio.

Figura 27 – Fotografia de um tetraedro regular confeccionado com o uso de palitos para churrasco.

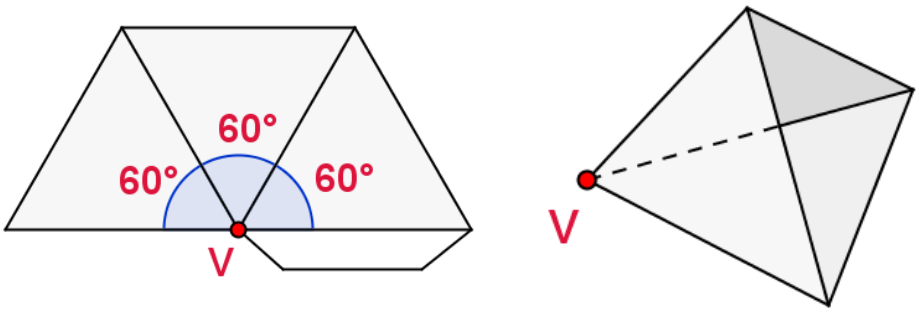


Fonte: Elaboração do próprio autor.

De acordo com este tipo de montagem, as varetas devem ser suportadas por estruturas feitas em papel, que são, na realidade, uma pequena parte do poliedro de interesse e onde estão os vértices do mesmo.

Sabendo-se que cada vértice de um tetraedro regular é intersecção de três faces triangulares, então esta parte do sólido pode ser representada por uma pequena pirâmide triangular (sem a base), cuja planificação está representada na Figura 28.

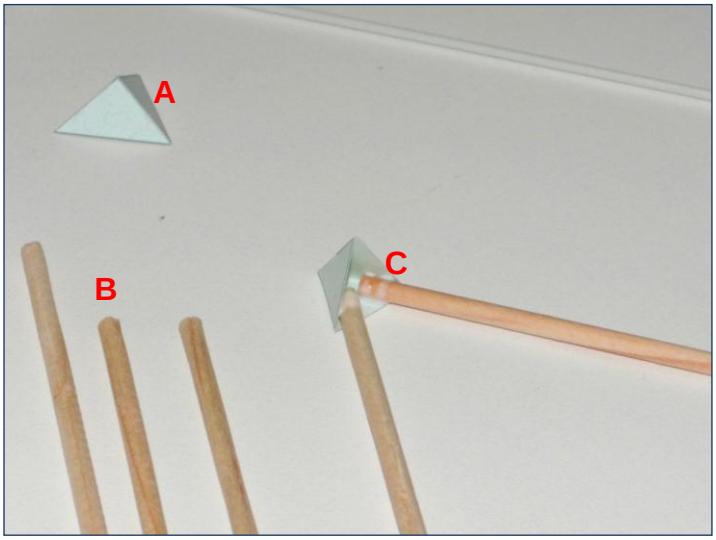
Figura 28 – Planificação da peça representativa do vértice do tetraedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Com um conjunto de quatro peças representativas dos vértices do tetraedro (Figura 28, à direita) e com um conjunto de seis palitos para churrasco, montamos o tetraedro regular. Na Figura 29, a peça denotada por A é a peça representativa do vértice (são necessárias quatro peças), confeccionada em papel mais rígido que o papel branco de uso comum, as peças denotadas por B, são os palitos para churrasco (que representarão as arestas do poliedro), com as pontas cortadas e comprimentos reduzidos ao tamanho desejado e em C, temos a colagem das arestas e vértices que, para tal colagem, precisam estar muito bem alinhados se quisermos ter como resultado um sólido bem construído.

Figura 29 – Fotografia do processo de construção de um tetraedro regular com uso de palitos para churrasco.

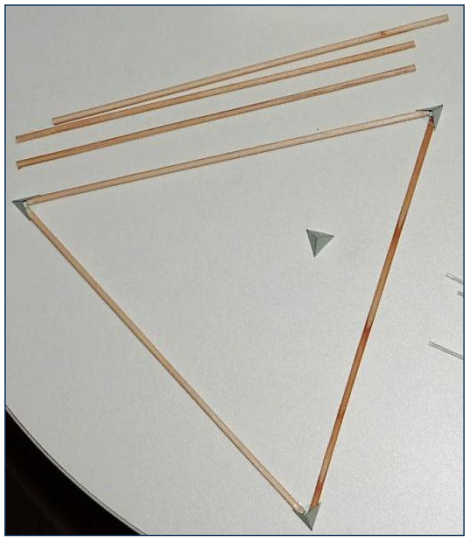


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para o alinhamento, apoiamos lateralmente uma régua às peças representativas dos vértices (parte C da Figura 29), introduzimos cada uma das extremidades do palito em cada uma dessas peças, colocamos algumas gotas de cola nessa junção e esperamos alguns minutos para a secagem. Enquanto a cola seca em uma parte, pode-se montar as outras partes para não perder tempo, mas deve-se ter muito cuidado para não desalinhar a primeira parte.

É mostrada na Figura 30, a base do tetraedro montada e faltando apenas três arestas e um vértice para a conclusão.

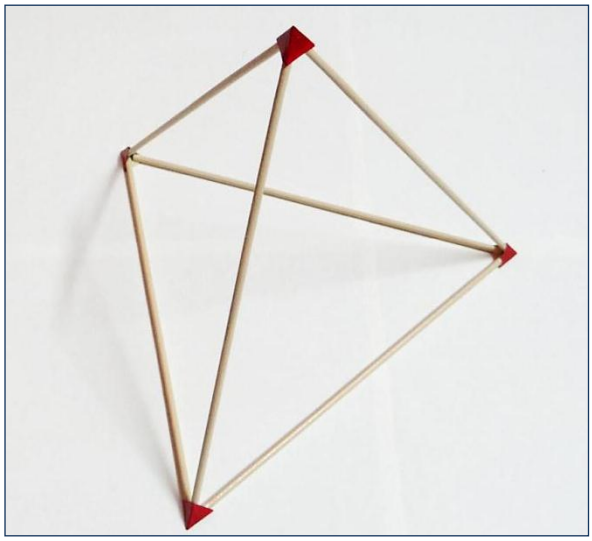
Figura 30 – Fotografia de parte do tetraedro montado.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Após a montagem e secagem completa da cola, pintamos o sólido para que tivesse uma melhor aparência e também para que os vértices adquirissem uma resistência mecânica melhor. A pintura foi feita com tinta spray automotiva para as arestas e esmalte de unha para os vértices. O tetraedro regular completamente montado é mostrado na Figura 31.

Figura 31 – Fotografia do tetraedro regular finalizado com arestas de 21 cm.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do tetraedro regular:

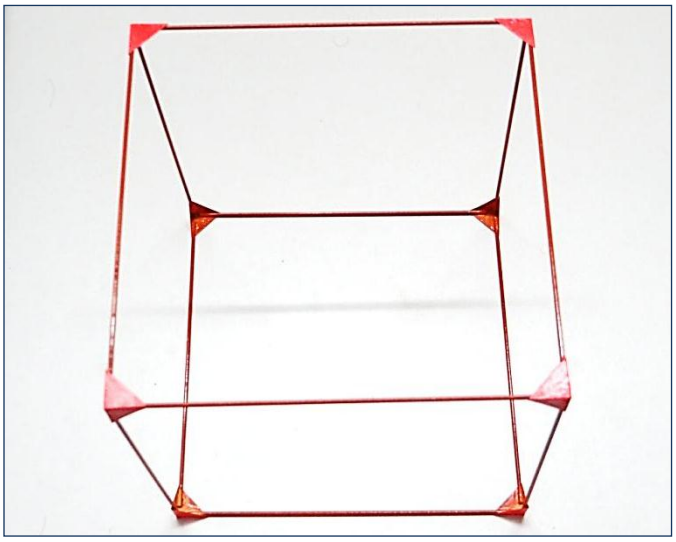
- 6 palitos para churrasco;
- 1 folha de papel 180 g/m^2, tamanho A4 (papel geralmente utilizado em certificados e convites);
- Cola branca para papel;
- Tinta spray automotiva;
- Esmalte para unhas;
- Estilete, tesoura e régua.

Tempo gasto para a confecção (sem pintura): 20 minutos.
Tamanho das arestas: 23 centímetros.

No apêndice A, encontram-se as planificações das peças representativas dos vértices para o tetraedro regular. Caso o leitor queira realizar a montagem, imprima a página em um papel adequado.

Uma alternativa aos palitos para churrasco é o uso de varetas para pipas, em fibra de vidro, facilmente encontradas em papelarias, material que usamos para a confecção de um hexaedro regular, como mostrado na Figura 32.

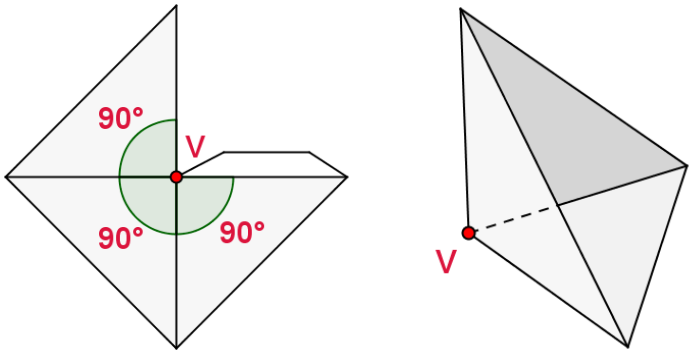
Figura 32 – Fotografia de um hexaedro regular confeccionado com varetas em fibra de vidro para pipas.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

No caso do cubo, ou hexaedro regular, os vértices foram montados utilizando-se pequenas pirâmides de base triangular e com ângulos das faces, no ápice, sendo reto. É ilustrada na Figura 33, a planificação dessa parte da montagem.

Figura 33 – Planificação da peça representativa do vértice de um hexaedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).

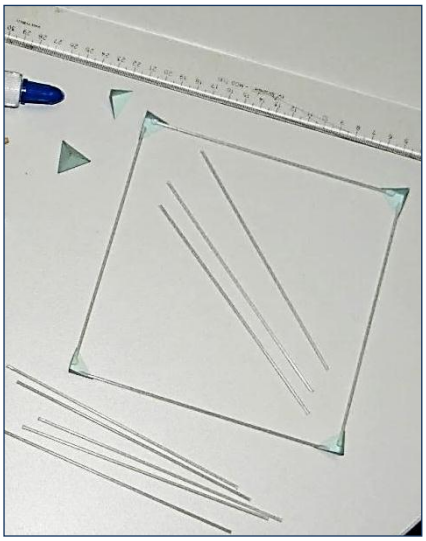


Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Precisamos, para a montagem do cubo, de oito dessas peças representativas dos vértices (Figura 33, à direita) e de doze pedaços de varetas, cortados no

tamanho desejado, para as representações das arestas. Além disso, utilizamos também barbante para crochê para as representações de suas quatro diagonais internas. Ao final, pintamos toda a estrutura com tinta spray automotiva. É exibido na Figura 34, o início da montagem, em que temos as arestas já cortadas no tamanho desejado e os vértices já prontos. Fizemos os alinhamentos das arestas e vértices, com o apoio de uma régua, e usamos cola branca para a aderência.

Figura 34 – Fotografia de parte do processo de montagem do hexaedro regular.



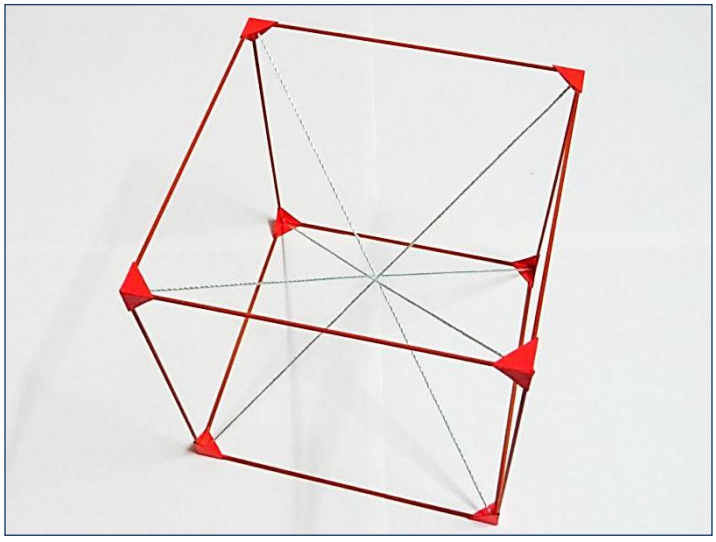
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A parte mais demorada no processo de construção é a secagem da cola. Entretanto, ela pode ser substituída por um pouco de esmalte para unha, cuja secagem é bem mais rápida; porém, ela se soltará facilmente se houver certo descuido no manuseio do sólido, pois fica um contato frágil. Então, o que pode ser feito é o uso do esmalte para uma secagem rápida e depois que o sólido estiver pronto, fazer o reforço com um pouco de cola branca em todas as juntas das arestas com os vértices e esperar a secagem completa.

Como dito anteriormente, no caso do cubo, inserimos também barbantes esticados para as representações das diagonais internas. O modo de inserção do barbante foi efetuado com o auxílio de uma agulha adentrando os vértices já com a cola (ou esmalte) seca. Depois de atravessar o vértice, de fora para dentro da estrutura, deixamos uma sobra do barbante para fora do cubo e prendemo-la com uma fita adesiva à aresta, atravessamos o outro vértice, de dentro para fora, com a outra extremidade do barbante, esticamos e novamente prendemos a sobra do

barbante com fita adesiva. Repetimos esse processo para todas as diagonais e quando finalizadas passamos cola (ou esmalte, transparente) na parte interna do vértice, bem onde o barbante atravessou, esperamos a completa secagem, retiramos as fitas adesivas e cortamos com uma tesoura (ou estilete) as sobras dos barbantes. A pintura do cubo já estava concluída quando foram colocadas as diagonais internas. Na Figura 35 é mostrado o cubo montado, com suas quatro diagonais internas.

Figura 35 – Fotografia mostrando o hexaedro regular concluído com as suas diagonais internas.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do hexaedro regular:

- Varetas de fibra de vidro para pipas (diâmetro de 2 milímetros);
- 1 folha de papel 180 g/m^2, tamanho A4 (papel geralmente utilizado em certificados e convites);
- Cola branca para papel;
- Tinta spray automotiva;
- Esmalte para unhas;
- Barbante para crochê;
- Estilete, agulha, tesoura e régua.

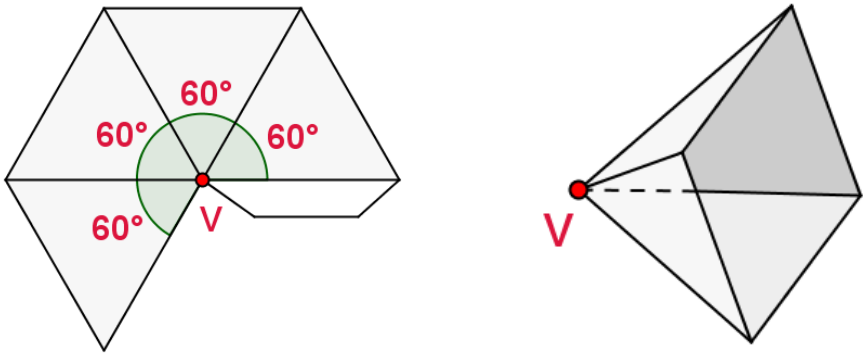
Tempo gasto de confecção (sem pintura): cerca de 30 minutos.

Tamanho das arestas: 16 cm.

No apêndice A, encontram-se as planificações das peças representativas dos vértices para o hexaedro regular. Caso o leitor queira realizar a montagem, imprima a página em um papel adequado.

Na montagem do octaedro regular utilizamos os mesmos materiais usados para o cubo. Tal como o tetraedro regular, o octaedro regular é formado apenas por faces triangulares, no entanto, cada vértice é concorrido por quatro faces (ao invés de três, no caso do tetraedro). Então, para a montagem das peças representativas dos vértices, empregamos a planificação mostrada na Figura 36.

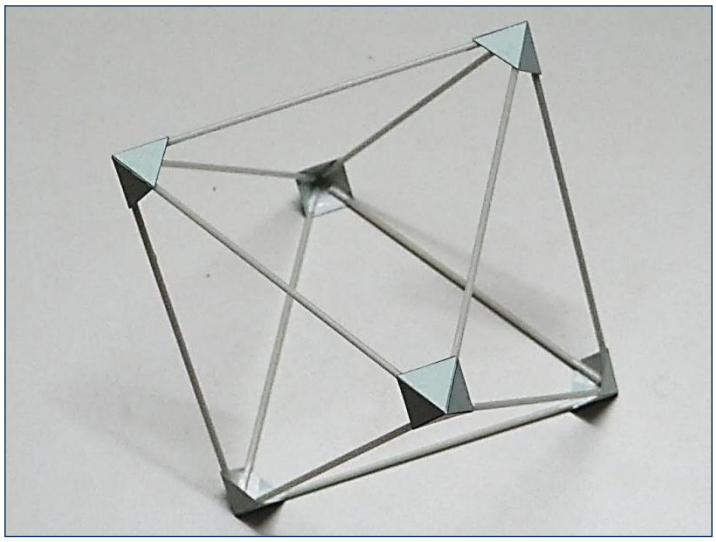
Figura 36 – Planificação da peça representativa do vértice de um octaedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Precisamos, para a montagem do octaedro regular, de seis peças representativas do vértice (Figura 36, à direita) e doze pedaços de varetas, cortados no tamanho desejado, para a representação das arestas. O processo de montagem é idêntico ao do cubo e na Figura 37 é mostrado o octaedro montado.

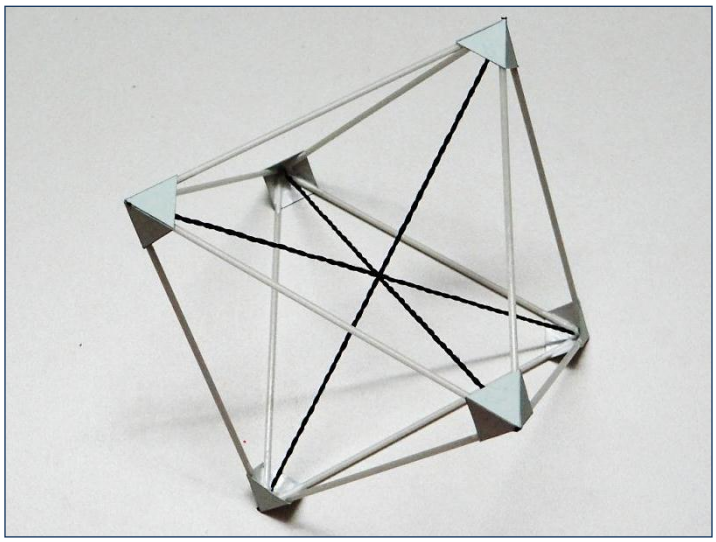
Figura 37 – Fotografia do octaedro regular montado com varetas em fibra de vidro para pipas.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Também utilizamos barbante para a visualização das diagonais internas e na Figura 38 é ilustrado o octaedro regular com o acréscimo de suas três diagonais. O modo de inserir as diagonais é idêntico ao já explicado para o cubo.

Figura 38 – Fotografia do octaedro regular com o acréscimo de suas três diagonais.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do octaedro regular:

- Varetas de fibra de vidro para pipas (diâmetro de 2 milímetros);
- 1 folha de papel 180 g/m^2, tamanho A4 (papel geralmente utilizado em certificados e convites);

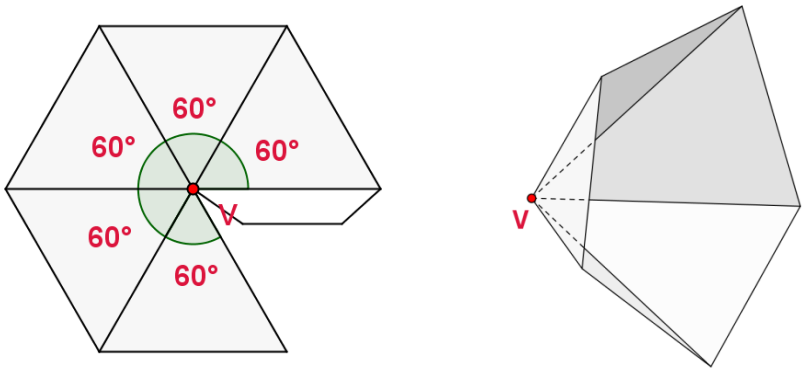
- Cola branca para papel;
- Barbante para crochê;
- Estilete, agulha, tesoura e régua.

Tempo gasto de confecção: cerca de 30 minutos.
Tamanho das arestas: 11 cm.

No apêndice A, encontram-se as planificações das peças representativas dos vértices para o octaedro regular. Caso o leitor queira realizar a montagem, imprima a página em um papel adequado.

Ainda com varetas de fibra de vidro para pipas, montamos um icosaedro regular. Assim como o tetraedro e octaedro regulares, o icosaedro regular é também formado por faces triangulares. Entretanto, cada vértice é concorrido por cinco faces (ao invés de três ou quatro para o tetraedro ou octaedro, respectivamente). Então, para a montagem das estruturas dos vértices, empregamos a planificação ilustrada na Figura 39.

Figura 39 – Planificação da peça representativa do vértice de um icosaedro regular (esquerda) e a peça montada (direita).

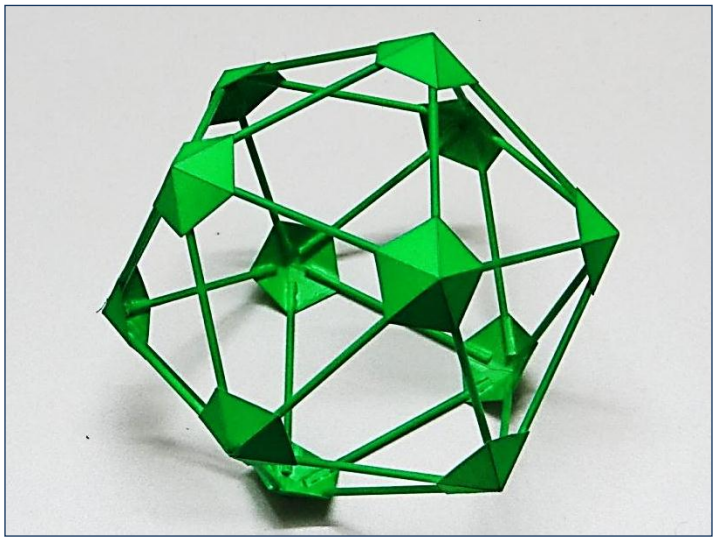


Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Com um conjunto de doze peças representativas do vértice (Figura 39, à direita) e trinta pedaços de varetas, cortados no tamanho desejado, construímos o icosaedro regular, procedendo como nas construções dos sólidos anteriores. Em alguns momentos, durante a manufatura do sólido, precisamos do auxílio de objetos

para suportar parte da estrutura já montada até que a cola secasse. Com a cola completamente seca, utilizamos tinta spray automotiva para dar acabamento. Na Figura 40 é mostrado o poliedro concluído.

Figura 40 – Fotografia mostrando o icosaedro regular montado com varetas de fibra de vidro para pipas.



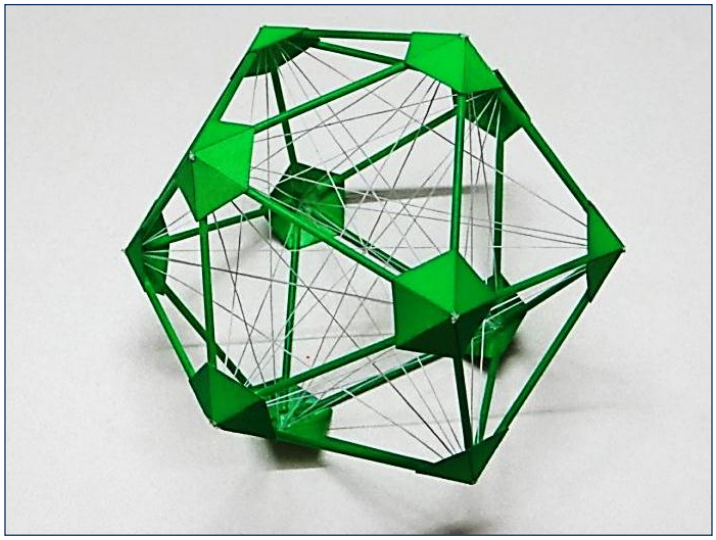
Fonte: Elaboração do próprio autor.

O grau de complexidade para a inserção das diagonais no icosaedro é maior que nos casos do cubo e do octaedro, que contam com apenas quatro e três diagonais internas, respectivamente. Para as diagonais do icosaedro, utilizamos linha 10 para pipa, que é mais adequada aqui, já que é mais fina que a linha de crochê e a quantidade necessária é grande, comparada aos casos anteriores. Ao todo, são 36 diagonais internas em um icosaedro regular (vide capítulo 2, seção 2.2.5, para os cálculos). Com a linha na agulha atravessamos, de fora para dentro do sólido, um dos vértices e, na sequência, retiramos a agulha com a linha perfurando um vértice não adjacente ao primeiro, de dentro para fora do sólido. Cortamos a linha e prendemos as duas extremidades com um pedaço de fita adesiva, do lado externo do sólido, de modo que a linha ficasse esticada. Repetimos o processo, partindo do mesmo vértice inicial e chegando a outro vértice não adjacente a ele. Novamente, cortamos a linha e prendemos suas extremidades com fita adesiva do lado exterior do sólido, deixando-a esticada. Desse mesmo vértice inicial partiram seis diagonais, que é o número máximo para cada vértice. Todo o processo é reiniciado para os vértices que ainda não receberam essas diagonais e

depois é só completar o número de diagonais para os que ainda não tem seis partindo deles.

Depois de inseridas todas estas diagonais e esticadas, foi necessária a colocação de pequenas gotas de cola branca na parte interna dos vértices, aderindo todas as extremidades das diagonais, e deixadas em repouso para secar. Por fim, foi só remover as fitas adesivas e aparar as linhas que saem dos vértices. Na Figura 41 é ilustrado o icosaedro regular com suas 36 diagonais.

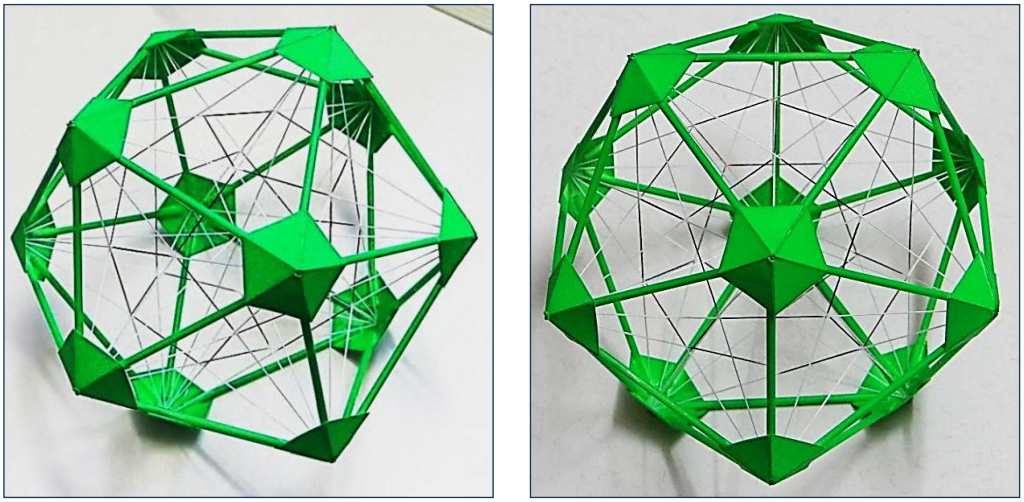
Figura 41 – Fotografia mostrando o icosaedro regular e suas 36 diagonais.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Um fato curioso é que dentre algumas interseções das diagonais do icosaedro regular, podemos destacar a formação de um dodecaedro regular. Utilizando uma caneta para retroprojetor de cor preta, fizemos com que as arestas do dodecaedro regular, formado pelas diagonais, se destacassem. Isso é mostrado na Figura 42.

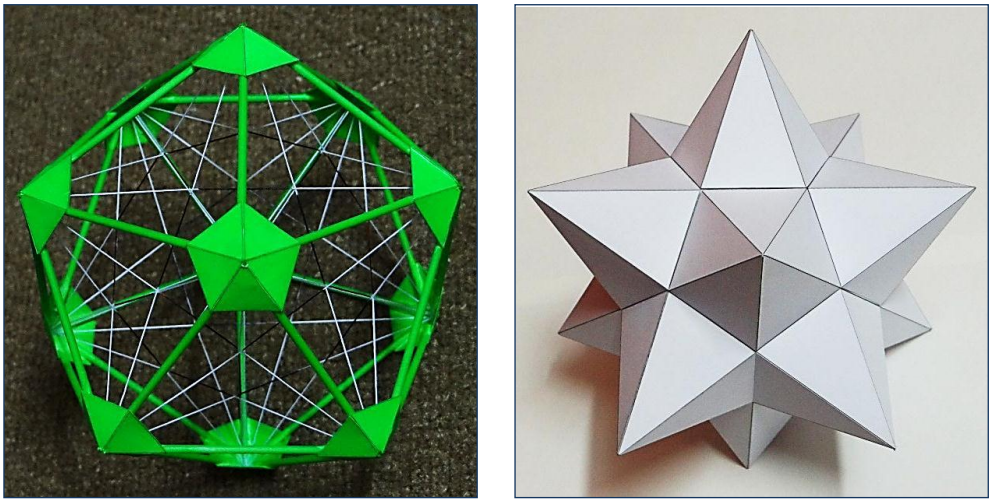
Figura 42 – Fotografia do icosaedro regular destacando a formação, por parte de suas diagonais, de um dodecaedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Igualmente surpreendente e fascinante é perceber que também há a formação de um sólido não convexo com as diagonais do icosaedro regular. Na fotografia à esquerda, da Figura 43, conseguimos visualizar as diagonais do icosaedro de outro ponto de vista, onde podemos perceber, além do já citado dodecaedro, um pentagrama em primeiro plano e, à direita, para comparação, o sólido de Kepler-Poinsot denominado “pequeno dodecaedro estrelado” (um sólido regular não-convexo), em que está de frente para nós um pentagrama correspondente ao das diagonais do icosaedro. Todas as outras diagonais formam o restante do sólido citado.

Figura 43 – Fotografias mostrando o pequeno dodecaedro estrelado formado pelas diagonais do icosaedro regular (esquerda) e o mesmo sólido, montado em papel, para comparação (direita).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do icosaedro regular:

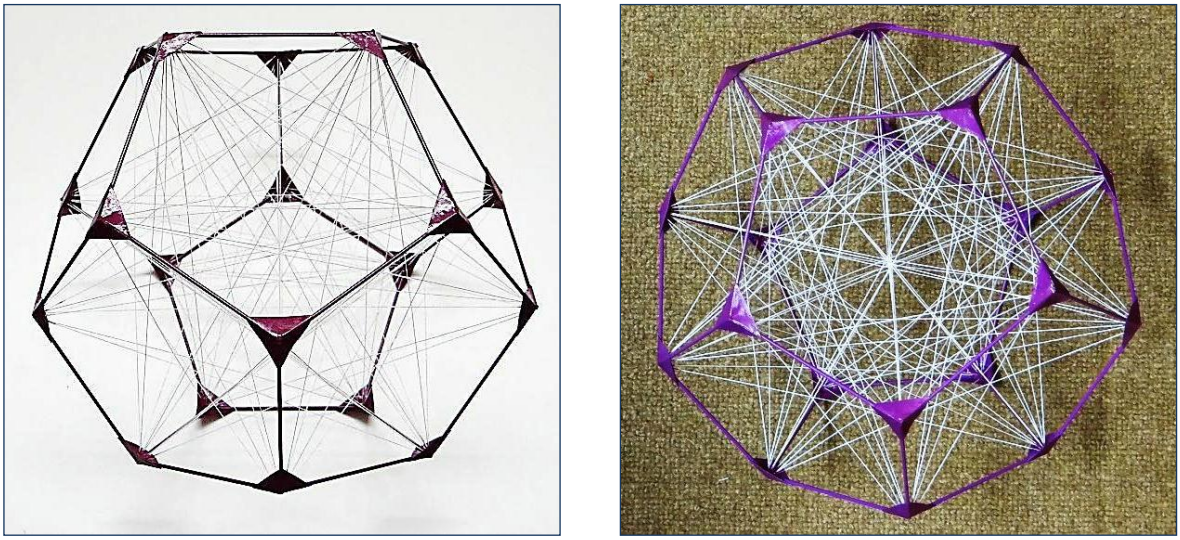
- Varetas de fibra de vidro para pipas (diâmetro de 2 milímetros);
- 1 folha de papel 180 g/m^2, tamanho A4 (papel geralmente utilizado em certificados e convites);
- Cola branca para papel;
- Tinta spray automotiva;
- Esmalte para unhas;
- Linha número 10, para pipas;
- Fita adesiva;
- Estilete, agulha, tesoura e régua.

Tempo gasto de confecção (sem pintura): cerca de 30 minutos.
Tempo gasto para colocação das diagonais: cerca de 40 minutos.
Tamanho das arestas: 7 cm.

No apêndice A, encontram-se as planificações das peças representativas dos vértices para o icosaedro regular. Caso o leitor queira realizar a montagem, imprima a página em um papel adequado.

Além do palito para churrasco e da vareta para pipas, utilizamos também outro material para confeccionar poliedros por este método. Para a construção do dodecaedro regular usamos pedaços retilíneos de arame de aço e o processo de montagem segue como os anteriores. Depois de coladas as peças e a cola completamente seca, pintamos a estrutura do sólido com tinta spray automotiva e, depois da completa secagem da tinta, passamos a linha número 10 para pipas, para a representação das diagonais internas. A quantidade de diagonais (vide capítulo 2, seção 2.2.4, para o cálculo de diagonais) é bem maior que no caso do icosaedro e é exigida uma grande destreza e paciência de quem for construir. Na Figura 44 é mostrado o dodecaedro pronto e com todas as suas 100 diagonais internas.

Figura 44 – Fotografias mostrando o dodecaedro regular montado com arame de aço e a representação de suas 100 diagonais internas.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do dodecaedro regular:

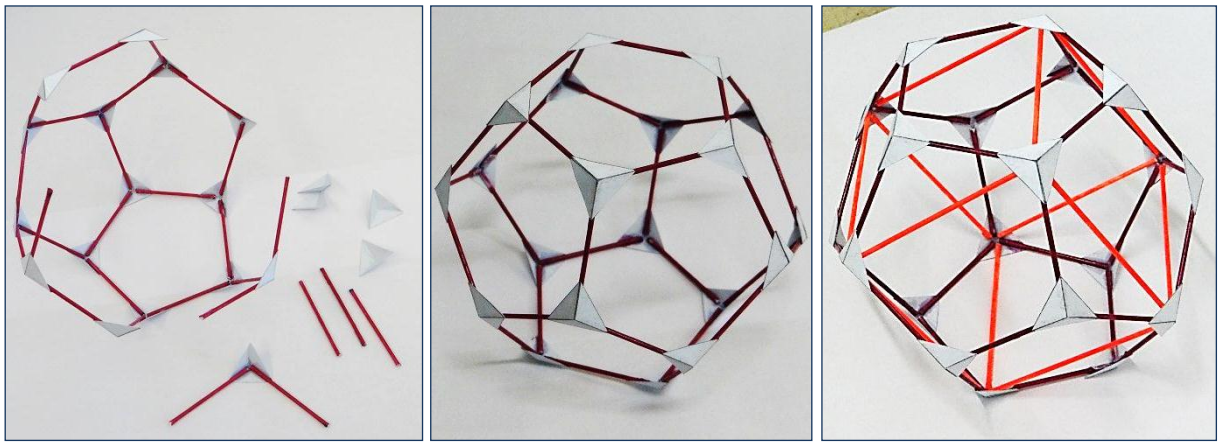
- Arame de aço (diâmetro de 1,6 mm);
- 1 folha de papel 180 g/m^2, tamanho A4 (papel geralmente utilizado em certificados e convites);
- Cola branca para papel;
- Tinta spray automotiva;
- Esmalte para unhas;
- Linha número 10, para pipas;
- Fita adesiva;
- Estilete, agulha, tesoura, régua e alicate de corte.

Tempo gasto de confecção (sem pintura): cerca de 50 minutos.
Tempo gasto para colocação das diagonais: cerca de 2 horas.
Tamanho das arestas: 8 cm.

No apêndice A, encontram-se as planificações das peças representativas dos vértices para o dodecaedro regular. Caso o leitor queira realizar a montagem, imprima a página em um papel adequado.

Aproveitando a forma utilizada na resolução do problema de encontrar o volume de um dodecaedro regular, efetuada no capítulo 2, seção 2.2.4, e os exemplos mostrados nesta seção, montamos uma estrutura dodecaedral regular com um cubo contido em seu interior, tudo em vareta de fibra de vidro. A Figura 45 mostra o início da confecção (à esquerda), o dodecaedro pronto (ao centro) e a composição finalizada (à direita). Foi utilizado para a colagem, um tubinho de cola líquida instantânea, que faz o tempo de execução ser bem reduzido em comparação ao uso de cola branca (ou esmalte). No entanto, deve-se usar cola branca ao final do processo para fortalecer a estrutura e, assim, poder manuseá-la sem se preocupar em descolar alguma parte. A pintura foi feita com esmaltes para unha.

Figura 45 – Fotografias do processo de montagem de um dodecaedro regular com um cubo (na cor laranja) em seu interior.

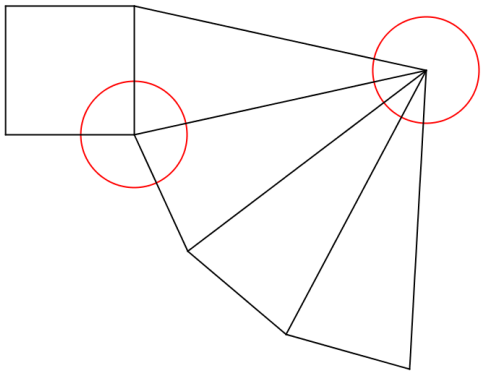


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Além dos sólidos regulares convexos, montamos também, por este método, uma pirâmide quadrangular e uma pirâmide hexagonal, ambas retas. Este tipo de construção permite mostrar outros elementos notáveis dos poliedros como, por exemplo, a altura da pirâmide, o apótema, a diagonal da base, o apótema da base, entre outros.

Primeiramente, definimos as dimensões da base e da altura da pirâmide de base quadrada que queríamos construir. Desta forma, a altura da pirâmide ficou estabelecida em 20 cm e a medida da aresta da base de 12 cm, então desenhamos a planificação da pirâmide que pode ser vista na Figura 46.

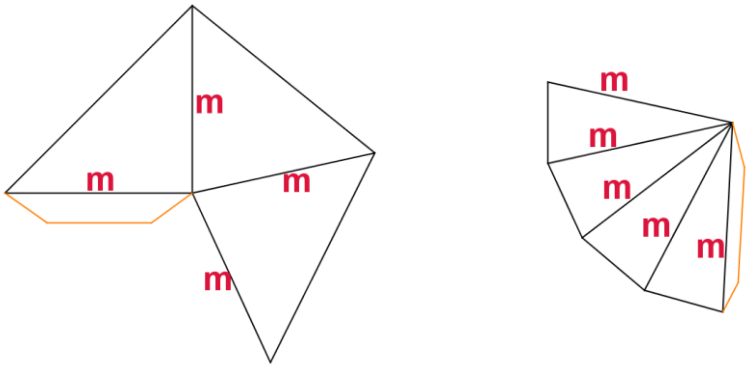
Figura 46 – Planificação de uma pirâmide quadrangular destacando os pontos de interesse para a construção das peças representativas dos vértices.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

As circunferências mostram os pedacinhos que precisamos para efetuar a montagem utilizando varetas. A circunferência mais alta (na Figura 46) delimita a planificação do ápice da pirâmide, do qual precisamos de apenas uma peça. A circunferência mais baixa delimita um dos vértices da base da pirâmide e, como a base é quadrada, precisamos de quatro peças idênticas. Logo, as peças que devemos ter são as mostradas na Figura 47.

Figura 47 – Planificação das peças representativas dos vértices da base (quatro peças, à esquerda) e do ápice (uma peça, à direita) da pirâmide quadrangular reta.



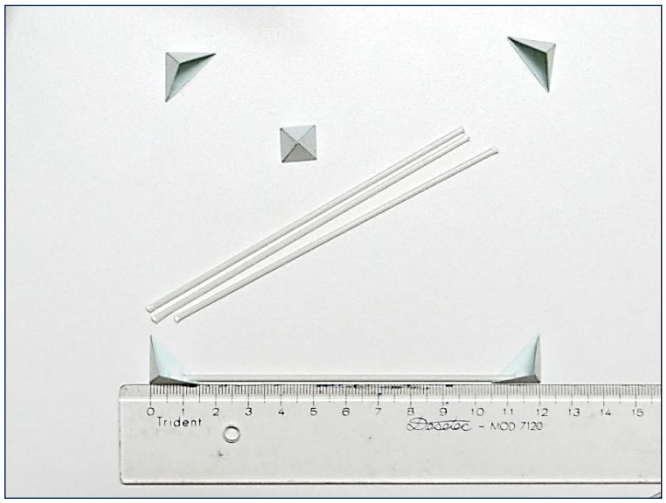
Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

A medida *m* que usamos na montagem foi de 1,5 cm (a mesma medida para os casos dos sólidos regulares, mostrados anteriormente). A altura proposta para a pirâmide foi de 20 cm e a medida lateral da base de 12 cm. Mesmo que as peças representativas do ápice e dos vértices da base já estiverem prontas, as dimensões da pirâmide podem ser alteradas desde que a razão entre as medidas da altura e da base se preservem, isso garantirá que os ângulos, tanto da base quanto do ápice da

pirâmide, se conservarão e que, por conseguinte, garantirá que o encaixe das varetas, às peças já prontas, será perfeito.

É mostrado, na Figura 48, o início da colagem das peças. Observe que, enquanto os vértices são colados à vareta, tivemos o cuidado de respeitar a medida pré-estabelecida de 12 cm (ou outra medida que respeite a razão entre a altura e a base).

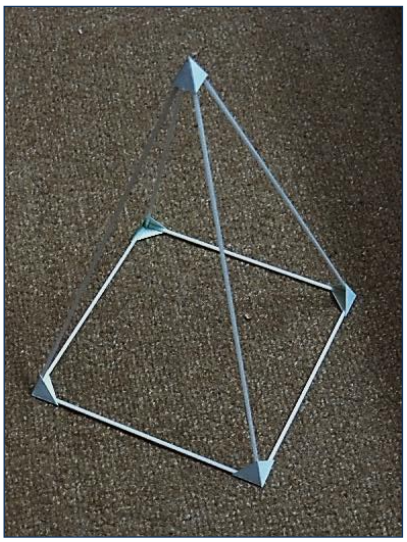
Figura 48 – Fotografia mostrando o início da montagem da pirâmide quadrangular reta.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O processo de montagem é idêntico ao já citado anteriormente para os sólidos regulares. Na Figura 49 é ilustrada a pirâmide já montada.

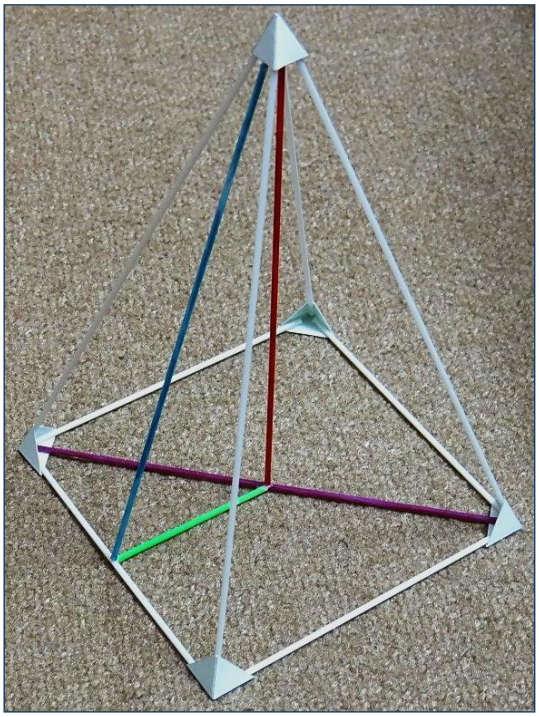
Figura 49 – Fotografia mostrando a pirâmide de base quadrangular reta finalizada.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para aproveitar mais ainda a montagem, introduzimos elementos que representam um apótema da pirâmide, um apótema da base, uma diagonal da base e a altura da pirâmide, como é mostrada na Figura 50. Possivelmente isso tornará a resolução de alguns problemas interessantes para o aluno, pois ele estará visualizando esses elementos citados e poderá comparar os resultados calculados com os resultados medidos na prática.

Figura 50 – Fotografia mostrando outros elementos da pirâmide, tais como: o apótema piramidal, apótema da base, a diagonal da base e a altura da pirâmide.

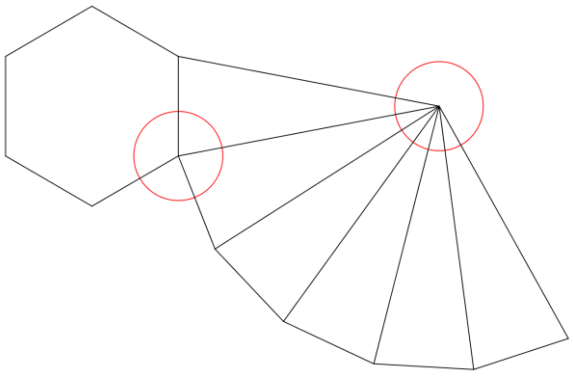


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Vale destacar que é importante a representação da diagonal da base por um material diferente ou uma cor diferente do material usado para a representação das arestas, pois o aluno pode intuir que se trata de outra aresta, por estar ligando dois vértices. Mas, talvez, isso seja até útil para discussões.

Para a montagem da pirâmide hexagonal o processo foi exatamente o mesmo. Definimos a altura da pirâmide em 25 cm e a medida lateral da base de 10 cm. A planificação é como a mostrada na Figura 51.

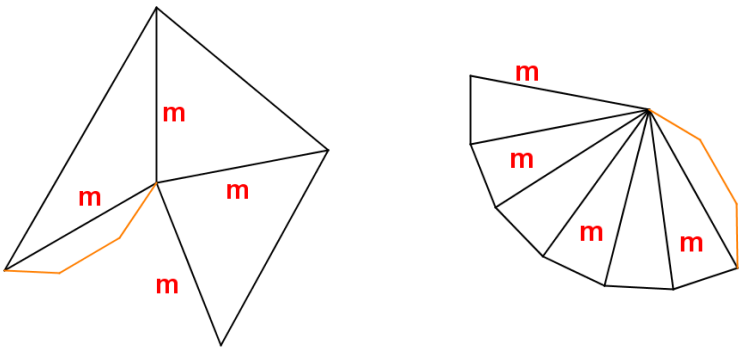
Figura 51 – Planificação da pirâmide hexagonal reta, destacando as peças representativas dos vértices.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Tal como no caso da montagem da pirâmide quadrangular (e dos sólidos regulares), precisamos dos pedacinhos que representarão os vértices. Serão seis peças idênticas para a base e uma para o ápice. A Figura 52 mostra a planificação das peças representativas dos vértices para a pirâmide hexagonal reta, retiradas da região circular mostrada na Figura 51. A medida *m* utilizada foi de 1,5 cm, mas pode assumir outros valores se adequando ao tamanho final da pirâmide e material utilizado.

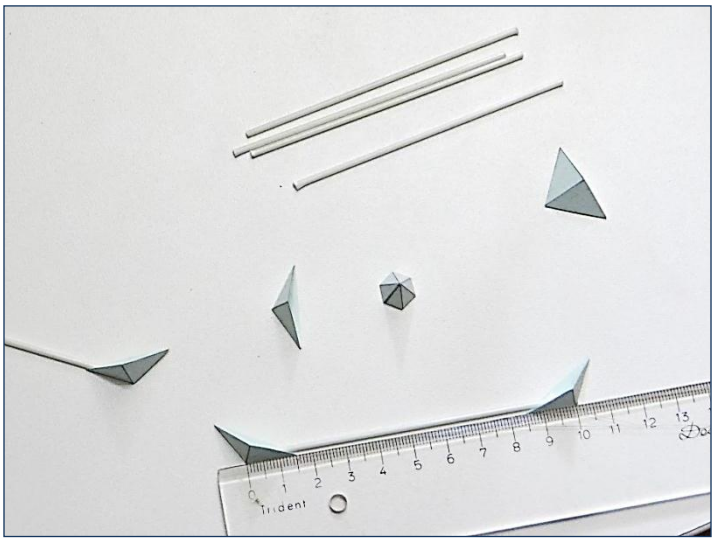
Figura 52 – Planificação das peças representativas dos vértices da base (seis peças, à esquerda) e do ápice (uma peça, à direita) da pirâmide hexagonal reta.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Na Figura 53 é mostrado o início da montagem da pirâmide.

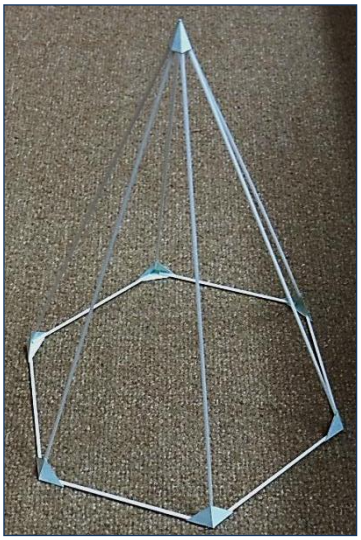
Figura 53 – Fotografia mostrando o início da montagem da pirâmide hexagonal reta.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A pirâmide hexagonal reta finalizada é mostrada na Figura 54.

Figura 54 – Fotografia da pirâmide de base hexagonal reta concluída.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Do mesmo modo que fizemos para a pirâmide quadrangular, introduzimos elementos que representam um apótema da pirâmide, um apótema da base, uma diagonal da base e a altura da pirâmide, como é mostrada na Figura 55.

Figura 55 – Fotografia mostrando outros elementos da pirâmide hexagonal, tais como: o apótema piramidal, apótema da base, uma diagonal da base e a altura da pirâmide.

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem das pirâmides quadrangular e hexagonal:

- Varetas de fibra de vidro para pipas (diâmetro de 2 mm);
- 1 folha de papel 180 g/m^2, tamanho A4 (papel geralmente utilizado em certificados e convites);
- Cola branca para papel;
- Esmalte para unhas;
- Estilete, tesoura e régua.

Tempo gasto de confecção para a pirâmide quadrangular: cerca de 20 minutos.
Tempo gasto de confecção para a pirâmide hexagonal: aproximadamente 25 min.

No apêndice A, encontram-se as planificações das peças representativas dos vértices para as duas pirâmides montadas. Caso o leitor queira realizar a montagem, imprima a página em um papel adequado.

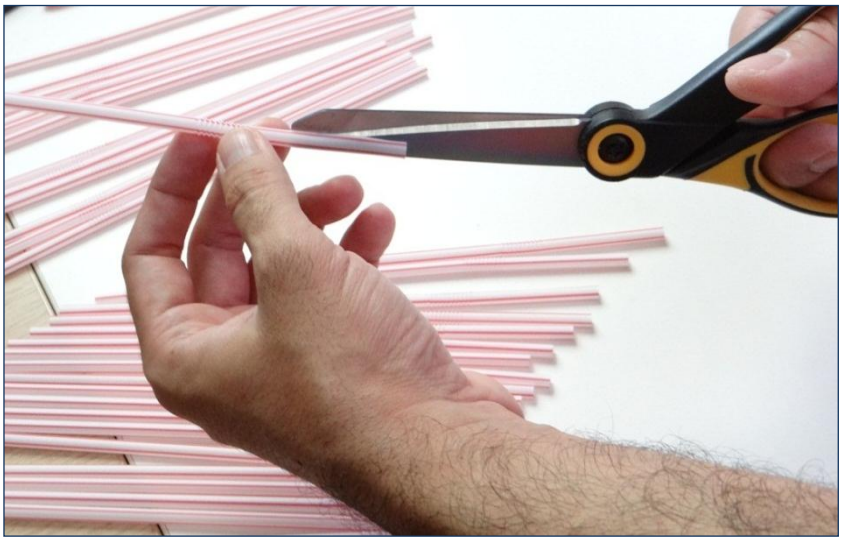
4.2 Montagem com canudo plástico sanfonado

Este método de montagem é bastante prático e tem a importante vantagem de mostrar ao aluno que, ao unirmos os lados de um polígono para criarmos um sólido, estes lados se convertem em uma única aresta do sólido. Por exemplo, o

aluno pode ser desafiado a calcular o número de arestas que compõe um dodecaedro regular. Ele poderia adotar o seguinte raciocínio: *um dodecaedro regular é formado por 12 pentágonos regulares, então seriam 60 arestas ao todo, já que cada pentágono tem 5 lados e 5 x 12 = 60*. Mas, ele pode perceber mais facilmente que o resultado anteriormente obtido deve ser dividido por dois, pois há a fusão de cada um dos lados dos pentágonos originando uma aresta, verificando, assim, que o número de arestas de um dodecaedro regular é 30.

Para as montagens dos sólidos, empregando este método, precisamos apenas de canudos plásticos sanfonados (presente em todo bom supermercado), fita adesiva, tesoura e régua. A Figura 56 mostra a preparação dos canudos para prosseguirmos na montagem do primeiro sólido.

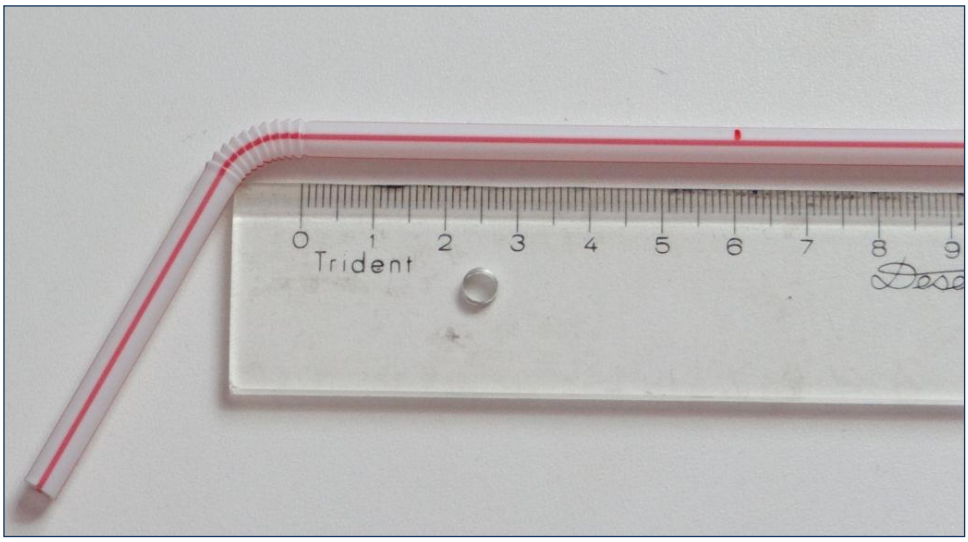
Figura 56 – Preparação dos canudos plásticos para a montagem de poliedros.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A parte sanfonada do canudo o divide em uma parte maior, de 15 centímetros e outra de 5 centímetros. Devemos, inicialmente, realizar um corte longitudinal na parte menor do canudo, da extremidade à parte sanfonada, como mostrado na Figura 56. Este corte facilitará o encaixe de um canudo ao outro. Depois recortamos a extremidade maior na medida necessária para a confecção do sólido. Para o nosso caso, a montagem decidida foi a de um dodecaedro regular e, se fôssemos utilizar o canudo inteiro o sólido ficaria muito grande (para uma sala de aula, talvez seja favorável ser grande mesmo!), então cortamos a parte maior para que ficasse com apenas 6 centímetros a partir da parte sanfonada, como mostra a Figura 57.

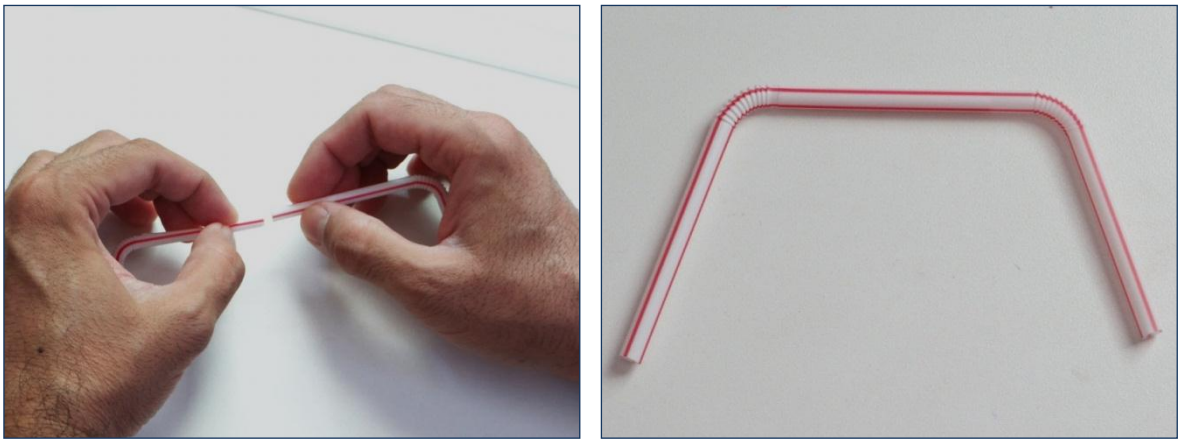
Figura 57 – Redução apropriada do canudo plástico para a confecção do dodecaedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Encaixamos sempre a parte com o corte longitudinal com a parte que não tem esse tipo de corte do outro canudo, como mostrado nas imagens da Figura 58.

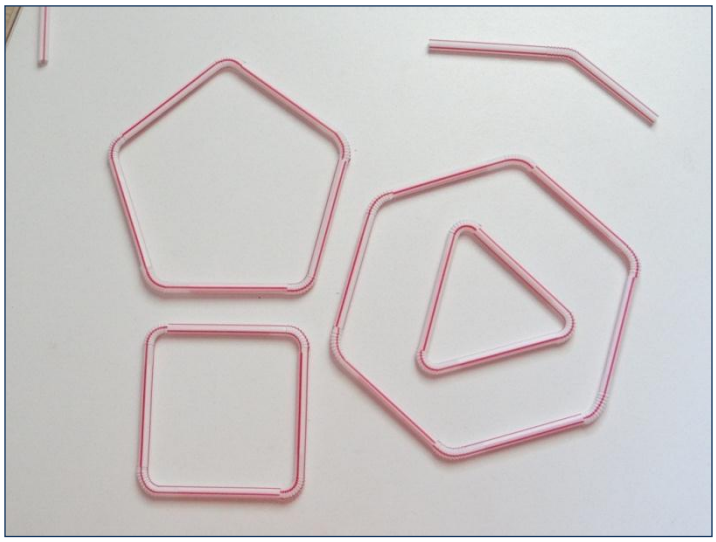
Figura 58 – Fotografias mostrando o processo de junção entre os canudinhos. Na 1ª imagem, o canudo da esquerda, com o corte longitudinal, encaixando internamente ao canudo da direita (que não tem corte). Na 2ª imagem, os dois canudos unidos.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 59 mostra algumas das diversas formas geométricas que podem ser obtidas, mas, para a construção pretendida, precisaremos de 12 pentágonos regulares.

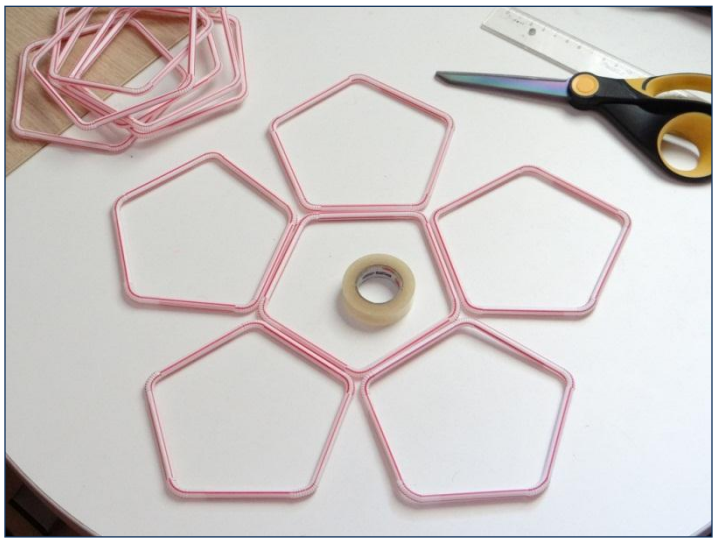
Figura 59 – Diversas formas geométricas facilmente obtidas pelas junções dos canudinhos.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Depois de montados os 12 pentágonos, fizemos a união de seus lados, como ilustrado pela Figura 60, com o auxílio de uma fita adesiva, conectando-os pelo ponto médio de cada lado.

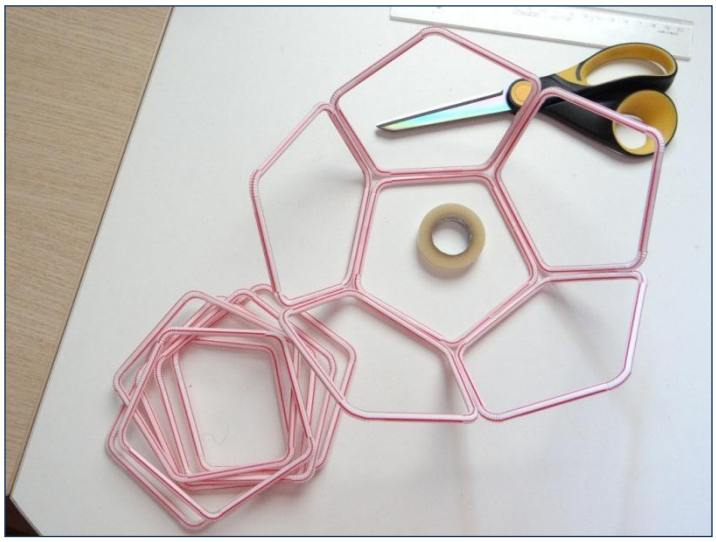
Figura 60 – União dos pentágonos utilizando uma fita adesiva.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 61 mostra o levantamento das faces laterais. É necessário observar o alinhamento das peças no momento em que colar com a fita adesiva.

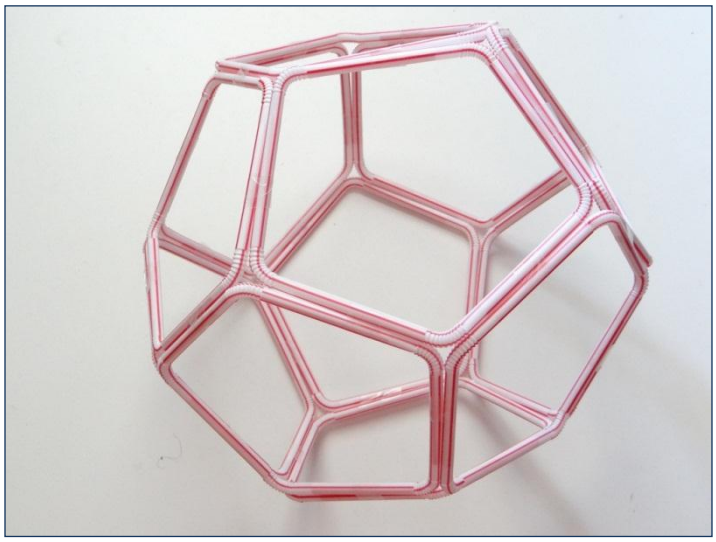
Figura 61 – Levantamento das faces laterais do dodecaedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 62 mostra a conclusão do sólido.

Figura 62 – Fotografia mostrando o dodecaedro regular montado com canudos plásticos sanfonados.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do dodecaedro regular:

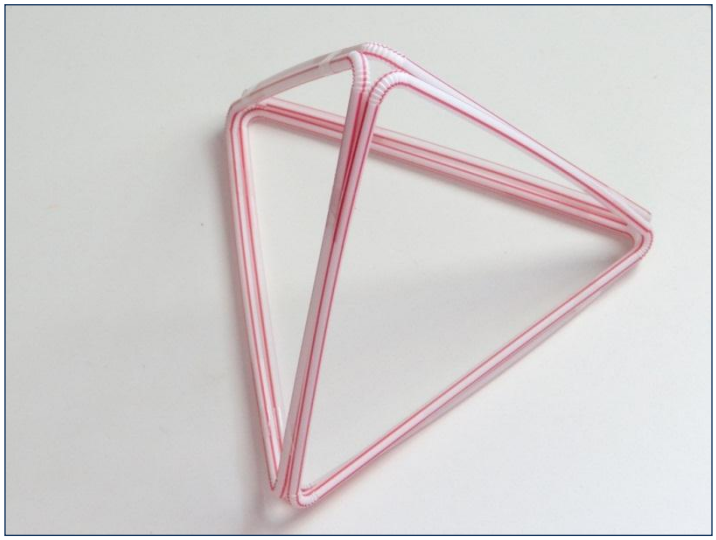
- 60 canudos plásticos sanfonados;
- Fita adesiva transparente;
- Tesoura e régua.

Tempo gasto de confecção (desde a preparação): cerca de 30 minutos.

Tamanho final das arestas: 8 cm.

Montamos também um tetraedro regular e realizamos apenas o corte longitudinal, preservando o total comprimento do canudo. O restante do processo é semelhante ao descrito anteriormente. A Figura 63 mostra o tetraedro finalizado.

Figura 63 – Tetraedro regular montado com canudos plásticos sanfonados.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do tetraedro regular:

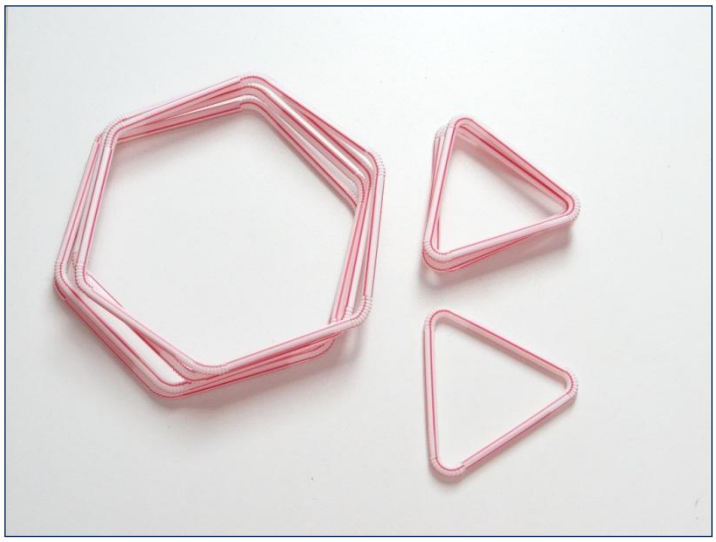
- 12 canudos plásticos sanfonados;
- Fita adesiva transparente;
- Tesoura.

Tempo gasto de confecção (desde a preparação): 4 minutos.
Tamanho final das arestas: 17 cm.

Aproveitamos também para montar um tetraedro regular truncado e, na preparação dos canudos, recortamo-los nas mesmas medidas utilizadas para o dodecaedro.

A Figura 64 mostra os quatro hexágonos regulares e os quatro triângulos equiláteros necessários para a montagem do sólido.

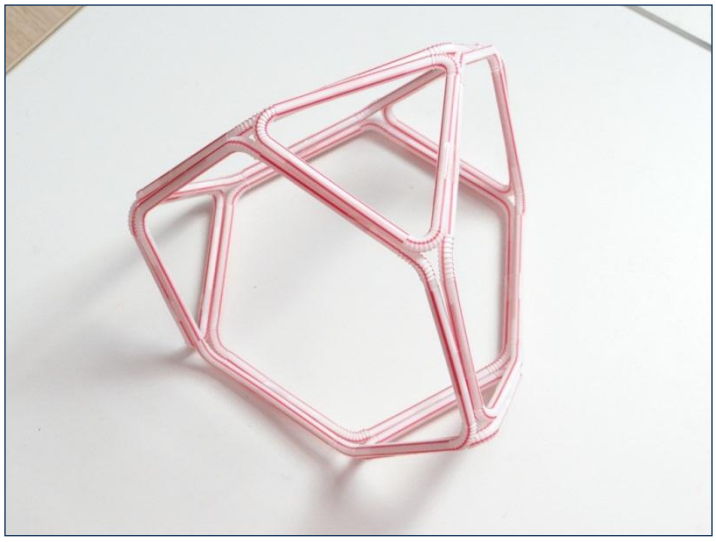
Figura 64 – Componentes de um tetraedro regular truncado.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Procedendo da mesma forma que nas montagens anteriores, obtivemos o poliedro mostrado na Figura 65.

Figura 65 – Tetraedro regular truncado montado com canudos plásticos sanfonados.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

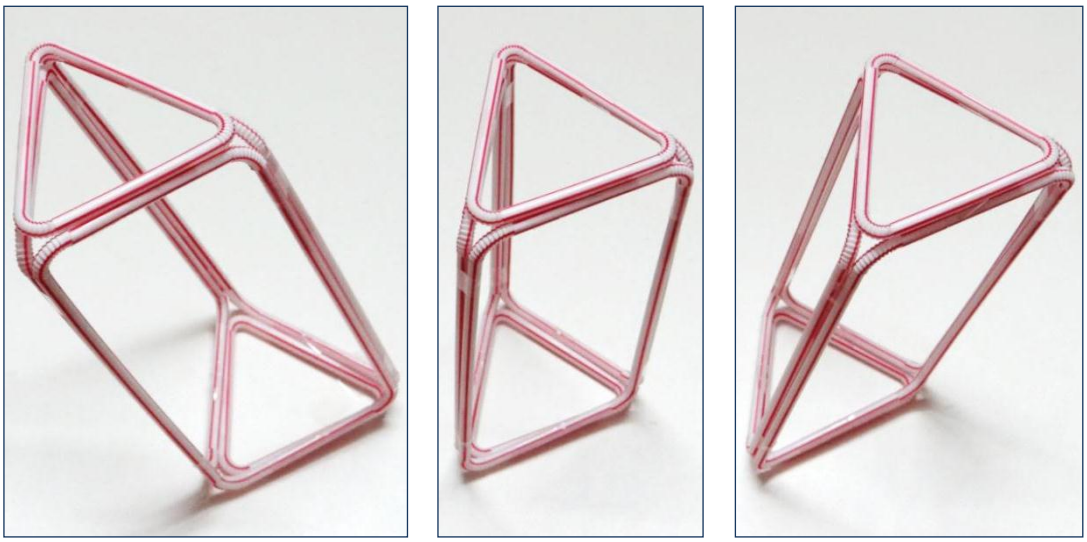
Material utilizado para a montagem do tetraedro regular truncado:

- 36 canudos plásticos sanfonados;
- Fita adesiva transparente;
- Tesoura e régua.

Tempo gasto de confecção (desde a preparação): cerca de 20 minutos.
Tamanho final das arestas: 8 cm.

Os sólidos construídos por este método ficam suficientemente firmes para manuseio, mas aceitam ajustes em sua inclinação como, por exemplo, em um prisma, que pode ser montado como prisma reto e ser transformado em um prisma oblíquo, pois é flexível o bastante para este fim. A Figura 66 mostra este fato.

Figura 66 – Prisma triangular montado com canudo sanfonado. O prisma central é caracterizado como reto e os da esquerda e direita são oblíquos, mas trata-se do mesmo objeto.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Material utilizado para a montagem do prisma triangular:
- 18 canudos plásticos sanfonados;
- Fita adesiva transparente;
- Tesoura e régua.

Tempo gasto de confecção (desde a preparação): cerca de 10 minutos.
Tamanho final das arestas: 8 e 17 cm.

4.3 Montagem com papel e ímãs

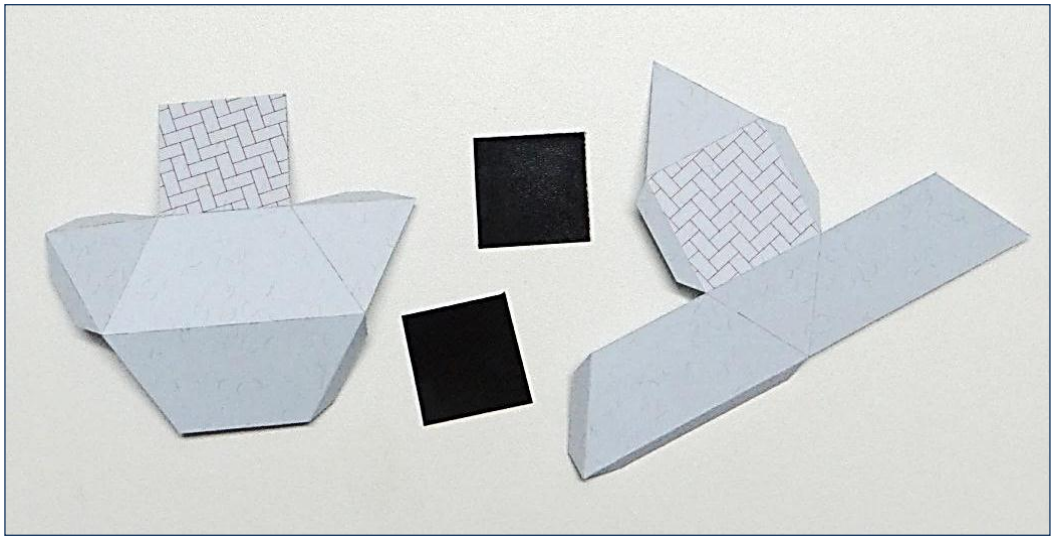
Com este tipo de montagem podemos efetuar os mais variados seccionamentos de um sólido e unir estas partes posteriormente, utilizando ímãs

adequadamente inseridos no interior desses sólidos. Podemos, por exemplo, mostrar um plano seccionando um cubo e esta seção formar uma face triangular, ou posicionar outro plano de forma a obtermos um pentágono como face de seccionamento. E depois restaurar o sólido com o uso desse artifício magnético. Para todas essas montagens, o papel utilizado foi o que é geralmente empregado em convites e certificados, cuja gramatura é de 120 ou 180 g/cm^2 e por ser mais resistente ao manuseio, depois que o poliedro estiver formado, ele é ideal. As planificações de todas as peças mostradas neste tópico podem ser encontradas no Apêndice B e, caso o leitor queira montar os poliedros aqui propostos, basta imprimir no papel adequado, recortar, dobrar e colar, seguindo as orientações comentadas aqui.

Quanto ao material para os contatos magnéticos, usamos manta magnética (que pode ser encontrada em grandes papelarias), pequenos ímãs circulares (que também podem ser encontrados em papelarias ou em bazares) e chapas finas de aço (aproveitamento de recipientes de chocolate e leite em pó).

A Figura 67 mostra o início da montagem de duas partes de um tetraedro regular seccionado por um plano que contém os pontos médios de quatro de suas arestas.

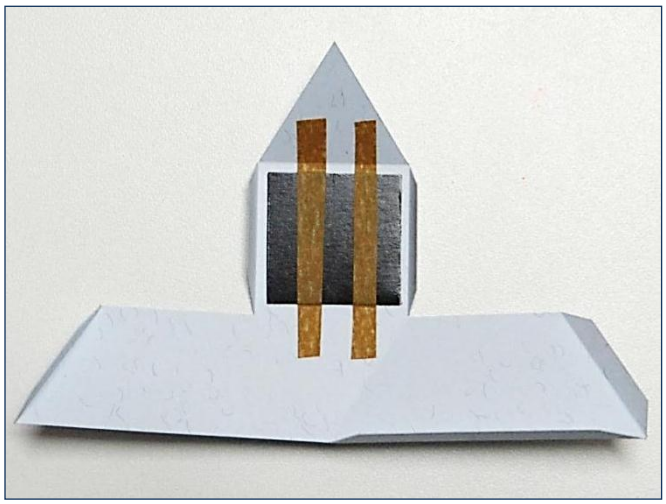
Figura 67 – Fotografia mostrando a montagem de duas peças idênticas que unidas formarão um tetraedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Usamos para esta montagem, dois pedaços de 2 x 2 cm de manta magnética de espessura 1 mm (é do mesmo material que são feitas as propagandas, por comerciantes, para fixarem na geladeira). Estes pedaços foram colados, com fita adesiva, na parte interna de cada peça planificada. Temos que observar a polaridade de cada pedaço da manta magnética, para que haja atração, ao invés de repulsão, quando aproximarmos as duas peças para formar o tetraedro. A Figura 68 mostra um dos pedaços da manta magnética fixada em uma das peças do tetraedro.

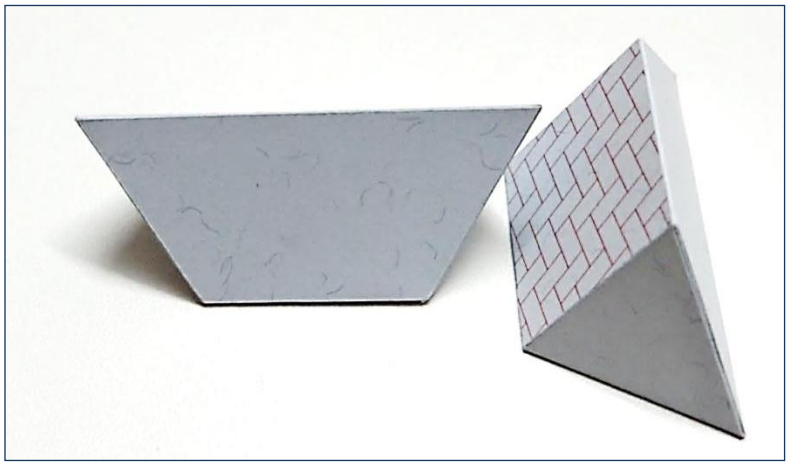
Figura 68 – Fotografia mostrando a colagem de um pedaço de manta magnética em uma das duas peças que formarão o tetraedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Depois de efetuada a colagem da manta magnética, montamos cada uma das peças do tetraedro, como pode ser visto pela Figura 69.

Figura 69 – Fotografia das duas peças originadas do seccionamento do tetraedro regular.

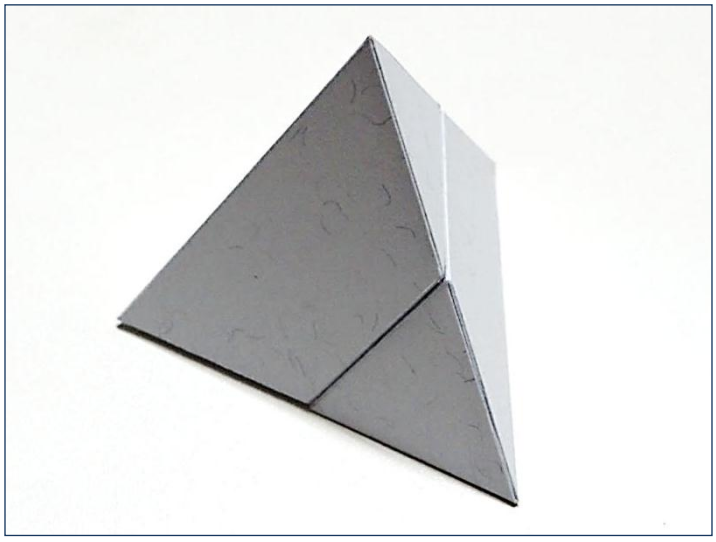


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Aproximando-se as peças pelos lados em que as mantas magnéticas foram coladas há a atração mútua das partes, formando, assim, o tetraedro regular. Vale citar que o poder magnético da manta é fraco e que para um sólido grande talvez as partes não se sustentem.

As regiões hachuradas, em ambas as peças montadas, representam o seccionamento sofrido pelo tetraedro por um plano que contém os pontos médios de quatro arestas, e essas regiões são quadradas. A Figura 70 mostra o tetraedro regenerado.

Figura 70 – Fotografia mostrando a formação do tetraedro regular com as duas partes unidas magneticamente.

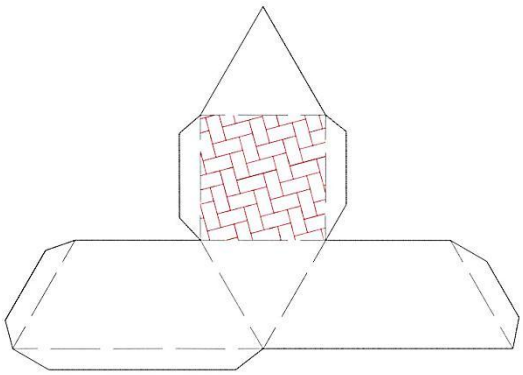


Fonte: Elaboração do próprio autor.

As peças montadas desse fracionamento do tetraedro regular são idênticas entre si e a planificação delas está representada pela Figura 71, onde a região hachurada representa a região do plano de corte e é atrás dela que devemos posicionar e colar o ímã adequadamente (sempre observando a polaridade), as linhas cheias representam os cortes que devem ser feitos e as linhas tracejadas representam as dobras a serem realizadas. Para facilitar as dobras é preciso passar suavemente algum instrumento pontiagudo (ponta da tesoura, estilete, ponta seca do compasso) sobre as linhas tracejadas, de modo a formar sulcos.

As regiões menores, onde constam as linhas tracejadas, são as abas e a cola deve ser passada moderadamente nessa região para unir e formar o poliedro.

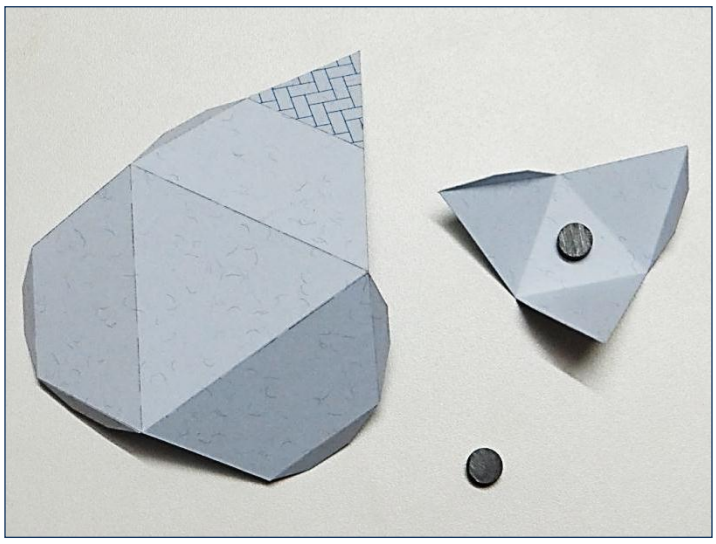
Figura 71 – Planificação das peças seccionadas do tetraedro regular. São necessárias duas peças para obtenção do sólido.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Outra forma de seccionar o tetraedro que utilizamos foi passando um plano paralelo à base e contendo os pontos médios de três arestas. O início da montagem pode ser vista na Figura 72. Para esta montagem utilizamos dois pequenos ímãs circulares apropriadamente colados em cada parte seccionada. Ao colá-los, tomamos os devidos cuidados quanto à polaridade (devem ser colados de tal forma que se atraiam no final) e também ao alinhamento (devem ser colados no centro da face). Se os ímãs não forem colados tomando os cuidados citados, ao juntar as peças para formar o sólido elas podem não ficar unidas ou podem ficar desalinhadas.

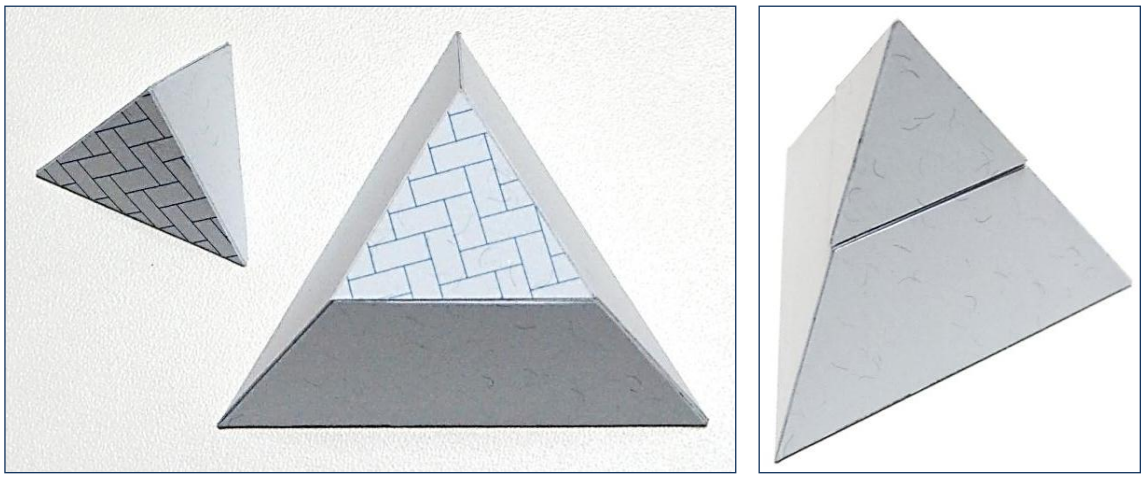
Figura 72 – Fotografia mostrando a colagem de ímãs circulares para a montagem de um tetraedro seccionado por um plano paralelo à base.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Ao final da colagem e alinhamento dos ímãs e montagem de cada peça, mostramos o resultado na Figura 73.

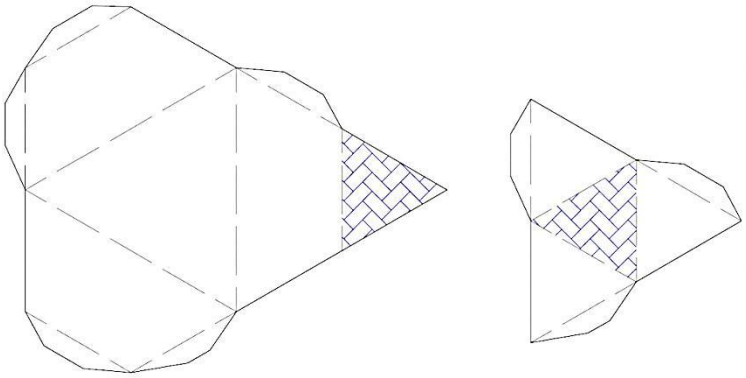
Figura 73 – Fotografias das partes do tetraedro regular seccionado por plano paralelo à base (esquerda) e a recombinação das peças unidas magneticamente (direita).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As planificações das peças montadas com esse tipo de seção do tetraedro regular são mostradas pela Figura 74.

Figura 74 – Planificação das peças seccionadas do tetraedro regular. No processo, foi formado um pequeno tetraedro regular (direita) e um tronco-tetraedro (esquerda).



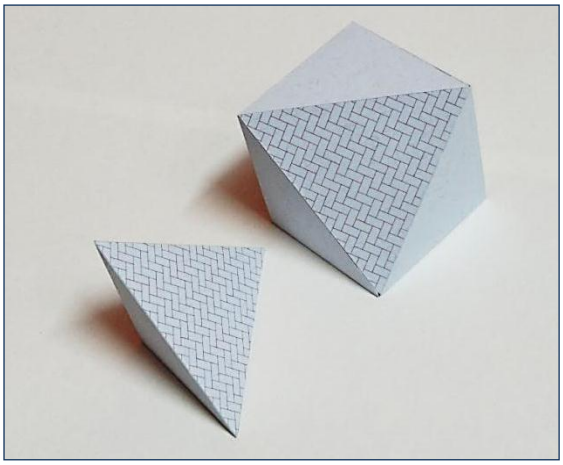
Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Existem inúmeras maneiras de passar um plano seccionando um sólido, mas, no caso do tetraedro, escolhemos apenas esses dois modos apresentados, em que os planos passam pelos pontos médios de suas arestas. Já para o hexaedro regular, temos maneiras mais interessantes de realizar cortes, por exemplo, podemos passar certos planos de modo a obtermos seções triangulares, quadriláteras, pentagonais e

hexagonais. A montagem e a maneira de unirmos as peças são exatamente como descritas no caso do tetraedro. Os ímãs utilizados foram os circulares.

A Figura 75 mostra o cubo seccionado por um plano que passa por somente três vértices, originando uma seção triangular equilátera. O aluno pode observar que os lados desse triângulo formado são todos iguais e coincidem com as diagonais das faces do cubo.

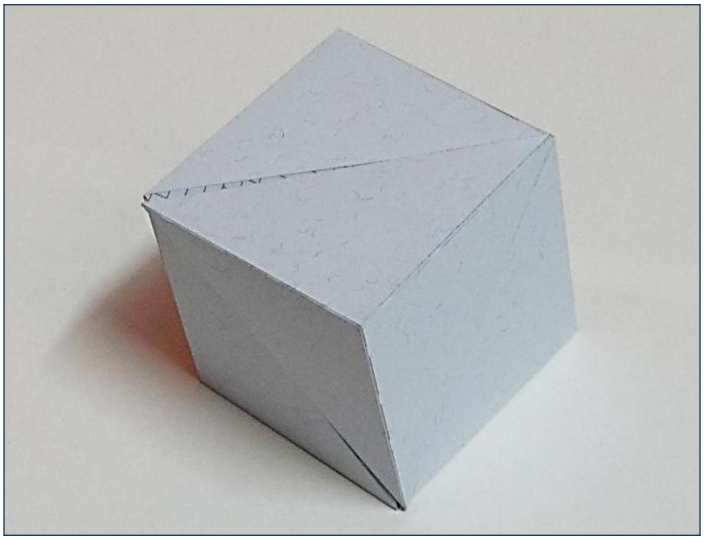
Figura 75 – Fotografia mostrando o seccionamento do cubo por um plano passando em somente três vértices, originando um tetraedro tri-retangular e um heptaedro.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 76 ilustra o hexaedro regular recomposto, cujas peças estão unidas magneticamente.

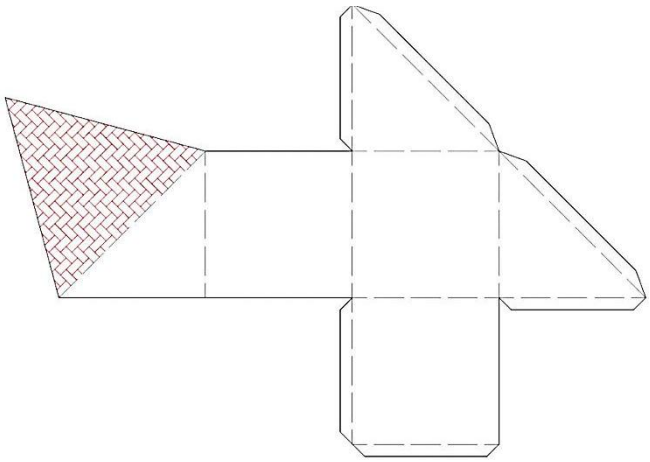
Figura 76 – Fotografia mostrando a regeneração do cubo a partir do tetraedro e heptaedro formados pelo seccionamento.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

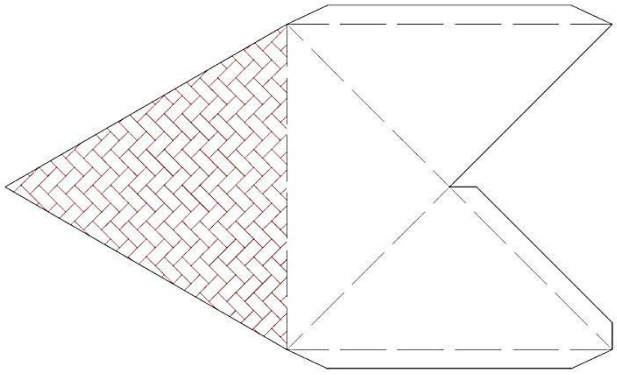
As planificações de cada uma das peças seccionadas do cubo, mostrado na Figura 75, podem ser visualizadas pelas Figura 77 e Figura 78. As regiões hachuradas representam o plano de corte e são atrás delas que colamos os ímãs para posterior fixação das partes. As linhas cheias representam onde devem ser recortadas e as linhas tracejadas onde devem ser dobradas. As regiões menores onde ocorrem as linhas tracejadas são as abas das figuras e são nelas que devemos passar cola, nunca de forma exagerada.

Figura 77 – Planificação da peça maior seccionada do hexaedro regular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Figura 78 – Planificação da peça menor seccionada do hexaedro regular (não está na mesma escala que a Figura 77).

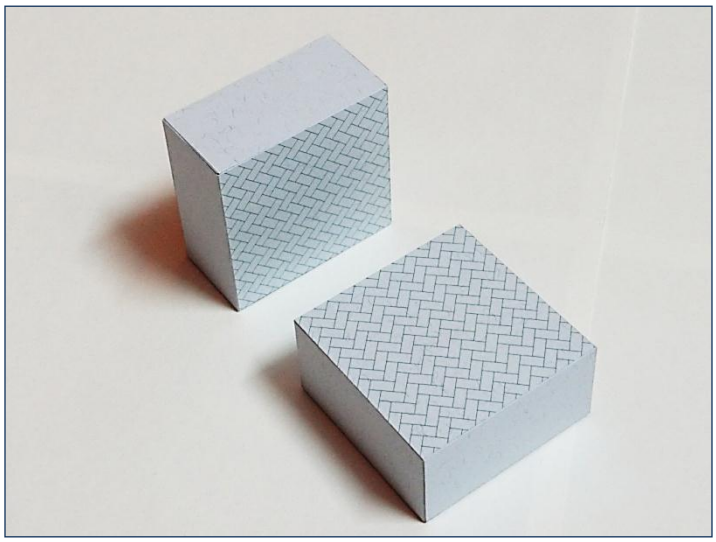


Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Fizemos também outras seções do hexaedro regular, passando um plano de corte em algumas posições de modo que obtivemos alguns quadriláteros. A Figura 79 mostra a seção do cubo em que o plano passa pelos pontos médios de quatro

arestas, originando, deste modo, dois paralelepípedos com duas faces quadradas cada um.

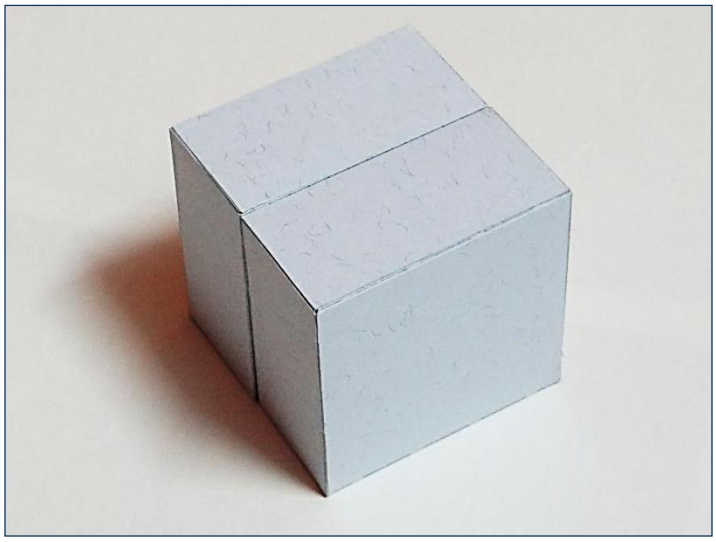
Figura 79 – Fotografia mostrando o seccionamento do hexaedro regular por um plano que contém os pontos médios de quatro arestas paralelas.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 80 mostra a reunião dos paralelepípedos, pelas partes hachuradas, regenerando o cubo.

Figura 80 – Regeneração do cubo a partir dos paralelepípedos originados pela seção citada.

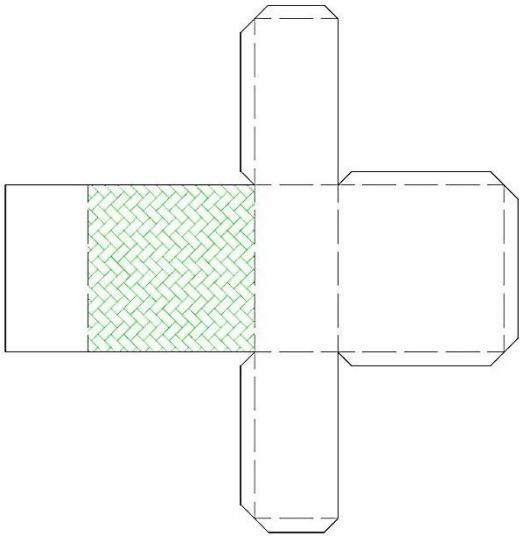


Fonte: Elaboração do próprio autor.

As duas partes seccionadas são idênticas e a planificação de uma delas está representada na Figura 81. Da mesma forma que nos casos anteriores, a forma de

colagem das abas, bem como o posicionamento e colagem dos ímãs são análogos ao que foi mostrado para o segundo caso do tetraedro.

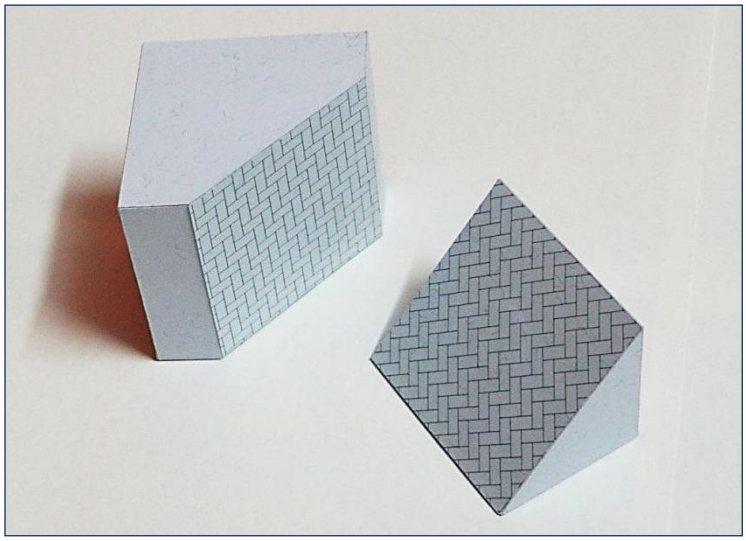
Figura 81 – Planificação de uma das peças da seção do cubo mostrada na Figura 79. São necessárias duas destas peças para a regeneração do cubo.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Outra seção efetuada de modo a obtermos um quadrado é a mostrada na Figura 82.

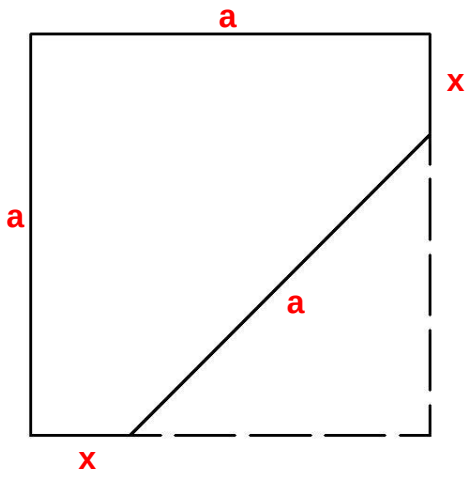
Figura 82 – Fotografia mostrando outra maneira de seccionar o cubo de modo a obter uma seção quadrada.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para obtermos esse tipo de seção nas condições de que o plano de corte estivesse paralelo a quatro arestas e que a região seccionada fosse um quadrado, precisamos calcular o valor representado por *x* na Figura 83, em que é mostrado o cubo com aresta de medida *a*, visto de cima.

Figura 83 – Figura que auxilia na determinação dos pontos em que o plano paralelo a quatro arestas deve passar para se obter uma seção quadrada no cubo de aresta a.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Da figura anterior e aplicando o Teorema de Pitágoras sobre o triângulo retângulo formado pelas linhas tracejadas (cujas medidas são *a* – *x*) e pela aresta inclinada, cuja medida deve ser igual à medida da aresta do cubo, temos:

$$a^2 = (a - x)^2 + (a - x)^2 = 2 \cdot (a - x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (a - x)^2 = \frac{a^2}{2}$$

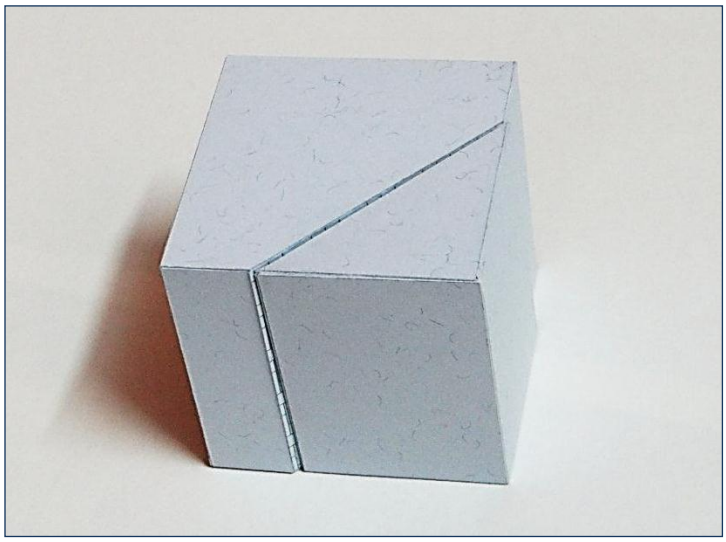
cujo resultado válido para esta prática é:

$$x = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(Equação 7)}$$

O nosso cubo foi projetado com uma aresta de medida 6 cm, isso implica em uma medida de $x \cong 1{,}8$ cm.

A Figura 84 mostra o cubo regenerado, com os ímãs presos internamente em cada uma das partes.

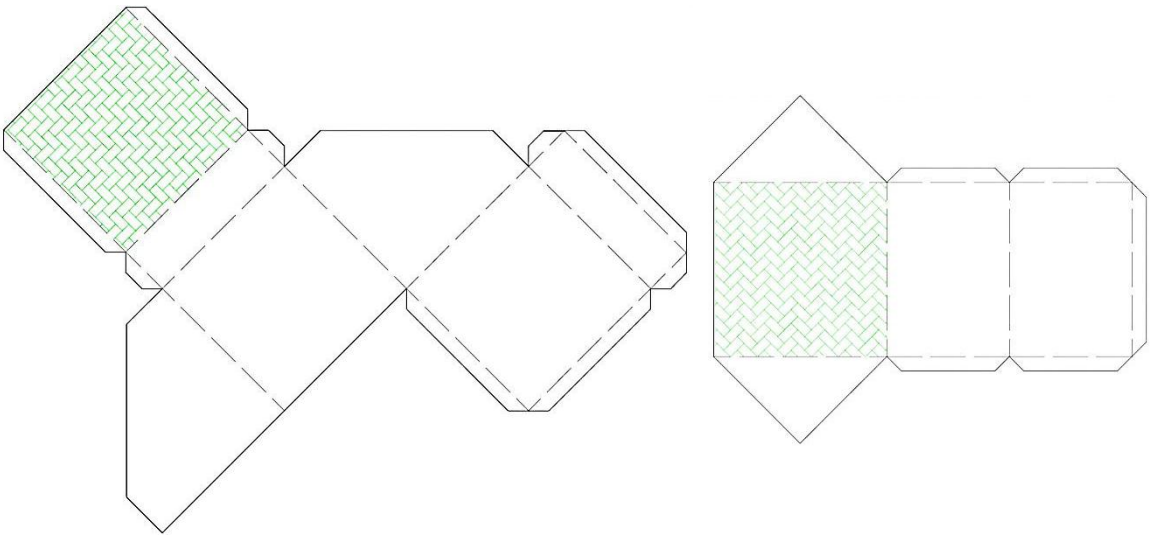
Figura 84 – Regeneração do cubo a partir de um prisma triangular e um prisma pentagonal irregular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As planificações de cada uma das partes seccionadas mencionadas anteriormente são mostradas na Figura 85.

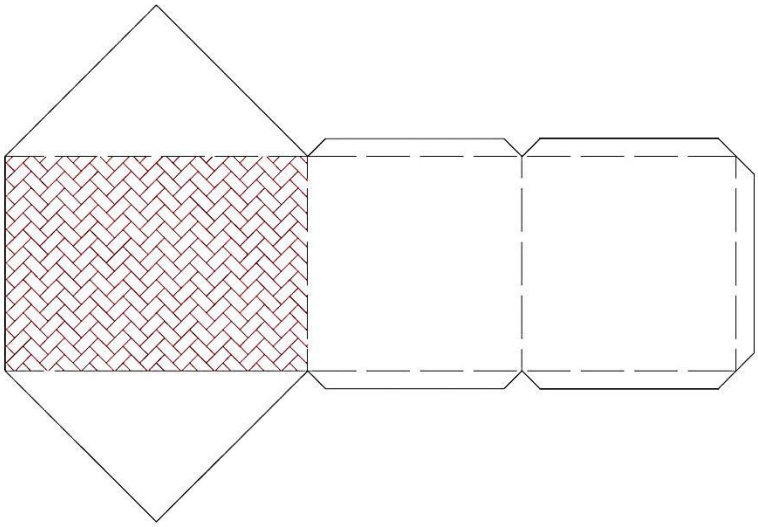
Figura 85 – Planificações das peças geradas do seccionamento do cubo mostradas na fFigura 84. À esquerda, um prisma pentagonal irregular e à direita, um prisma triangular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Se o plano de seção adotado no corte de um cubo de aresta *a* contivesse duas arestas opostas, a seção resultante seria um retângulo de medidas *a* e $a\sqrt{2}$. E as duas peças obtidas seriam idênticas. A planificação dessa peça é representada pela Figura 86.

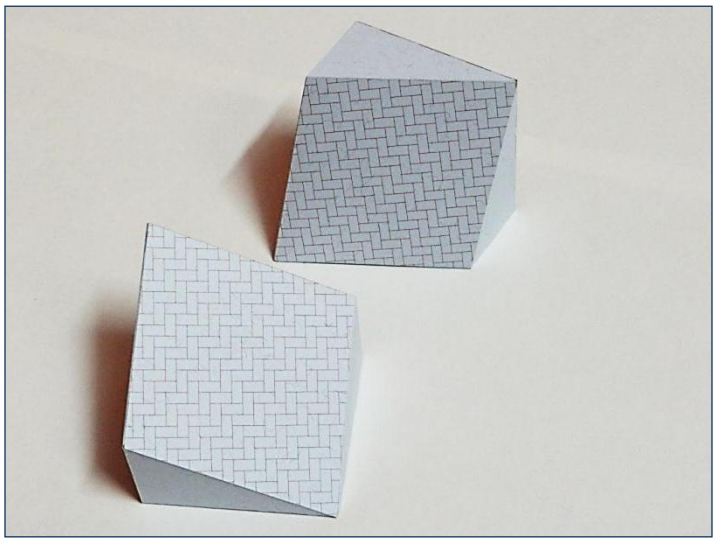
Figura 86 – Planificação de uma das peças de um cubo seccionado por um plano que contém duas arestas paralelas opostas. É um prisma triangular.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Passando um plano de corte que contenha dois vértices diagonalmente opostos (diagonal interna do cubo) e os pontos médios de duas arestas, obtemos a seção e os sólidos mostrados na Figura 87. A seção formada é um losango e o modo de se obter a planificação deste tipo de corte é mostrado no capítulo 3, seção 3.2.1.

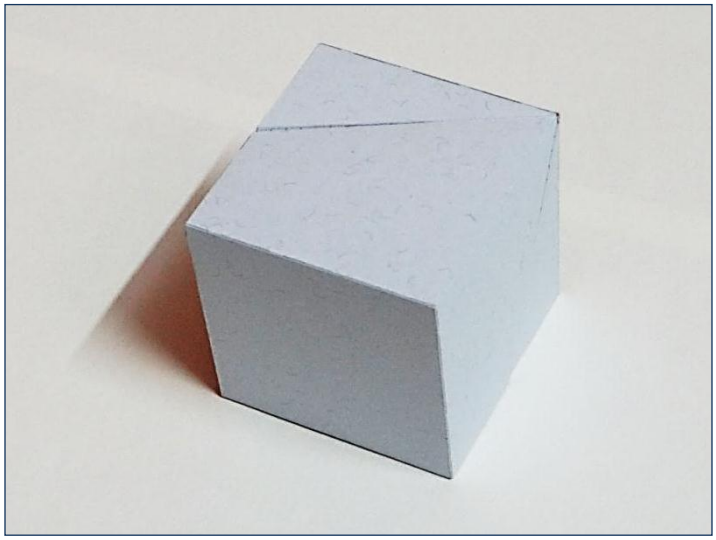
Figura 87 – Fotografia das peças mostrando a seção do cubo em forma de losango.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 88 mostra o cubo reconstituído.

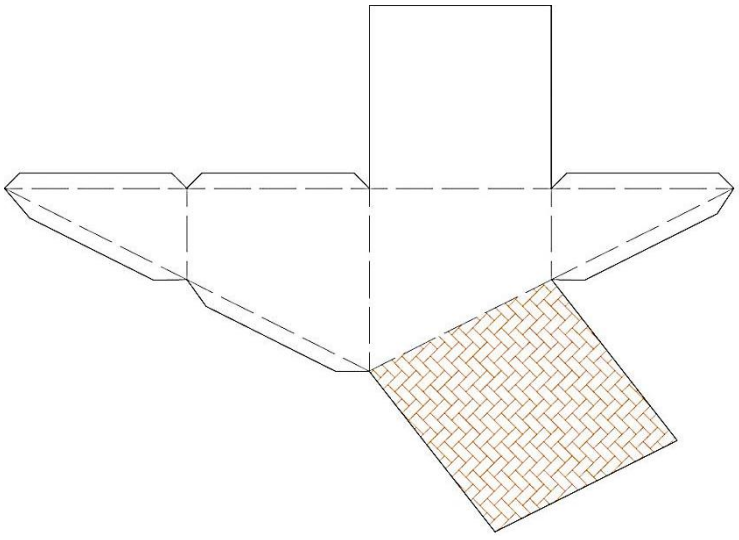
Figura 88 – Fotografia da regeneração do cubo a partir das peças mostradas na Figura 87 (prisma quadrangular truncado).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A planificação para cada uma das peças da Figura 87 é mostrada na Figura 89.

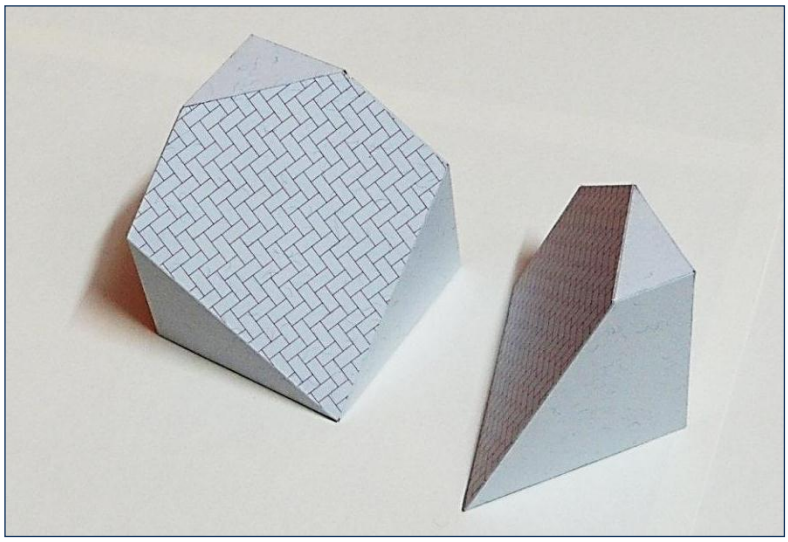
Figura 89 – Planificação de uma das peças de um cubo seccionado por um plano que contém dois vértices diagonalmente opostos e pontos médios de duas arestas. É um prisma quadrangular truncado.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Além das seções triangulares e quadriláteras que podemos obter com planos em diversas posições, construímos um cubo cuja forma seccionada é um pentágono, como mostra a Figura 90.

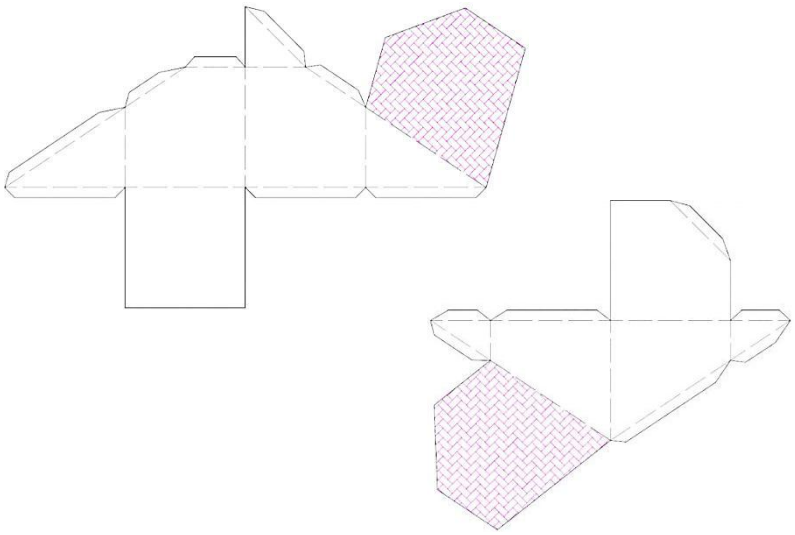
Figura 90 – Fotografia das peças de um cubo seccionado, mostrando uma seção pentagonal.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As planificações de cada uma das peças necessárias para a representação desse corte são mostradas na Figura 91.

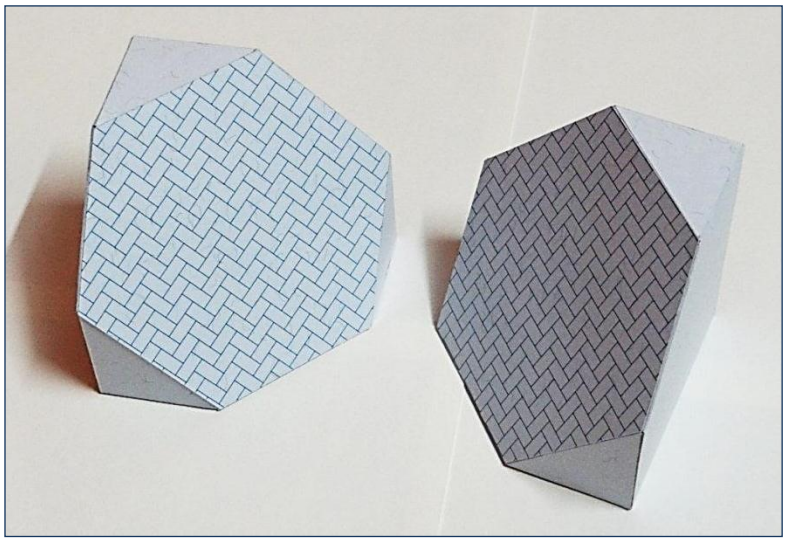
Figura 91 – Planificações das peças originadas do seccionamento do cubo, cuja seção é um pentágono.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Finalizando os cortes notáveis para um cubo através de planos seccionadores, apresentamos, na Figura 92, a seção na forma de um hexágono regular, obtido quando fizemos o plano passar por pontos médios de seis arestas.

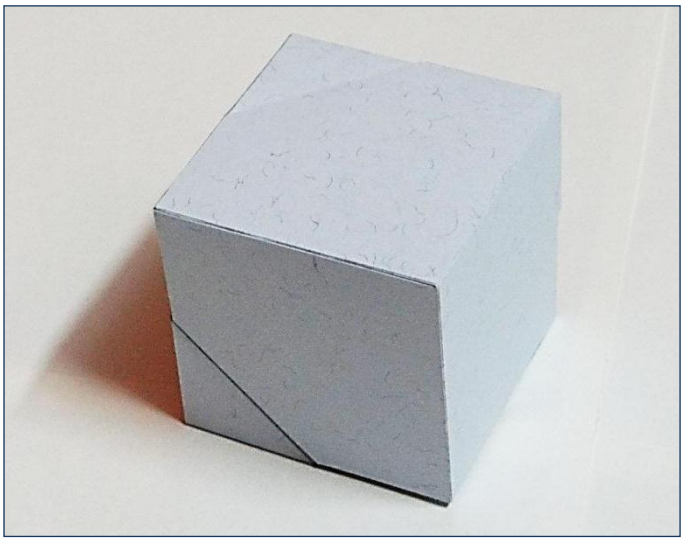
Figura 92 – Fotografia de peças mostrando a seção do cubo em forma de hexágono regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A união das partes de seção hexagonal é mostrada na Figura 93.

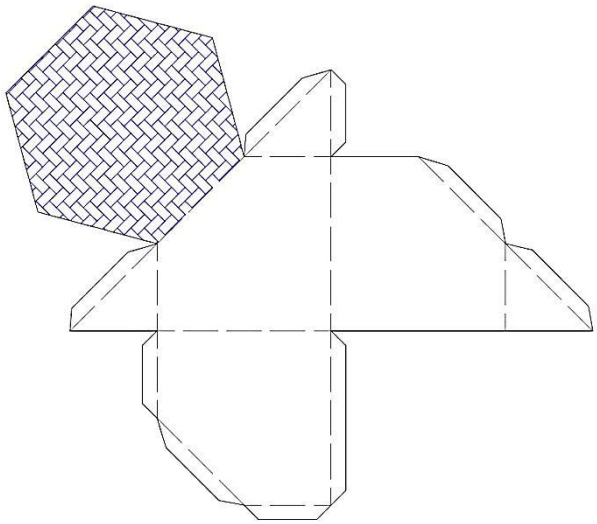
Figura 93 – Regeneração do cubo a partir de dois heptaedros idênticos.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 94 ilustra a planificação para as duas peças que constituem o cubo seccionado da Figura 92.

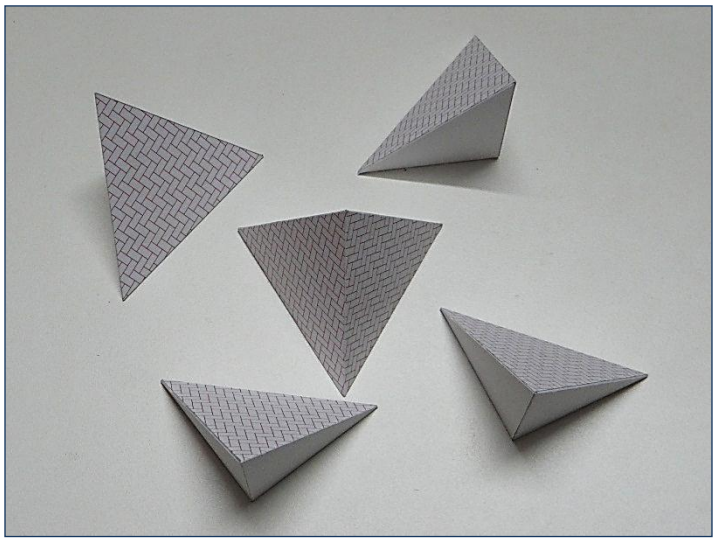
Figura 94 – Planificação de uma das peças do seccionamento do cubo, originando um hexágono regular como uma das faces.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Aplicando o que foi feito no primeiro caso de seccionamento de um cubo, em que o plano de corte passa por três vértices, e fazendo outras secções de mesmo tipo para outros vértices, teremos então um cubo multisseccionado em um tetraedro regular central e quatro tetraedros de canto, como podemos observar na Figura 95.

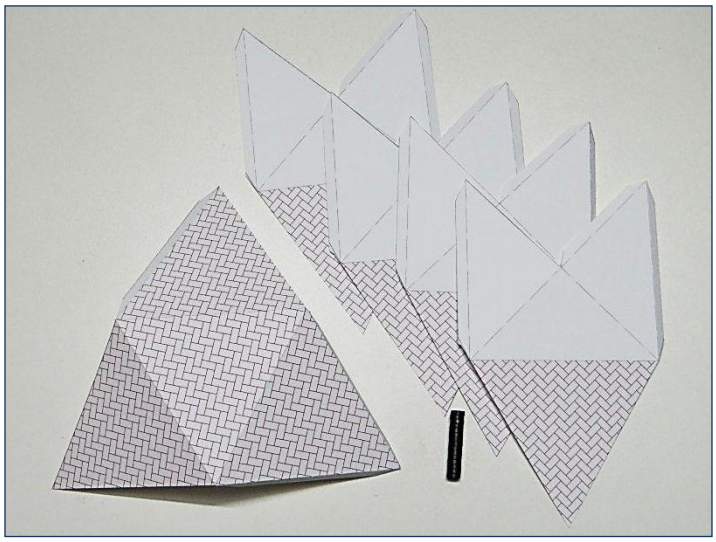
Figura 95 – Fotografia mostrando um multisseccionamento do cubo, que resultou em um tetraedro regular e quatro tetraedros tri-retangulares.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As peças planificadas são as mostradas na Figura 96 e o processo de montagem é idêntico ao exercido no segundo caso do tetraedro regular.

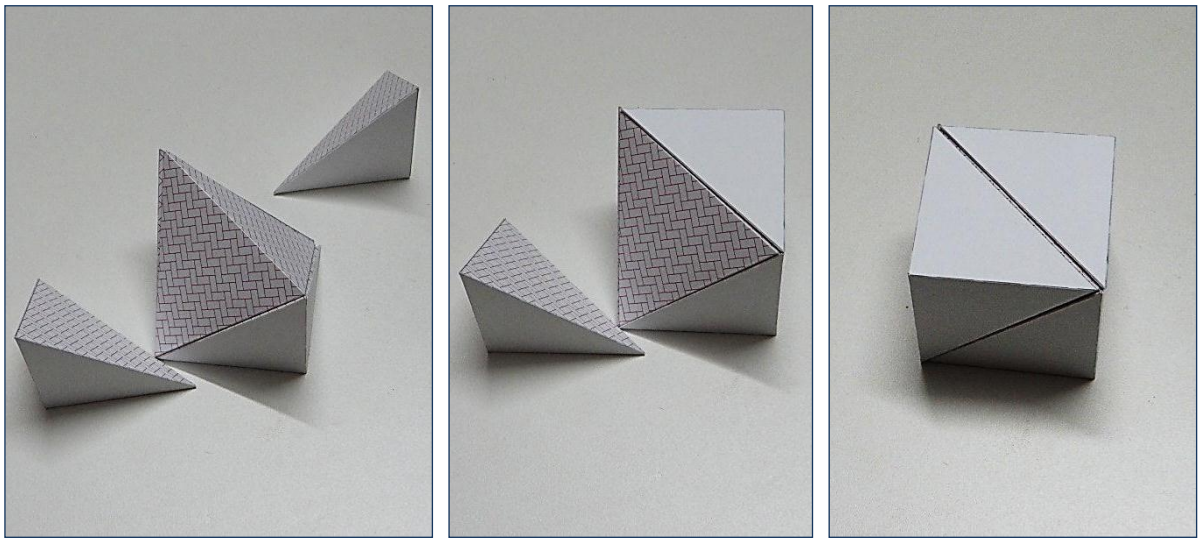
Figura 96 – Fotografia das peças planificadas para o multisseccionamento do cubo.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 97 é mostrada a sequência para a reconstituição do cubo com os tetraedros montados.

Figura 97 – Sequência de fotografias que mostra a recomposição do cubo a partir dos cinco tetraedros montados.



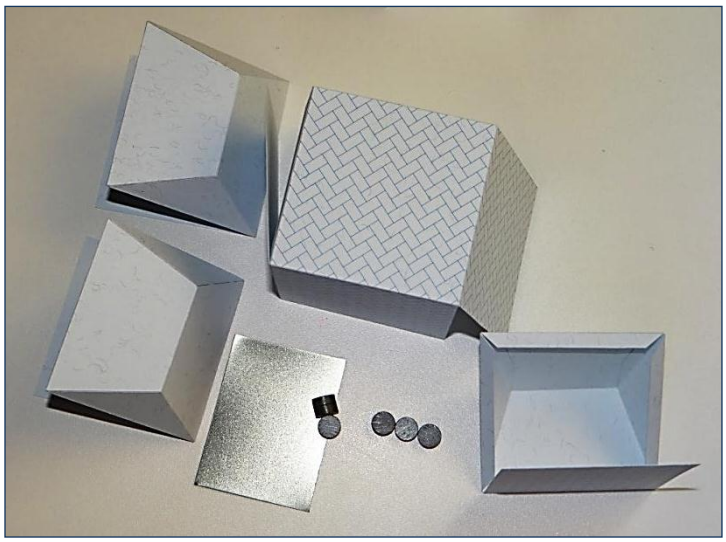
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para um dodecaedro regular existem maneiras bastante interessantes de se fazer seccionamentos. Mas escolhemos mostrar apenas um tipo e foi o tipo que pode ser utilizado para mostrar como calcular o volume de um dodecaedro regular, tal como indicado no capítulo 2 (Figura 10). Para a montagem, utilizamos ímãs e

lâminas de aço provenientes do reaproveitamento de latas de chocolate e leite em pó. Em nossa opinião o par ímãs/chapa de aço é muito melhor para a finalidade de se unir as partes montadas que os pares ímãs/ímãs ou manta magnética/manta magnética, apresentadas anteriormente.

A Figura 98 mostra o início da montagem de um multisseccionamento de um dodecaedro regular, obtendo um cubo e seis peças idênticas. Recortamos pequenas chapas de aço, com tesoura comum mesmo, e colamos na parte interna do cubo (que se tornará o centro do dodecaedro), usando cola branca e fita adesiva, e colamos dois ímãs para cada uma das outras partes restantes. Desta vez utilizamos dois ímãs para que as peças tenham maior sustentação. Sempre tendo em mente que ao regenerar o sólido os ímãs devem estar ao alcance da chapa metálica no interior do cubo.

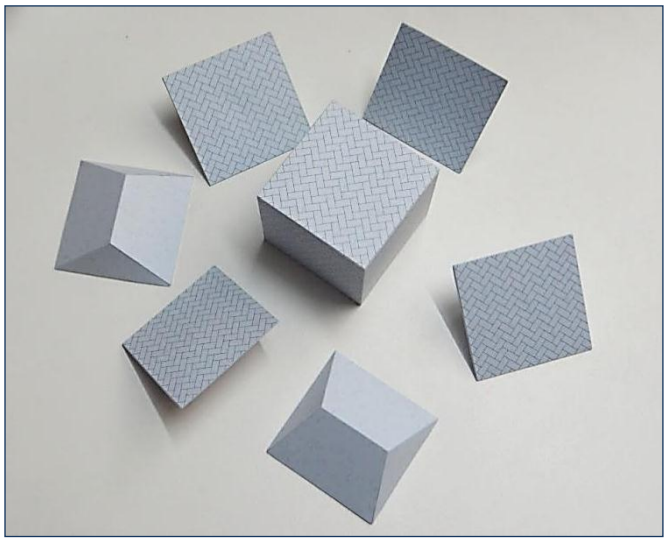
Figura 98 – Fotografia mostrando a preparação da montagem de um dodecaedro regular multisseccionado, utilizando ímãs e finas chapas de aço.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 99 mostra o cubo e as seis outras peças prontas e com os dispositivos alocados.

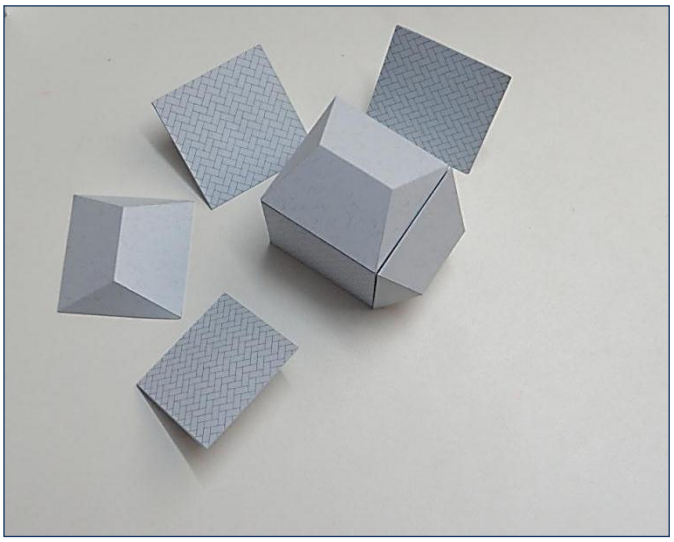
Figura 99 – Fotografia mostrando as peças prontas de um dodecaedro regular multisseccionado.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 100 mostra o dodecaedro regular sendo regenerado.

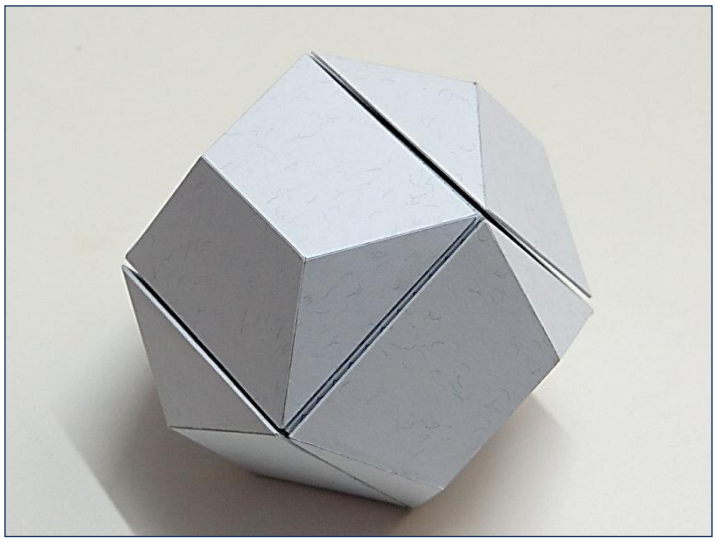
Figura 100 – Regeneração do dodecaedro a partir das peças do multisseccionamento.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

O dodecaedro regenerado a partir do multisseccionamento é mostrado na Figura 101, lembrando que as peças externas têm ímãs e o cubo, que é o núcleo do dodecaedro, tem as chapas de aço, permitindo, assim, a sua regeneração.

Figura 101 – Fotografia do dodecaedro regular regenerado.

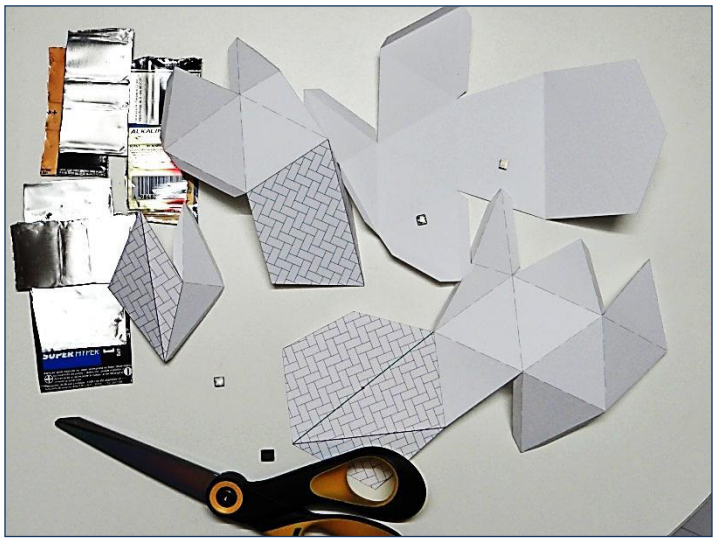


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Também, usando o mesmo procedimento da montagem do dodecaedro, criamos um multisseccionamento do icosaedro regular, de modo que pode ser bastante útil na interpretação do equacionamento de seu volume, tal como visto no capítulo 2, seção 2.2.5. Na Figura 102 podemos ver o material utilizado, que consiste em pequenas chapas de aço, provenientes de baterias e pilhas esgotadas, que foram retiradas cuidadosamente e aplainadas adequadamente. Também utilizamos pequenos ímãs, menores que os utilizados até agora, porém, com campos magnéticos muito mais intensos. São ímãs de neodímio, como são popularmente conhecidos, ou ainda recebem o nome de ímãs de terras raras, por serem constituídos dos elementos químicos Neodímio-Ferro-Boro. Os que foram utilizados aqui são oriundos de HDs de computadores e aparelhos de CD/DVD-ROM avariados (que conseguimos como doações de lojas de informática).

Obs.: Deve-se tomar muito cuidado ao tentar retirar a parte metálica da pilha, pois ela contém ácido. As baterias de 9 volts têm em seu interior um conjunto de seis pequenas células, desde que elas não sejam cortadas ou perfuradas, a retirada da chapa de aço será relativamente segura. A pilha grande, tamanho D, não alcalina, é um pouco mais segura para isso. A chapa de aço pode ser das latas de chocolate e leite em pó, como citado nas práticas anteriores. Só quisemos mostrar outras possibilidades de conseguir tais materiais.

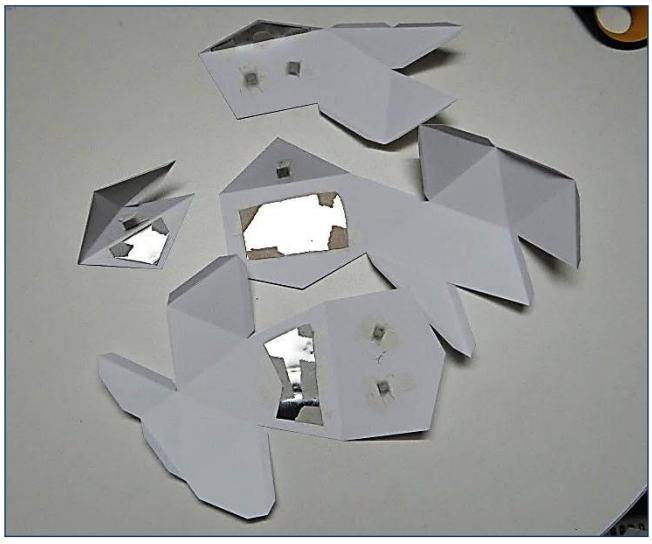
Figura 102 – Material utilizado para a confecção de um icosaedro regular com múltiplas seções.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As chapas são finas o suficiente para serem cortadas com uma tesoura comum. Cortamos no tamanho que julgamos necessário para que abrangesse uma grande área da face em que o ímã, na outra peça, fizesse contato facilmente quando da união das duas peças. Observe a colagem pela Figura 103. Os ímãs foram colados com uma pequena quantidade de cola branca e por cima deles foram colocados pequenos pedaços de fita adesiva e observe também que as lâminas de aço foram fixadas do mesmo modo.

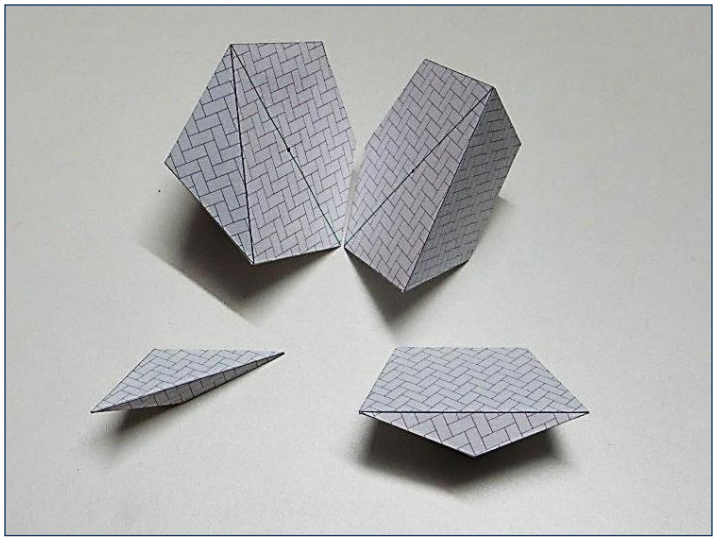
Figura 103 – Fotografia mostrando a colagem das chapas de aço e ímãs de neodímio nas peças seccionadas do icosaedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As peças, depois de prontas, são mostradas na Figura 104. Observe que nas peças maiores há as representações dos segmentos AL e AH referentes à Figura 12, na seção 2.2.5, os quais foram utilizados para o cálculo do volume do icosaedro regular.

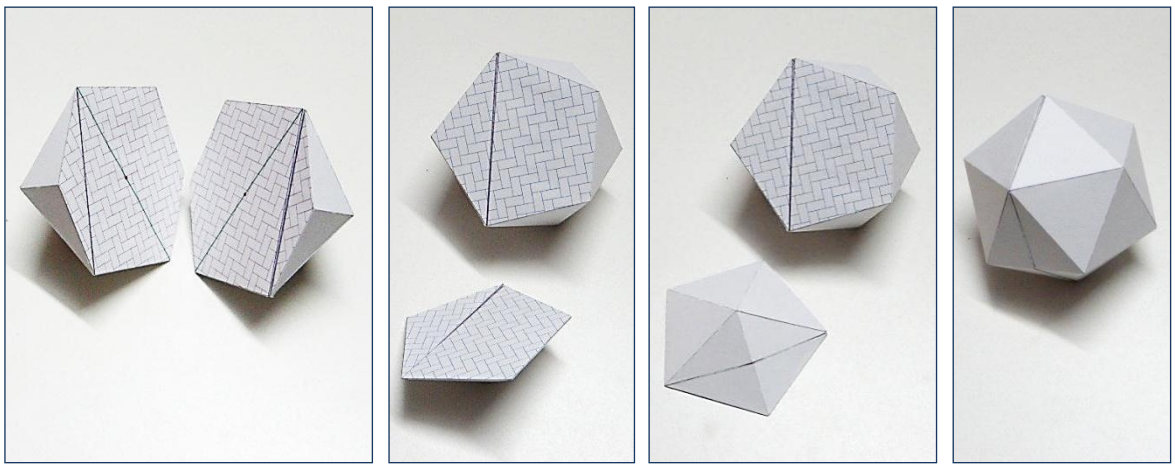
Figura 104 – Icosaedro dividido em quatro peças que auxiliam no cálculo de seu volume.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 105 mostra uma sequência de imagens das peças unidas até a completa formação do icosaedro.

Figura 105 – Sequência de imagens das peças em que o icosaedro está dividido.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

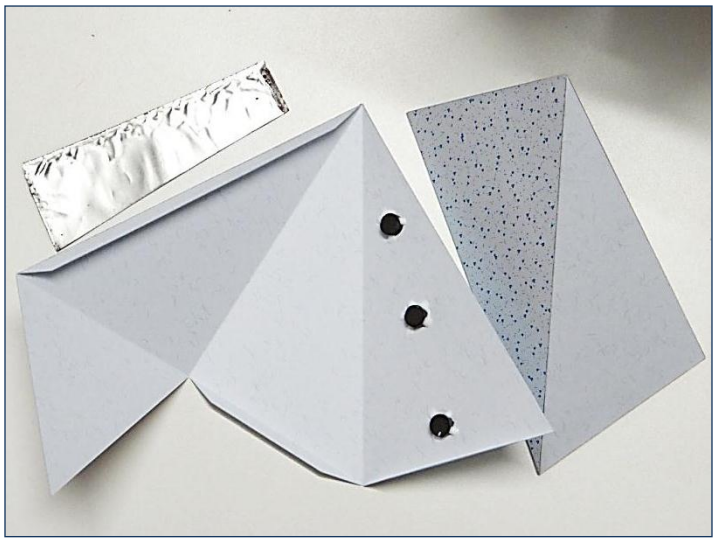
Valendo-se ainda desta técnica de montagem de poliedros, fizemos a decomposição de um prisma triangular reto em três pirâmides de igual volume, como demonstrado no capitulo 2, seção 2.3.3. O material utilizado é o mesmo que usamos para a montagem do dodecaedro regular.

A Figura 106 mostra o início da montagem, onde podemos ver a lâmina de aço empregada e a maneira como dispomos três pequenos ímãs na parte interna de uma das pirâmides. Desta vez, a lâmina de aço foi aproveitada de uma pilha grande comum (não alcalina), desmontada com auxílio de um alicate e retificada com uma pequena marreta de borracha.

Na pirâmide em que duas de suas faces fazem fronteiras com as outras duas pirâmides (quando o prisma for recomposto) é que devem ser coladas as lâminas de aço e nas outras pirâmides, os ímãs.

Obs.: Deve-se tomar muito cuidado ao tentar retirar a parte metálica da pilha, pois ela contém ácido. Para esta montagem utilizamos pilha grande, tamanho D, não alcalina, que é um pouco mais segura.

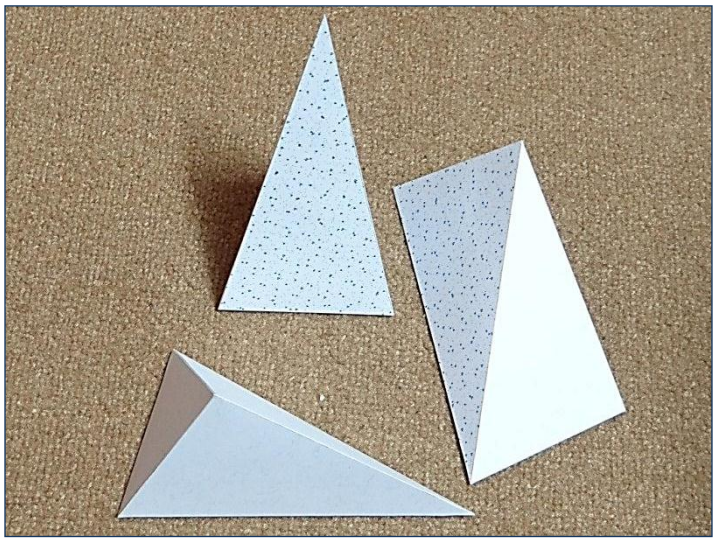
Figura 106 – Fotografia mostrando a preparação da montagem de um prisma triangular reto fracionado em três pirâmides de mesmo volume, utilizando ímãs e finas chapas de aço.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

No apêndice B, caso o leitor queira montar o prisma, encontram-se as planificações das partes que comporá o prisma triangular reto. A Figura 107 ilustra as peças prontas.

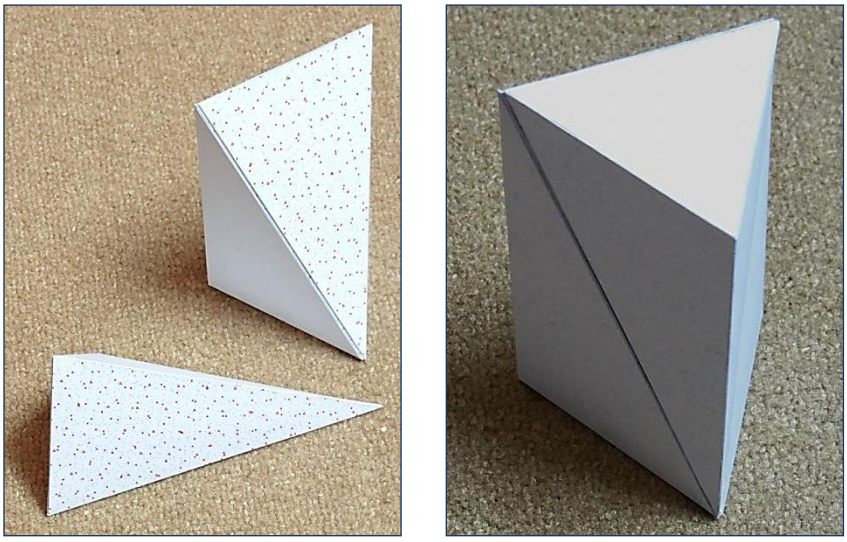
Figura 107 – Fotografia das pirâmides de mesmo volume que compõem o prisma triangular reto.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 108 mostra a recomposição do prisma, reunindo cada uma das partes piramidais.

Figura 108 – Fotografia mostrando a recomposição do prisma triangular reto.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Com a manipulação desse conjunto de sólidos certamente o aluno se sentirá mais disposto para aprimorar seus conhecimentos em geometria.

4.4 Montagem com esferas, ímãs e varetas

Neste tópico explanaremos como trabalhamos na montagem de um conjunto de hastes com extremidades magnéticas e pequenas esferas de aço. A ideia foi uma adaptação de um brinquedo criado e produzido originalmente na Suíça, chamado GEOMAG^{TM} (GEOMAGWOLRD, 2014), e o material que utilizamos é barato e permite uma confecção de forma satisfatória e que atenda ao propósito.

A finalidade dessa montagem é a divertida criação, discussão ou verificação de sólidos geométricos que podem ser trabalhados com alunos dos ensinos fundamental ou médio.

Conceitos como treliças (estruturas triangulares usadas na engenharia, como, por exemplo, em torres de alta tensão ou de telefonia, pontes, casas, entre outras) até podem ser mencionadas às crianças com essas peças, pois elas podem manipular e montar várias composições triangulares no plano ou em formas tridimensionais, de modo a verificar a rigidez dessas estruturas quando feitas com triângulos. Aliás, se quisermos montar um cubo, por exemplo, por este tipo de montagem, não conseguiremos mantê-lo rígido sem utilizar peças auxiliares que formem treliças, como será mostrado adiante. Um triângulo pode ser considerado a forma mais simples de treliça planar, enquanto que um tetraedro é a forma mais simples tridimensionalmente.

Para a montagem dessas estruturas precisamos do seguinte material (também ilustrado na Figura 109):

- hastes flexíveis com pontas de algodão (diâmetro de 3 mm);
- ímãs de neodímio (diâmetro de 3 mm x 1,5 mm de comprimento);
- esferas de aço (diâmetro de 8 mm);
- cola instantânea;
- fitas adesivas de boa qualidade, em duas cores diferentes;
- régua, tesoura, estilete.

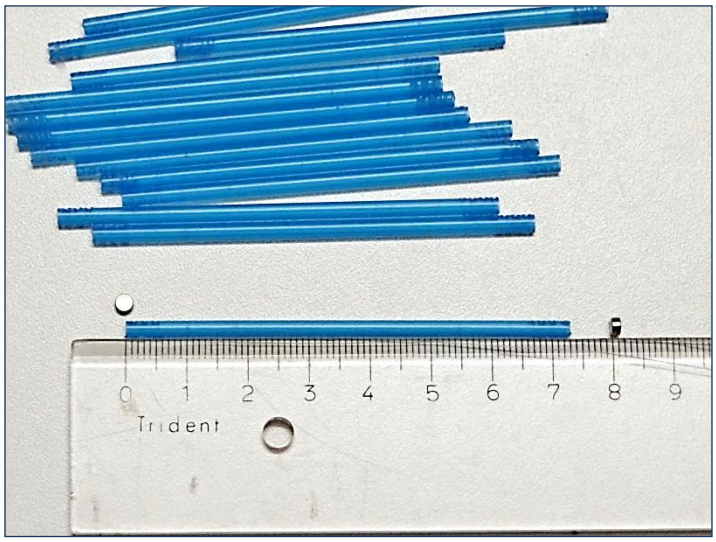
Figura 109 – Fotografia do material utilizado na confecção das unidades magnéticas.

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Resolvemos utilizar estas hastes flexíveis por serem bastante leves e baratas (uma caixa com 150 unidades custou cerca de R$ 4,00), e por seus diâmetros serem compatíveis com os diâmetros dos ímãs de neodímio que encontramos no comércio pela internet (300 unidades custaram R$ 45,00). É conveniente dizer que o uso deste tipo de ímã é muito importante, pois é ele que dará a aderência necessária para que a estrutura fique firme, devido ao seu intenso campo magnético, caso se use outro tipo de ímã, por ser muito fraco, a estrutura nem sequer se sustentará. Compatível também com o diâmetro dos ímãs são as pequenas esferas de aço, no diâmetro de 8 mm (100 unidades, R$ 30,00), que também adquirimos via internet.

Primeiramente devemos retirar inteiramente o algodão das extremidades das hastes. As hastes que compramos têm um comprimento de 7,3 cm e, ao acrescentarmos os ímãs em cada extremidade, elas ficarão com um comprimento total de 7,6 cm. Podemos ver isso na Figura 110.

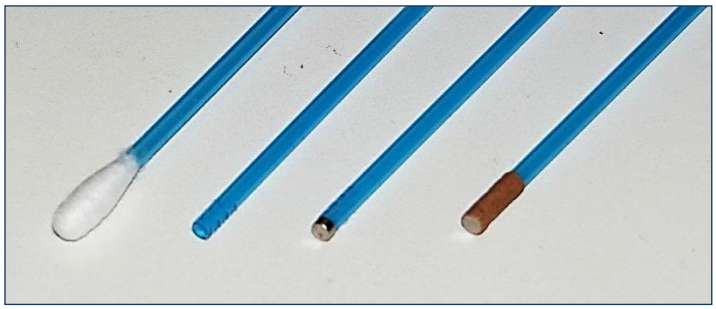
Figura 110 – Fotografia mostrando o preparo das hastes flexíveis para montagem.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Deixando o ímã com uma face para cima, preferencialmente preso a alguma peça de aço (usamos o fundo de uma lata de leite em pó), colocamos uma gotinha de cola instantânea e em seguida seguramos uma das extremidades da haste sobre essa face do ímã para a colagem. Seguindo as recomendações presentes na embalagem da cola instantânea, mantivemos certa pressão entre a haste e o ímã por cerca de 10 segundos (leia atentamente as instruções de uso da cola para sua segurança). Após a colagem, passamos lateralmente um pedaço de fita adesiva, cortada na largura de 1 cm, aproximadamente, para reforçar na aderência entre o ímã e a haste. Repetir o processo para a outra extremidade, mas agora colocando o ímã com polaridade trocada e usando uma fita adesiva de cor diferente à usada na primeira extremidade. Fizemos isso para que tenhamos uma haste magnética com uma extremidade com polo norte e a outra com polo sul magnético. Na Figura 111, temos a sequência de manufatura dessas hastes. Recomendamos a fita marrom de papel tipo kraft e/ou fita crepe larga de boa qualidade.

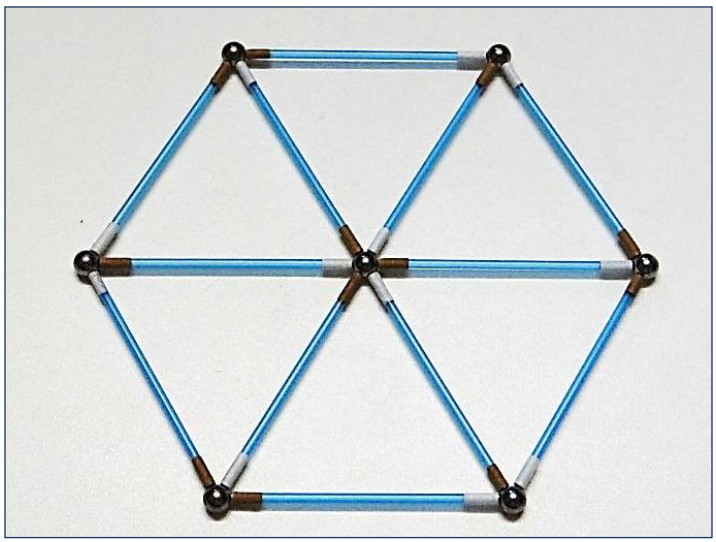
Figura 111 – Fotografia mostrando as etapas de produção das hastes magnéticas.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

É importante marcar corretamente, através das cores da fita adesiva, quais são os polos magnéticos dos ímãs, pois, para uma melhor aderência entre as partes das mais variadas estruturas a serem montadas, deve-se permutar, sempre que possível, os polos magnéticos sobre as esferas de aço. Observe, na Figura 112, como foi disposta a sequência de triângulos, trocando as polaridades nas junções esfera/haste. Uma alternativa às cores das fitas é a realização de uma pintura lateral das extremidades, com cores diferentes, tendo o cuidado para não pintar a face do ímã, apenas a lateral.

Figura 112 – Fotografia mostrando uma estrutura com triângulos em que é possível observar a permutação entre os polos magnéticos nas junções.

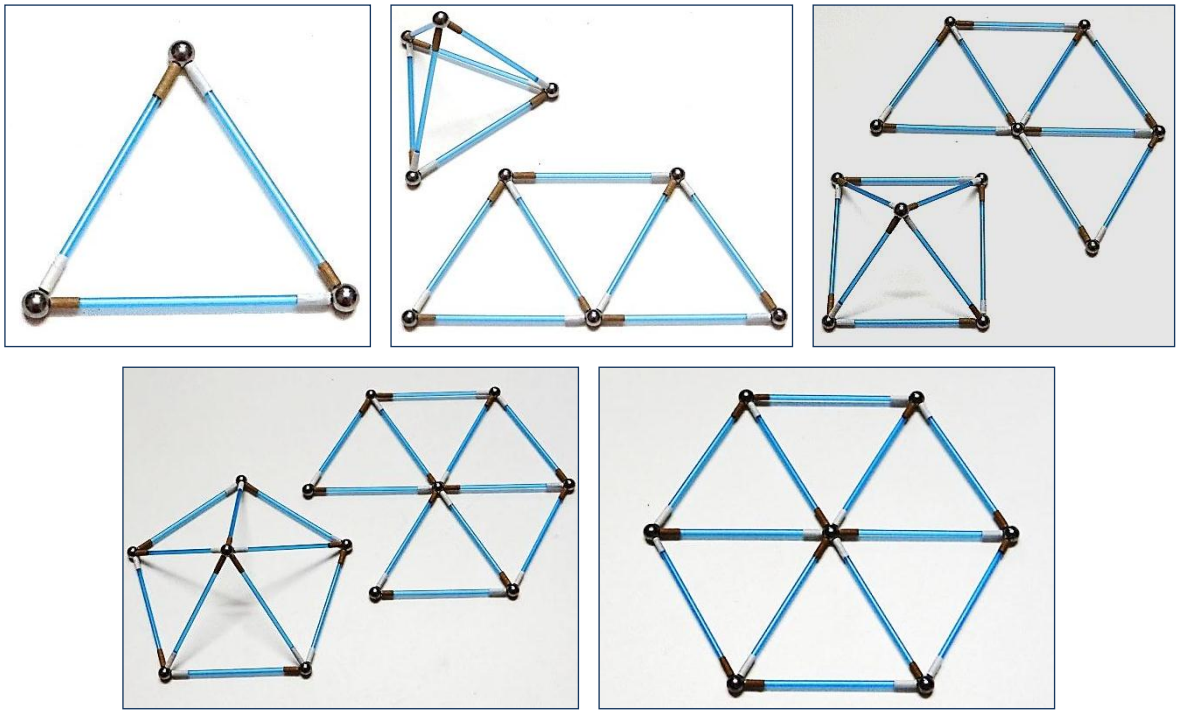


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Em segundos, podemos montar um tetraedro, mudar para um octaedro ou criar uma grande pirâmide. Estruturas um pouco mais elaboradas, como um icosaedro, também são rápidas de montar. A série de imagens da Figura 113 nos

remete a uma parte da demonstração informal, dada na seção 2.2, em que três triângulos equiláteros podem formar o ângulo poliédrico do tetraedro (imagem central superior), quatro triângulos equiláteros podem formar o ângulo poliédrico do octaedro (imagem superior, à direita), com cinco triângulos equiláteros formam o ângulo poliédrico do icosaedro (imagem inferior, à esquerda) e com seis triângulos equiláteros não obtemos um ângulo poliédrico (imagem inferior direita).

Figura 113 – Fotografias mostrando estruturas com triângulos para representações dos ângulos poliédricos dos sólidos regulares.

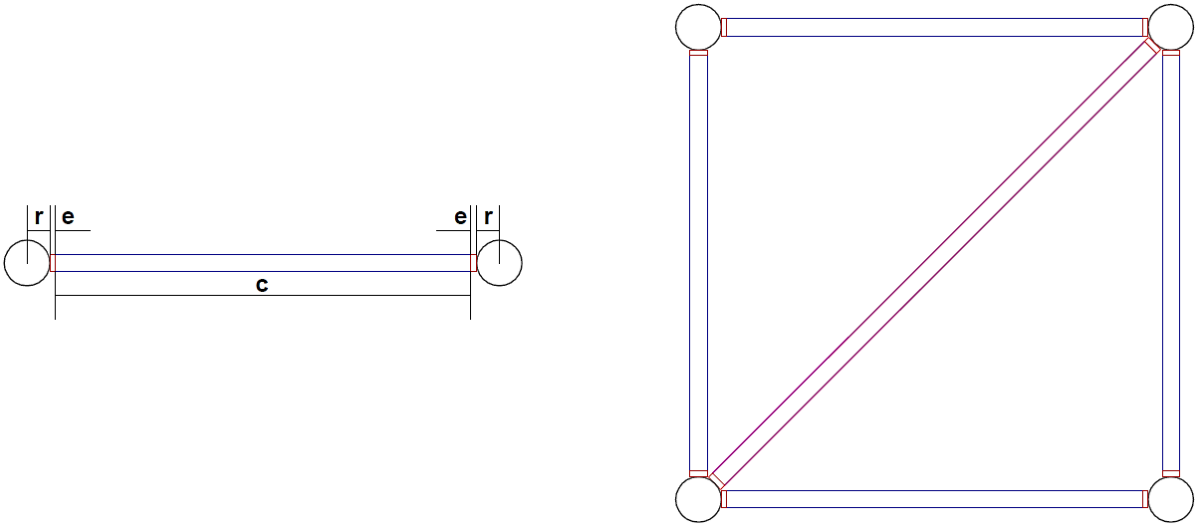


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Ressaltamos que estruturas triangulares são estruturas rígidas e a rigidez não acontece em um quadrado, por exemplo. Se tentarmos montar um cubo com estas hastes magnéticas, as peças podem até ficar conectadas entre si, entretanto o cubo não ficará em pé. A fim de aumentar a variedade de sólidos montáveis, precisaremos de hastes com outros comprimentos, de modo a obter um cubo rígido, introduzindo uma haste nas diagonais de suas faces, pois aí teremos triângulos, que por sua vez estabilizará a estrutura cúbica. Na Figura 114, são mostradas algumas medidas do material utilizado. A medida ***c***, representa o comprimento da haste (que em nosso caso é igual a 73 mm); ***e*** é a espessura do ímã (1,5 mm é o valor da espessura de nossos ímãs) e a medida ***r***, representa o raio da esfera de aço (nossas

esferas têm raio de 4 mm). Se quisermos montar um cubo, devemos criar uma haste de comprimento igual à diagonal da face, como é representado pela haste rosa da Figura 114.

Figura 114 – Representações das medidas elementares das hastes magnéticas.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

O comprimento ***c’*** da haste (apenas a parte flexível, sem os ímãs) pode ser calculado pela equação 8, partindo do teorema de Pitágoras.

$$(2r + 2e + c')^2 = 2(2r + 2e + c)^2 \quad \Rightarrow$$

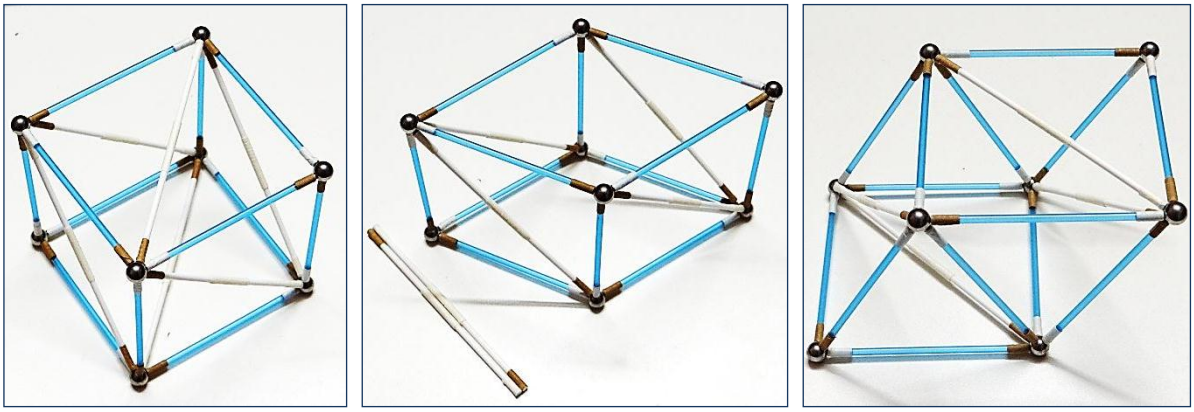
$$\Rightarrow \quad c' = 2r\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2e\left(\sqrt{2} - 1\right) + c\sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

$$\therefore \quad \mathbf{c' = (2r + 2e)\left(\sqrt{2} - 1\right) + c\sqrt{2}} \qquad \text{(Equação 8)}$$

Em nosso caso, o comprimento da haste, apenas a parte plástica, foi de 107,8 mm e este comprimento foi conseguido unindo-se duas hastes pela extremidade e enrolando um pedaço de fita adesiva e cortando, com um estilete ou uma tesoura, a parte excedente. Acrescentando os ímãs em cada extremidade obtemos, então, um comprimento final de 110,8 mm.

A Figura 115 mostra a montagem do cubo e de dois romboedros, com as hastes sugeridas.

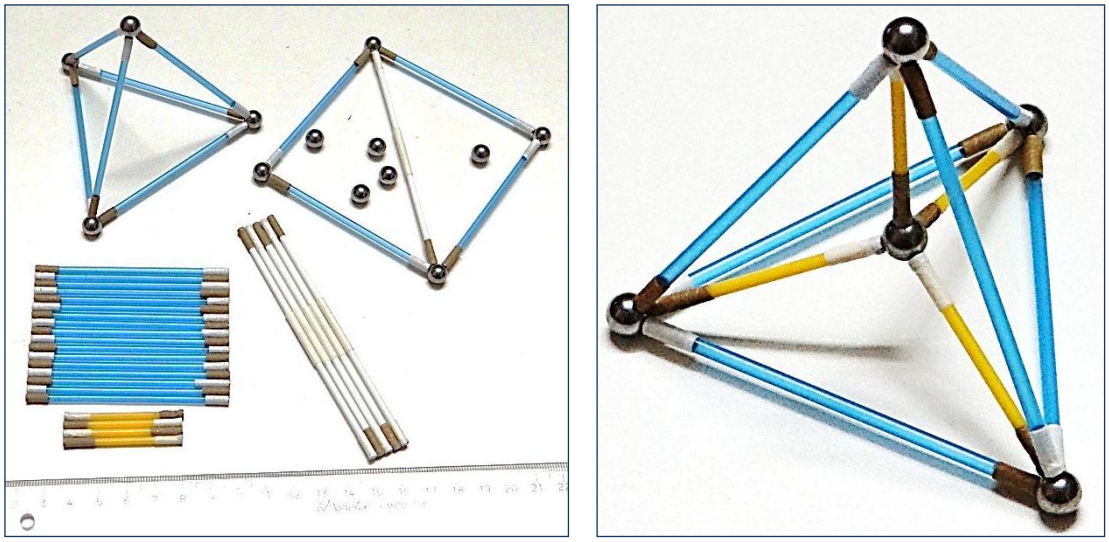
Figura 115 – Fotografias de representações de um cubo e dois romboedros com as hastes magnéticas em dois comprimentos distintos.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Confecções de outros comprimentos foram realizadas para enriquecer ainda mais nossas montagens. E para cada haste de comprimento diferente, utilizamos cores diferentes para facilitar as representações, como podemos ver na Figura 116.

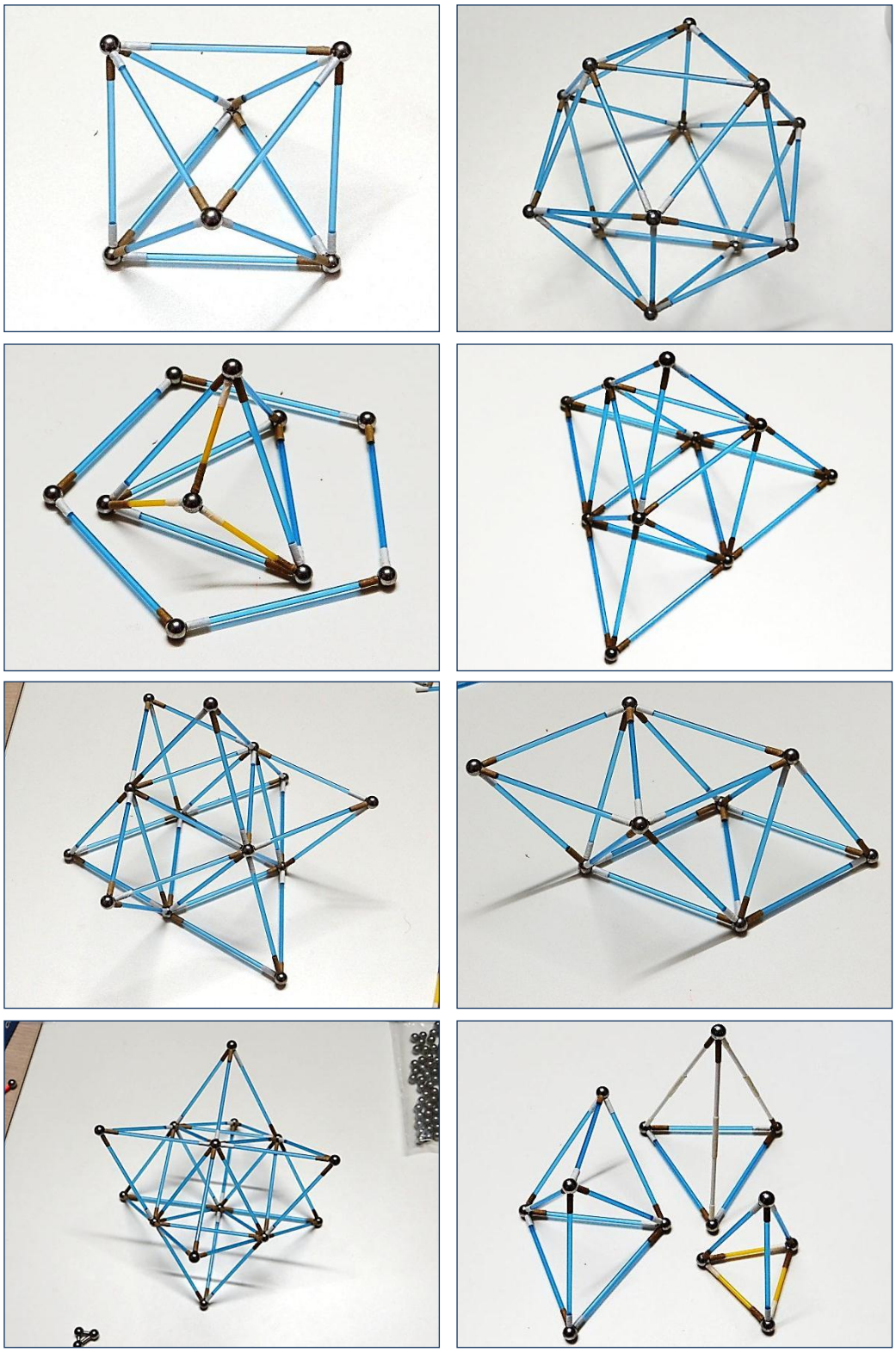
Figura 116 – Fotografias de estruturas com hastes magnéticas de variados tamanhos e cores.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Veja outras montagens, executadas em questão de segundos, tais como: octaedro, icosaedro, pentágono, tetraedro, *stella octangula*, romboedro e dipirâmide, mostradas na Figura 117.

Figura 117 – Fotografias de alguns outros exemplos de montagens com hastes magnéticas.

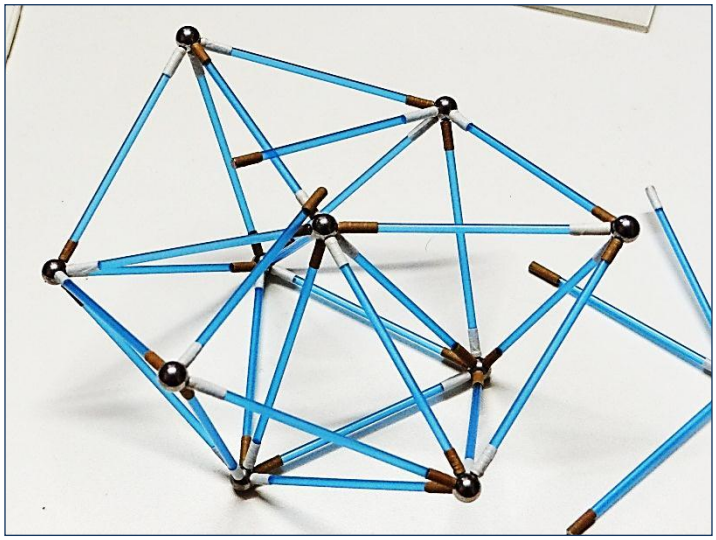


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Podemos verificar, experimentalmente, que não dá para montar um icosaedro regular fazendo sua composição com 20 tetraedros regulares, como alguns podem

supor. Na seção 2.2.5, foi calculado o valor da maior diagonal do icosaedro regular (valor usado para a determinação de seu volume) e a metade desse resultado obtido, indica a distância dos vértices do icosaedro até o seu centro. Mas este valor é cerca de 5% menor em relação às arestas. Com isso, tentar montar o icosaedro regular utilizando apenas tetraedros regulares é uma tarefa incompatível. Na Figura 118, vemos que para os primeiros cinco tetraedros regulares foi possível a conjunção, entretanto, percebemos que duas hastes magnéticas ficaram sem poder se conectar ao centro (que, na realidade, não é o centro do icosaedro regular), mostrando o fracasso da tarefa.

Figura 118 – Fotografia mostrando a tentativa frustrada de montar um icosaedro regular com tetraedros regulares.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

As atividades com estas hastes magnéticas são lúdicas e acabam por aguçar a curiosidade do aluno quanto à geometria, ao menos em sua observação.

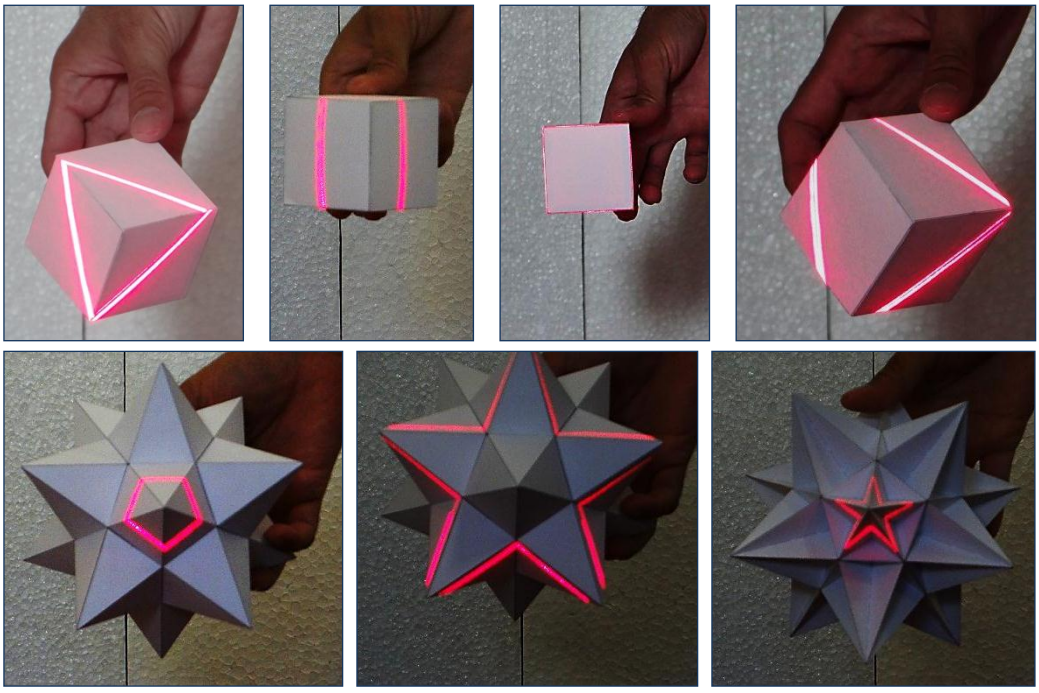
4.5 Máquina para visualização de seções em sólidos

Neste tópico descrevemos a montagem de um equipamento e acessórios que podem nos ser úteis na visualização de como seriam determinadas seções em sólidos por planos, nas mais diversas posições. O equipamento concebido foi inspirado em um vídeo-propaganda (YOUTUBE, 2014), aos 93 segundos, sobre o *Museum of Mathematics*, em Manhattan, EUA.

Imaginamos duas formas de montar o equipamento. Para ambas, se faz necessário o uso de apontadores *laser*, o que hoje, felizmente, é bastante comum em papelarias e lojas de utilidades na forma de chaveiros a um custo baixo.

Mas, antes de comentar o processo utilizado na construção da máquina, observe, através da Figura 119, algumas imagens obtidas ao transpassar sólidos geométricos em um plano de luz formado por um conjunto de quatro apontadores *laser* vermelhos adaptados. É como se o objeto sofresse cortes seccionadores, tais como os mostrados no tópico 4.3. O que este tópico traz, é o processo de construção de um dispositivo que possa nos dar este tipo de visualização em diversos sólidos geométricos.

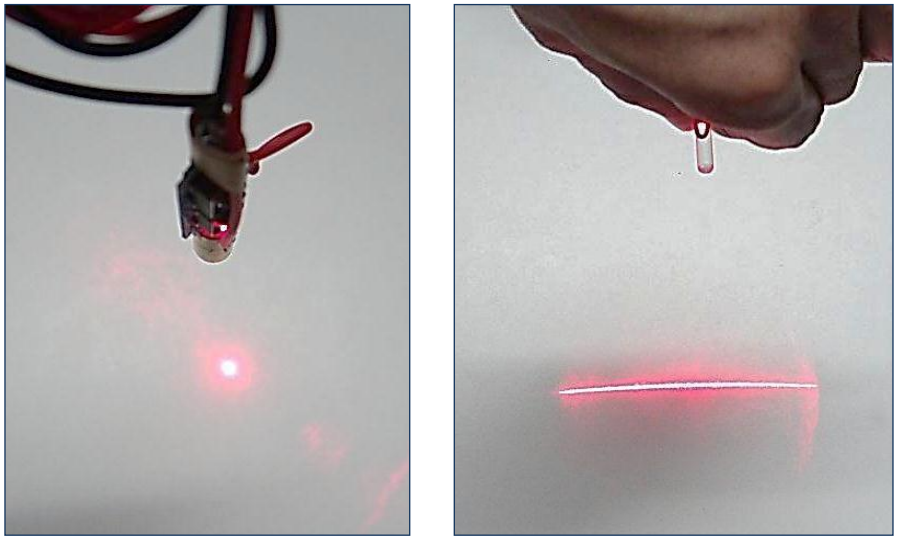
Figura 119 – Fotografias mostrando o traspassamento de poliedros por um plano de luz.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Acoplando um fino cilindro de vidro (bastões de vidro utilizados em laboratórios de química) à saída de luz de um apontador *laser*, podemos converter o estreito feixe em um plano de luz, pois o bastão de vidro funciona como uma pequena lente, abrindo os raios de luz da fonte. Na Figura 120 podemos observar o efeito citado.

Figura 120 – Fotografias mostrando a conversão de um feixe cilíndrico de laser em um plano de luz, através do acoplamento de um pequeno bastão de vidro.

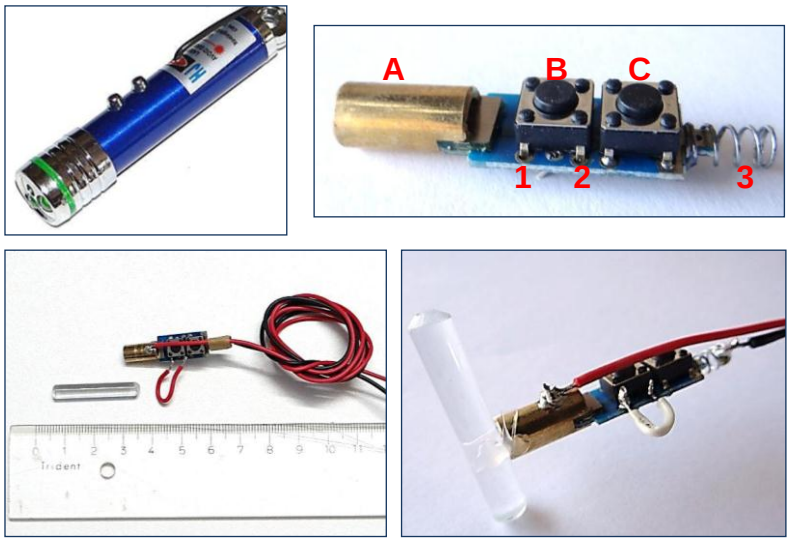


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas fotografias da Figura 120, não podemos enxergar nem o feixe do *laser*, nem o plano produzido por ele quando acoplado o bastão de vidro, mas sim um ponto e um segmento de reta, respectivamente, que são suas projeções na superfície em que incidem.

A fim de realizar o acionamento dos quatro apontadores ao mesmo tempo, alimentá-los por uma bateria externa e ter o tamanho reduzido para melhor acoplamento na peça de ajuste, desmontamos tais apontadores e aproveitamos apenas o essencial. Na Figura 121 são mostradas imagens do apontador *laser* inteiro (imagem superior, à esquerda), somente a fonte de luz (imagem superior, à direita), fios soldados em pontos específicos e um pedaço de um bastão de vidro (imagem inferior, à esquerda) e o conjunto montado (inferior direita).

Figura 121 – Fotografias mostrando partes do apontador *laser* utilizado na montagem.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para a retirada do dispositivo interno do apontador *laser* (todo o dispositivo mostrado na parte superior direita da Figura 121), proceda com cautela retirando inicialmente as baterias e depois, com um alicate de corte, vá recortando de uma extremidade à outra (iniciando pela extremidade de onde se encontravam as baterias), tomando o devido cuidado para não danificar a peça de interesse.

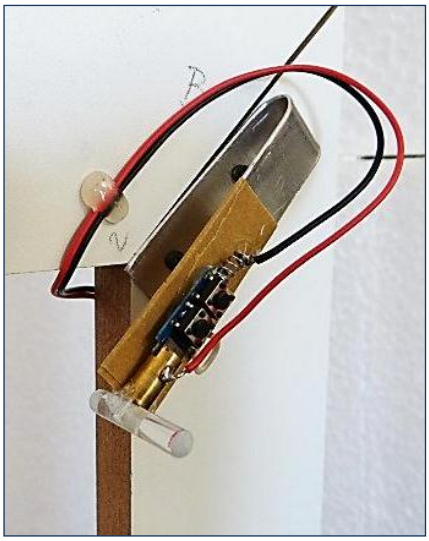
Ainda na Figura 121, a parte interna do apontador *laser* é constituída por um tubo de saída de luz (A), o qual tem uma lente colimadora que, por sua vez, pode ser ajustada com uma pequena chave de fenda, de modo a obtermos um feixe mais fino (caso o ponto de luz esteja muito aberto o ajuste deve ser feito); um botão acionador do laser (B) que apresenta dois terminais elétricos (1) e (2), que devem ser ligados por um fio (como pode ser observado na imagem abaixo do citado); um botão (C) que aciona dois LEDs do apontador, mas não tem nenhuma utilidade aqui e uma mola (3), para a conexão do terminal negativo da bateria. Em (A) deve ser soldado um fio para a ligação ao terminal positivo da bateria, como mostrado nas imagens inferiores (fio vermelho).

O bastão de vidro pode ser cortado utilizando uma lima fina, passando ao redor do bastão várias vezes até conseguir a formação de um sulco, depois, apoiando cada um dos polegares nas proximidades desse sulco, exerça uma pequena força para romper o bastão (muito cuidado nessa hora!). Depois de cortado, passe uma lixa d'água na aresta cortante do cilindro e estará pronto para o uso. Este bastão de vidro é fixado no disposto usando uma pistola de cola quente

passando nas laterais, mas deve-se tomar muito cuidado na colagem, pois o caminho que o raio de luz deve percorrer através do vidro não pode ser impedido pela cola.

Com o dispositivo pronto (como vemos na imagem inferior-direita da Figura 121), colamos na extremidade de uma chapa de alumínio, cujas dimensões são de 1,5 x 12 cm e espessura de 1 mm e encurvada como podemos ver na Figura 122.

Figura 122 – Partes do apontador laser utilizado na montagem.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

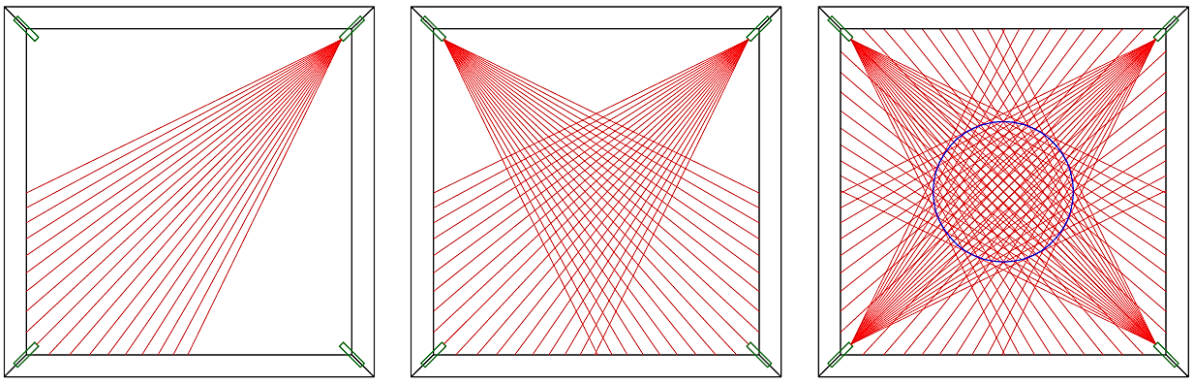
Precisamos de quatro dispositivos destes, parafusados nos cantos de uma moldura quadrada de madeira, nas dimensões 1 x 1 m e espessura 15 mm, como pode ser visto na Figura 123.

Figura 123 – Nossa máquina para visualização de seções em sólidos geométricos.

Fonte: Elaboração do próprio autor.

O tamanho da moldura se justifica pelo fato do plano de luz produzido por estes dispositivos apresentarem uma pequena abertura angular (apenas 38 graus), de modo que a região que efetivamente podemos usar é um círculo de raio 20 cm, aproximadamente. Podemos entender melhor, observando a Figura 124.

Figura 124 – Esquema da máquina para visualização de seções em sólidos geométricos, mostrando a região onde devem ser posicionados os sólidos.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

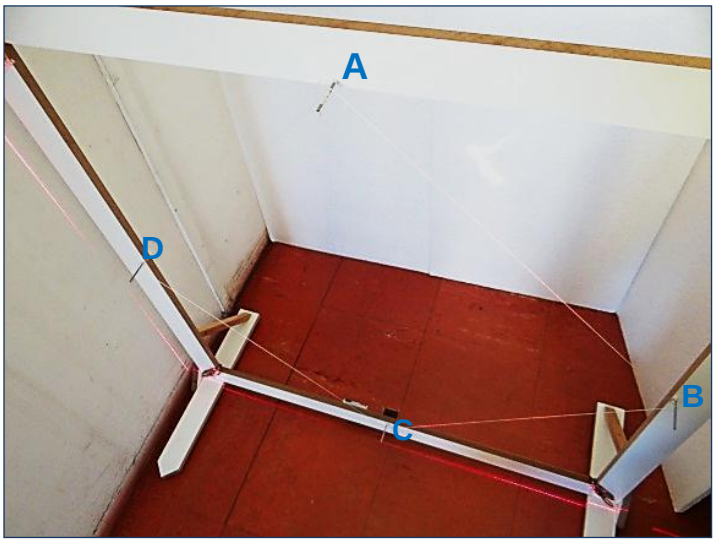
Um objeto localizado no interior da região delimitada pela circunferência (na Figura 124) receberá o *laser* das quatro fontes e fora dessa região isso não acontece, deixando nossa representação do seccionamento incompleta.

Os quatro planos de luz devem ser coincidentes e, para isso, o ajuste deve ser feito através da chapa de alumínio, onde os dispositivos *lasers* estão colados.

Essa tarefa de alinhamento exige um pouco mais de paciência. Uma maneira melhor de se fazer esse nivelamento é substituir a chapa de alumínio por um dispositivo nivelador de três pontos, em que cada um desses pontos é regulado por parafusos. Não o fizemos aqui por exigir um pouco mais de tempo, mas ele é o ideal.

Em cada lado da moldura fixamos um pino, denotados por A, B, C e D, como mostrados na Figura 125, em que por eles passa uma linha fina esticada. A altura dessa linha em relação à moldura, em cada pino, deve ser a mesma, de modo que podemos usá-la como parâmetro para nivelar os planos de luz. Por exemplo, regulamos o plano de luz proveniente do *laser* superior-direito da figura para passar simultaneamente sobre os segmentos de linha dados por AB e DC. Depois, regulamos o plano de luz proveniente do laser superior-esquerdo para passar sobre os segmentos AD e BC. E repetimos o processo para os outros dois planos até que todos ficassem coincidentes.

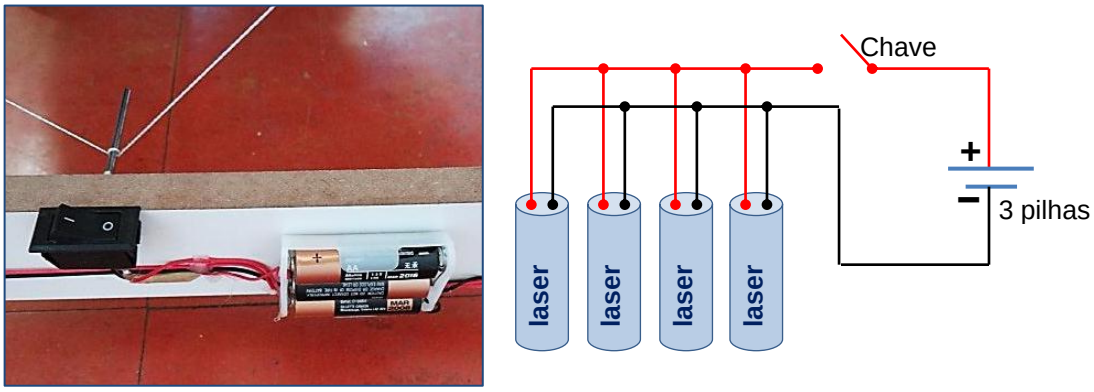
Figura 125 – Esquema de como ajustar os planos de luz.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A fonte de alimentação, bem como o esquema elétrico para a geração dos planos de luz, podem ser visualizados na Figura 126. O *laser* não funcionará se a polaridade estiver invertida.

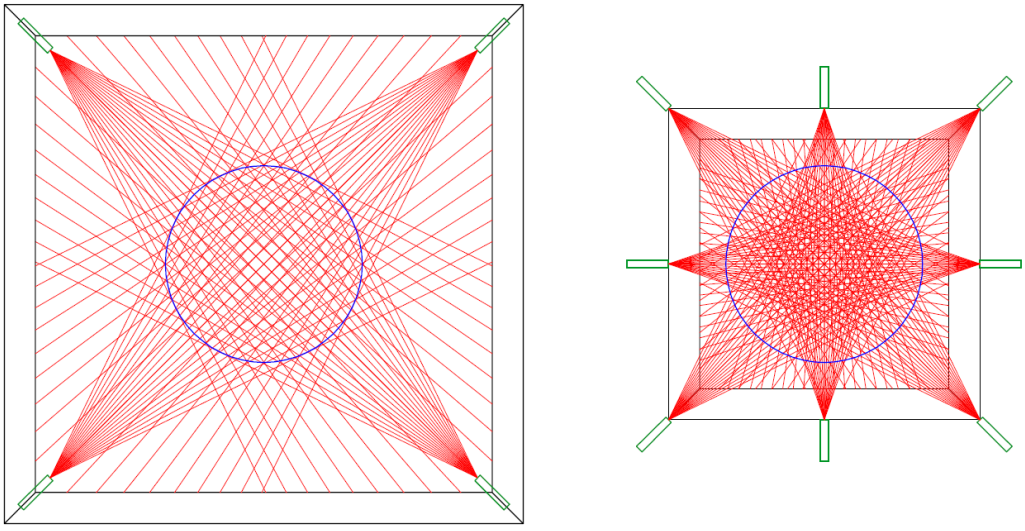
Figura 126 – Interruptor, pilhas e esquema elétrico para a alimentação das fontes de luz *laser*.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A moldura pode ser redimensionada para um tamanho de 60 cm, por exemplo, mas teremos uma região de interseção menor entre os planos. Para mantermos uma região equivalente à apresentada na Figura 124 e com uma moldura menor, como a sugerida acima, teremos que adicionar mais fontes *laser* para suprir algumas lacunas que ficariam. A Figura 127 mostra uma possibilidade de montagem para uma moldura de 60 cm de lado.

Figura 127 – Esquema de montagem para uma moldura menor. À esquerda, a moldura original e à direita, uma opção de menor tamanho, porém com oito fontes de luz.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “NanoCAD v.5”.

Para uma montagem que exige uma quantidade maior de fontes *laser*, maior será o trabalho de alinhamento dos planos. Por este motivo escolhemos montar a versão apresentada anteriormente, apesar de ficar maior.

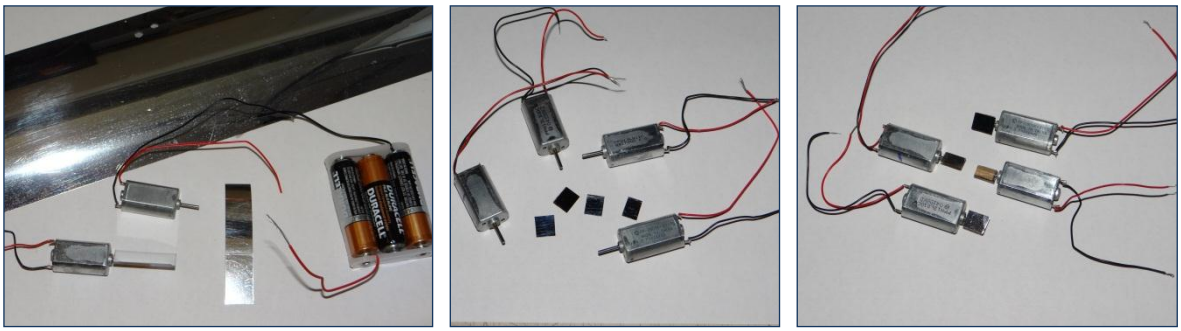
Material utilizado para a montagem da máquina para visualização de seções:

- 4 apontadores *laser*, tipo chaveiro;
- 1 bastão de vidro (para laboratório de química) de diâmetro 5 mm, cortado em pedaços de 3 cm de comprimento;
- 1 moldura quadrada em MDF, 1 x 1 m, espessura 15 mm;
- 1 chave liga-desliga;
- 1 suporte para três pilhas tipo AA;
- 1 pistola para cola quente;
- 1 ferro de solda;
- Linha fina para nivelamento dos planos de luz;
- 2 bolinhas de pingue-pongue (cortadas ao meio para formarem os pés);
- Fios, parafusos, estilete, tesoura, alicate, fita adesiva, lima fina, lixa d'água e régua.

Como dito no início deste tópico, imaginamos duas maneiras de confeccionar essa máquina. A outra maneira é utilizando quatro pequenos motores de corrente contínua com pequenos espelhos colados em seus eixos. As vantagens são o tamanho reduzido, em comparação à máquina anterior e a abertura angular do plano de luz pode ser até perto de 180 graus (a abertura angular da outra é de apenas 38 graus, usando o bastão de vidro de 5 mm de diâmetro – diferentes diâmetros, diferentes aberturas). As desvantagens são a formação muito tênue dos planos de luz, os ruídos dos motores e a necessidade de duas fontes de tensão independentes (uma para os motores e outra para os *lasers*).

É mostrada, na Figura 128, a preparação de quatro motores (extraídos de aparelhos de CD/DVD-ROM inutilizados) para a segunda versão da máquina. Foram colados em pequenos pedaços quadrados (1 cm de lado) de régua flexível, pedaços da parte espelhada de uma luminária e, depois, unidos aos eixos dos motores. Dessa forma, pode-se fixar os motores aos cantos de uma moldura quadrada, como no esquema anterior, mas esta moldura pode ter um tamanho de 40 x 40 cm e os apontadores *lasers* podem ser preparados da mesma forma, excetuando o bastão de vidro. O esquema elétrico para os motores é semelhante ao usado para os *lasers*, mas se usam apenas uma ou duas pilhas.

Figura 128 – Uso de motores para a montagem da máquina visualizadora de seções.

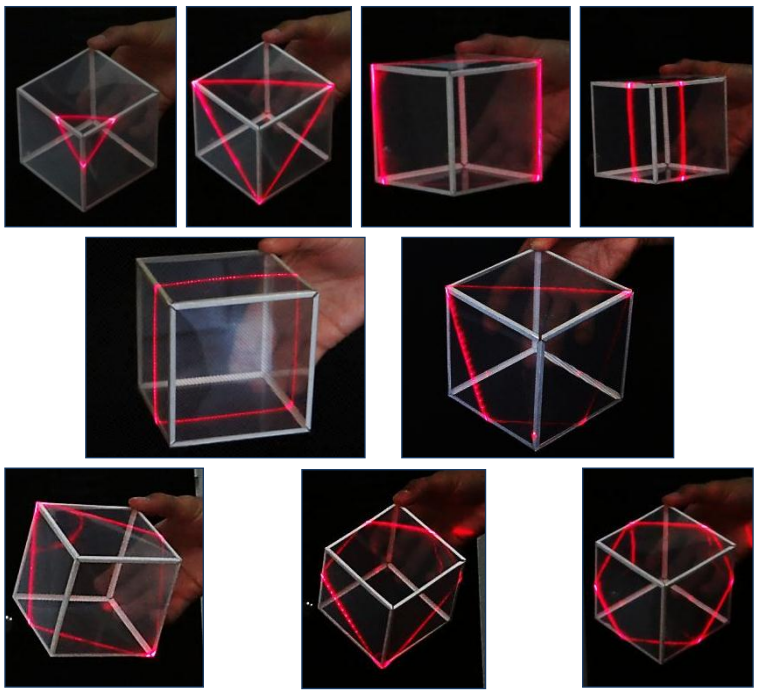


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Mas, nossa preferência é pela primeira versão, pois a intensidade luminosa dos planos de luz é que dão charme aos “cortes”.

E conseguimos um visual melhor do seccionamento quando utilizamos sólidos geométricos construídos com folhas plásticas empregadas em encadernação. Encontramos disponíveis nas cores azul fosco, fumê e transparente. Trabalhamos com a folha plástica transparente e o resultado foi muito bom. Na sequência de imagens da Figura 129 podemos ver diversas representações de seções em um cubo construído com folhas plásticas. Os sólidos formados com essas folhas plásticas são os acessórios da nossa máquina visualizadora de seções.

Figura 129 – Fotografias mostrando seções produzidas com laser sobre cubo de plástico.

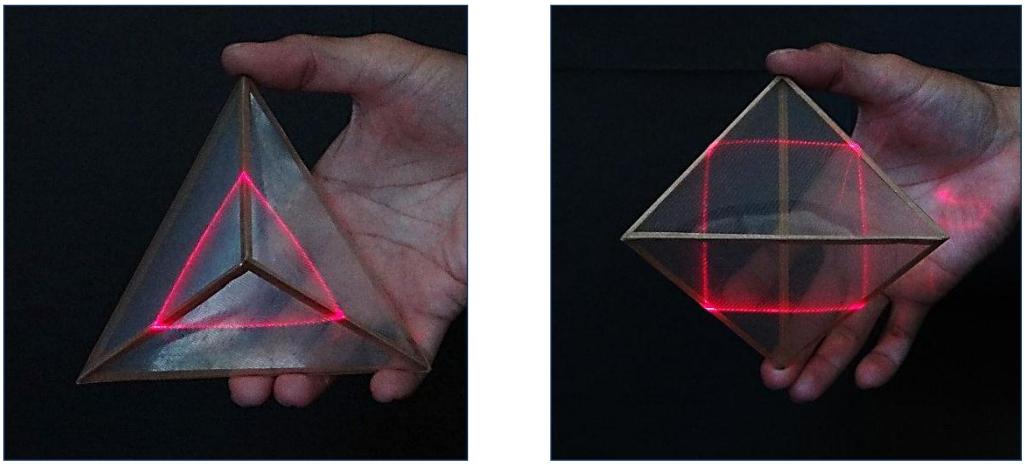


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observe que as seções produzidas com o plano de luz correspondem às planificações e montagens efetuadas para o hexaedro regular, na seção 4.3, formando seções triangulares, retangulares, quadrangulares, trapezoidais, losângicas, pentagonais e hexagonais.

Para um tetraedro regular, construído com o mesmo material plástico, obtivemos as imagens mostradas na Figura 130.

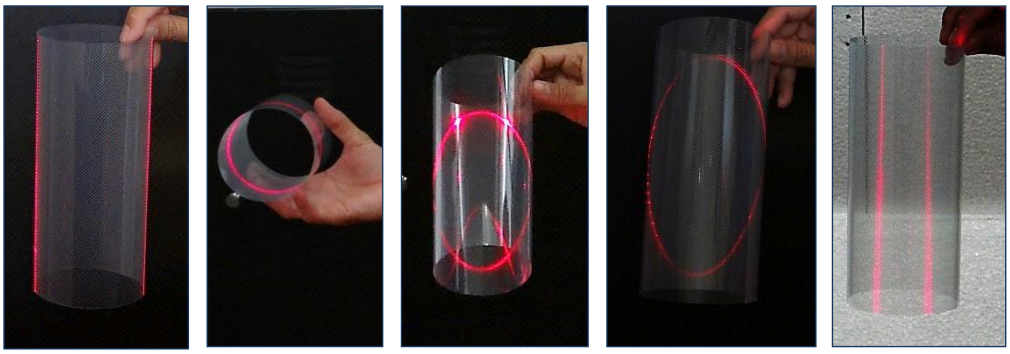
Figura 130 – Fotografias mostrando seções triangular e quadrada sobre um tetraedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Apenas enrolando a folha plástica e prendendo as extremidades com uma fita adesiva transparente formando, desse modo, uma superfície cilíndrica, podemos produzir seções interessantes como duas retas paralelas, circunferências e elipses, como mostradas na sequência de imagens da Figura 131.

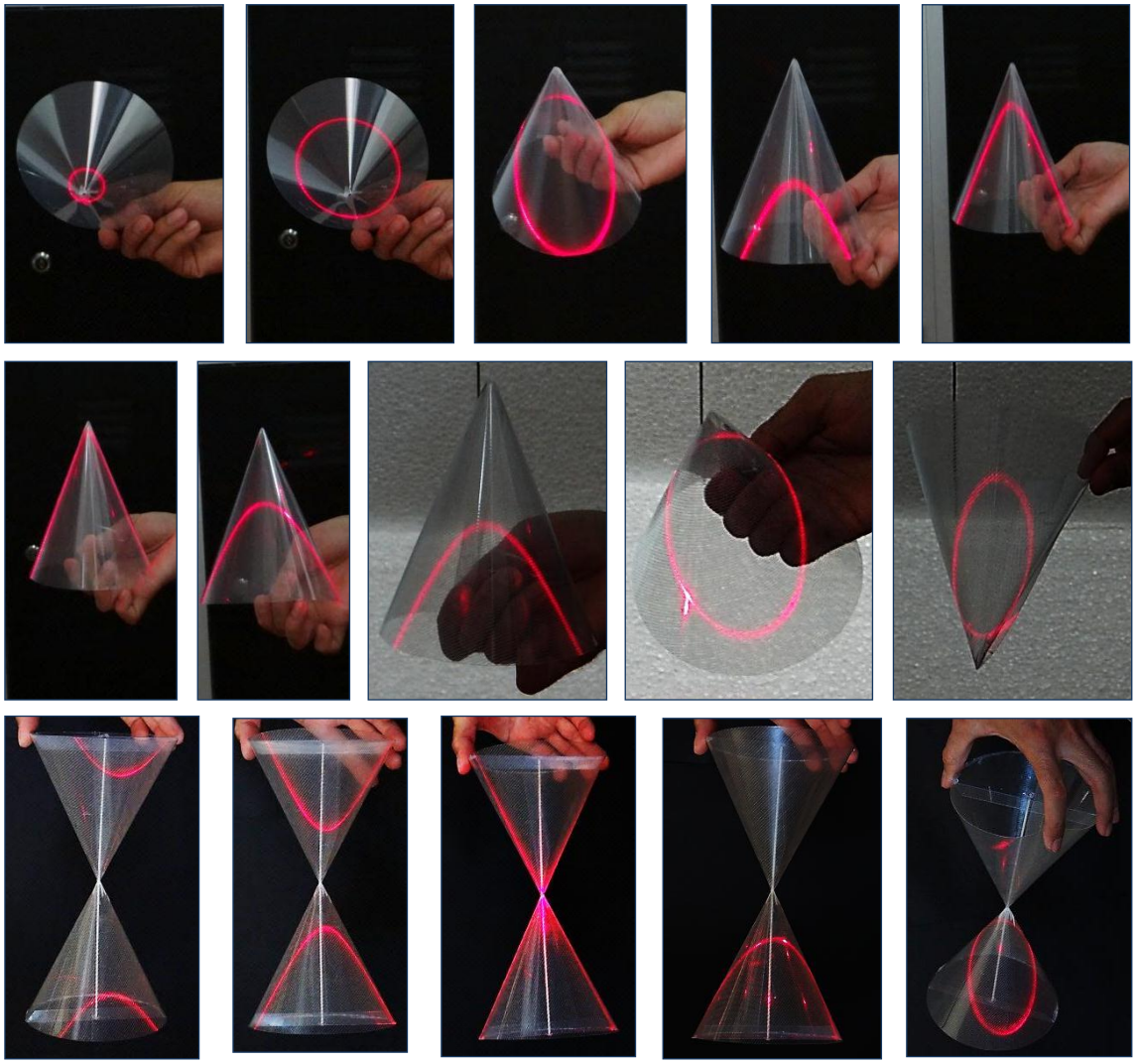
Figura 131 – Seções produzidas com *laser* sobre superfícies cilíndricas de plástico.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

E claro, não poderíamos deixar de representar as famosas seções cônicas, formando circunferências, elipses, parábolas, hipérboles e retas concorrentes, como são mostradas na sequência de imagens da Figura 132.

Figura 132 – Seções produzidas com laser sobre superfícies cônicas de plástico.

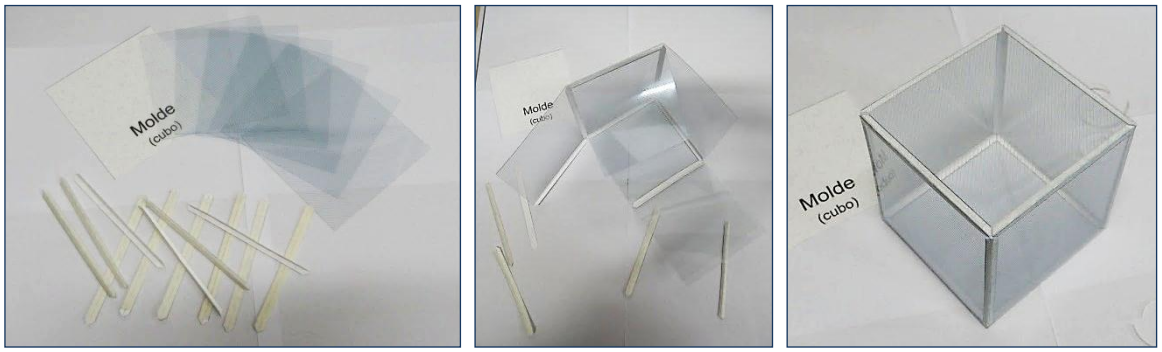


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Caso o leitor queira montar os sólidos regulares convexos com a folha plástica para encadernação, tal como foi feito o cubo e o tetraedro das imagens anteriores, imprima as páginas do Apêndice C. Estas páginas contém um molde das faces do poliedro desejado e se deve recortar a folha plástica de acordo com esse molde e contém também as abas que servirão para unir essas faces (podem ser impressas em papel comum). Para tanto, será necessário o uso de fita adesiva

dupla-face, e esta deve ser colada na parte lisa da folha. Observe as imagens da Figura 133.

Figura 133 – Manufatura de um cubo utilizando folha plástica para encadernação.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

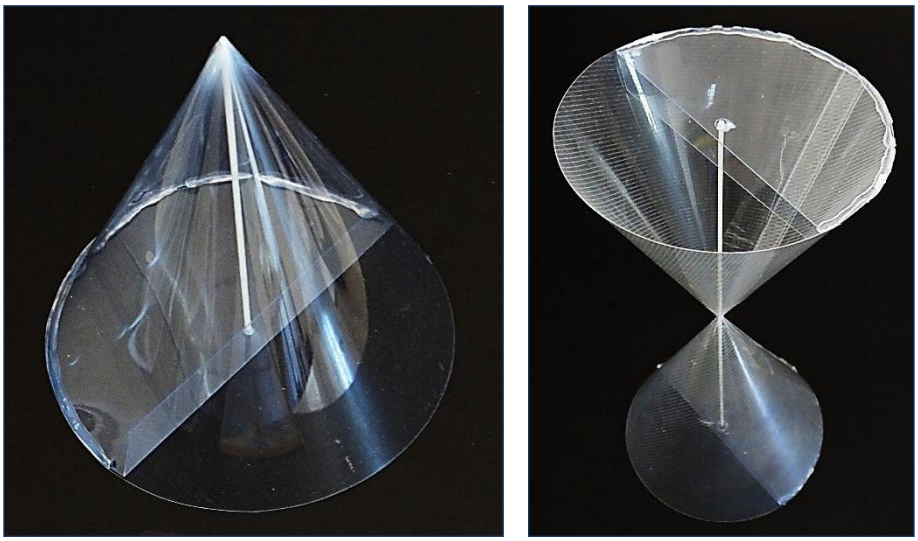
Na Figura 134 são mostrados os sólidos que montamos com folhas plásticas para encadernação.

Figura 134 – Fotografia do cubo, tetraedro, dodecaedro e de superfícies cilíndrica e cônica montados com folha plástica para encadernação.

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Para a montagem do cone e duplo cone, primeiro partimos do formato que consideramos mais estético, que é o cone equilátero (em que a geratriz tem a mesma medida que o diâmetro da base), obtendo as montagens mostradas na Figura 135.

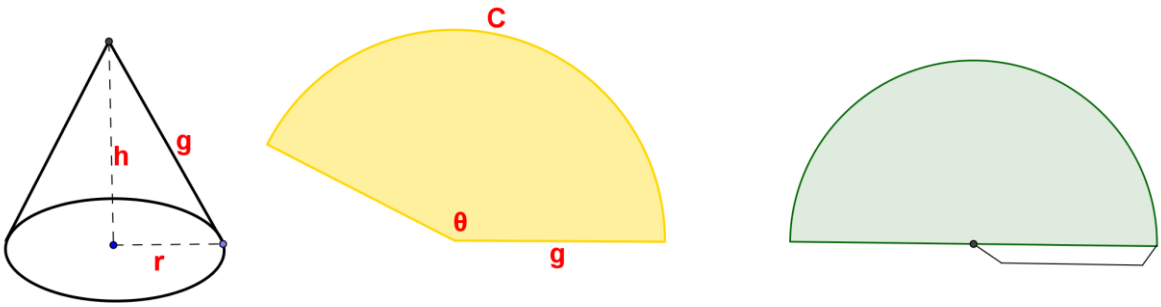
Figura 135 – Fotografias do cone e duplo cone montados com folhas plásticas para visualização de seções.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Sendo **g**, a geratriz do cone, **h**, a sua altura e **r**, o raio da base, como mostrado na Figura 136, à esquerda, temos que encontrar o ângulo θ que resultará no cone desejado.

Figura 136 – Elementos do cone circular reto e sua planificação.



Fonte: Elaborado pelo autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Assim, o perímetro da base pode ser encontrado por

$$C = 2\pi \cdot r$$

e, pela imagem central da Figura 136,

$$C = \theta \cdot g$$

Então,

$$2\pi \cdot r = \theta \cdot g$$

Fazendo g = 2r (já que queremos o cone equilátero), fica

$$2\pi \cdot r = \theta \cdot 2r$$

Logo,

$$\theta = \pi \text{ radianos}$$

Ou seja, precisamos da planificação mostrada na Figura 136, à direita, para obtermos um cone equilátero. Observe que é importante deixar uma aba para a colagem da fita adesiva dupla face sobre a folha plástica. Nosso cone tem um raio de 14 cm, quase o maior possível de ser montado em uma folha de tamanho A4, nestas condições.

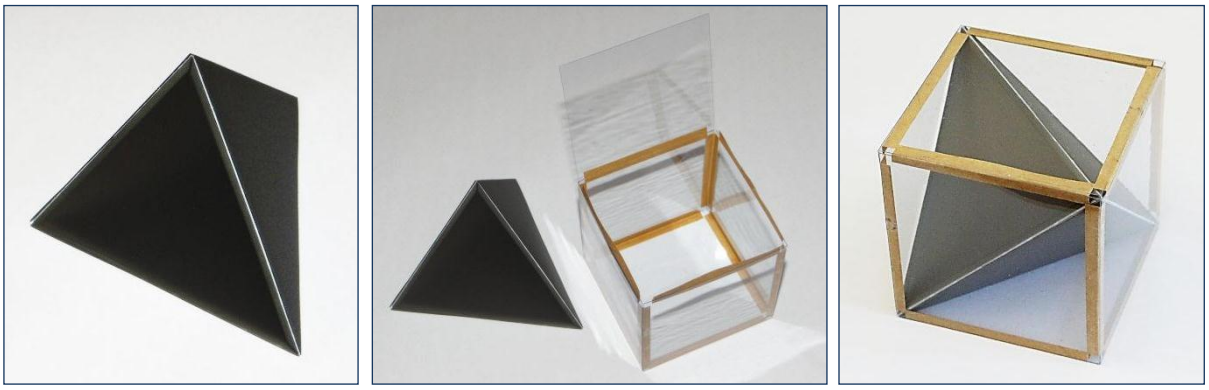
Voltando à Figura 135, podemos perceber que a base circular foi unida ao cone, usando um pouco de colar quente. Percebemos também que a base não está inteira. Isso foi proposital, pois na visualização da seção, se a base estiver completa, as figuras produzidas, parábolas ou hipérboles, apresentarão um segmento de reta, fechando essas curvas. E para dar um pouco mais de sustentação ao objeto montado, foi feita uma dobra em parte da base (vide figura).

No caso do duplo cone, utilizamos uma vareta de fibra de vidro (o mesmo tipo usado nas montagens da seção 4.1) e inserimos o segundo cone de modo a coincidir seus vértices, e usamos um pouco de cola quente para essa união (vide Figura 135, à direita). Inserimos a vareta inteira e só depois de encaixada e colada, cortamos o excedente.

Aproveitando as folhas plásticas e o método empregado para a construção dos acessórios da máquina para visualização de seções, fizemos a composição de um tetraedro regular no interior de um cubo. Para o tetraedro, usamos uma folha plástica na cor fumê e as medidas das arestas coincidem com o comprimento das diagonais do cubo, permitindo, dessa forma, o encaixe de um dentro do outro, como

podemos ver na Figura 137. Este fato foi visto no tópico 4.3, quando mostramos o multisseccionamento do cubo.

Figura 137 – Tetraedro regular no interior de um cubo, montados em folhas plásticas.

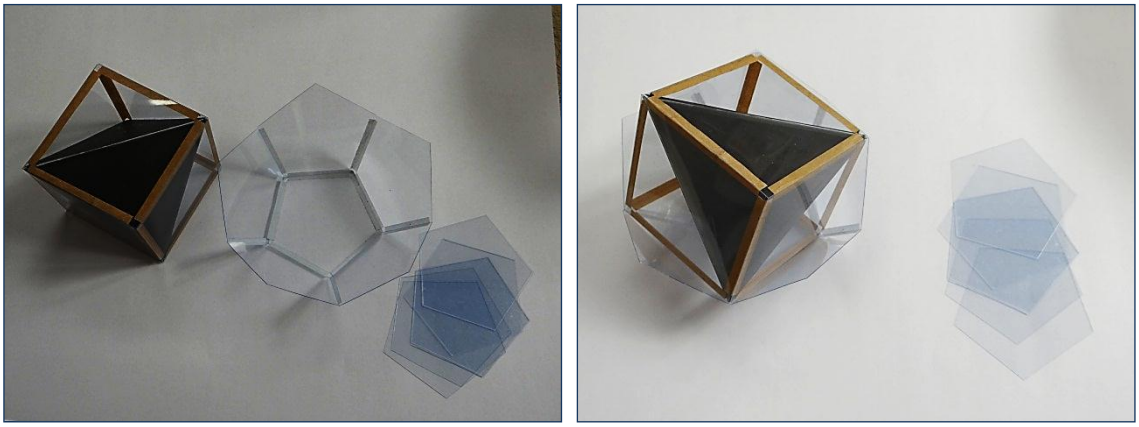


Fonte: Elaboração do próprio autor.

No apêndice C foram disponibilizados os moldes para o cubo e o tetraedro regular, de modo que este último encaixe no primeiro, desde que mantidas as proporções das medidas entre os dois. Imprima os moldes, recorte-os e posicione-os sobre a folha plástica para poder cortar todas as faces necessárias, no tamanho apropriado. Depois disponha essas faces recortadas como as planificações já vistas para o cubo e para o tetraedro e passe a fita adesiva recortada de forma estreita sobre essas junções das faces. Depois é só montar como na figura anterior.

No capítulo 2, seção 2.2.4, vimos que em um modo de seccionamento do dodecaedro regular, uma das diagonais de face desse sólido pode ser correspondente à aresta de um cubo. Podemos ver, na Figura 138, o início da montagem para o encaixe da composição anterior (tetraedro/cubo) dentro de um dodecaedro regular.

Figura 138 – Fotografia do início da montagem de uma composição de um cubo dentro de um dodecaedro regular.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A composição tetraedro/cubo/dodecaedro finalizada pode ser vista na Figura 139. A montagem pode ser feita através das páginas do apêndice C, cujos moldes para o cubo, dodecaedro e tetraedro foram projetados para encaixarem entre si.

Figura 139 – Fotografia da composição do tetraedro no interior do cubo no interior do dodecaedro.

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Estes últimos sólidos montados na realidade deveriam ser colocados em um tópico a parte, mas o tópico ficaria muito curto e sem muita discussão sobre eles. Já que os acessórios para a máquina visualizadora de seções são montadas da mesma maneira, então eles ficaram por aqui também.

Acreditamos que o impacto visual proporcionado por esse recurso experimental seja bastante intenso, no sentido de que o aluno se sentirá mais atraído pela Geometria e suas propriedades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todo recurso disponível para o ensino, desde que bem direcionado, sempre é bem-vindo. O que dispomos aqui neste trabalho são ideias e adaptações que certamente darão ao professor dos ensinos fundamental e médio, ferramentas a mais para auxiliar no processo ensino/aprendizagem, sejam para facilitar a visualização dos elementos de um poliedro, sejam para ajudar na elucidação de alguns problemas matemáticos.

O propósito deste trabalho é de mostrar alguns recursos materiais que acreditamos ser apropriados para tornar esta parte da Matemática como algo mais concreto e também lúdico.

Os dois últimos tópicos mostrados (4.4 e 4.5) são um atrativo para o aluno, pois são coisas curiosas e lúdicas ao mesmo tempo e o professor terá uma chance de aproveitar esse entretenimento para solidificar alguns conceitos matemáticos. Como aplicações no ensino podemos destacar, do tópico 4.4, um primeiro contato com a Geometria para as crianças do ensino fundamental e a investigação na formação de sólidos geométricos. Do tópico 4.5, podemos destacar o estímulo visual na investigação de interseções entre planos e sólidos geométricos, tendo um grande destaque para as seções cônicas.

Quando trabalhamos planificações de sólidos, seja planejando ou até mesmo apenas montando, estamos treinando ou aprimorando nossa mente na visualização e representação espacial. Os sólidos mostrados e sugeridos para montagem na seção 4.3 devem ajudar bastante no treinamento visual. Como principais aplicações no ensino, referentes ao tópico 4.3, podemos destacar o estímulo aos alunos à verificação da relação de Euler; auxílio na resolução de problemas envolvendo áreas e volumes como, por exemplo, o cálculo do volume do dodecaedro regular, o qual foi decomposto em alguns poliedros para encontrar o resultado (como calculado no capítulo 2); facilitar a demonstração de alguns enunciados como, por exemplo, o que foi feito com a decomposição de um prisma triangular para mostrar que o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma correspondente e, por fim,

podemos citar também a extrema importância desses sólidos no auxílio ao ensino para portadores de deficiência visual, onde o tato se faz necessário.

Ao explorar entes geométricos com canudos e varetas, como os apresentados nas seções 4.1 e 4.2, o professor pode colocar à disposição do aluno elementos visuais que ele poderia ter dificuldade em compreender apenas vendo em livros. Do tópico 4.2, podemos destacar como uma aplicação no ensino, para crianças do ensino fundamental, também um primeiro contato com a Geometria, trabalhando as possibilidades de união de figuras geométricas planas para formação de sólidos geométricos. Uma vantagem desse tipo de montagem é a praticidade com que é produzido um determinado poliedro e uma desvantagem é o problema de conceituar vértice a partir dele. Para o tópico 4.1, podemos citar, como aplicação no ensino, o auxílio na visualização e reconhecimento de elementos do sólido, como: arestas, vértices, apótemas, altura, diagonais internas, diagonais de face, centro da esfera inscrita ou circunscrita, entre outros; estímulo à investigação de padrões como, por exemplo, as figuras formadas pelas diagonais internas de um icosaedro regular (figuras 42 e 43); aplicação da análise combinatória para o cálculo do número de diagonais internas de um poliedro convexo.

Além dessas aplicações citadas, outras atividades podem ser realizadas com os alunos, como discutir as classificações dos sólidos geométricos (poliedros, convexos, poliedros não-convexos, prismas, pirâmides, poliedros regulares, poliedros semirregulares, sólidos de Kepler-Poinsot, sólidos de Johnson, sólidos de revolução, etc.) e discutir sobre as nomenclaturas (tetraedro, pentaedro, hexaedro, heptaedro, romboedro, rombicosidodecaedro, tronco-icosaedro, entre outros). Até mesmo em outras disciplinas, como em artes, pode ser trabalhada a geometria espacial usando sólidos geométricos: na confecção de maquetes, de esculturas e caixinhas decorativas na forma de diversos poliedros.

O autor não teve a oportunidade de testar em uma sala de aula os sólidos produzidos por ele, no entanto, vale relatar a experiência feita com seus sobrinhos de 5 e 8 anos: foram deixados sobre a mesa um tetraedro regular, uma bipirâmide triangular, um triângulo equilátero, um quadrado e um pentágono, todos montados com as hastes magnéticas e esferas de aço (tópico 4.4), e foram deixadas ao lado, uma porção de hastes e esferas avulsas. As crianças, vendo as figuras montadas, quiseram saber o que eram aquilo e se podiam mexer com as “bolinhas” (o autor ensinou como manusear as hastes e as esferas), então elas começaram suas

próprias criações e indagações a cada objeto construído. Elas acharam interessante aquele modo de montagem de objetos e, ao menos, aprenderam alguns nomes de alguns entes geométricos com a brincadeira nova. Ficaram ali, nesse primeiro contato, manipulando por cerca de 30 minutos. Em uma outra oportunidade, repetiram a brincadeira.

E em algumas aulas particulares (para três alunos) foi utilizado o prisma decomposto (tópico 4.3) para a explicação da fórmula do volume para uma pirâmide. Os alunos, unanimemente, acharam muito mais fácil de entender, observando as partes. O mesmo disse um colega do Profmat, ao levar para a sala de aula um desses prismas decompostos em três pirâmides, construídos pelo autor.

Esperamos que todo o exposto aqui possa auxiliar significativamente no ensino e aprendizado da geometria espacial nos ensinos fundamental e médio. Acreditamos que os impactos visuais proporcionados por estes recursos sejam bastante intensos, no sentido de que o aluno ficará mais atraído pela Geometria e suas propriedades, perceberá com maior facilidade algumas operações efetuadas sobre o sólido e se sentirá mais à vontade a questionamentos.

Podemos fazer um paralelo em relação aos materiais concretos descritos aqui e os descritos no artigo de Kaleff (2010), no sentido de que ambos utilizam materiais de baixo custo e finalidades semelhantes.

Os softwares utilizados na confecção deste trabalho foram: GeoGebra versão 4.4.36.0, para as representações gráficas de diversos polígonos e poliedros, podendo ser baixado em *http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/* gratuitamente; NanoCAD versão 5, para as diversas planificações e exemplos gráficos, podendo ser baixado em *http://nanocad.com/page/DownloadNanoCAD* a versão gratuita, sendo oferecida também a versão profissional (paga); versão demonstrativa do software Great Stella v. 4.4, para as representações dos cinco poliedros regulares convexos dispostos no quadro 1, podendo ser baixado em *http://www.software3d.com/Downloads.php* e Microsoft® Office Word v. 14.0.7128.5000, na elaboração e formatação do texto e conversão para o formato PDF.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2010. p. 167-170.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2014.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Pirâmide. In: _____. **Fundamentos de matemática elementar**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 10, 186 p.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Poliedros convexos. In: _____. **Fundamentos de matemática elementar**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 10, 124 p.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Prisma. In: _____. **Fundamentos de matemática elementar**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 10, 139 p.

FRENCH, T. E.; VIERCK, C. J. **Desenho técnico e tecnologia gráfica**. 5. ed. São Paulo: Globo, 1995. p. 524-526.

GEOMAGWORLD. **Geomag^{TM}**. Disponível em <http://www.geomagworld.com/eng/>. Acesso em: 5 abr. 2014.

GRANJA, C. E. C. S. A Fórmula do Volume do Icosaedro. **Revista do professor de matemática**, Rio de Janeiro, v. 74, p. 41-44, 2011.

KALEFF, A. M. M. R.; VOTTO, B. G.; ROSA, F. M. C. Experimentos educacionais concretos e virtuais para o ensino de volumes e poliedros equivalentes. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: educação matemática, cultura e diversidades, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010. 10 p.

Disponível em: < http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12_RE430.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2014.

LIMA, E. L. et al. Poliedros. In: _____. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2, p. 231-234.

ROWLAND, E. **Regular polyhedra**. Disponível em: <http://www.math.rutgers.edu/~erowland/polyhedra.html>. Acesso em: 15 fev. 2014.

VIDALETTI, V. B. B. **Ensino e aprendizagem da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos**. 2009. 109 f. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de ciências exatas) – Univates, Lajeado, 2009. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/82/1/VangizaVidaletti.pdf>. Acesso em: 3 fev. 2014.

WOLFRAM MathWorld. **Net**. Disponivel em: <http://mathworld.wolfram.com/Net.html>. Acesso em: 15 fev. 2014.

YOUTUBE. **MoMath (Museum of Mathematics)**. [2012]. Disponivel em: <http://www.youtube.com/watch?v=jK7xPo1YXzY>. Acesso em: 15 fev. 2014. Parte do vídeo em: 1min 33s - 1min 45s.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Peças representativas dos vértices

Nas duas páginas seguintes, temos as planificações das peças de vértices dos sólidos montados no capítulo 4, *seção 4.1 Montagem com varetas*. Caso o leitor queira realizar as montagens sugeridas e descritas, imprima as folhas em papel de gramatura maior que a folha branca comum, pode ser em papel de 120 ou 180 g/m^2, recorte nos locais indicados pela linha contínua e dobre nos locais indicados pelas linhas tracejadas. Antes de realizar a dobra do papel, faça sulcos utilizando algum instrumento pontiagudo sobre as linhas tracejadas, use uma régua como apoio, e esses instrumentos podem ser a ponta da tesoura, ponta seca do compasso, estilete (neste caso, cuidado para não aplicar muita pressão sobre o papel para não cortá-lo) ou outro material que possa realizar isso. Os sulcos facilitarão a dobra, além de se obter uma boa precisão.

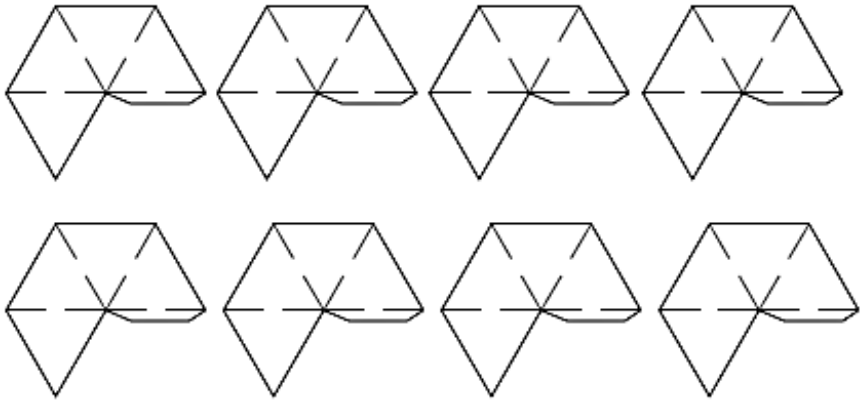
Depois, passe uma quantidade de cola o suficiente para unir as partes. Não exagerar na quantidade. Quando as peças estiverem prontas, colam-se as extremidades das varetas adentrando apenas uns poucos milímetros na peça montada. Recomendamos que o diâmetro das varetas não ultrapasse 3 mm para esse tamanho de peças projetadas, a não ser que se faça a impressão ampliada. Para mais detalhes, consulte a seção 4.1.

Obs.: Consulte o menu de impressão do software que abrirá o arquivo PDF e verifique se a configuração de ajuste de tamanho está em “tamanho real” ou “nenhum ajuste”.

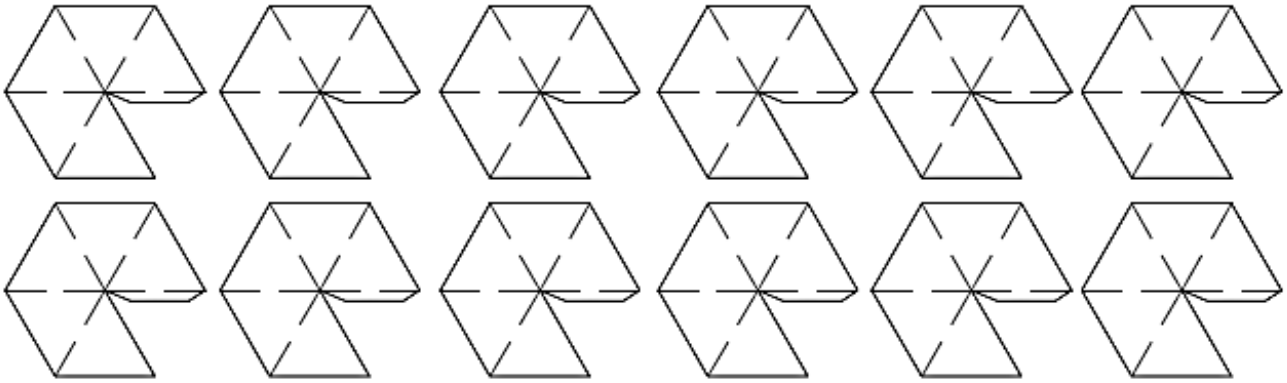
Todos os esquemas mostrados a seguir, foram elaborados pelo próprio autor, utilizando o software NanoCAD, versão 5, cuja licença é gratuita.

Peças para os vértices do tetraedro regular

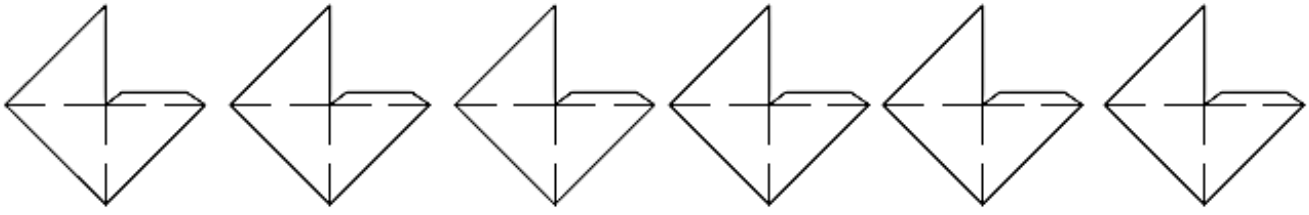
Peças para os vértices do octaedro regular



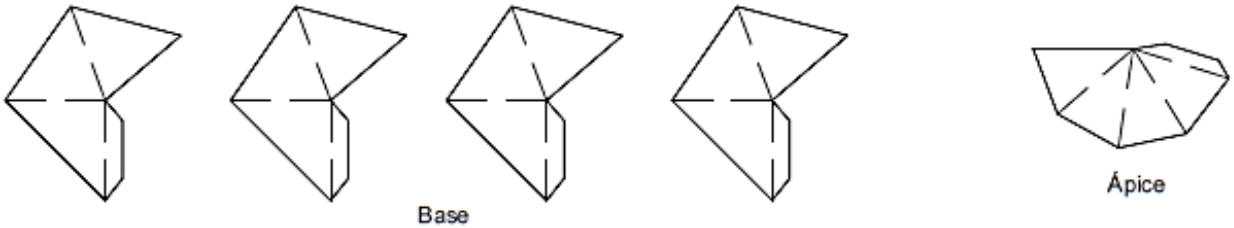
Peças para os vértices do icosaedro regular



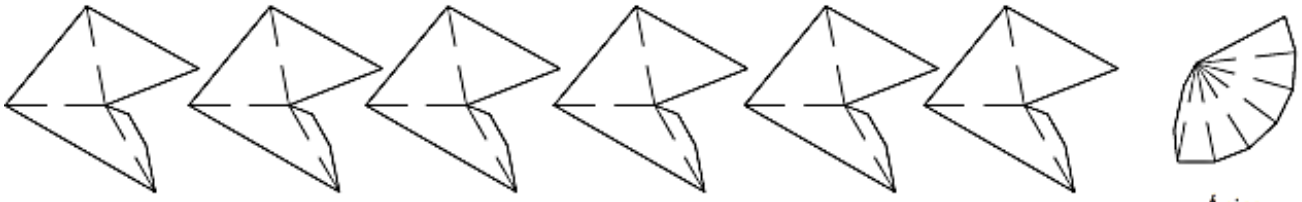
Peças para os vértices do hexaedro regular



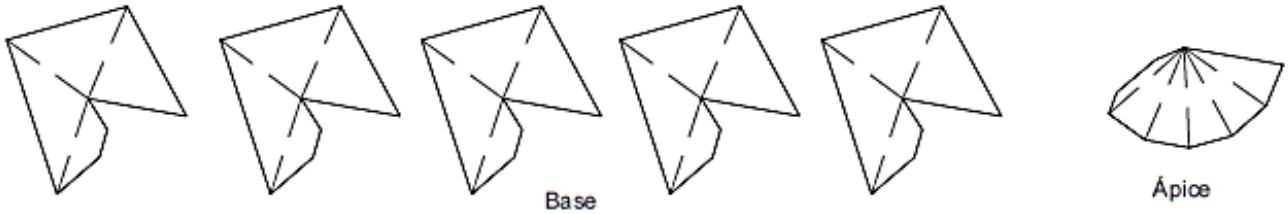
Pirâmide quadrangular de altura 25 cm e base de 20 x 20 cm.



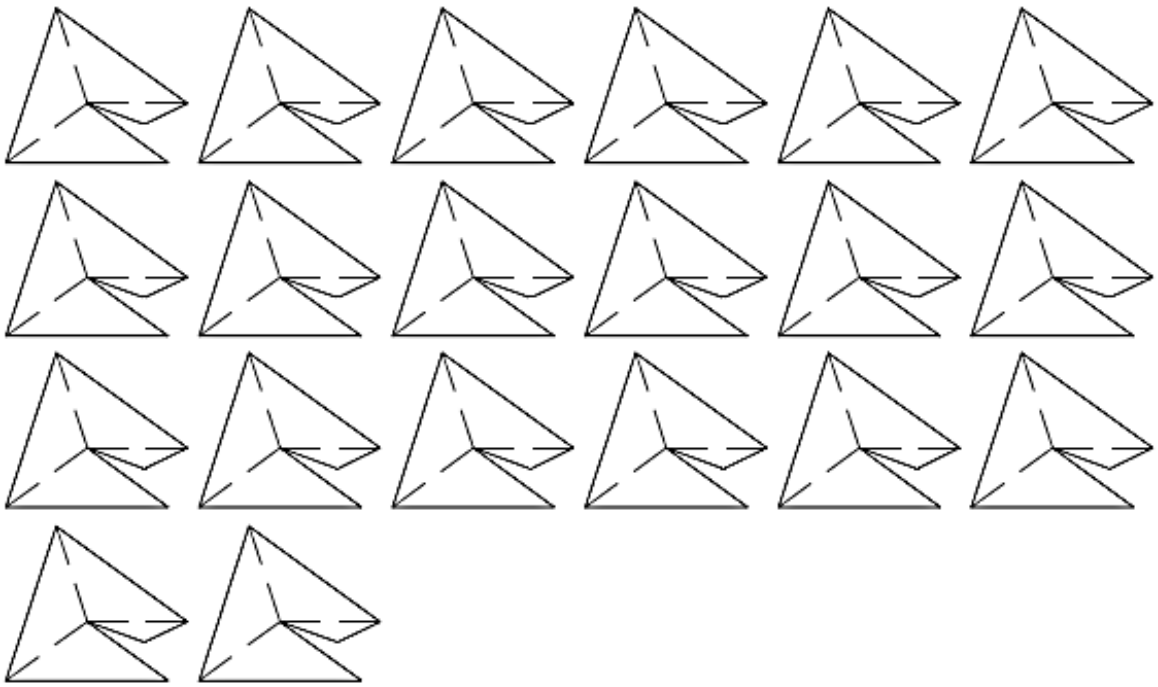
Pirâmide hexagonal de altura 25 cm e base de lado 10 cm.



Pirâmide pentagonal de altura 25 cm e base de lado 11,8 cm.



Peças para os vértices do dodecaedro regular



APÊNDICE B – Planificações dos sólidos apresentados

Nas páginas seguintes, temos as planificações dos poliedros regulares e várias formas seccionadas dos mesmos, além de um prisma seccionado, todos apresentados no capítulo 4, *seção 4.3 Montagem com papel e ímãs*. Caso o leitor queira realizar as montagens sugeridas e descritas, imprima as folhas em papel de gramatura maior que a folha branca comum, pode ser em papel de 120 ou 180 g/m^2, recorte nos locais indicados pela linha contínua e dobre nos locais indicados pelas linhas tracejadas. Antes de realizar a dobra do papel, faça sulcos utilizando algum instrumento pontiagudo sobre as linhas tracejadas, use uma régua como apoio, e esses instrumentos podem ser a ponta da tesoura, ponta seca do compasso, estilete (neste caso, cuidado para não aplicar muita pressão sobre o papel para não cortá-lo) ou outro material que possa realizar isso. Esses sulcos tem a finalidade de se obter uma dobra mais precisa.

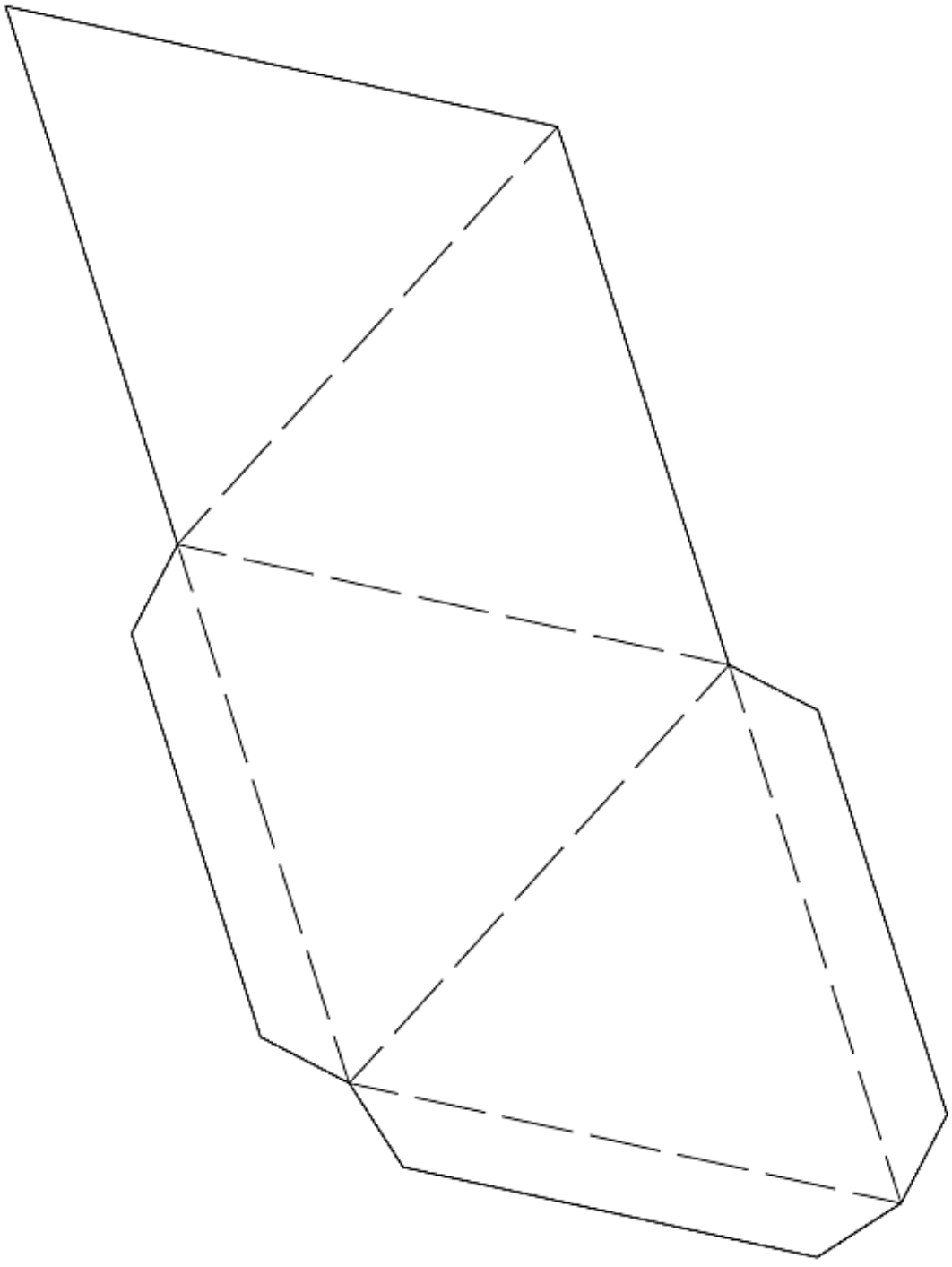
Faça uma consulta na seção 4.3 para os detalhes de como proceder na colagem de ímãs nas partes internas para a aderência após a montagem. Sugerimos utilizar o par ímãs/chapa de aço, por ser mais eficiente.

Depois, passe uma quantidade de cola nas abas o suficiente para unir as partes. Não exagerar na quantidade.

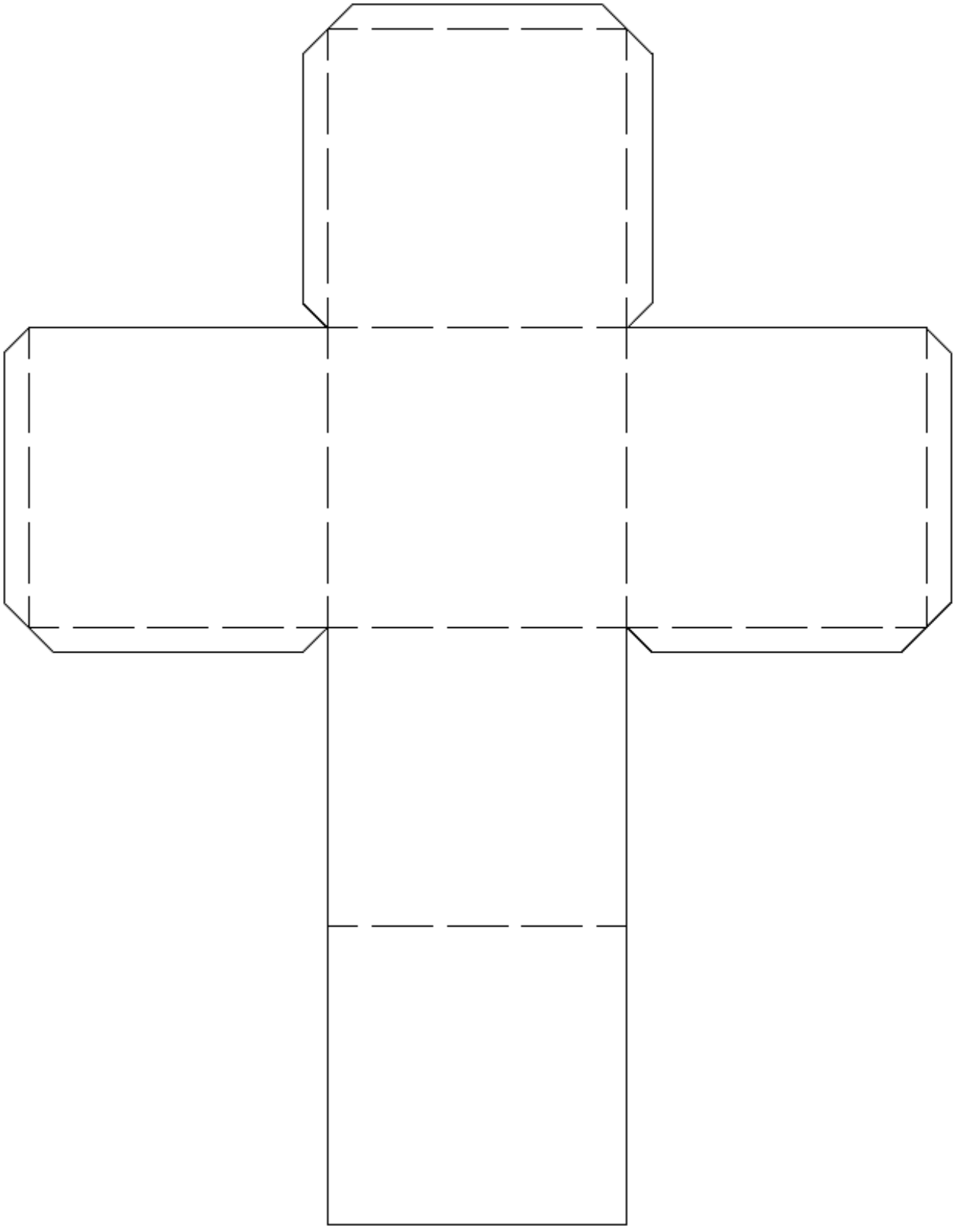
Obs.: Consulte o menu de impressão do software que abrirá o arquivo PDF e verifique se a configuração de ajuste de tamanho está em “tamanho real” ou “nenhum ajuste”.

Todos os esquemas mostrados a seguir, foram elaborados pelo próprio autor, utilizando o software NanoCAD, versão 5, cuja licença é gratuita.

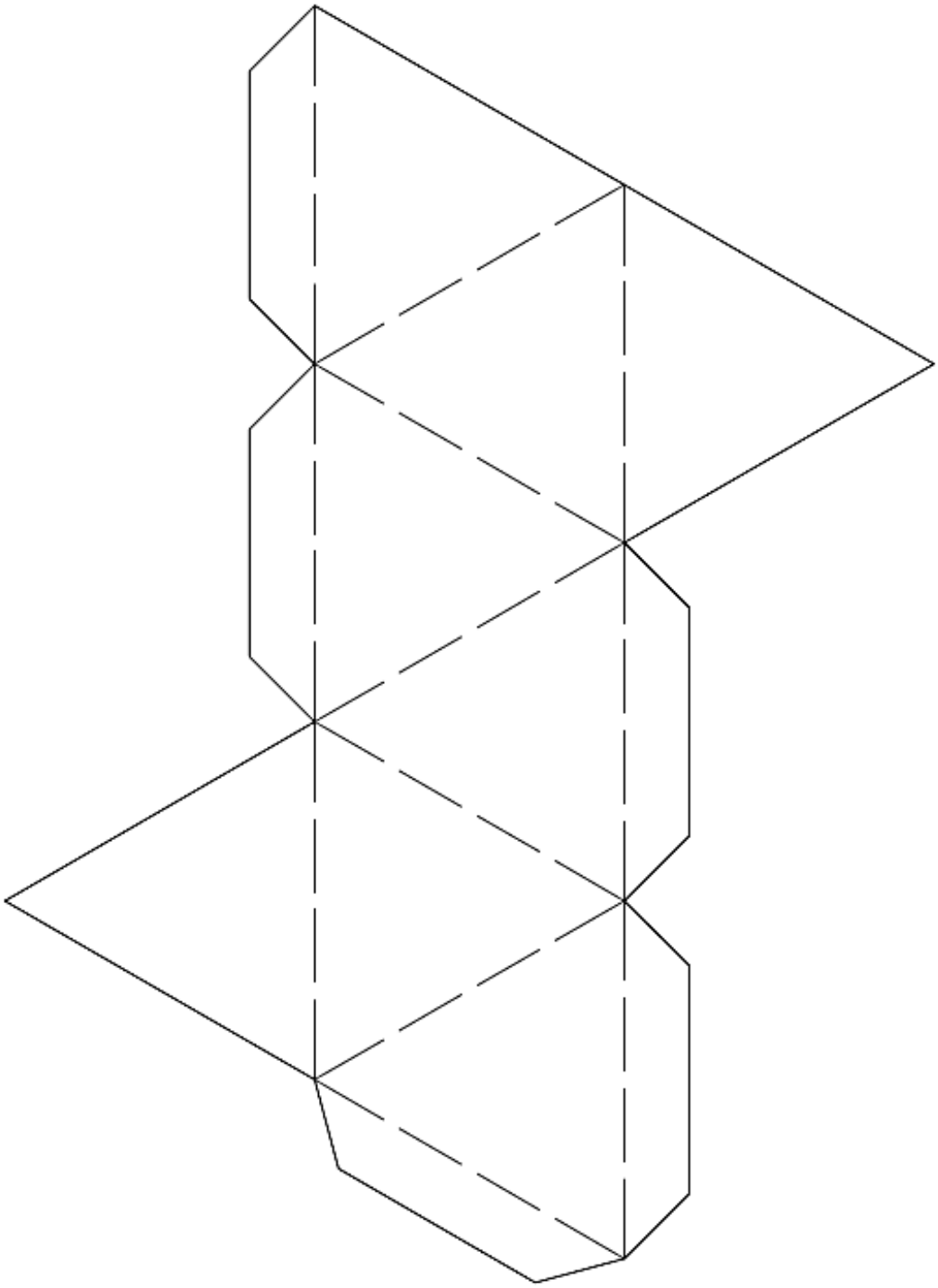
Tetraedro regular

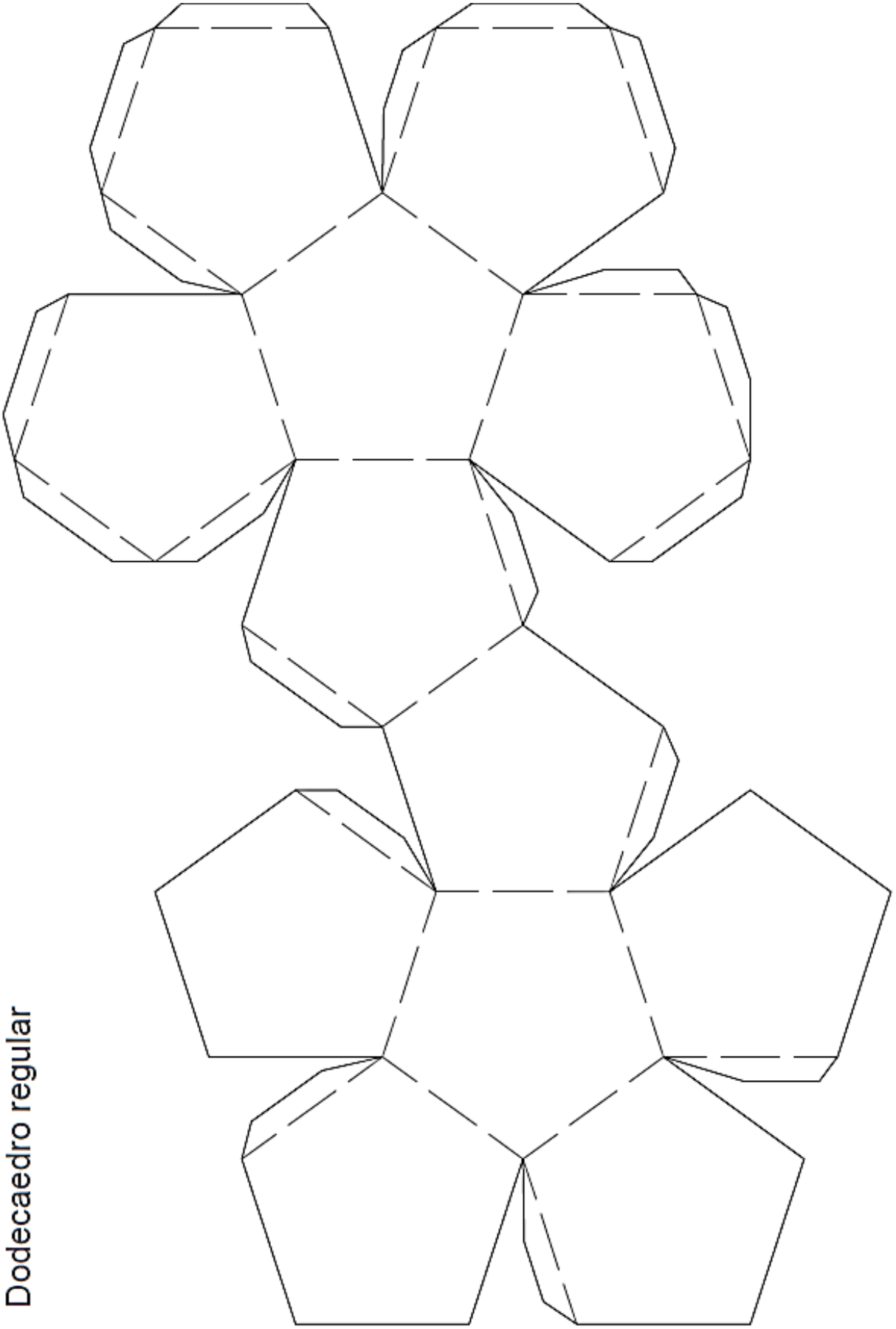


Hexaedro regular



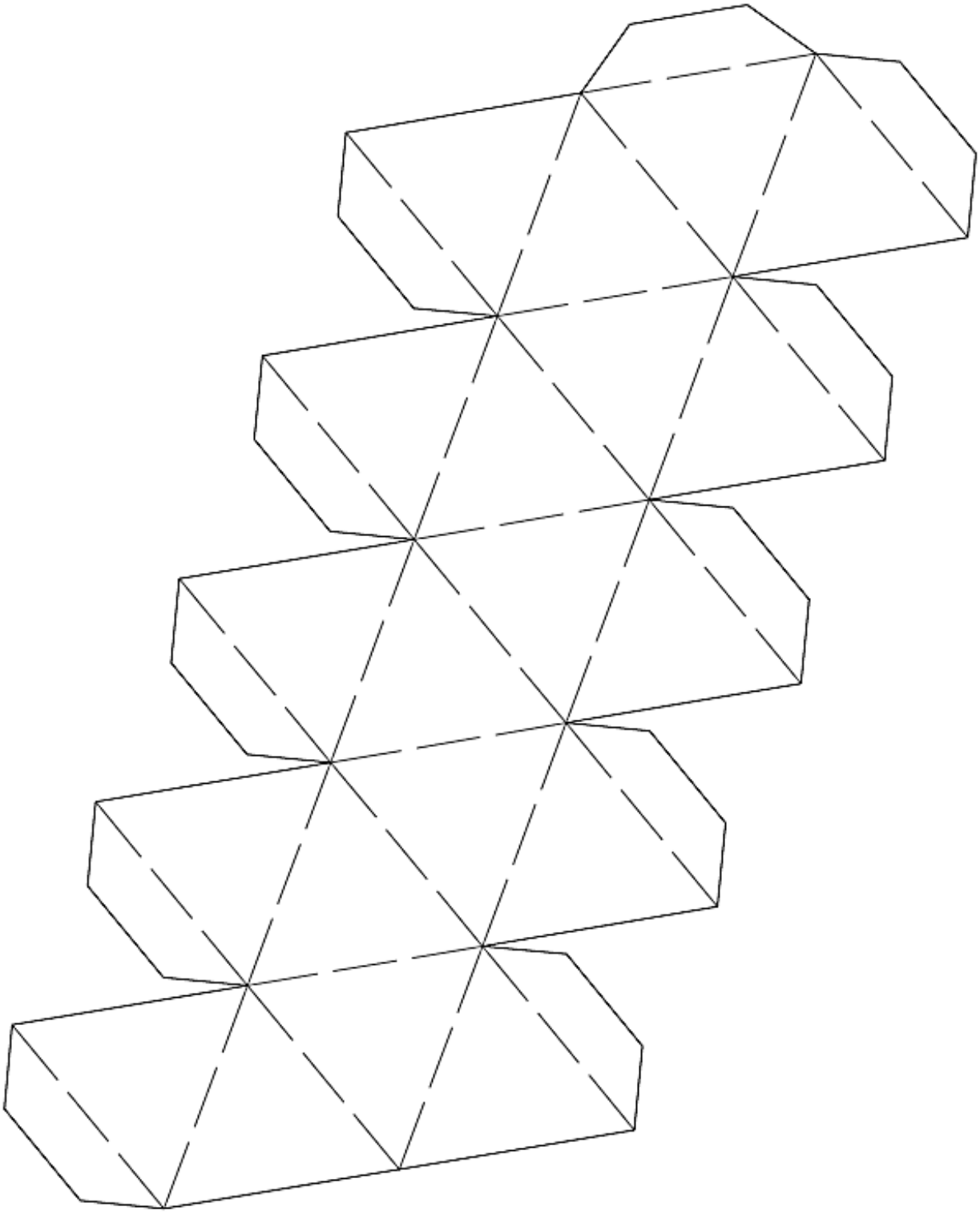
Octaedro regular



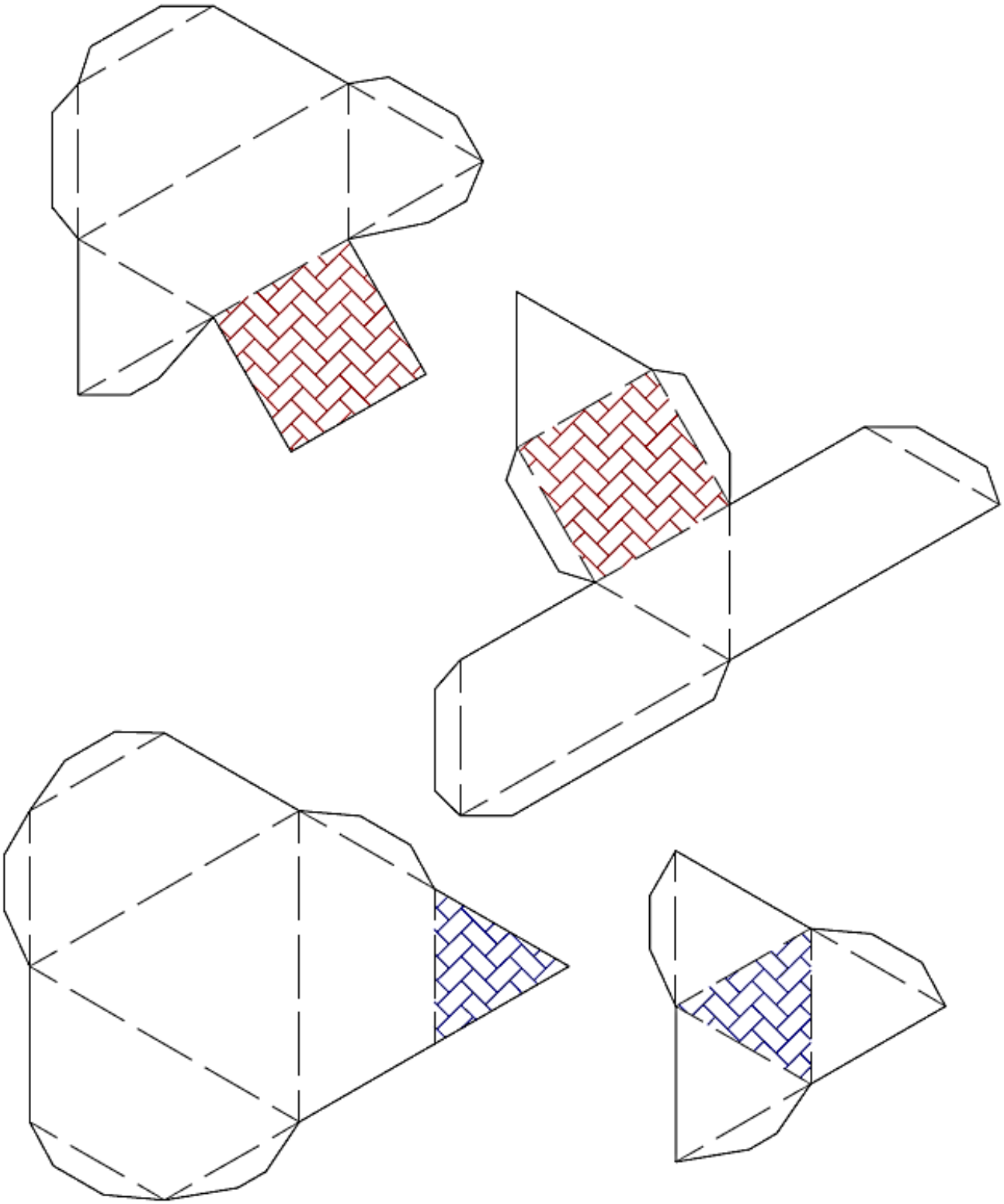


Dodecaedro regular

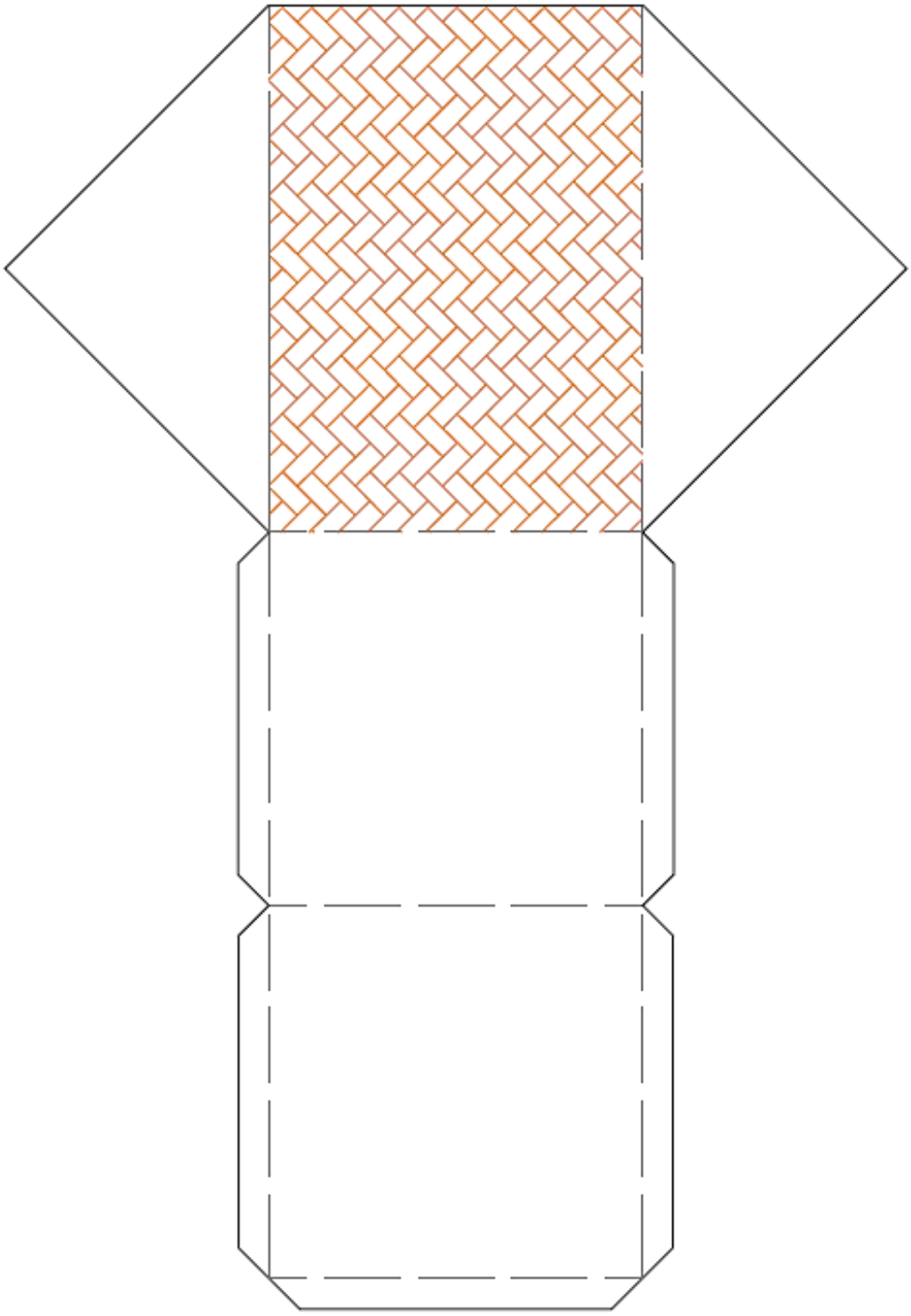
Icosaedro regular



Tetraedros regulares seccionados.

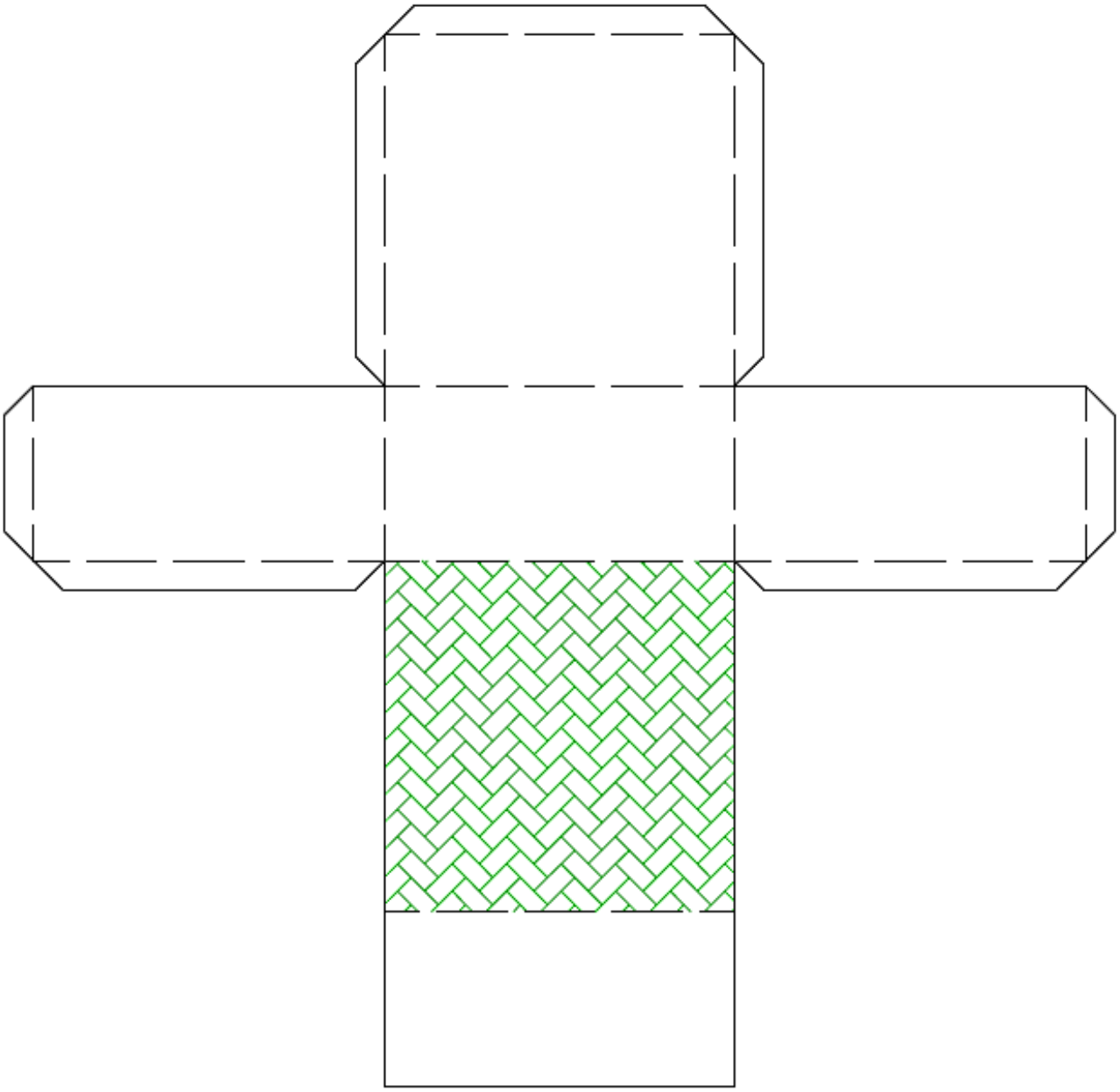


Cubo seccionado em duas peças por um plano contendo duas diagonais paralelas.
Imprimir em 2 folhas.

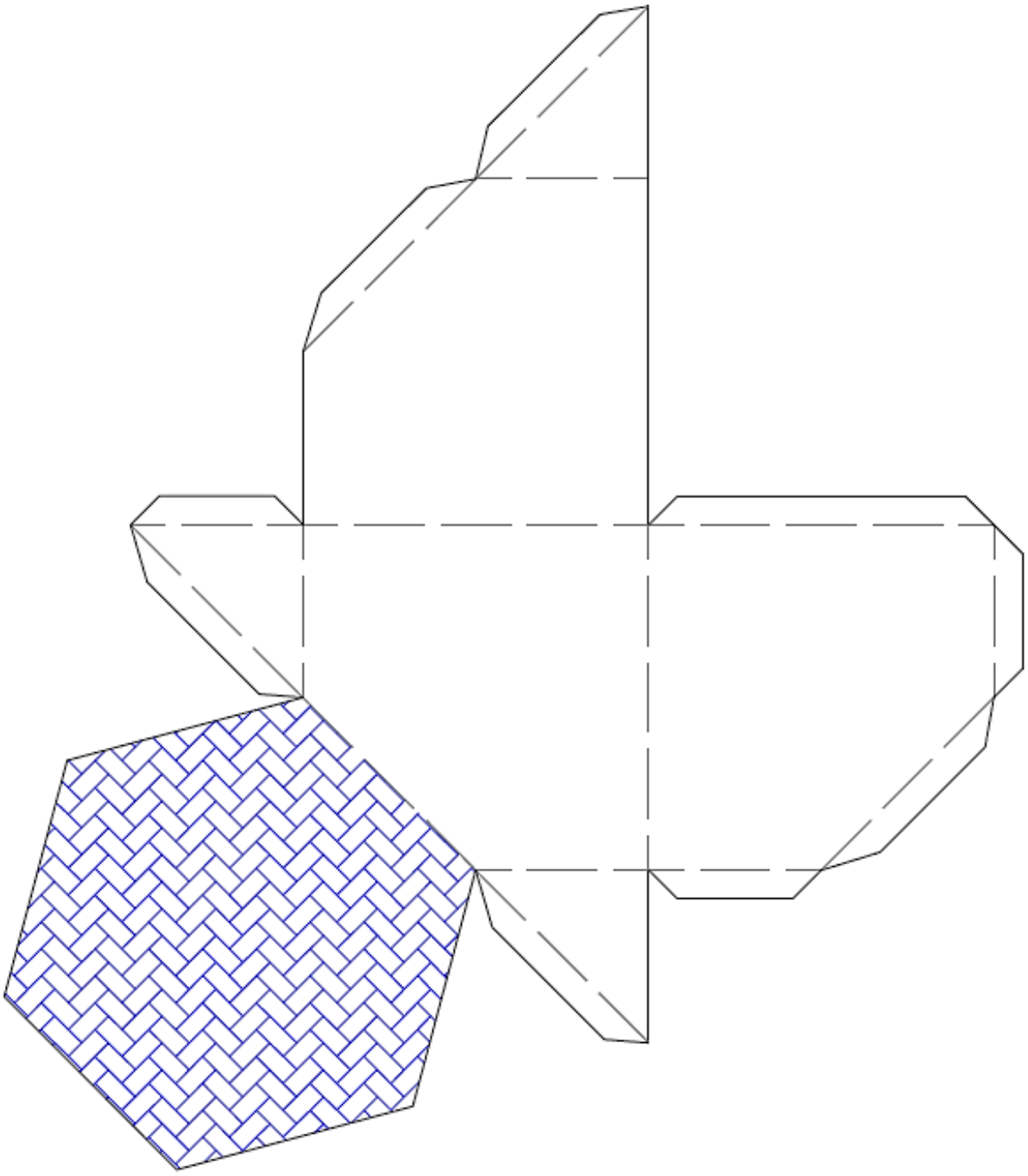


Cubo seccionado em duas peças por um plano paralelo a duas faces e passando pelos pontos médios de quatro arestas.

Imprimir em 2 folhas.

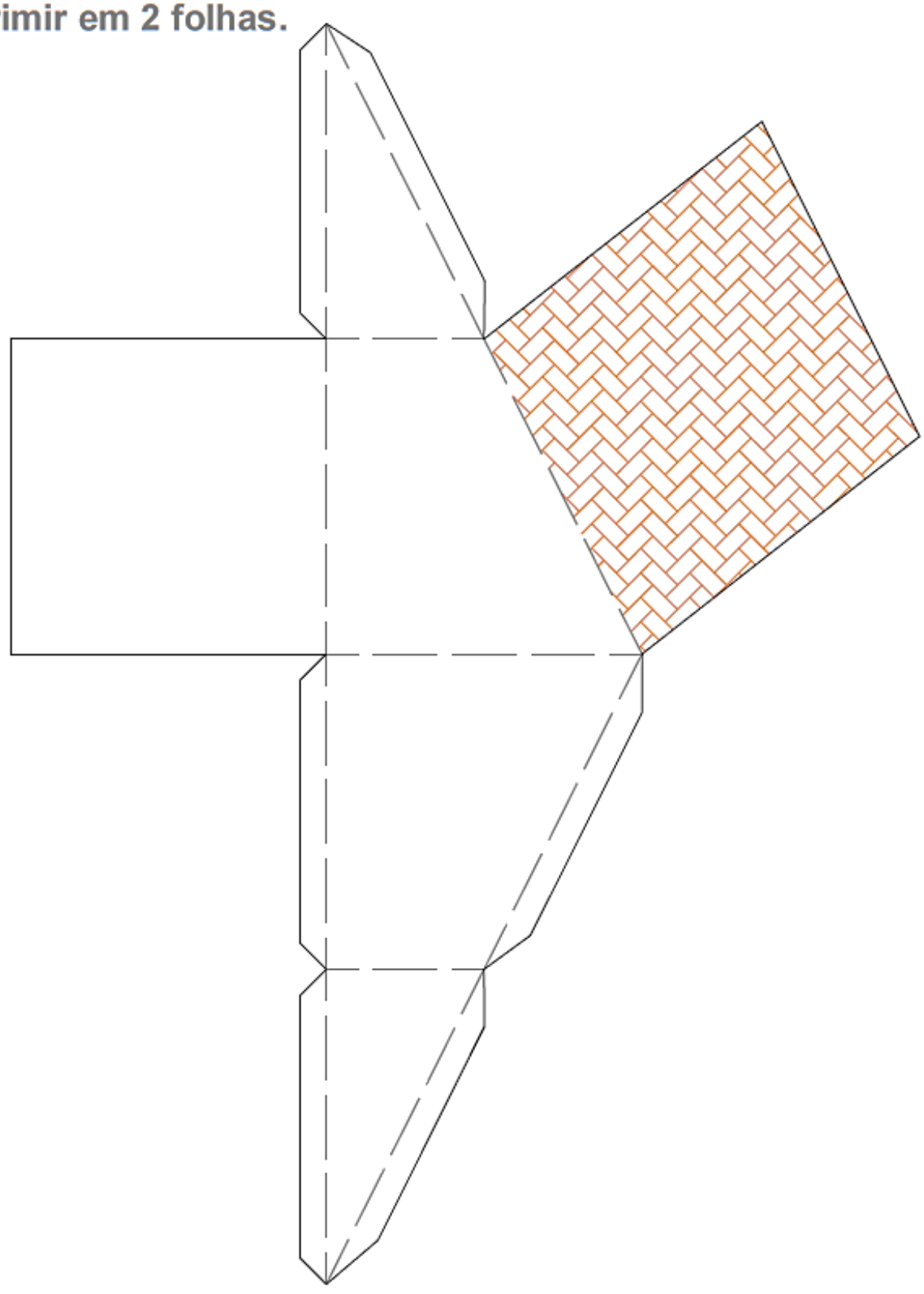


Cubo seccionado em duas peças, formando uma seção hexagonal.
Imprimir em 2 folhas.

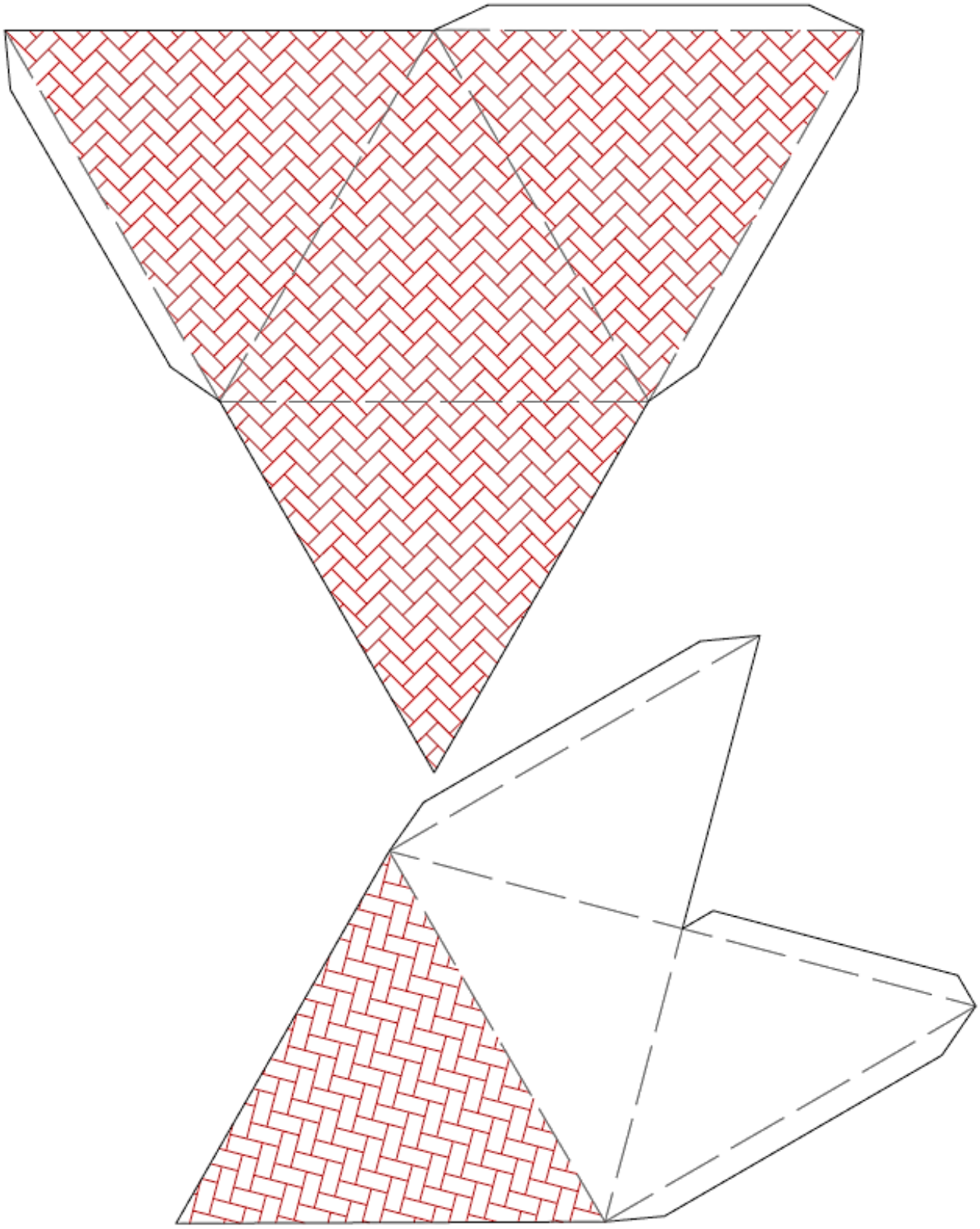


Cubo seccionado em duas peças por um plano contendo dois vértices e pontos médios de duas arestas.

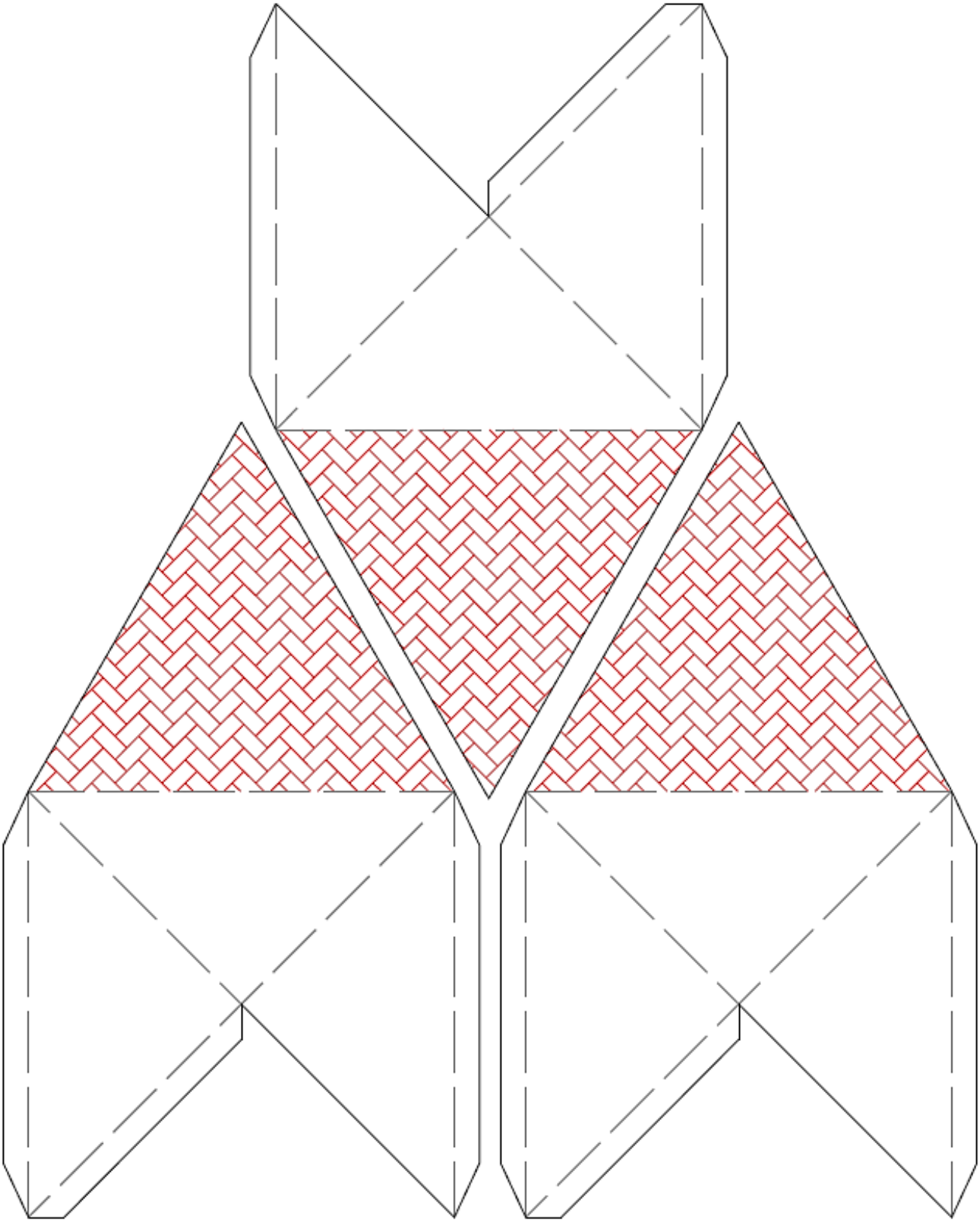
Imprimir em 2 folhas.



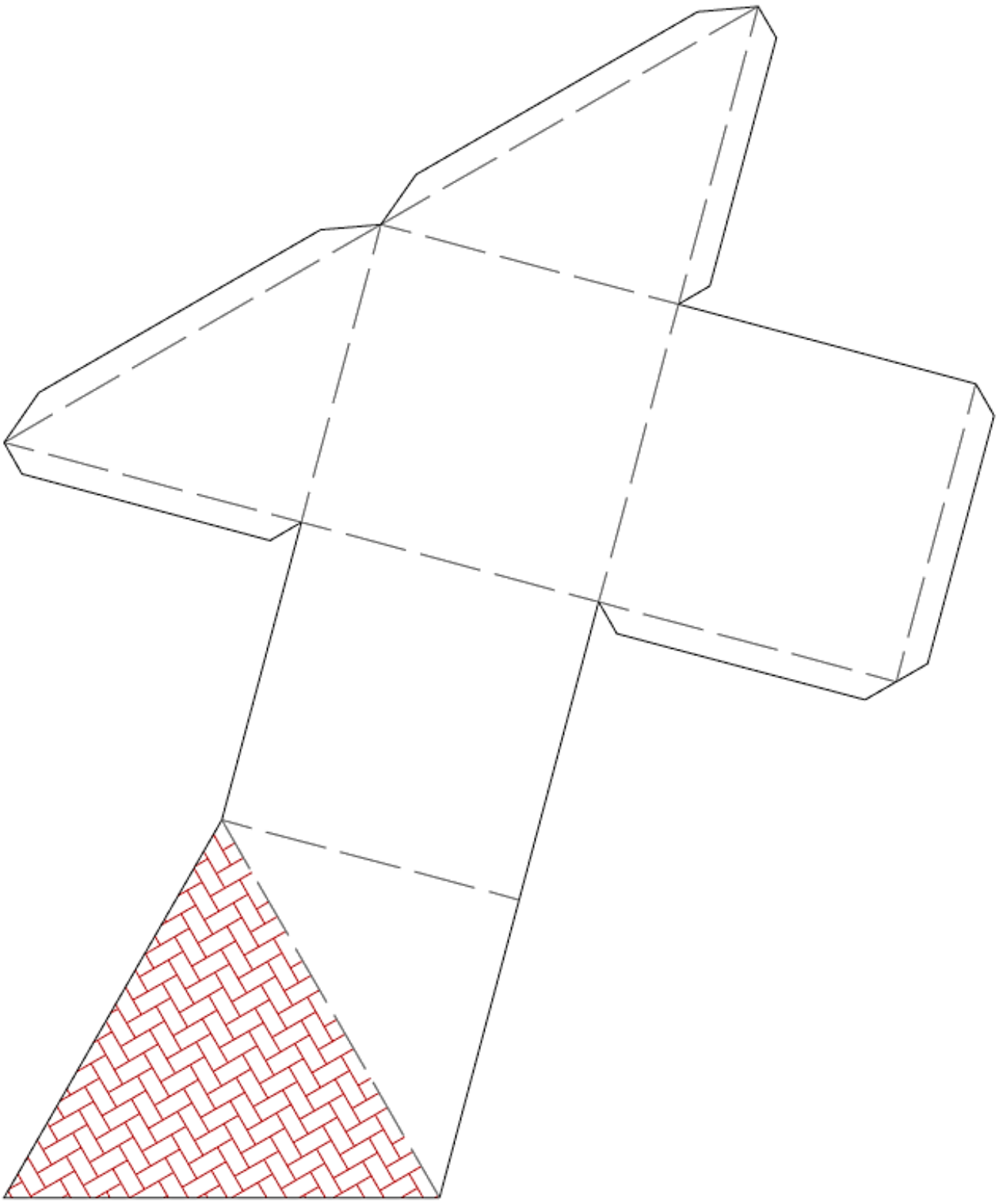
Cubo seccionado em cinco peças.
Peças 1 e 2.



Cubo seccionado em cinco peças.
Peças 3, 4 e 5.

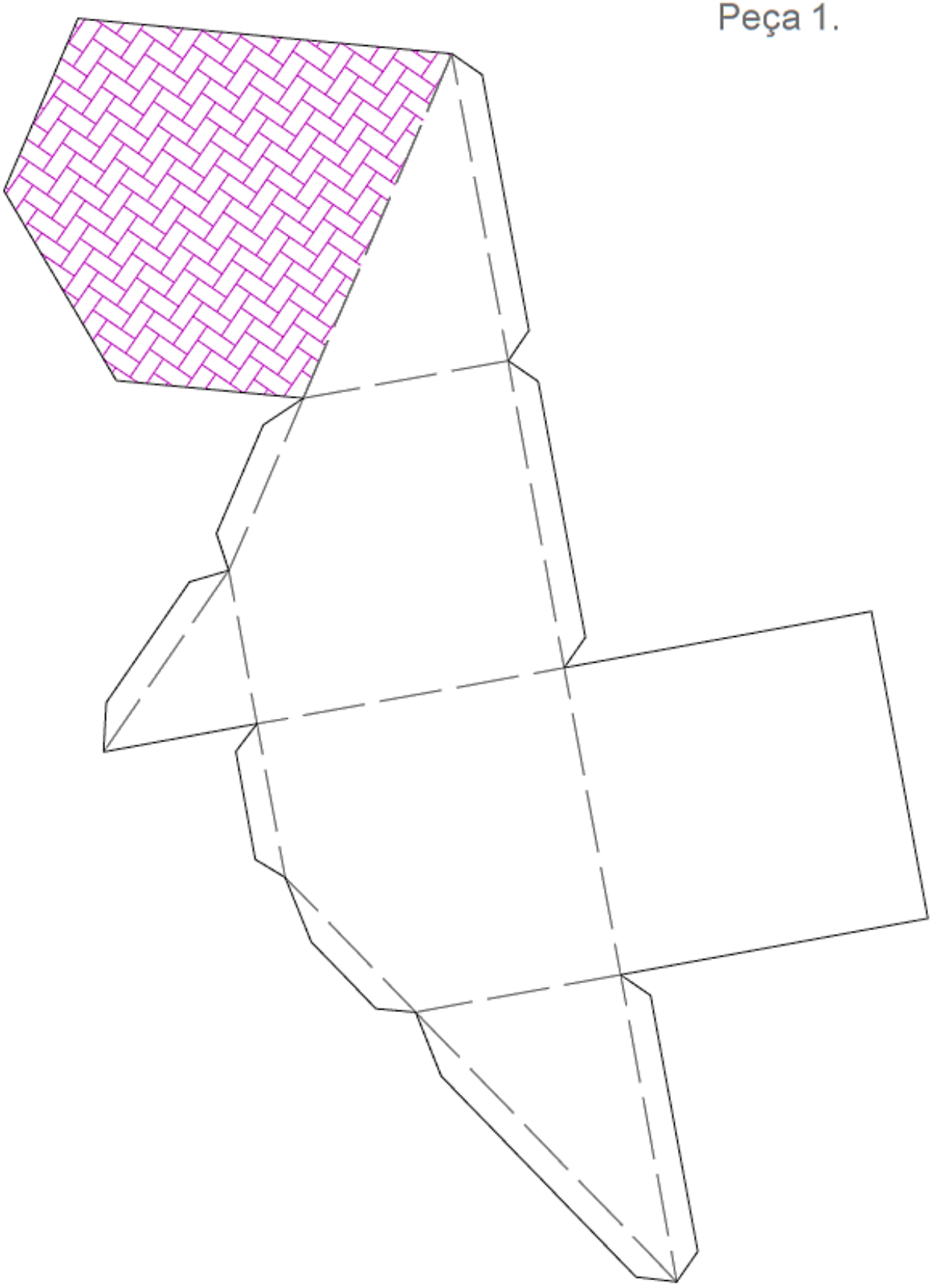


Cubo seccionado por um plano contendo três vértices. Para complementar este cubo, pode ser usada uma das peças em que o cubo foi dividido em cinco partes.



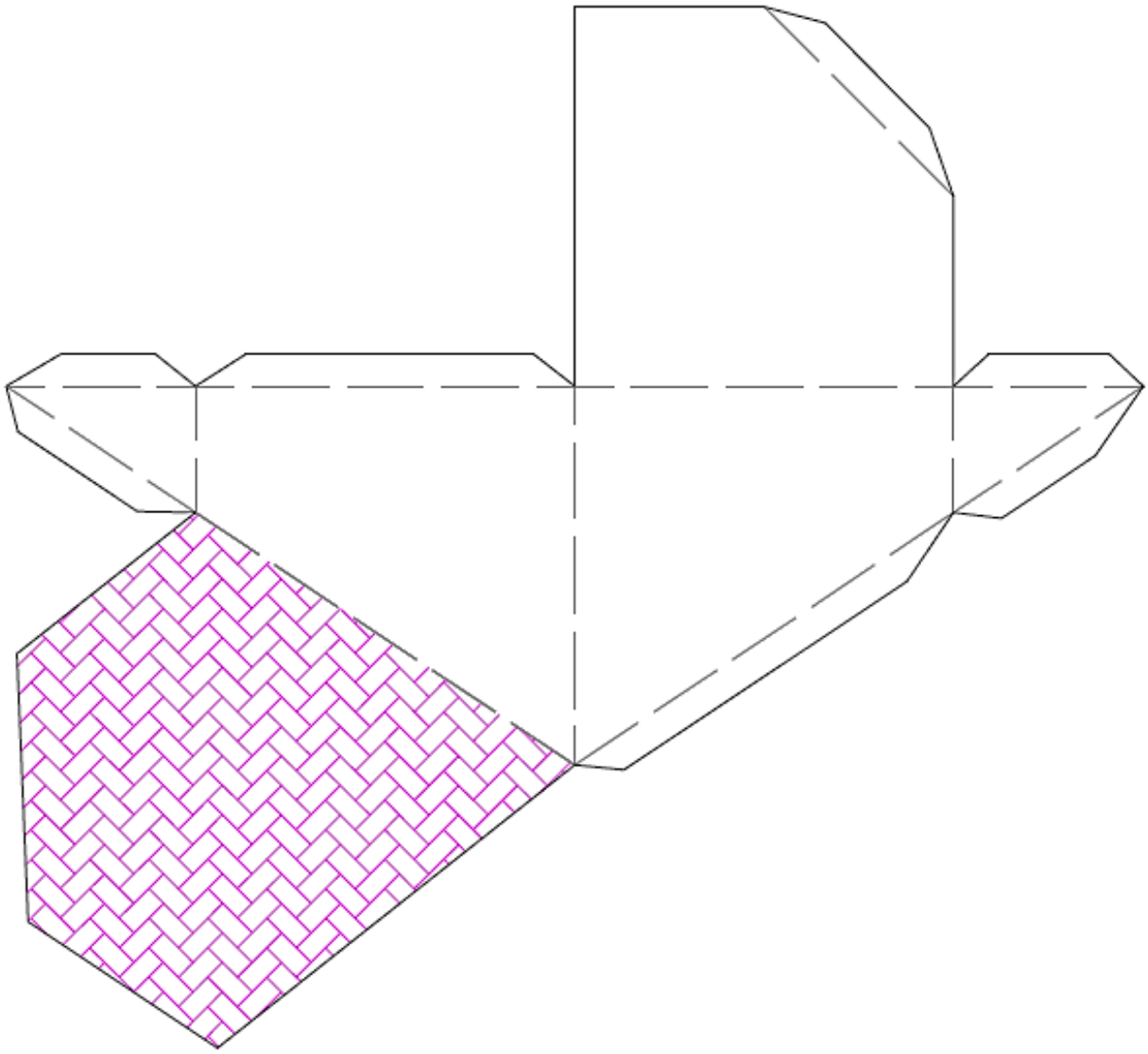
Cubo seccionado em duas peças, formando uma seção pentagonal.

Peça 1.

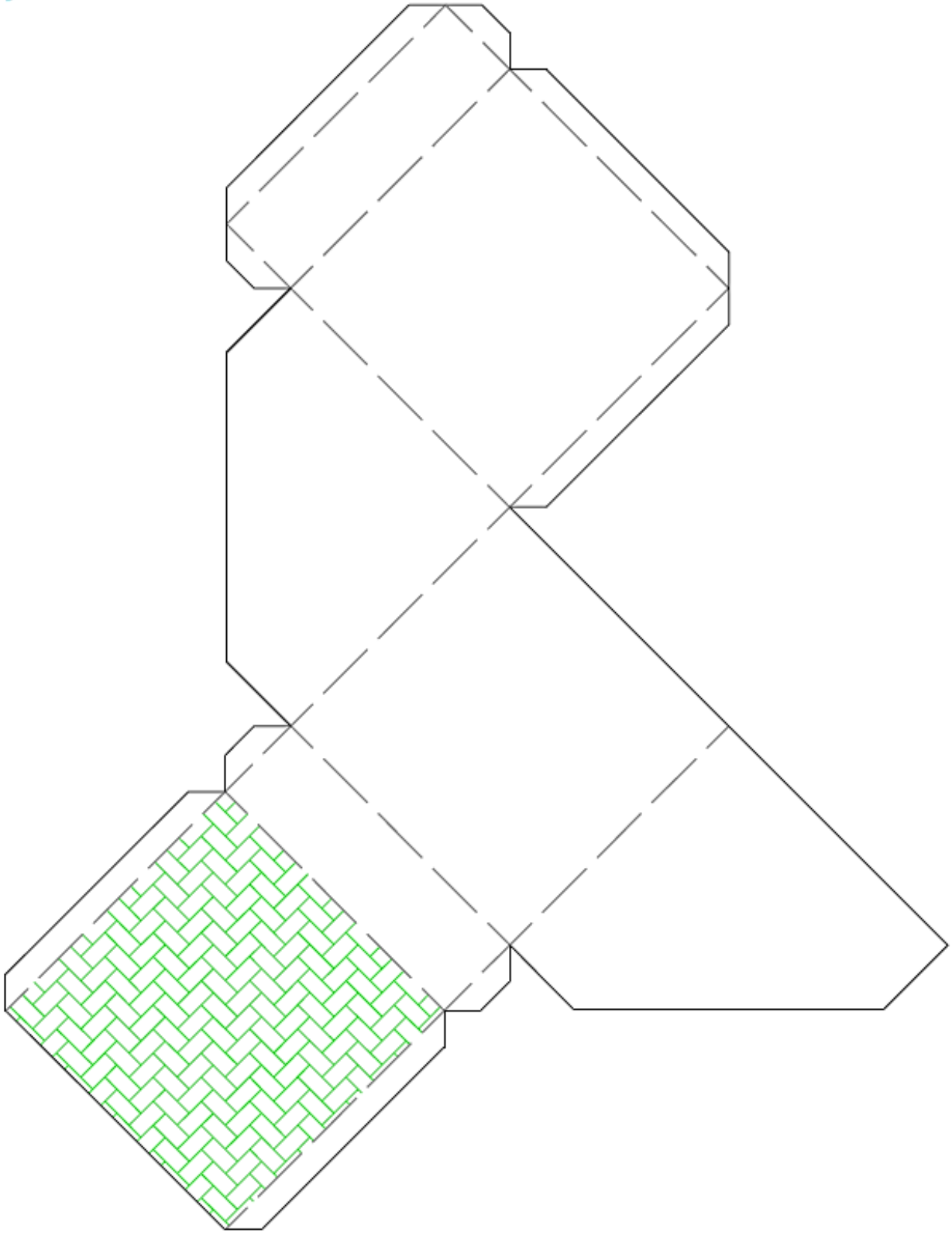


Cubo seccionado em duas peças, formando uma seção pentagonal.

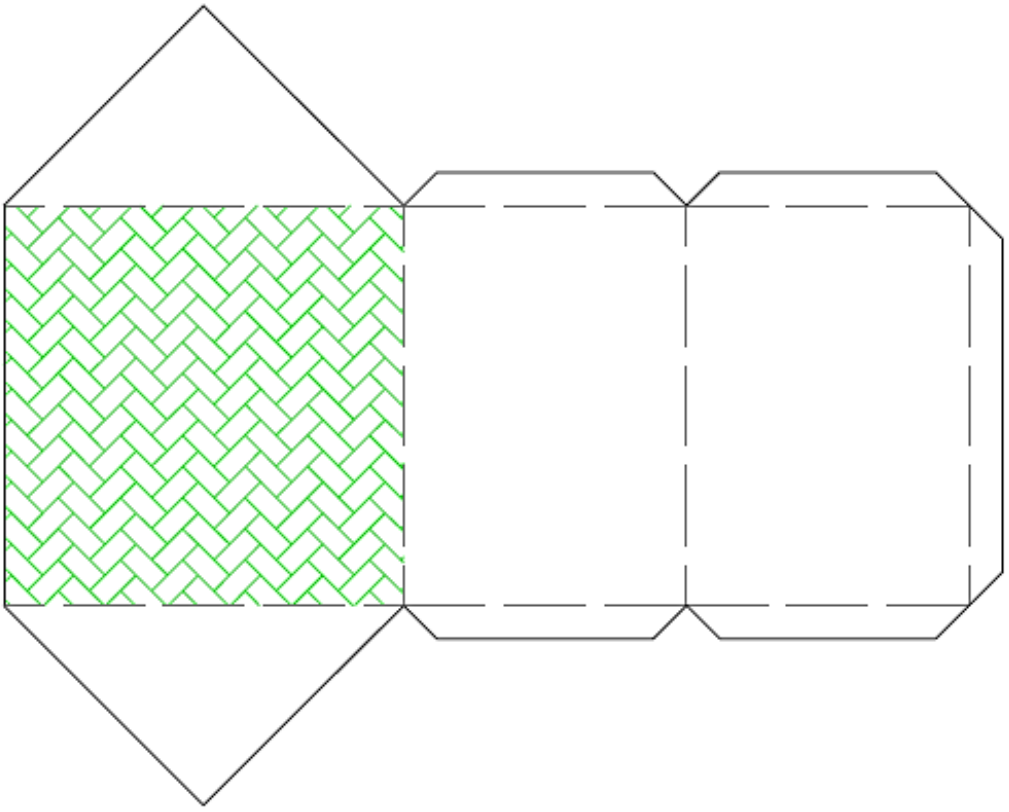
Peça 2.



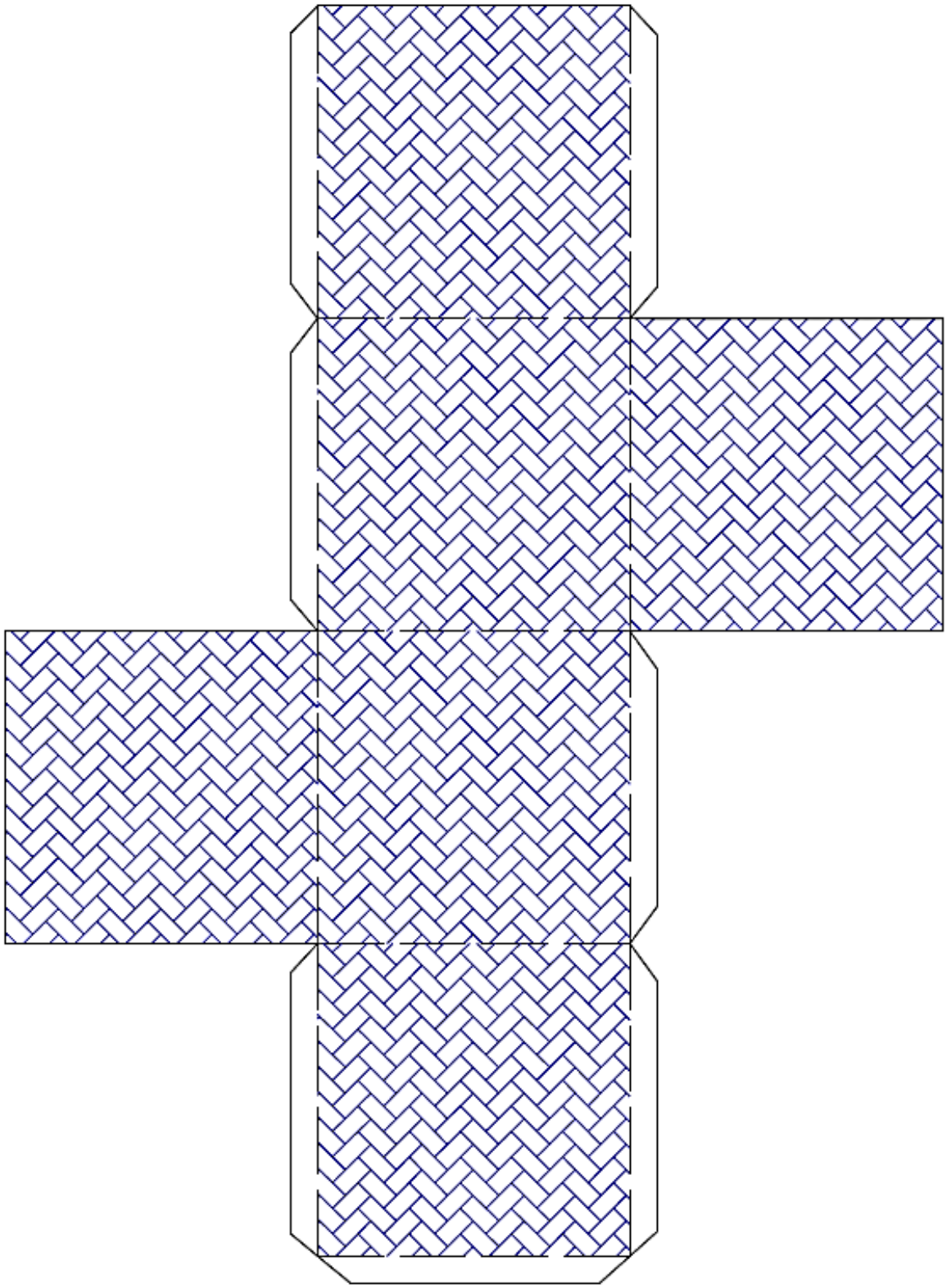
Cubo seccionado em duas peças, formando uma seção quadrangular.
Peça 1.



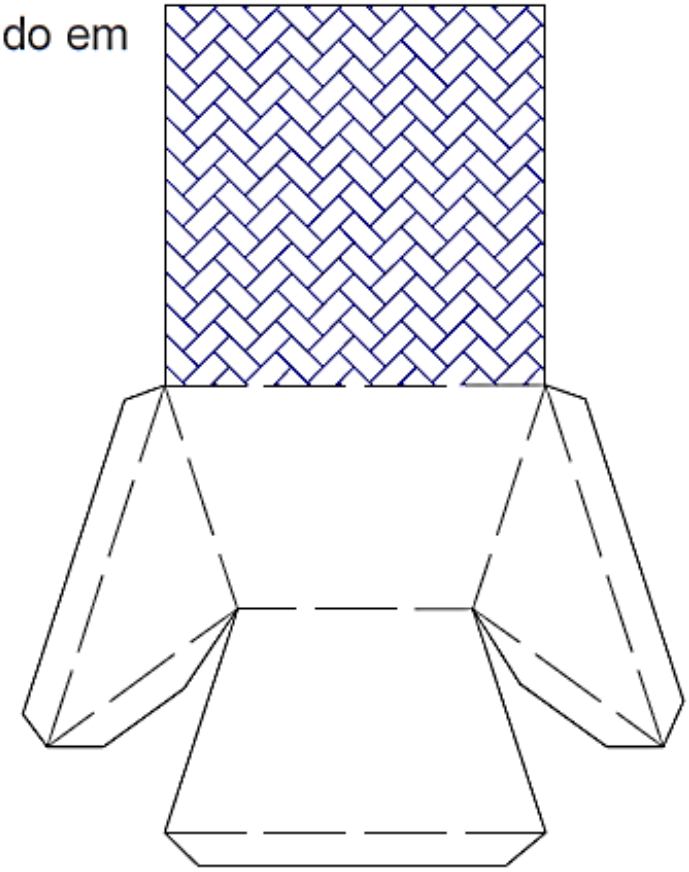
Cubo seccionado em duas peças, formando uma seção quadrangular.
Peça 2.

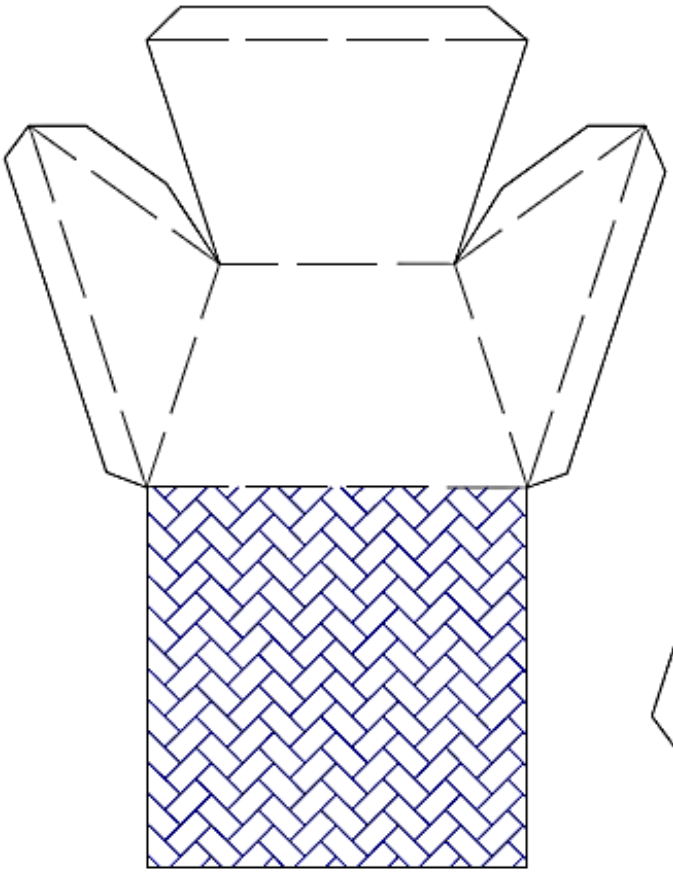


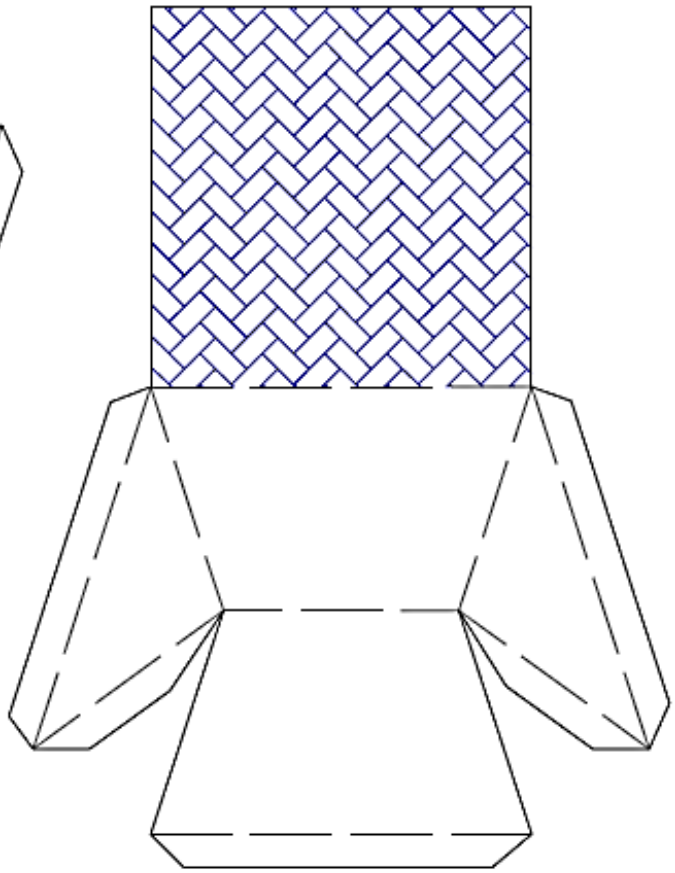
Dodecaedro regular seccionado em sete peças.
Peça 1.



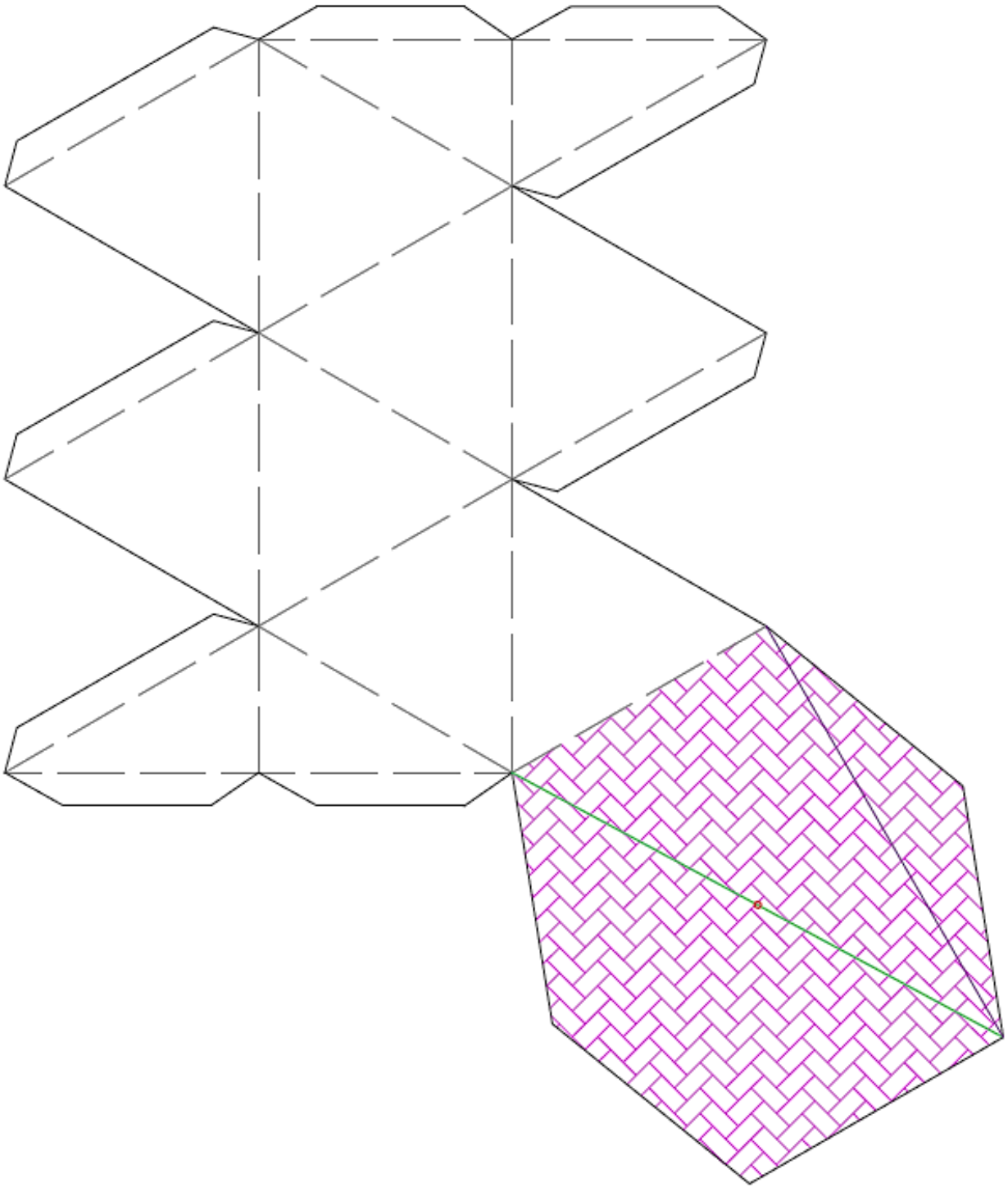
Dodecaedro regular seccionado em sete peças.
Peças 2 a 7.
Imprimir em 2 folhas.



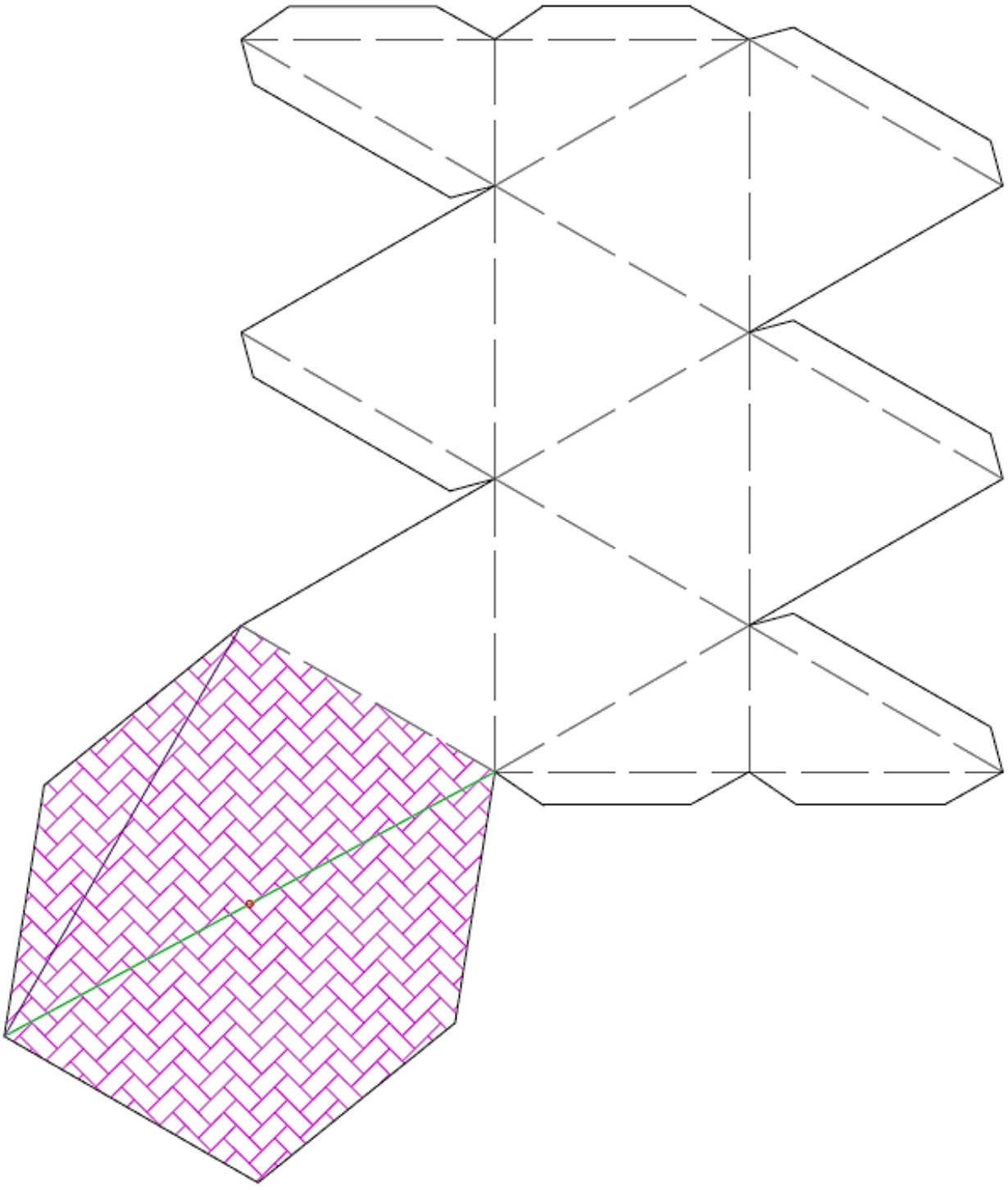




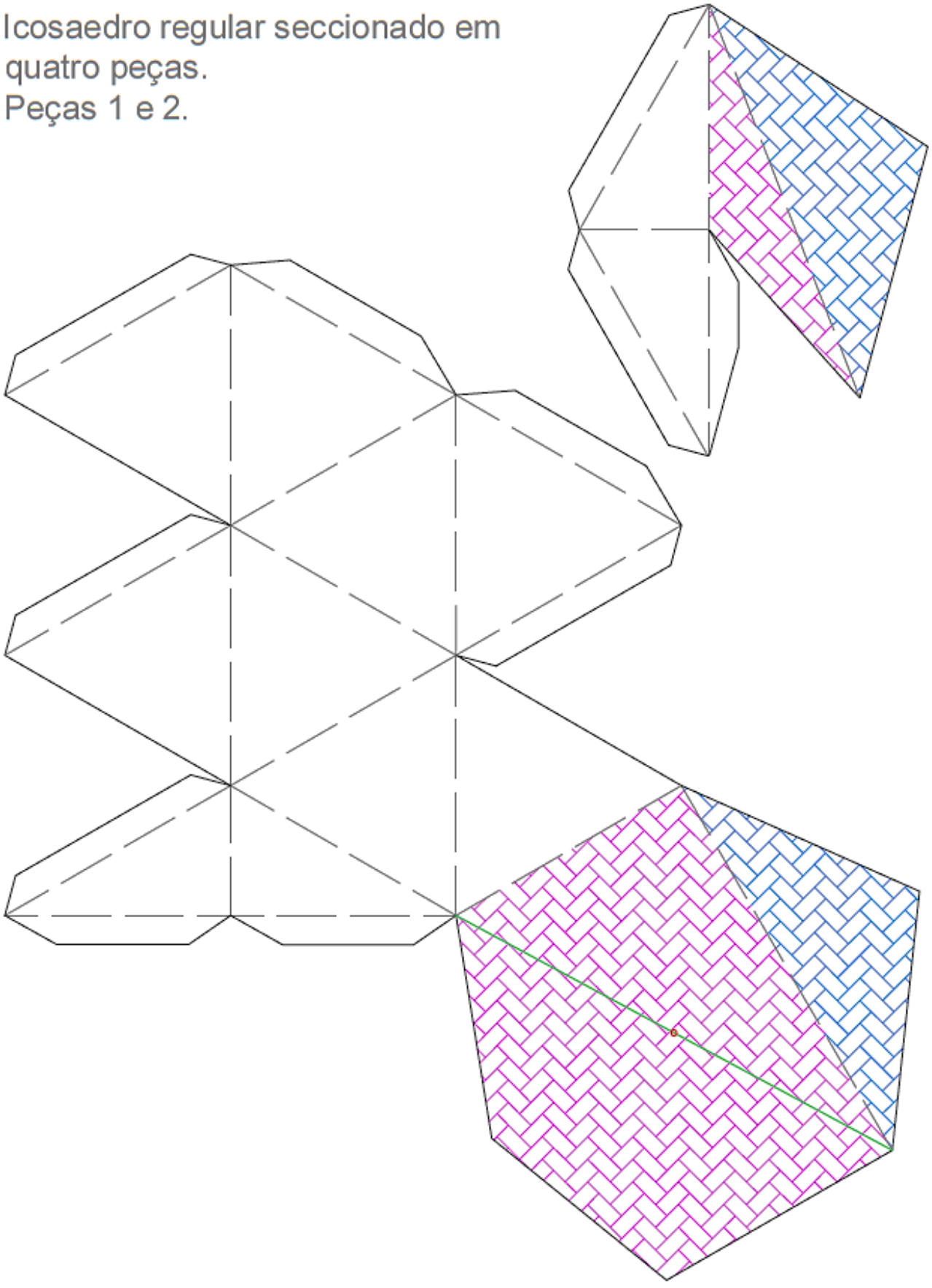
Icosaedro regular seccionado em duas peças.
Peça 1.



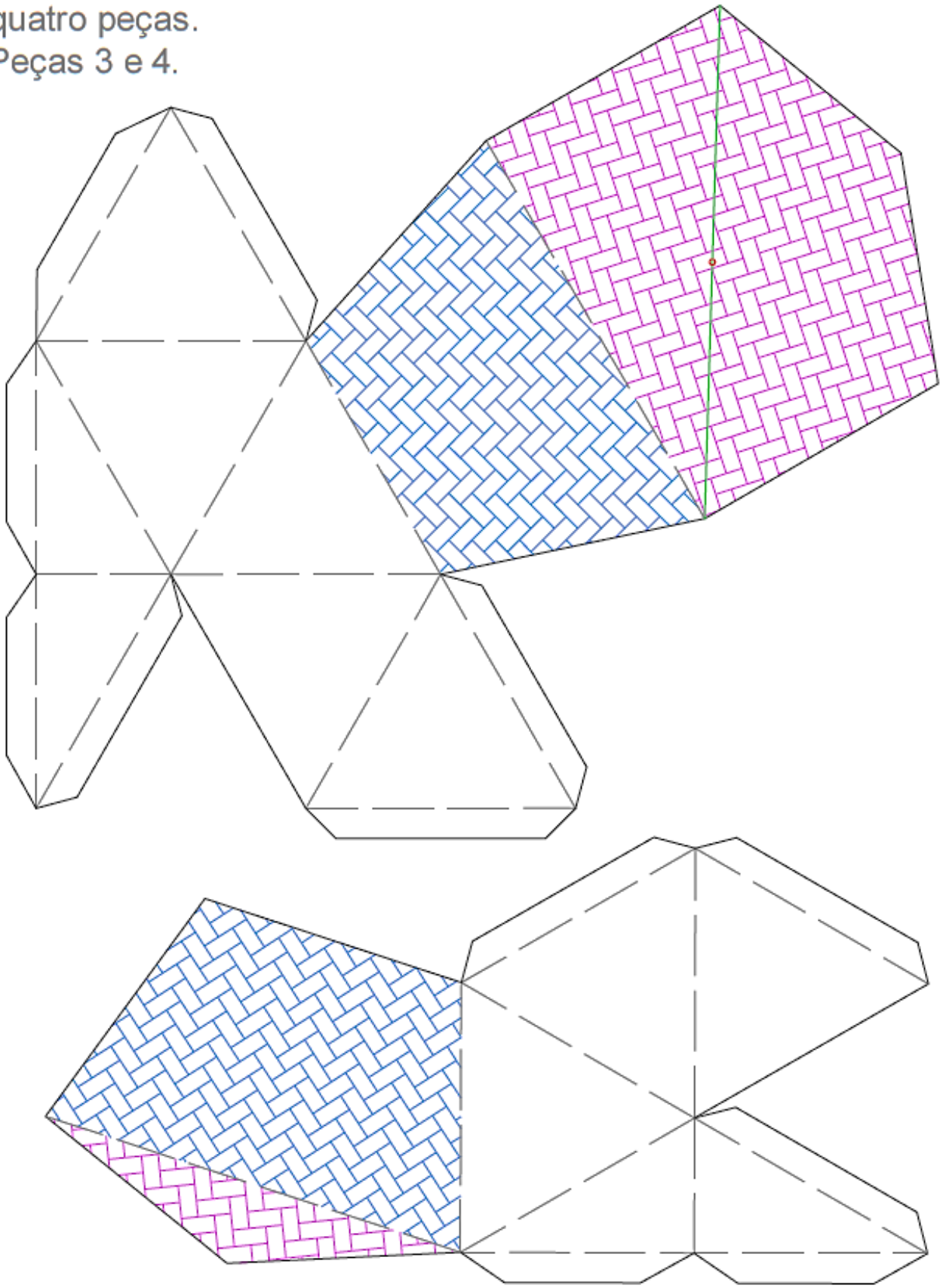
Icosaedro regular seccionado em duas peças.
Peça 2.



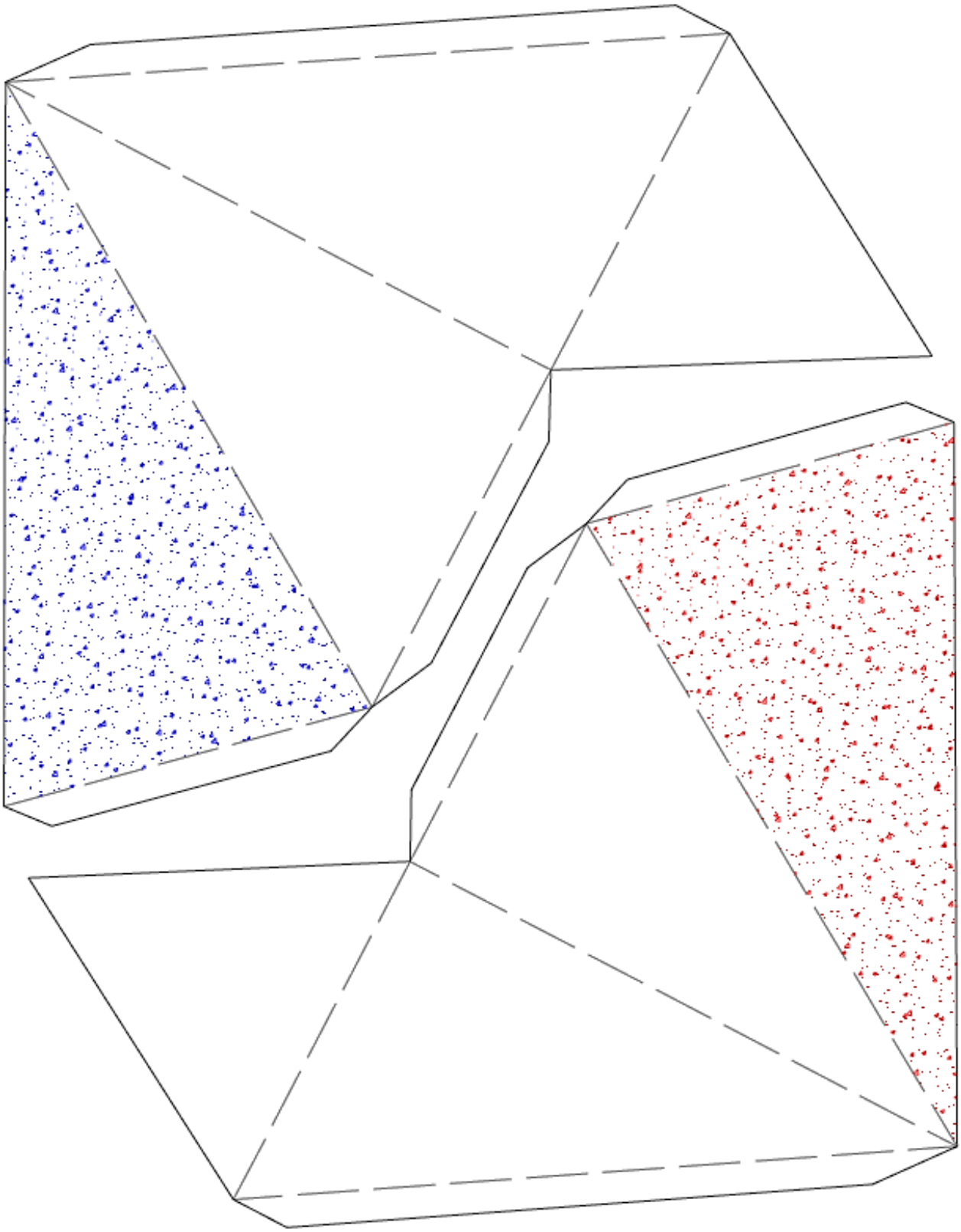
Icosaedro regular seccionado em quatro peças.
Peças 1 e 2.



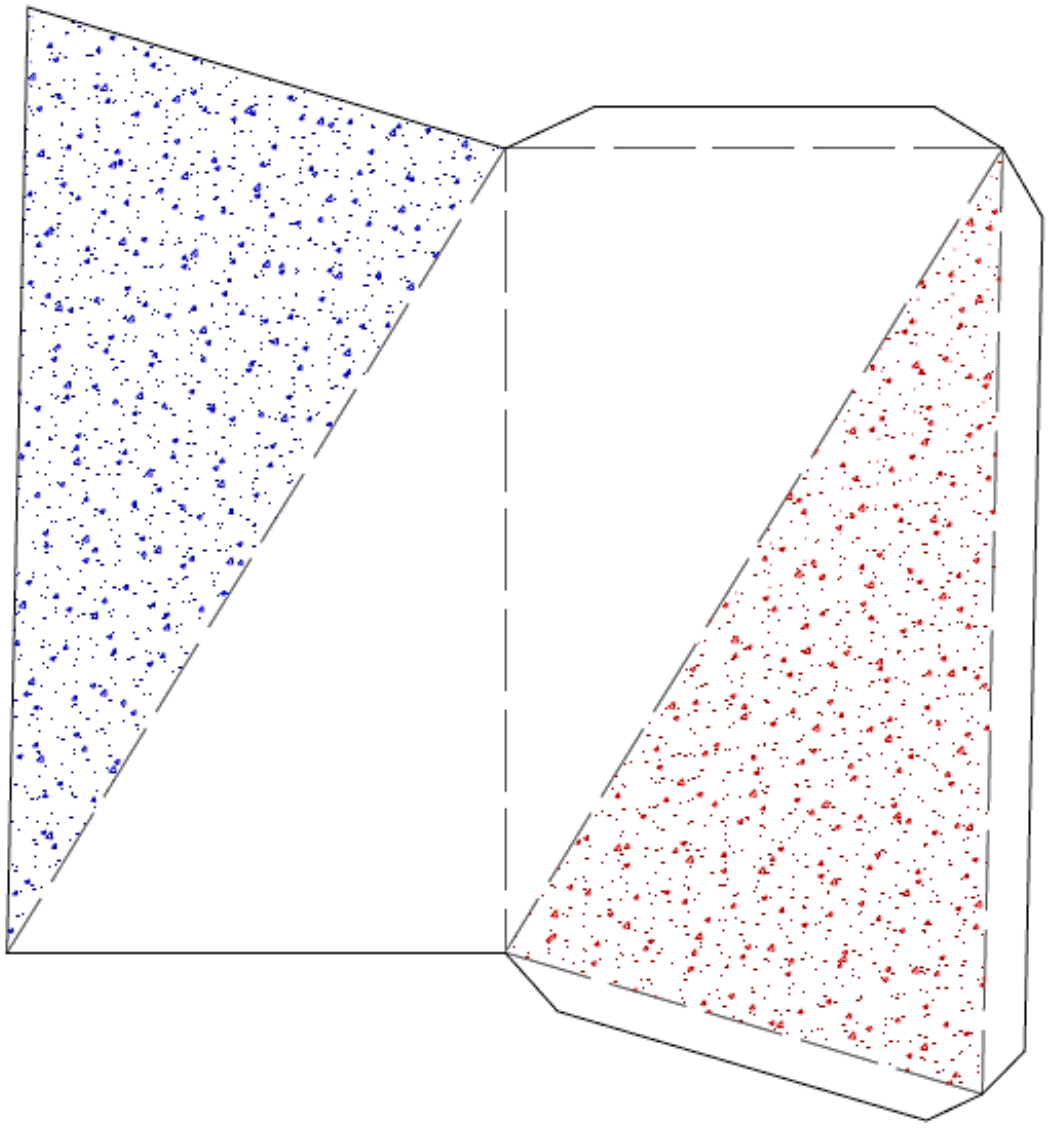
Icosaedro regular seccionado em quatro peças.
Peças 3 e 4.



Prisma reto triangular seccionado em três peças.
Peças 1 e 2.



Prisma reto triangular seccionado em três peças.
Peça 3.



APÊNDICE C – Moldes para montagem em folha plástica

Nas páginas seguintes, temos os moldes das faces dos sólidos regulares convexos e as abas de colagem para essas faces. Caso o leitor queira realizar as montagens sugeridas, imprima as folhas em papel comum ou em papel de gramatura 120 g/m^2, recorte nos locais indicados pela linha contínua e dobre nos locais indicados pelas linhas tracejadas. Para cada poliedro proposto há um molde de face disponível, o qual deve ser colocado sobre a folha plástica e recortá-la no formato desse molde. A quantidade de faces a serem recortadas será de acordo com o sólido escolhido. Antes de recortar e realizar a dobra do papel, faça sulcos utilizando algum instrumento pontiagudo sobre as linhas tracejadas, use uma régua como apoio, e esses instrumentos podem ser a ponta da tesoura, ponta seca do compasso, estilete (neste caso, cuidado para não aplicar muita pressão sobre o papel para não cortá-lo) ou outro material que possa realizar isso. Esses sulcos tem a finalidade de se obter uma dobra mais precisa. Depois de realizado esses sulcos, passe fita adesiva dupla-face sobre as abas (antes mesmo de cortá-las), no sentido do comprimento. Agora pode cortar e a dobra só será feita quando aderir nas bordas das faces do poliedro desejado. Vá efetuando a colagem das abas e faces até completar a montagem.

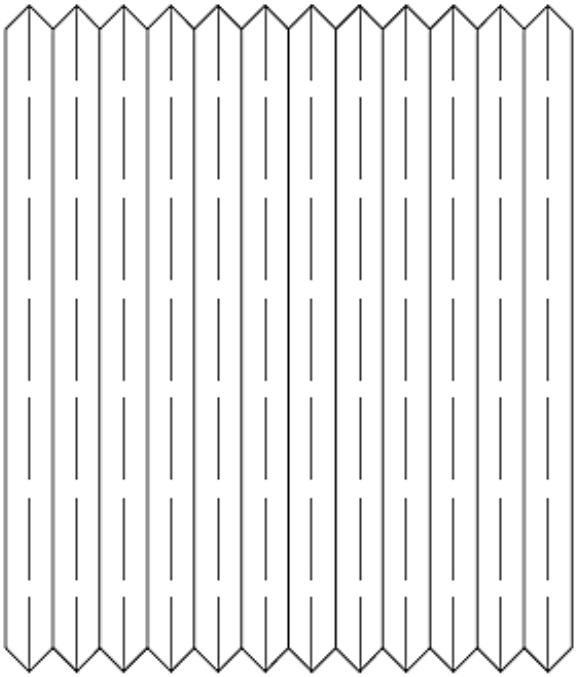
Faça uma consulta ao capítulo 4, *seção 4.5 Máquina para visualização de seções em sólidos*, para os detalhes de como proceder e visualizar as imagens disponíveis.

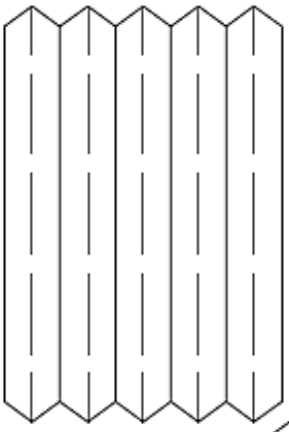
Obs.: Consulte o menu de impressão do software que abrirá o arquivo PDF e verifique se a configuração de ajuste de tamanho está em “tamanho real” ou “nenhum ajuste”.

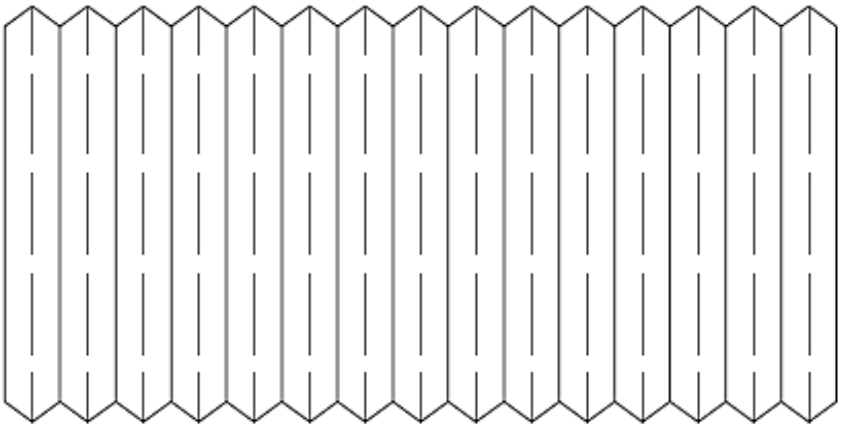
Todos os esquemas mostrados a seguir, foram elaborados pelo próprio autor, utilizando o software NanoCAD, versão 5, cuja licença é gratuita.

Molde
(cubo)

6 faces

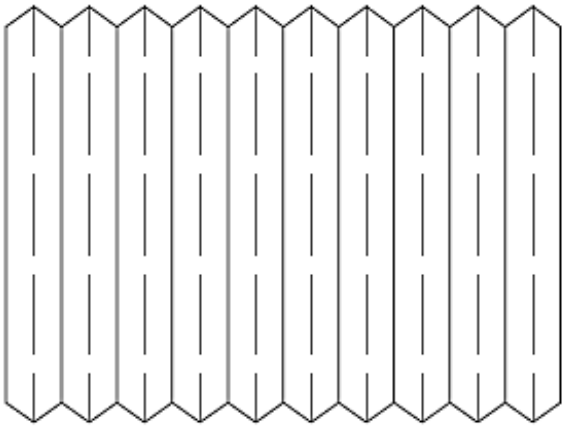


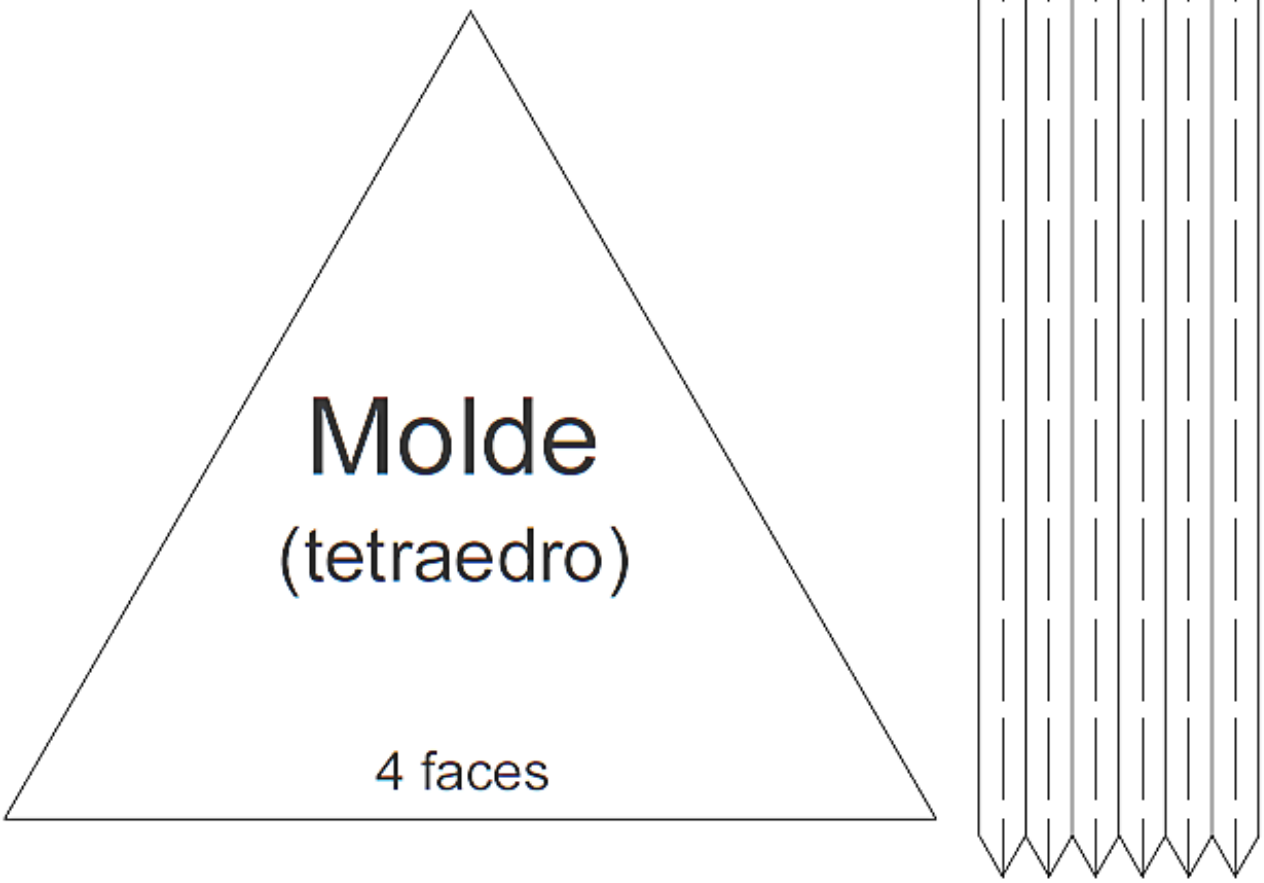


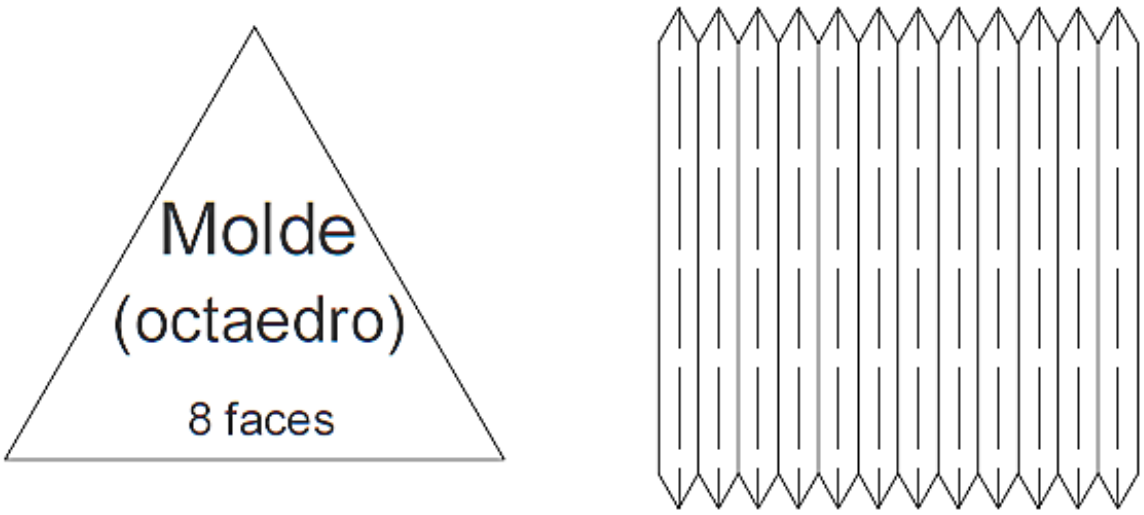


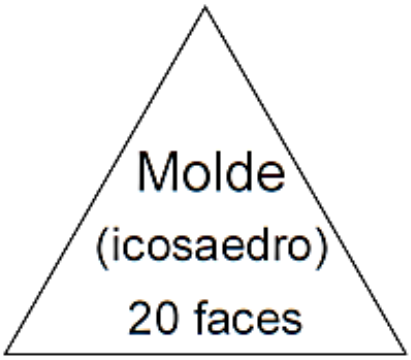
Molde
(dodecaedro)

12
faces




Molde
(tetraedro)
4 faces


Molde
(octaedro)
8 faces


Molde
(icosaedro)
20 faces