Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Júlio César Amaral dos Santos

Números Complexos aplicados à Geometria

Juiz de Fora

2014

Júlio César Amaral dos Santos

Números Complexos aplicados à Geometria

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Guiherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SANTOS, Júlio César Amaral dos

Números Complexos aplicados à Geometria / Júlio César Amaral dos Santos. – 2014.

52 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Guiherme de Assis Vasconcelos.

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Números Complexos. 2. Geometria Plana. 3. Resolução de Problemas. I. VASCONCELOS, Sérgio Guilherme de Assis, orient. II. Título.

Júlio César Amaral dos Santos

Números Complexos aplicados à Geometria

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 09 de agosto de 2014

Prof. Dr. Sérgio Guiherme de Assis Vasconcelos - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Universidade Federal de São João del-Rei

Dedico este trabalho à minha amada esposa Marcelle.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pois, sem ele, nada seria possível. A minha amada esposa Marcelle, pelo amor e carinho nos momentos mais difíceis e que me ajudou a tornar esse sonho possível. A minha mãe, Marlene, pelo amor incondicional e pelo exemplo de força, que nunca me deixou desistir. Obrigado mãe, por ter acreditado em mim! Aos meus avós, Rosa e Gody, pela dedicação, carinho e apoio em todos os momentos da minha vida. Ao meu irmão, Felipe, pelo companheirismo e amizade de sempre. Ao meu sobrinho, Kauã, pela alegria e renovação que só uma criança pode nos proporcionar. Aos demais familiares pela motivação e incentivo. Aos meus amigos pela parceria e todos os bons momentos que passamos juntos. Ao PROFMAT por me proporcionar essa oportunidade. Ao meu orientador Sérgio Vasconcelos pela grande contribuição neste trabalho e em minha vida profissional. Aos professores Francinildo e Sandro pelas enriquecedoras sugestões que aprimoraram a conclusão deste projeto. A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, meu muito obrigado.

“Pode-se perguntar: para que servem essas soluções impossíveis (raízes complexas). Eu respondo: pra três coisas - para a validez das regras gerais, devido a sua utilidade e por não haver outras soluções”

(Girard)

RESUMO

Esse trabalho tem como propósito mostrar algumas aplicações básicas dos números complexos na geometria euclidiana plana. Aqui procuramos ilustrar como é possível trabalhar com os números complexos na sua forma geométrica e também vetorial, com o intuito de apresentar uma forma mais concreta de ensino desse conteúdo dentro da educação básica. A versatilidade e aplicabilidade dos números complexos são apresentadas de uma forma acessível tanto a professores quanto à alunos. A maioria das demonstrações geométricas sugeridas são simples e podem ser facilmente trabalhadas com alunos da educação básica, visto que os conceitos geométricos abordados se resumem ao conteúdo apresentado nas escolas durante o ensino fundamental. Buscamos em diversas situações estabelecer comparações entre o algébrico e o geométrico, com o intuito de que os alunos entendessem que essas duas áreas, ao contrário do que a maioria deles imagina, possuem diversas relações e podem ser facilmente trabalhadas juntas.

Palavras-chave: Números Complexos. Geometria Plana. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This work aims to show some basic applications of complex numbers in plane Euclidean geometry. Here we seek to illustrate how you can work with complex numbers on geometric and also vector form, in order to present a more concrete way of teaching that content in the basic education. The versatility and applicability of complex numbers are presented in an accessible way to both teachers and students. Most of the geometrical demonstrations suggested are simple and can be easily worked with elementary education students, since geometrical concepts discussed are summarized to the content presented in schools during elementary school. We seek to establish, in several situations, comparisons between the algebraic and geometric, with the intention that students understand that these two areas, unlike most of them think, have different relations and can be easily studied together.

Keywords: Complex Numbers. Plane Geometry. Problem Solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Plano de Argand Gauss 17
Figura 2 – Rotação do Afixo de um Número Complexo a partir da multiplicação . 19
Figura 3 – Soma e Diferença Vetorial I 21
Figura 4 – Soma e Diferença Vetorial II 22
Figura 5 – Soma e Diferença Vetorial III 22
Figura 6 – Triângulo Equilátero 23
Figura 7 – A Circunferência 25
Figura 8 – A Mediatriz 26
Figura 9 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro 27
Figura 10 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra I . . 29
Figura 11 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra II . 30
Figura 12 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra III . 30
Figura 13 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra IV . 31
Figura 14 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra V . 31
Figura 15 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra VI . 32
Figura 16 – Resolução do Problema do Tesouro utilizando Geometria Plana Sintética 32
Figura 17 – Modelo Geométrico do Teorema de Napoleão 36
Figura 18 – Demonstração do Teorema de Napoleão por Geometria Plana Sintética 37
Figura 19 – Problema do Valor Máximo e Mínimo de um Complexo 40

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 SOBRE OS OBJETIVOS DESSE TRABALHO 12

3 BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS 13

4 REFERENCIAL TEÓRICO 17

4.1 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO . . . 17

4.2 FORMA TRIGONOMÉTRICA DO CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO 18

4.3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA 18

4.3.1 MULTIPLICAÇÃO 18

4.3.2 DIVISÃO 19

4.3.3 POTENCIAÇÃO 20

4.3.4 RADICIAÇÃO 20

4.3.5 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO 21

5 IMPORTANTES RESULTADOS ENTRE OS COMPLEXOS E A GEOMETRIA 23

5.1 CONDIÇÃO PARA QUE TRÊS PONTOS SEJAM VÉRTICES DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO 23

5.2 LUGARES GEOMÉTRICOS 24

5.2.1 A CIRCUNFERÊNCIA 25

5.2.2 A MEDIATRIZ 25

6 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 27

6.1 O PROBLEMA DO TESOURO 27

6.1.1 Solução 1 (Utilizando Números Complexos) 27

6.1.2 Solução 2 (Utilizando o GeoGebra) 29

6.1.3 Solução 3 (Utilizando Geometria Plana Sintética) 32

6.1.4 ABORDAGEM PEDAGÓGICA 34

6.2 O TEOREMA DE NAPOLEÃO 35

6.2.1 Demonstração 1 (Utilizando Geometria Plana Sintética) 36

6.2.2 Demonstração 1 (Utilizando Números Complexos) 38

6.2.3 ABORDAGEM PEDAGÓGICA 39

6.3 VALOR MÁXIMO E MÍNIMO DE UM COMPLEXO 40

6.3.1 ABORDAGEM PEDAGÓGICA 41

6.4 COORDENADAS INTEIRAS 41

6.4.1 ABORDAGEM PEDAGÓGICA 42

7 **ENTREVISTA COM PROFESSORES** **44**
8 **CONCLUSÃO** **47**

REFERÊNCIAS **48**
ANEXO A – Entrevistas com Professores das Educação Básica **49**

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho busca apresentar os Números Complexos de uma forma diferente da visão estereotipada do Ensino Médio. Na maioria dos cursos ministrados na educação básica, os Números Complexos são definidos apenas como uma extensão dos números reais. Não que isso esteja errado, mas apenas com esse conceito não se é capaz de fornecer ao aluno requisitos que o permitam compreender quais as possibilidades de trabalho com esses números.

Historicamente, sabe-se que os números complexos foram tidos como "estranhos" e pouco aplicáveis durante um longo tempo. Veremos no capítulo 3 que foi somente na passagem do século XVIII para o século XIX, quando Gauss (1777-1855) e Argand (1786-1822) propuseram uma interpretação geométrica desses números, que a comunidade científica os aceitou e passou a incorporá-los formalmente à matemática. Seguindo esse contexto, a ideia dessa dissertação é mostrar situações problema dentro da geometria que possam ser resolvidas com o auxílio dos números complexos.

Tentaremos mostrar que, em muitos casos, como os exemplificados no capítulo 5 e 6, ao lançarmos mão dos números complexos o problema a ser resolvido se torna muito mais fácil. Faremos comparações entre diferentes formas de resolver alguns problemas (usando complexos e geometria euclidiana, por exemplo) e assim mostraremos a força e a potencialidade dos números complexos.

Para desenvolvermos esse trabalho, será necessária a apresentação e formalização de uma teoria básica dos números complexos, partindo de sua forma algébrica para a sua forma trigonométrica, para que possamos manipular geometricamente esses números como vetores no plano de Argand-Gauss e, a partir daí, mostrar algumas importantes e interessantes aplicações dos complexos, essa formalização será encontrada no capítulo 4 .

Alguns dos problemas que serão apresentados, possuem um certo grau de dificuldade. Sabendo disso, buscamos também apresentar problemas mais simples e que estejam ao alcance de um aluno do ensino médio. E ainda, para tornar algumas situações menos traumáticas, utilizaremos o software GeoGebra para aproximar os alunos do problema.

2 SOBRE OS OBJETIVOS DESSE TRABALHO

Como já foi mencionado, números complexos não são tratados com a profundidade que merecem durante o ensino médio. Em geral, define-se apenas sua forma algébrica e mostra-se as operações possíveis entre complexos. A partir daí, o que normalmente é feito é mostrar os números complexos como raízes de polinômios. Assim existe claramente uma marginalização do assunto com o intuito de enfatizar os polinômios.

Esse trabalho busca fomentar discussões à respeito dos números complexos na sua forma trigonométrica que, como mostraremos, é extremamente rica e possui uma infinidade de aplicações, principalmente na geometria. É preocupante que muitos professores que lecionam no ensino médio sequer tenham o conhecimento das potencialidades de uso dos números complexos. Nossa ideia aqui é apresentar algumas aplicações simples dos números complexos para ilustrar, tanto para o professor, quanto para o aluno, a gama de possibilidades que esse assunto possui. Queremos também, mostrar que a matemática não é uma ciência subdividida em vários temas que não se relacionam, e sim, que ela é uma unidade em que todas as suas ramificações de alguma forma estão interligadas.

Apresentar ao aluno diversas formas de resolver o mesmo problema, utilizando contextos matemáticos diferentes, é extremamente enriquecedor e elucidador para ele. Quando o discente observa que existem relações entre diferentes áreas da matemática, ele consegue se posicionar melhor à respeito das relações existentes da matemática com o mundo.

É importante que o docente em matemática compreenda que ele deve estimular discussões em sala, para promover o crescimento do aluno e, inclusive, o seu próprio crescimento.

Assim esse trabalho tenta mostrar, utilizando como exemplo números complexos, que todos os ramos da matemática se comunicam de alguma forma e o quanto é importante que o professor consiga ser mediador entre os alunos e a matemática, para que os discentes tenham uma visão mais global da disciplina.

3 BREVE HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Historicamente sempre houve uma certa resistência por parte dos matemáticos em trabalhar com os números complexos. Mas ao longo do tempo viu-se o surgimento de diversos problemas que tinham aplicação prática, mas que exigiam a resolução de equações em que apareciam raízes não reais, que os matemáticos ainda não conseguiam manipular com o rigor que lhes é peculiar.

Segundo Iezzi em [3], esse problema só começou a ser resolvido quando o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) apresentou um método para a resolução do seguinte problema:

"Dividir o número 10 em duas partes cujo o produto é 40".

Esse problema pode ser modelado pela simples equação

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Para resolvê-lo, Cardano utilizou uma técnica bem simples, conhecida nos dias de hoje como completar quadrados. Assim chegou ao seguinte impasse

$$(x-5)^2 = -15.$$

Já era conhecido dos matemáticos que nenhum número real elevado ao quadrado, poderia ser um número negativo. Mas Cardano prosseguiu os seus cálculos e concluiu que

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Efetuando

$$(5+\sqrt{-15}).(5-\sqrt{-15}),$$

Cardano concluiu que sua ideia (pelo menos para aquele exemplo) estava correta. Porém, ele ainda não sabia qual a interpretação daquele "estranho" número obtido pela raiz quadrada de um número negativo.

Era normal aquele número levantar tamanha estranheza, pois naquele momento os matemáticos ainda não tinham sequer formalizado o conjunto dos números inteiros.

Mais tarde, um discípulo de Cardano, Bombelli (1526-1572) conseguiu dar um tratamento melhor a álgebra existente entre os números complexos. Ao trabalhar com equações de terceiro grau, ele introduz a quantidade "piu di meno", que na linguagem de hoje significaria $\sqrt{-1}$.

Ao longo da história, os números complexos continuaram sendo utilizados pelos matemáticos sem muita formalidade. Apesar de considerarem esse tipo de número inexistente, continuaram operando com eles e em muitos casos cometendo erros, como ocorreu com Euler(1707-1783), ao dizer que

$$(\sqrt{-2}).(\sqrt{-2}) = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{4} = 2,$$

generalizando para números complexos a propriedade dos números reais

$$(\sqrt{a}).(\sqrt{b}) = \sqrt{a.b}.$$

Os números complexos só vieram realmente a tomar forma na virada do século XVIII para o século XIX, quando três matemáticos, K. F. Gauss (1777-1855), Caspar Wessel (1745-1818) e Jean-Robert Argand (1786-1822) resolveram, independentemente, atribuir uma formatação geométrica para os números complexos. Nesse momento, Gauss procurava uma representação dos complexos no plano através de pontos que o representassem, enquanto Argand preferiu dar um tratamento vetorial para a nova classe de números.

Atualmente essa representação é denominada de plano de Argand-Gauss, que será apresentado posteriormente no capítulo 4. É importante ressaltar que o tratamento proposto por Argand contribui muito mais ao desenvolvimento do assunto, visto que o seu tratamento vetorial permite uma manipulação geométrica (assunto que iremos abordar nesse trabalho) muito mais eficiente do que a proposta por Gauss.

Resolvido o centenário problema da representação geométrica dos números complexos, ainda existia uma questão a ser tratada: como manipular algebricamente um número que possui a forma $z = a + bi$? Isso veio a ser resolvido pelo matemático irlandês Willian Rowan Hamilton (1805-1865), que teve a brilhante ideia de encarar os números complexos como pares ordenados (a, b) onde a representava a parte real de z (na linguagem moderna escrita como $Re(z) = a$) e b denotava a parte imaginária de z (na linguagem moderna escrita como $Im(z) = b$). Assim Hamilton define a adição e multiplicação entre complexos da seguinte forma.

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ definimos

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z_1.z_2 = (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Observe ainda que definidas a adição e a multiplicação entre complexos, podemos estabelecer também a diferença e a divisão. Para isso basta definirmos o elemento neutro e o elemento inverso, da adição e da multiplicação.

A seguir encontraremos os elementos nrutros da adição e da multiplicação.

Seja $z = a+bi$ um número complexo qualquer, estamos em busca de dois complexos $z_0 = c + di$ e $z_1 = e + fi$ tais que:

$$z + z_0 = z$$

e

$$z.z_1 = z.$$

onde z_0 será denominado elemento neutro da adição e z_1 elemento neutro da multiplicação.

Pela definição da adição temos:

$$z + z_0 = z \Longleftrightarrow (a, b) + (c, d) = (a, b) \Longleftrightarrow (a + c, b + d) = (a, b),$$

o que implica em dizer que $a + c = a$ e $b + d = b$ e logo $c = d = 0$.

Fica então estabelecido que o elemento neutro da adição é $z_0 = (0, 0) = 0 + 0i = 0$.

Temos ainda pela definição da multiplicação que:

$$z.z_1 = z \Longleftrightarrow (a, b).(e.f) = (a, b) \Longleftrightarrow (ae - bf, af + be) = (a, b),$$

o que nos remete a dizer que $ae - bf = a$ e $af + be = b$, o que implica (resolvendo o sistema anterior) em $e = 1$ e $f = 0$.

E assim estabelecemos que o elemento neutro da multiplicação é $z_1 = (1, 0) = 1 + 0i = 1$.

Vamos agora demonstrar que todo número complexo não nulo, possui o inverso aditivo e o inverso multiplicativo, e encontrá-los.

Novamente, seja $z = a + bi$ um complexo qualquer. Mostraremos que existem dois complexos $z_1 = c + di$ e $z_2 = e + fi$ tais que $z + z_1 = 0$ e $z.z_2 = 1$, sendo z_1 denominado inverso aditivo de z e z_2 inverso multiplicativo de z.

Assim,

$$z + z_1 = 0 \Longleftrightarrow (a, b) + (c, d) = (0, 0) \Longleftrightarrow (a + c, b + d) = (0, 0),$$

o que implica em dizer que $a + c = 0$ e $b + d = 0$ e consequentemente $c = -a$ e $d = -b$. Assim, estabelecemos que o inverso aditivo do complexo $z = a + bi$ é dado pelo complexo $z_1 = -a - bi$.

Vamos agora estabelecer o inverso multiplicativo de z,quando esse for não nulo.

Temos,

$$z.z_2 = 1 \Longleftrightarrow (a, b).(e, f) = (1, 0) \Longleftrightarrow (ae - bf, af + be) = (1, 0),$$

o que implica em $ae - bf = 1$ e $af + be = 0$. Resolvendo o sistema anterior encontramos:

$$e = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

e

$$f = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Fica estabelecido então que o inverso multiplicativo de $z = a + bi$ não nulo é dado pelo complexo:

$$z_2 = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2},$$

Estabelecidos os inversos aditivos e multiplicativos, define-se a operação de subtração como soma do inverso aditivo, a operação de divisão como produto do inverso multiplicativo.

Note que, do ponto de vista algébrico essa definição é excelente, pois além de permitir as operações entre os números complexos, conseguimos definir um número real também como um par ordenado, basta dizermos que (a, b) é real se e somente se $b = 0$. Sendo assim, podemos definir o conjunto dos números complexos como uma extensão do conjunto dos números reais. De uma forma análoga define-se o que é um imaginário puro (ou complexo puro), como um número complexo (a, b), onde $a = 0$, ou seja, sua forma é $(0, b)$, o que corresponde algebricamente a bi. Assim, fazendo i = (0, 1), obtemos uma explicação lógica para o símbolo $\sqrt{-1}$. Pois,

$$i^2 = i.i = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1.$$

A partir daí as teorias baseadas nos Números Complexos ganharam uma sustentação formal e puderam se desenvolver fora da marginalidade que lhes era imposta.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Sabemos que na forma algébrica, um número complexo é expresso por $z = a + bi$, onde $a, b \in \Re$ e i é a unidade imaginária. Além disso a é denominada parte real do complexo z, que denotamos $Re(z) = a$. Já o número real b é chamado de parte imaginária de z, e o representamos por $Im(z) = b$.

Para definirmos a forma trigonométrica de um complexo vamos utilizar sua representação geométrica, que será feita num plano conhecido como "Plano de Argand-Gauss". Essa definição pode ser encontrada em [1], [2], [3], [4]. A exemplo do plano cartesiano, o plano de Argand-Gauss é formado por um par de eixos orientados e ortogonais. No eixo horizontal, marcamos o valor da parte real do complexo z, enquanto que no eixo vertical representamos o valor da parte imaginária de z.

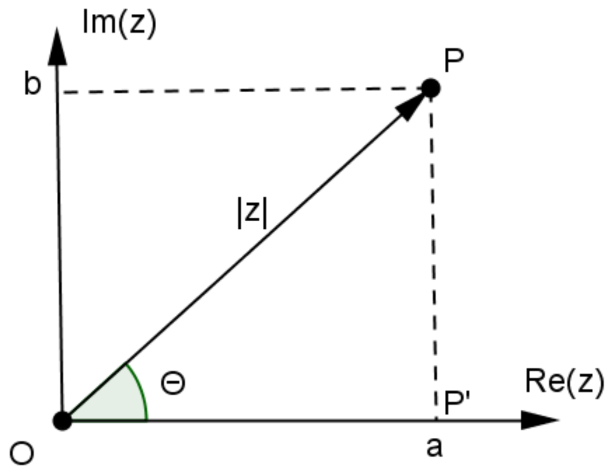

Figura 1 – Plano de Argand Gauss

O ponto P é denominado o afixo do complexo z, e $\overrightarrow{OP}$ é o vetor com origem em O e sentido de O para P, definido por $\overrightarrow{OP} = P - O$. Temos ainda que $|\overrightarrow{OP}| = |z|$, que à partir de agora passaremos a denotar por ρ, e θ que é o ângulo denominado argumento de z e denotado por $arg(z) = \theta$.

Vamos então definir a forma trigonométrica de z.

Aplicando o teorema de pitágoras no triângulo OPP' segue que $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, e ainda, utilizando a trigonometria básica temos:

$$sen\theta = \frac{PP'}{OP} \iff sen\theta = \frac{b}{\rho} \iff b = \rho.sen\theta$$

$$cos\theta = \frac{OP'}{OP} \Longleftrightarrow cos\theta = \frac{a}{\rho} \Longleftrightarrow a = \rho.cos\theta$$

Como $z = a + bi$ segue que $z = \rho.cos\theta + i.\rho.sen\theta = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$, que a partir de agora passaremos a denotar

$$z = \rho.cis\theta$$

onde $\rho = |z|$ e $\theta = arg(z)$.

4.2 FORMA TRIGONOMÉTRICA DO CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $z = a + bi$ um número complexo qualquer. Algebricamente definimos o conjugado desse complexo como $\overline{z} = a - bi$. Vejamos então a representação para $\overline{z}$ na forma trigonométrica.

Já vimos que $z = \rho.cis\theta$, assim $\overline{z} = a - bi = \rho.cos\theta - i.\rho.sen\theta = \rho.(cos\theta - i.sen\theta) = \rho.(cos(-\theta) + i.sen(-\theta)) = \rho.cis(-\theta)$.

Assim, se $z = \rho.cis\theta$ então $\overline{z} = \rho.cis(-\theta)$.

4.3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Nesse seção utilizaremos os números a forma trigonométrica para tratar das operações com números complexos.

4.3.1 MULTIPLICAÇÃO

Sejam $z_1 = \rho.cis\alpha$ e $z_2 = \rho'.cis\beta$, vamos calcular $z_1.z_2$.

Segue que

$$\begin{gathered} z_1.z_2 = \rho.cis\alpha.\rho'.cis\beta = \\ = \rho.\rho'.cis\alpha.cis\beta = \\ = \rho.\rho'.(cos\alpha + i.sen\alpha).(cos\beta + i.sen\beta) = \\ = \rho.\rho'.[(cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta) + i.(sen\alpha.cos\beta + sen\beta.cos\alpha)] = \\ = \rho.\rho'.(cos(\alpha+\beta) + i.sen(\alpha+\beta)) = \\ = \rho.\rho'.cis(\alpha+\beta) \end{gathered}$$

.

Assim concluímos que

$$z_1.z_2 = \rho.cis\alpha.\rho'.cis\beta = \rho.\rho'.cis(\alpha + \beta)$$

.

Observação: É importante observar que multiplicar um complexo $z_1 = \rho.cis\alpha$ por um outro complexo $z_2 = cis\beta$ de módulo unitário, significa geometricamente rotacionar, no sentido antihorário, o vetor referente ao complexo z_1 em β graus. Veja:

$$z_1.z_2 = \rho.cis\alpha.cis\beta = \rho.cis(\alpha + \beta).$$

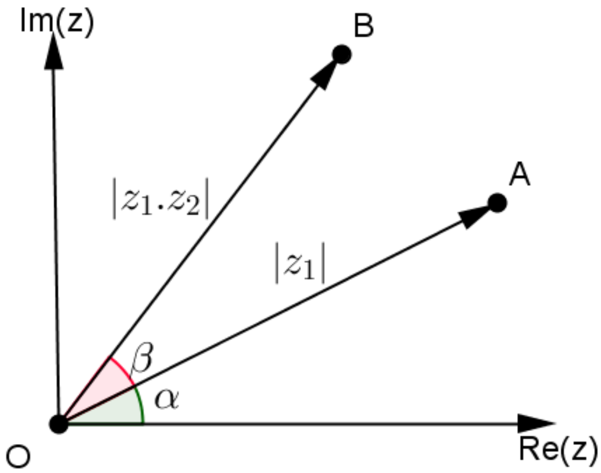

Figura 2 – Rotação do Afixo de um Número Complexo a partir da multiplicação

Note então que: A é o afixo de z_1 e B o afixo de $z_1.z_2$ e ainda, $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = |z_1|$.

4.3.2 DIVISÃO

Sejam $z_1 = \rho.cis\alpha$ e $z_2 = \rho'.cis\beta$, calcularemos $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho.cis\alpha}{\rho'.cis\beta} = \frac{\rho.cis\alpha}{\rho'.cis\beta}.\frac{cis(-\beta)}{cis(-\beta)} = \frac{\rho.cis(\alpha - \beta)}{\rho'.cis(\beta - \beta)} =$$
$$\frac{\rho.cis(\alpha - \beta)}{\rho'.cis(0)} = \frac{\rho.cis(\alpha - \beta)}{\rho'.(cos0 + i.sen0)} = \frac{\rho}{\rho'}.cis(\alpha - \beta)$$

Conclui-se então que

$$\frac{\rho.cis\alpha}{\rho'.cis\beta} = \frac{\rho}{\rho'}.cis(\alpha - \beta).$$

4.3.3 POTENCIAÇÃO

Sejam $z = \rho.cis\theta$ e n um número natural. Vamos estabelecer o valor de z^n.

$$z^n = (\rho.cis\theta)^n =$$
$$\rho^n.cis^n\theta = \rho^n.cis\theta.cis\theta.cis\theta...cis\theta =$$
$$\rho^n.cis(\theta + \theta + \theta + ... + \theta) = \rho^n.cis(n\theta).$$

Assim,

$$z^n = \rho^n.cis(n\theta).$$

4.3.4 RADICIAÇÃO

Sejam $z = \rho.cis\theta$ e n um número natural. Vamos estabelecer o valor de $\sqrt[n]{z}$. Observe que calcular o valor de $\sqrt{z}$, equivale a encontrar um número complexo $w = \rho'.cis\alpha$ tal que $w^n = z$. Usando a expressão para a potenciação, definida anteriormente, temos:

$$w^n = (\rho')^n.cis(n\alpha) = \rho.cis\theta = z$$

, o que mplica em dizer que

$$(\rho')^n = \rho$$

e

$$n\alpha = \theta + 2k\pi$$

k é inteiro.

Assim podemos afirmar que

$$\rho' = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Com isso concluímos que

$$\sqrt{z} = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

onde k é um número inteiro. Repare que quando k varia de 0 a $n-1$ temos os afixos dos complexos associados, sendo os vértices de um polígono regular com n lados.

Observação: Nesse momento é importante enfatizarmos as raízes da unidade. Observe que o número complexo 1 pode ser escrito na forma trigonométrica como

$$1 = 1 + 0i = cis(0).$$

Assim as raízes e-nésimas da unidade serão dadas por

$$\sqrt[n]{1} = cis\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

onde k é um número inteiro.

Por exemplo, a $\sqrt[3]{1}$ é igual a $cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$, com $k = 0, 1, 2$. Assim $\sqrt[3]{1}$ será igual a $cis(0)$, $cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Repare que os afixos desses complexos serão os vértices de um triângulo equilátero.

4.3.5 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

A respeito da adição e da subtração entre números complexos, faremos um tratamento um pouco diferente. Assim como foi o tratamento feito por Argand, trataremos os números complexos como vetores no plano de Argand-Gauss. Assim podemos definir a soma e a diferença entre dois complexos através da regra do paralelogramo.

Sejam dois números complexos z_1 e z_2 tais que seus afixos no plano complexo sejam A e B, respectivamente.

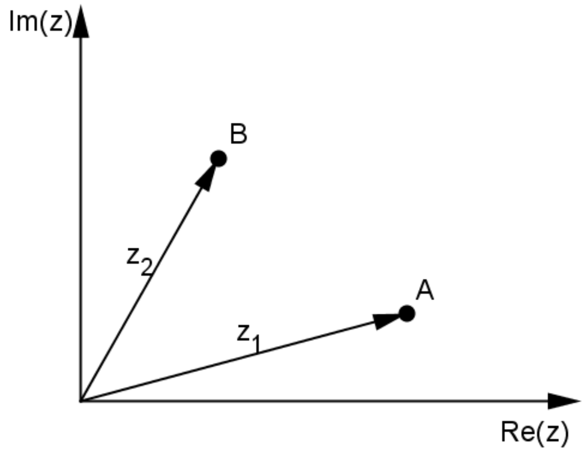

Figura 3 – Soma e Diferença Vetorial I

Assim, para definir a adição e a subtração entre os complexos z_1 e z_2, faremos a construção do paralelogramo $OACB$, tal que o vetor w é paralelo ao vetor z_1 e o vetor v é paralelo ao vetor z_2.

Vamos estabelecer então a soma entre dois complexos, ou seja, $a = z_1 + z_2$ como sendo o vetor obtido pela diagonal maior do paralelogramo. Enquanto que a diferença $b = z_1 - z_2$ é dado como o vetor obtido pela diagonal menor desse mesmo paralelogramo, veja na figura 5.

Com isso concluímos que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = z_1 - z_2$, sendo A e B afixos dos complexos z_1 e z_2, respectivamente.

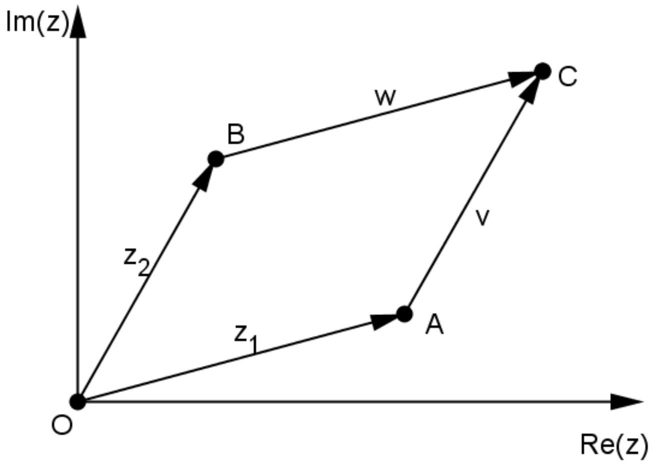

Figura 4 – Soma e Diferença Vetorial II

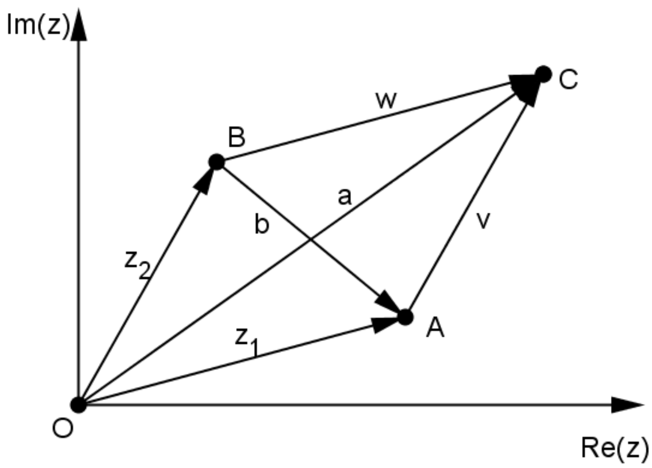

Figura 5 – Soma e Diferença Vetorial III

5 IMPORTANTES RESULTADOS ENTRE OS COMPLEXOS E A GEOMETRIA

Nesta seção vamos apresentar como relacionar os números complexos com conceitos de geometria.

5.1 CONDIÇÃO PARA QUE TRÊS PONTOS SEJAM VÉRTICES DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 formam um triângulo equilátero se, e somente se, $z_1 + w.z_2 + w^2.z_3 = 0$ ou $z_1 + \overline{w}.z_2 + \overline{w}^2.z_3 = 0$, onde w é uma raíz cúbica da unidade, diferente de 1.

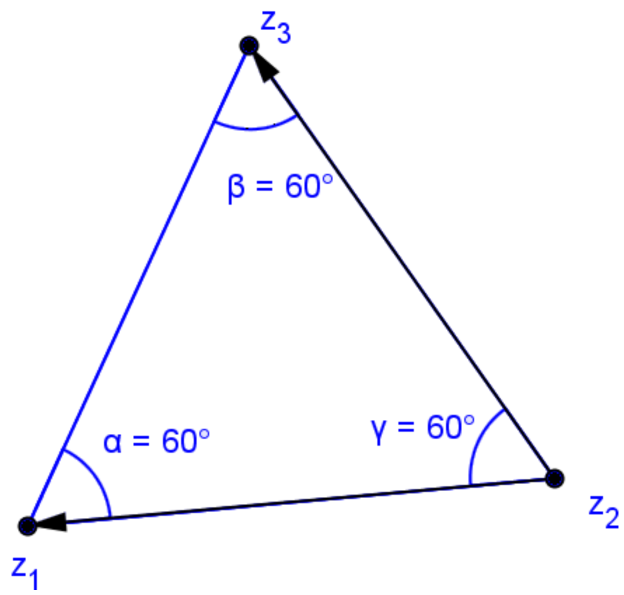

Figura 6 – Triângulo Equilátero

A seguir veja a demonstração da afirmação anterior.

Como z_1, z_2, z_3 formam um triângulo equilátero podemos afirmar que os vetores $\overrightarrow{z_2z_1}$ e $\overrightarrow{z_2z_3}$ formam um ângulo de $\pm 60^o$. Sem perda de generalidade, vamos fixar o ângulo de 60^o. Pela propriedade da multiplicação entre números complexos tem-se

$$(z_3 - z_2).cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = z_1 - z_2$$

. Daí temos que:

$$z_1 + z_2.cis\left(\frac{\pi}{3}\right) - z_2 - z_3.cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

, ou seja,

$$z_1 + z_2.\left(cis\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1\right) - z_3.cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

isto é,

$$z_1 + z_2.\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i - 1\right) - z_3.cis\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i\right) = 0,$$

tornando-se

$$z_1 + z_2.\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i\right) + z_3.cis\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i\right) = 0,$$

o que é equivalente a

$$z_1 + z_2.cis\left(\frac{2.\pi}{3}\right) + z_3.cis\left(\frac{4.\pi}{3}\right) = 0,$$

obtendo assim

$$z_1 + w.z_2 + w^2.z_3 = 0$$

onde w é uma raiz cúbica da unidade. Analogamente para um ângulo de -60^{o} temos $z_1 + \overline{w}.z_2 + \overline{w}^2.z_3 = 0$.

Com esse resultado podemos facilmente verificar se um triângulo qualquer é equilátero.Veja o exemplo a seguir.

Prove que os pontos $A(0,0)$, $B(4,3)$ e $C\left(2 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + 2.\sqrt{3}\right)$ são vértices de um triângulo equilátero.

De fato, identificando o ponto A como $0+0i$, B como $4+3i$ e C como $\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + 2.\sqrt{3}\right)$

$$A+w.B+w^2.C = (0+0.i)+(4+3.i).cis\left(\frac{2.\pi}{3}\right)+\left(2 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 2.\sqrt{3}).i\right).cis\left(\frac{4.\pi}{3}\right) =$$

$$= (4+3.i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i\right) + \left(2 - 3.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 2.\sqrt{3}.i\right).\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i\right)$$

Desenvolvendo a expressão encontraremos que o seu valor é igual a zero, logo o triângulo é equilátero.

5.2 LUGARES GEOMÉTRICOS

Para resolvermos alguns problemas relacionados à geometria, é importante reconhecermos as representações de alguns lugares geométricos bem comuns tais como circunferências, mediatrizes, elipses e hiperbóles. Aqui vamos exemplificar apenas dois deles, a circunferência e a mediatriz, visto que as cônicas raramente chegam a ser trabalhadas no ensino médio.

Já sabemos que os afixos de dois complexos determinam um vetor no plano de Argand-Gauss, à partir dessa ideia começaremos a interpretar por meio dos números complexos o lugar geométrico gerado por algumas curvas bem particulares.

5.2.1 A CIRCUNFERÊNCIA

Chamamos de circunferência o conjunto de pontos de um plano que equidistam R de um ponto fixo P. Tal ponto P é denominado centro e R o raio desta circunferência. Podemos definir no plano complexo uma circunferência. Da seguinte forma, consideramos o módulo do vetor definido pelos pontos z e p, onde z é um ponto da circunferência de centro P é igual a R. Assim $|\overrightarrow{pz}| = R$, ou seja, $|z - p| = R$. Veja a figura 7.

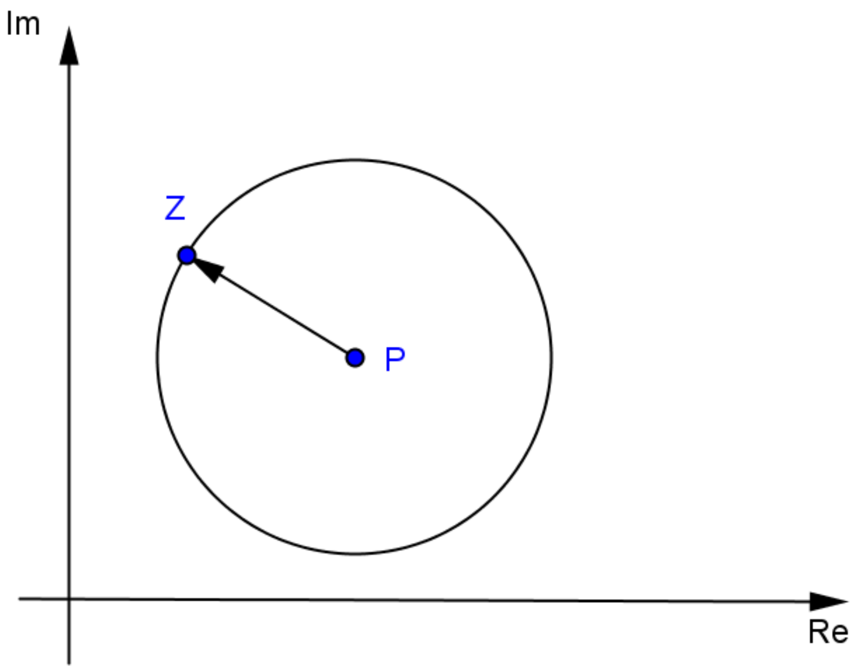

Figura 7 – A Circunferência

5.2.2 A MEDIATRIZ

Chamamos de mediatriz de um segmento de extremidades z_1 e z_2, o conjunto dos pontos z de um plano que equidistam de z_1 e z_2.Sabemos, da geometria plana, que essa mediatri é a reta que passa pelo ponto médio $\overline{z_1 z_2}$, perpendicular a este segmento. Desse modo, no plano complexo temos:

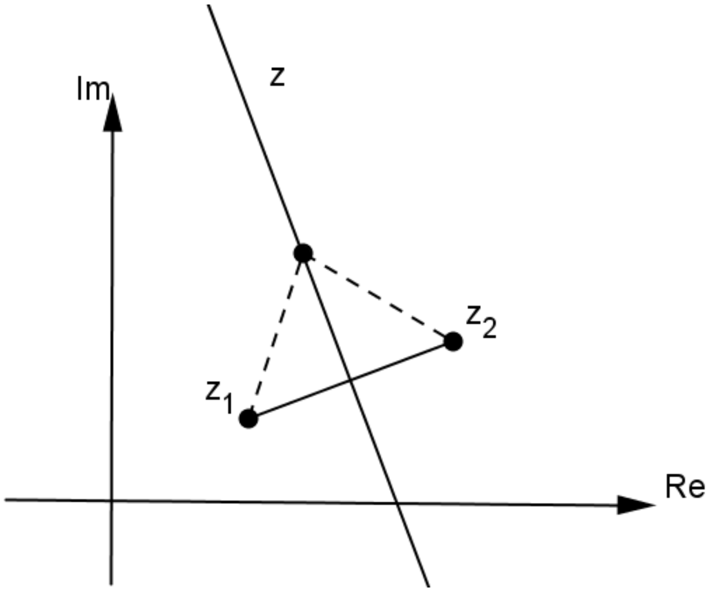

Figura 8 – A Mediatriz

Se z está na mediatriz de z_1 e z_2 temos que $|z_1 z| = |z_2 z|$, ou seja, $|z - z_1| = |z - z_2|$. Veja a figura 8

6 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

6.1 O PROBLEMA DO TESOURO

O problema abaixo é uma adaptação de um problema apresentado em [2].

Um antigo mapa dava instruções para localizar um tesouro enterrado em certa ilha:

"Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire 90^o a esquerda e caminhe o mesmo número de passos. No fim do trajeto, coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire 90^o à direita e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira até a pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio das duas marcas."

Quando chegamos à ilha, a palmeira não existe mais. Como fazer para achar o tesouro?

6.1.1 Solução 1 (Utilizando Números Complexos)

Repare que nesse problema, inicialmente, devemos mostrar que a posição do tesouro independe da posição da palmeira e sim das posições da caverna e da pedra.

Vamos fazer uma ilustração pra representar a situação descrita. Na figura 9 temos

K - Palmeira

C – Caverna

P – Pedra

T – Tesouro

A e B – são as marcas mencionadas no problema no final de cada trajeto.

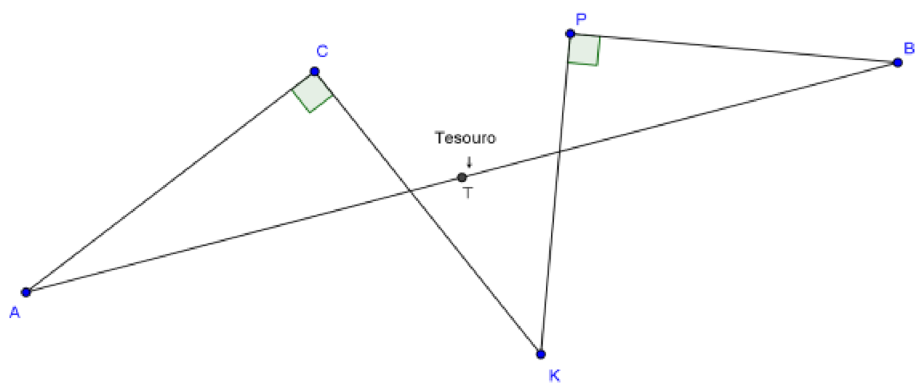

Figura 9 – Modelo Geomético do Problema do Tesouro

Para resolver o problema utilizaremos os números complexos e os trataremos como vetores situados no plano de Argand-Gauss com origem em O.

Vamos considerar o sistema de coordenadas como no plano de Argand-Gauss. Sejam K, C, P, T, A e B afixos de números complexos. Assim, definiremos os vetores:

$$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OK}$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$$

Como o vetor $\overrightarrow{CA}$ nada mais é do que uma rotação de 90^o do vetor $\overrightarrow{KC}$ feita em sentido antihorário podemos afirmar que

$$\overrightarrow{KC}.i = \overrightarrow{CA}.$$

E ainda como PB é gerado por uma rotação de 270^o do vetor $\overrightarrow{KP}$ no sentido antihorário, vemos que

$$\overrightarrow{KP}.(-i) = \overrightarrow{PB}.$$

Daí segue que,

$$(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}).i = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OK}).(-i) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}.$$

Manipulando algebricamente essas equações, facilmente concluímos que

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}(1+i) - \overrightarrow{OK}i,$$

e

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}(1-i) + \overrightarrow{OK}i.$$

Como o tesouro é o ponto médio entre as duas marcas podemos afirmar que

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2},$$

Então,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OC}(1+i) - \overrightarrow{OK}i + \overrightarrow{OP}(1-i) + \overrightarrow{OK}i}{2},$$

Assim,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OC}(1+i) + \overrightarrow{OP}(1-i)}{2}$$

Portanto,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}}{2}i.$$

Com isso, mostramos que a posição do Tesouro independe da palmeira. E ainda, que para encontrá-lo, basta partirmos do ponto P, caminharmos até o ponto médio entre C e P, fazermos uma rotação de 90^o no sentido antihorário e, em seguida, percorreremos novamente a metade da distância entre C e P.

6.1.2 Solução 2 (Utilizando o GeoGebra)

Agora, com o intuito de fazermos o problema mais dinâmico para o ensino médio, utilizaremos a geometria dinâmica através do software GeoGebra para ilustrar as informações acima apresentadas.

Inicialmente, vamos visualizar a figura representada na exploração anterior localizada em uma malha para facilitar a localização dos pontos. Observe a figura 10.

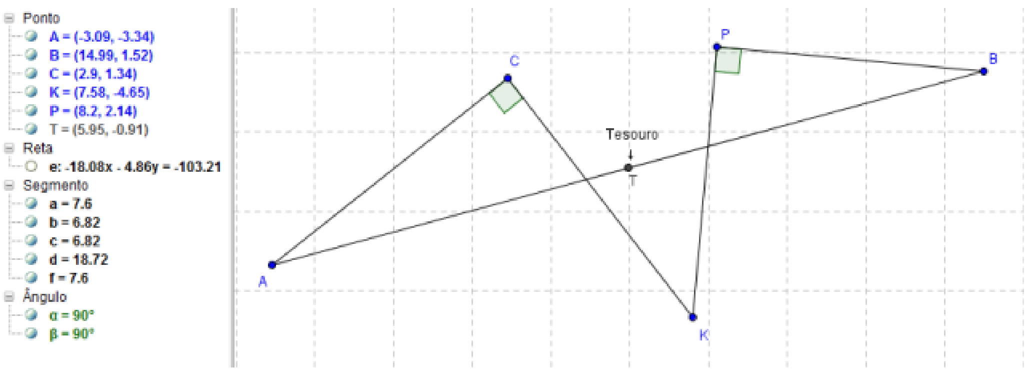

Figura 10 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra I

Repare que nessa figura o tesouro localizado pelo ponto T possui coordenadas cartesianas $T(5,95;-0,91)$ e o ponto K, que representa a palmeira, está localizado com coordenadas $K(7,58;-4,65)$.

Faremos agora algumas variações nas coordenadas de K e verificaremos que as coordenadas de T continuam as mesmas. Veja nas figuras 11 e 12 (você pode observar as coordenas dos pontos na barra localizada a esquerda da figura).

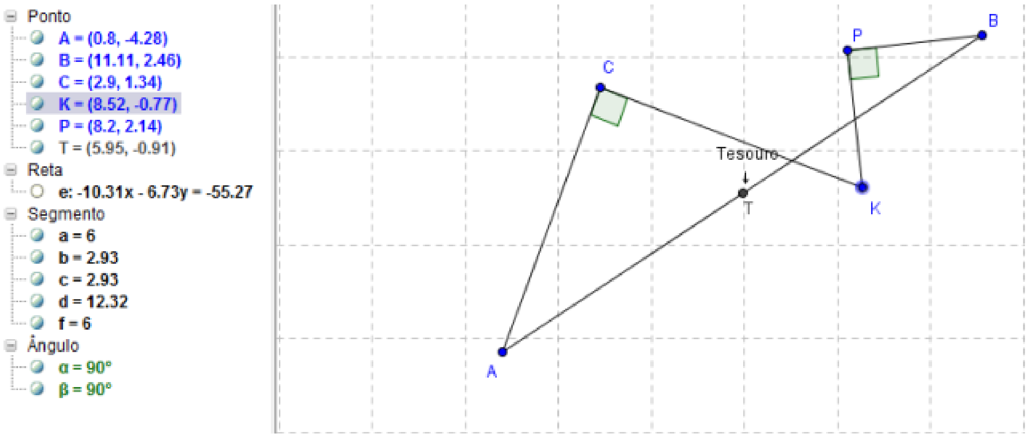

Figura 11 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra II

Observe que na figura 12, ocorreu uma mudança nas coordenadas do ponto K em relação as coordenadas da figura 11 e que o ponto T, que representa o tesouro, permanece estático.

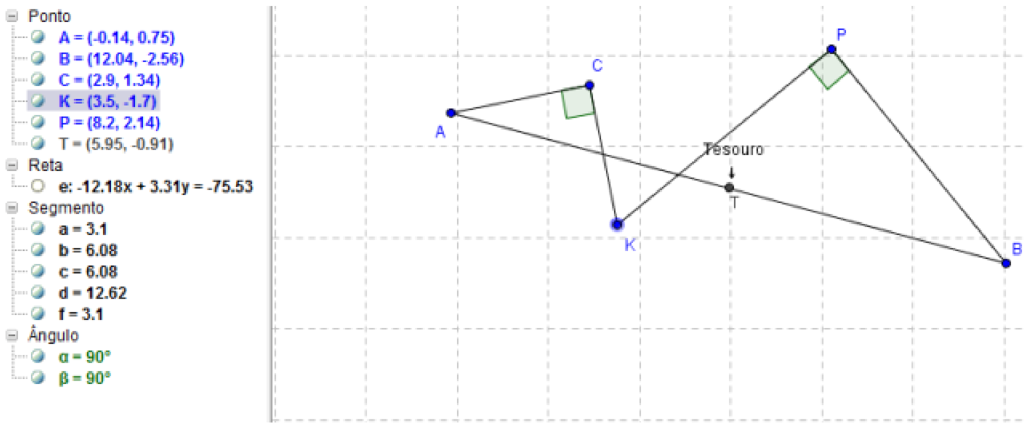

Figura 12 – Modelo Geomético do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra III

Note que nos casos mostrados anteriormente, a posição do tesouro continua fixa, ou seja, com isso (mesmo que intuitivamente) mostramos então que a posição do tesouro independe da posição da palmeira. Interessante, não?

Agora mostraremos que a posição do tesouro, como descrita na solução 1, está correta.

Veja na figura 13 que o segmento TD é perpendicular a PC.

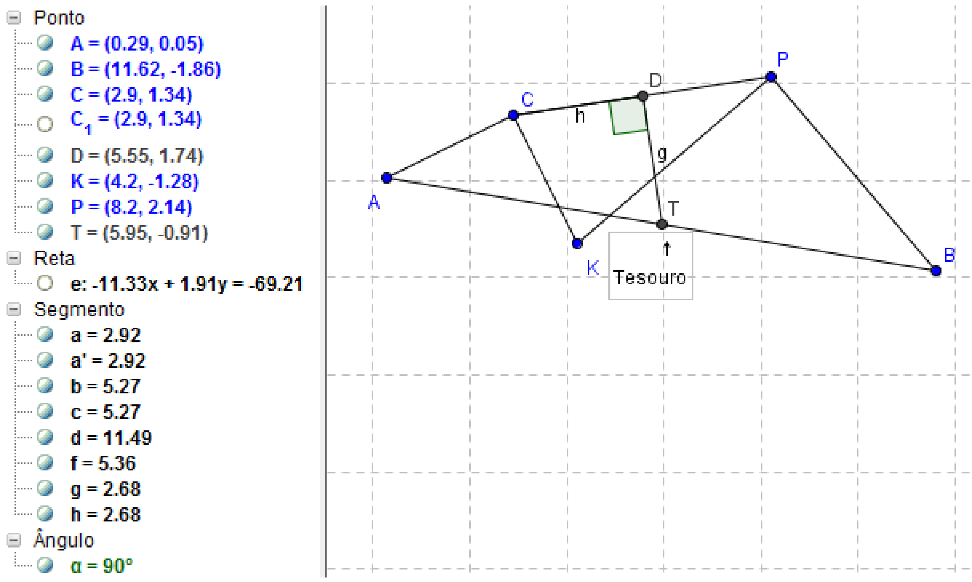

Figura 13 – Modelo Geométio do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra IV

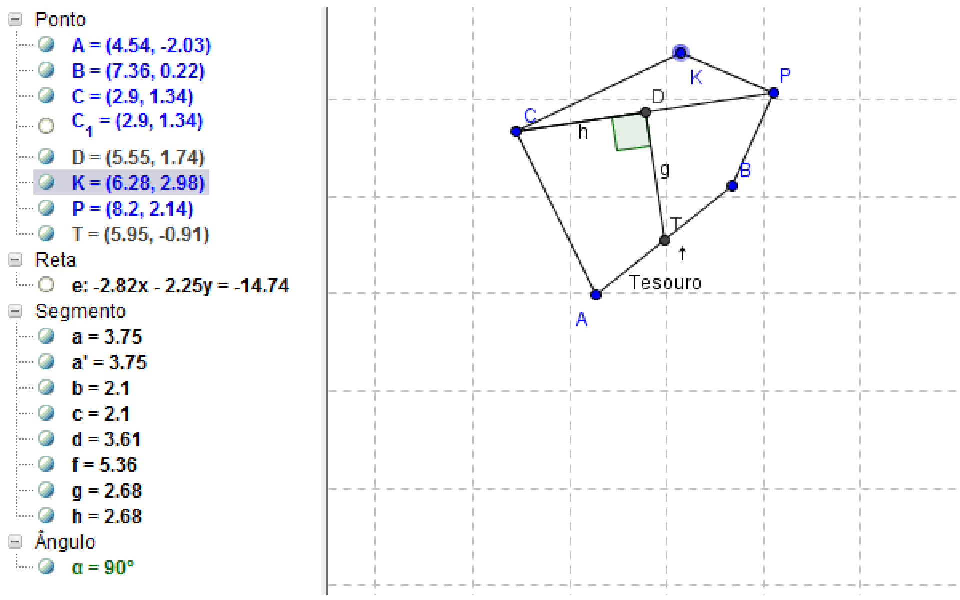

Figura 14 – Modelo Geométio do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra V

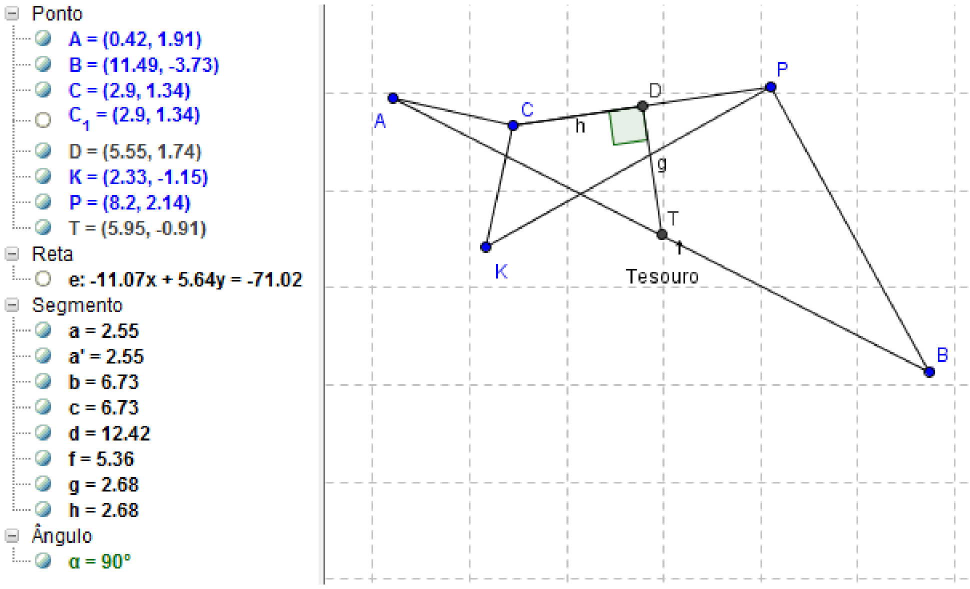

Figura 15 – Modelo Geométrico do Problema do Tesouro aplicado ao GeoGebra VI

Intuitivamente, o aluno consegue perceber que o segmento TD posui medida igual a metade de PC.

Veja que nas figuras 13, 14 e 15 apresentadas anteriormente, a descrição feita na solução 1 para encontrar o tesouro está correta. Você pode observar que os segmentos CD e DT são perpendiculares e possuem a mesma medida. Note pelas figuras geradas pelo GeoGebra, que a medida de CD é igual a $h = 2,68$ e que a medida de DT é igual a $g = 2,68$ nas três situações.

6.1.3 Solução 3 (Utilizando Geometria Plana Sintética)

Vamos inicialmente definir a reta r que passa pelos pontos C(caverna) e P(pedra). Agora vamos traçar os segmentos perpendiculares a r que partem das marcas A e B. Teremos que M e N serão os pés das perpendiculares em r.

Veja a figura 16.

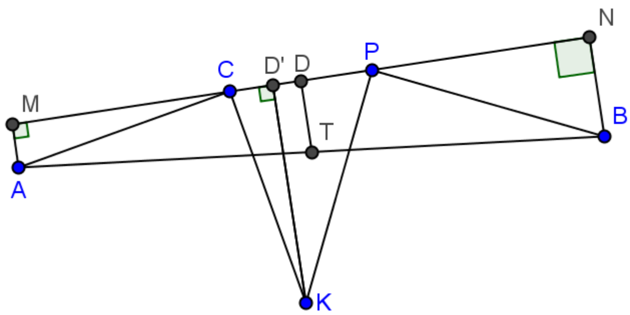

Figura 16 – Resolução do Problema do Tesouro utilizando Geometria Plana Sintética

Provaremos inicialmente que os ângulos $\widehat{CAM}$ e $\widehat{KCP}$ são congruentes, bem como os ângulos $P\widehat{B}N$ e $K\widehat{P}C$. De fato:

$$med(A\widehat{C}M) = 90 - med(C\widehat{A}M)$$

e

$$med(K\widehat{C}M) = 90 + med(A\widehat{C}M)$$

o que implica em dizer que

$$med(C\widehat{A}M) = med(K\widehat{C}P).$$

Analogamente podemos mostrar também que $P\widehat{B}N$ e $K\widehat{P}C$ são congruentes.

Agora seja D' o pé da altura do triângulo KPC referente ao vértice K. Repare que como $\overline{KC} = AC$ e ainda $med(A\widehat{C}M) = 90 - med(C\widehat{A}M)$ segue que os triângulos ACM e $KD'C$ são congruentes e com isso $MC = KD'$.

Da mesma forma, veja também que o triângulo BPN é congruente ao triângulo $KD'P$. Daí temos que $PN = KD'$.

Em consequência disso podemos afirmar que $CM = PN$.

Vamos definir então o ponto D como sendo a projeção ortogonal de T (lembrando que T representa o ponto onde está localizado o tesouro) sobre a reta r. Veja então que $MNBA$ é um trapézio retângulo e como T é ponto médio de AB segue que o segmento TD é a base média desse trapézio.

Podemos dizer então que D é ponto médio de MN, mas como $MC = NP$ temos que D é ponto médio de CP e portanto o tesouro se encontra na mediatriz de CP .

Por último, como TD é base média do trapézio temos

$$TD = \frac{AM + BN}{2}.$$

Pela congruência mostrada anteriormente

$$AM = CD'$$

e

$$BN = PD'$$

o que implica dizer que

$$TD = \frac{CD + PD}{2}.$$

Logo para encontrarmos o tesouro basta saírmos da caverna (ou da pedra) em direção a pedra (ou a caverna), chegarmos até o ponto D (que é o ponto médio entre a caverna e a pedra), girarmos 90 à direita (ou a esquerda) e andarmos a mesma distância, que chegaremos ao tesouro.

6.1.4 ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Esse é um problema clássico da geometria e extremamente intrigante, foi o motivo pelo qual escolhemos esse problema para ser apresentado nesse trabalho. Quando proposto numa sala de aula, intriga a maioria dos alunos que inicialmente são quase unânimes em dizer que o problema não possui solução, ou seja, não existe como encontrar o tesouro se não for conhecida a posição da palmeira.

Nesse primeiro contato com os alunos, proponho que o professor incentive a discussão e faça com que os alunos apresentem todos os seus pontos de vista sobre o problema. Não espere você professor, que algum aluno tenha alguma grande ideia para resolver o problema. No geral, o que acontecerá é que eles ficarão muito curiosos sobre a solução, e que alguns conseguirão inferir algumas observações relevantes. Porém, essas observações, no geral, costumam ficar no campo da geometria, o que é ótimo, pois quanto mais eles ficarem focados em argumentos geométricos, mais espanto e admiração pela solução ocorrerá quando ela for resolvida utilizando números complexos.

No momento em que os alunos estiverem realizando a discussão, é importante que o professor realmente saiba do que está falando, ou seja, que ele tenha capacidade argumentativa consistente para cada vez mais conseguir aflorar o instinto investigativo dos seus alunos. Recomendo que o professor conheça tanto a solução através da geometria plana, quanta aquela que utiliza o plano complexo.

Encerradas as discussões e todas as inferências que possam ser feitas pelos alunos, é a hora do professor entrar em ação e resolver o problema. Recomendo que ele faça a primeira solução utilizando os números complexos para que o aluno sinta todo o encantamento da solução. É importante ressaltar que, nesse momento, dificilmente um aluno do ensino médio conseguiria resolver o problema logo de imediato, principalmente utilizando números complexos. Mas resolvido o problema pelo professor, não é tarefa muito difícil para o aluno, entender tal solução. Os argumentos que são utilizados para a resolução do problema (utilizando números complexos), são relativamente simples e são bem razoáveis de serem acompanhados pelos alunos em sala de aula.

Feita a resolução do problema, os alunos ainda assim poderão ficar um pouco incrédulos da solução. Para melhorar a percepção deles à respeito dessa solução, recomendo que o professor atribua valores às coordenadas da pedra e da palmeira, para que o aluno tenha mais clareza dos resultados que estão sendo apresentados. Assim, ele poderá fazer todas as contas e realmente verificar que a solução parece estar correta.

Após a apresentação da solução e de todas as argumentações dos alunos, que poderão inclusive questionar a veracidade da solução (dependendo do grau de maturidade matemático da turma). O professor pode utilizar uma ferramenta extremamente poderosa para elucidar qualquer tipo de dúvida que ainda paire sobre a sala de aula. Lançando mão do software GeoGebra, que é um programa de geometria dinâmica que permite a construção e análise de situações algébricas e geométricas de forma dinâmica. Nele você pode criar situações geométricas em que é possível mudar a localização dos pontos e assim interpretar melhor o lugar geométrico modelado pelo problema.

Proponho que o professor faça a construção do Problema do Tesouro junto com os alunos no próprio GeoGebra. Se possível seria interessante que cada aluno tivesse um computador disponível para fazer a sua própria construção. Feita corretamente a construção, o professor agora poderá dinamicamente mostrar aos alunos que realmente a posição do tesouro independe da palmeira. É possível, como foi apresentado anteriormente, que o aluno mude o ponto que representa a palmeira de lugar, enquanto o ponto que representa o tesouro se mantém estático, ou seja, com as mesmas coordenadas. Ao promover essa contrução, espera-se que o professor consiga convencer até para os mais incrédulos alunos a validade da sua solução.

Finalmente, caso o professor ache interessante apresentar a solução do problema utilizando geometria plana, ele poderá fazê-lo e deverá enfatizar sempre que não existe uma melhor forma de solucionar um problema, mas que é importante que seus alunos percebam que é possível interpretar várias situações, inclusives contextualizadas, sobre diversos pontos de vista matemáticos.

É claro que o andamento da aula pode não ocorrer tão bem como relatamos nesse procedimento, mas vale lembrar que isso é apenas uma sugestão para a apresentação do problema.

6.2 O TEOREMA DE NAPOLEÃO

O problema abaixo foi extraído de [1].

Um famoso problema, conhecido por aqueles fascinados pela geometria plana é o Teorema de Napoleão. Não se sabe ao certo se esse teorema realmente foi descoberto pelo político e militar francês Napoleão Bonapart. O que se conhece de concreto é que Napoleão era um grande admirador e estudioso das ciências, em particular da geometria.

O teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

"Seja ABC um triângulo qualquer. Sejam BCE, ACF e ABD triângulos equiláteros externos do triângulo ABC. Prove que os baricentros dos triângulos BCE, ACF e ABD são vértices de um triângulo equilátero GHI, denominado triângulo de Napoleão."

A figura 17 representa um modelo para o Teorema de Napoleão.

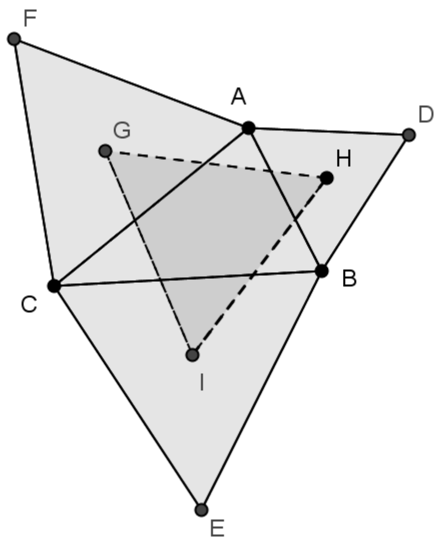

Figura 17 – Modelo Geométrico do Teorema de Napoleão

Ao trabalharmos apenas com ferramentas geométricas, o teorema se torna um árduo desafio, mas quando aplicamos ideias relacionadas aos números complexos podemos ter uma grata surpresa na sua demonstração. Assim vamos estudar esse teorema por dois pontos de vista: o da geometria euclidiana plana e utilizando o plano complexo.

6.2.1 Demonstração 1 (Utilizando Geometria Plana Sintética)

.

Observe a figura 18, na qual se encontram várias construções que passaremos a analisar.

Note que $\overline{AE} = \overline{CD}$ pois os triângulos CBD e ABE são congruentes. Veja que

$\overline{BC} = \overline{BE}$ e $\overline{AB} = \overline{BD}$. Repare ainda que $C\widehat{B}D = A\widehat{B}E$ pois ambos possuem medidas iguais a $med(A\widehat{B}C) + 60^o$. Logo os triângulos são congruenetes. Analogamente podemos demonstrar que $\overline{CD} = \overline{BF}$ e $\overline{AE} = \overline{CD}$.

Agora, vejamos que os triângulos EBA e IHB são semelhantes.Veja:

$$HB = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2},$$

ou seja,

$$HB = \frac{AB\sqrt{3}}{3},$$

isto é,

$$\frac{HB}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

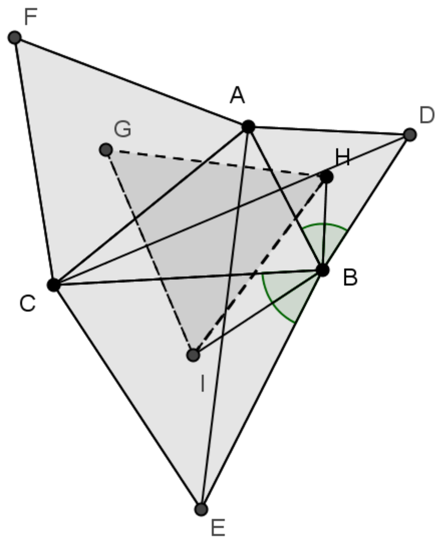

Figura 18 – Demonstração do Teorema de Napoleão por Geometria Plana Sintética

Além disso,

$$IB = \frac{2}{3}.\frac{BC\sqrt{3}}{2},$$

ou seja,

$$IB = \frac{BC\sqrt{3}}{3},$$

isto é,

$$IB = \frac{BE\sqrt{3}}{3},$$

assim,

$$\frac{IB}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Daí, como

$$A\widehat{B}E = H\widehat{B}I$$

segue que

$$\frac{HI}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Isto prova a semelhança entre os triângulos EBA e IHB. De maneira análoga, podemos provar que os triângulos CDA e GHA são semelhantes, bem como os triângulos CBF e CIG. E assim obter que

$$\frac{HG}{AE} = \frac{GI}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Temos então que

$$\frac{HI}{AE} = \frac{HG}{CD} = \frac{GI}{BF}.$$

Mas, pela congruência provada anteriormente, sabemos que $AE = CD = BF$, o que implica em dizer que $HI = HG = GI$. Portanto GHI é equilátero, como estabelece o "Teorema de Napoleão".

6.2.2 Demonstração 1 (Utilizando Números Complexos)

.

Vimos anteriormente que os afixos dos complexos z_1, z_2 e z_3 formam um triângulo equilátero se, e somente se, $z_1 + w.z_2 + w^2.z_3 = 0$, onde w é uma raíz cúbica da unidade, diferente de 1. Utilizando esse resultado, faremos a demonstração do teorema.

Sabemos que os triângulos ABD, BCE e ACF são equiláteros. Daí, aplicando o resultado mencionado acima, podemos dizer que:

$$E + w.B + w^2.C = 0,$$

$$B + w.D + w^2.A = 0$$

e

$$C + w.A + w^2.F = 0.$$

Analiticamente sabemos que é possível expressar o baricentro de um triângulo como a média aritmética entre as coordenadas dos vértices do triângulo. Com isso podemos afirmar que:

$$I = \frac{B + C + E}{3}$$

,

$$H = \frac{A + B + D}{3}$$

e

$$G = \frac{A + C + F}{3}.$$

Assim para demonstrarmos que o triângulo GHI é equilátero basta provar que

$$I + w.H + w^2.G = 0.$$

De fato, veja que

$$I + w.H + w^2.G = \frac{B + C + E}{3} + w.\frac{A + B + D}{3} + w^2.\frac{A + C + F}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}.(B + C + E + w.A + w.B + w.D + A.w^2 + C.w^2 + F.w^2) =$$

$$= \frac{1}{3}((E + w.B + w^2.C) + (B + w.D + w^2.A) + (C + w.A + w^2F)) =$$

$$= \frac{1}{3}.(0 + 0 + 0) = 0$$

Logo o triângulo GHI é equilátero, como estabelece o Teorema de Napoleão.

6.2.3 ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Os motivos pelos quais escolhi este problema foram bem simples. Diferente do "Problema do Tesouro", o "Teorema de Napoleão"não é do conhecimento de grande público e, além disso, sua resolução é muito simples e sintética quando utilizamos números complexos.

Para o tratamento desse problema utilizando números complexos, é necessário que o aluno tenha conhecimento prévio de um resultado: a condição para que três pontos sejam vértices de um triângulo equilátero (apresentado em 5.1).

A partir daí, a proposta é bem simples: como sabemos, em muitos casos, fica mais simples a solução de uma problema se conhecermos alguns resultados sobre aquele determinado assunto. A ideia aqui é enfatizar como é importante que o discente acumule ferramentas matemáticas para tornar mais fácil a solução de problemas mais elaborados.

Ao expor as duas soluções para os alunos, é bem provável que eles achem a solução que utiliza os números complexos muito mais simples e elegante. Nesse momento, é função do professor como mediador do processo, conseguir dar a dimensão correta da situação para o aluno. O docente deve explicitar que a facilidade que se teve na demonstração utilizando-se números complexos, se deve a utilização de um resultado pronto, já provado anteriormente e que pode ser utilizado sem o menor problema. Sugiro nesse momento que o professor mostre que todas as hipóteses do "Teorema de Napoleão"são condições favoráveis para a aplicação do resultado previamente estabelecido (a condição para que três pontos sejam vértices de um triângulo equilátero) e que, apesar do "Teorema de Napoleão"ser um teorema puramente geométrico, nada impede a utilização de outras ferramentas para solucioná-lo.

Buscamos aqui, que o aluno consiga estabelecer relações entre o que ele quer solucionar e quais são as ferramentas que ele pode utilizar, sempre observando quais são as suas hipóteses e qual a tese que ele gostaria de demonstrar.

Deve ser mostrado ao alunos como encarar a resolução de um problema. O professor deve lembrá-lo que o foco deve estar sempre na solução do problema, ou seja, aquilo que você quer obter como resultado e não no problema em si. Com isso, é necessário fazer uma análise sobre quais são os possíveis caminhos para se obter o resultado procurado.

Nesse caso, fica bem claro como a utilização dos números complexos facilitaram a demonstração do teorema. Repare que utilizando a geometria plana sintética a demonstração se tornou um tanto quanto árdua, sendo necessário o trabalho com diversas congruências e semelhanças que estavam "escondidas"no problema. Não se trata de contestar a beleza e efetividade da geometria plana. O que gostaria de mencionar é como é importante o professor, enquanto mediador no processo de ensino aprendizagem, incentivar o seu aluno a buscar novas possibilidades e pontos de vista sobre um mesmo problema, que possa assim, muitas vezes, ser resolvido de várias formas diferentes, com as mais diversas ferramentas. Inclusive com o uso de números complexos que a maioria dos estudantes julga serem números sem o menor sentido e com praticamente nenhuma aplicabilidade.

6.3 VALOR MÁXIMO E MÍNIMO DE UM COMPLEXO

Determine os valores máximo V_{max} e mínimo V_{min} de $|z-4|$ sabendo que $|z+3i| \leq 1$.

Repare que $|z+3i| \leq 1$ representa o disco (incluindo a borda) centrado no ponto $(0,-3)$ do plano complexo de raio igual a 1, visto que $|z+3i| = |z-(0-3i)| = |z-p| \leq 1$ onde $p = 0-3i$ é o centro do disco. Além disso quando analisamos $|z-4|$ percebemos que isso representa o módulo do vetor $\overrightarrow{z'z}$ onde z é um complexo pertencente ao disco e $z' = 4+0i$. Note que estamos procurando qual o maior e qual a menor distância possível entre z e o complexo z'. Veja a ilustração, na figura 19.

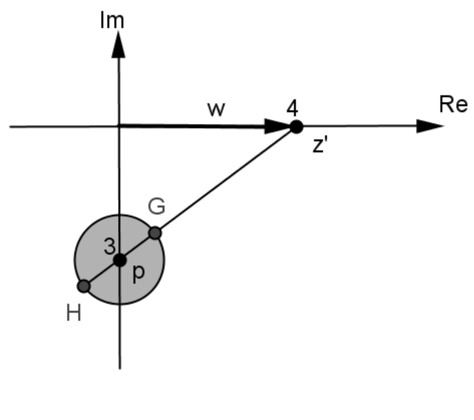

Figura 19 – Problema do Valor Máximo e Mínimo de um Complexo

Traçando a reta definida pelo afixos dos complexos P e z' temos que a menor e a maior distâncias, respectivamente, entre z e 4 estão definidas por Gz' e Hz'. Assim aplicando o Teorema de Pitágoras encontramos que $|\overrightarrow{pz'}| = 5$ e, com isso, calculamos $V_{min}(|z-4|) = 5 - R = 5 - 1 = 4$ e $V_{max}(|z-4|) = 5 + R = 6$.

6.3.1 ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Assim como é importante interpretar a representação geométrica e expressá-la de forma algébrica, conseguir interpretar geometricamente um resultado algébrico faz, muitas vezes, com que a resolução do problema que estamos trabalhando se torne muito mais fácil.

Nessa questão, o apelo ao plano de argand gauss torna a questão muito mais simples e faz com que o aluno consiga visualizar facilmente o que significa, o valor máximo e o valor mínimo do número complexo em questão.

Esse problema foi proposto nesse trabalho justamente para que o professor tente mostrar ao seu aluno que em várias situações a visualização geométrica de uma situação algébrica, pode esclarecer aquilo que está sendo procurado como resposta. Observe que neste problema um aluno desatento poderia não perceber a relação que existe entre o algébrico e o geométrico. Para que ele tenha essa visão é tarefa do professor apresentar-lhe que diversos lugares geométricos (como a circunferência por exemplo) podem ser interpretados das mais diferentes formas algébricas, entre elas na forma de números complexos, como foi sugerido.

Com esse exemplo, além de mostrar que os números complexos também podem representar lugares geométricos, buscamos tambem apresentar que existem situações que transitam do algébrico para o geométrico. Revisitando o resultado 5.2.1 podemos mostrar ao aluno como estabelecer essas relações e assim procurar novas formas de interpretar resultados algébricos.

6.4 COORDENADAS INTEIRAS

Nesta seção vamos demonstrar mais um resultado interessante da geometria utilizando como recurso os números complexos.

"Mostre que não existe triângulo equilátero tal que todos os seus vértices tenham coordenadas inteiras"

Demonstração:

Sejam os complexos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ cujos seus afixos A, B e C, respectivamente, são tais que o triângulo ABC é equilátero. Mostraremos que $A(a, b)$, $B(c, d)$ e $C(e, f)$, não podem todos eles possuir as coordendas inteiras. Para tal, vamos supor, sem perda de generalidade, que as coordenadas de dois deles são inteiras, digamos B e C. Assim c, d, e, f são números inteiros.

Daí como o triângulo ABC é equilátero é válida a identidade $z_1 + z_2.w + z_3.w^2 = 0$ onde w e w^2 são raízes cúbicas da unidade diferentes de 1. Para resolver o problema podemos adotar $w = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $w^2 = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, ou seja, $w = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e $w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Assim

$$(a+bi) + (c+di).\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) + (e+fi).\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

ou seja,

$$a + bi + \frac{-c}{2} + \frac{c\sqrt{3}i}{2} - \frac{di}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2} - \frac{e}{2} - \frac{e\sqrt{3}i}{2} - \frac{fi}{2} + \frac{f\sqrt{3}}{2} = 0,$$

E com isso,

$$a + bi = \left(\frac{c+e}{2} + \frac{(d-f)\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{d+f}{2} + \frac{(e-c)\sqrt{3}}{2}\right)i$$

Com isso temos que

$$a = \left(\frac{c+e}{2} + \frac{(d-f)\sqrt{3}}{2}\right)$$

e

$$b = \left(\frac{d+f}{2} + \frac{(e-c)\sqrt{3}}{2}\right)$$

Logo para que a e b sejam números inteiros é necessário que $d - f = 0$ e $e - c = 0$, ou seja, $d = f$ e $e = c$. Mas desta forma o triângulo ABC não existiria visto que $B = C$. Portanto a não é inteiro ou b não é inteiro e com isso as coordenadas do vértice A não são inteiras. Como queríamos demonstrar.

6.4.1 ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Nesse problema a intenção é explicitamente promover uma interação entre a geometria analítica e os números complexos. Aqui a ideia é mostrar para o aluno que também um problema essencialmente de geometria analítica, pode ser resolvido com o auxílio dos números complexos.

Nesse momento, é importante o professor mostrar ao discente como a escolha do referencial é um importante facilitador na resolução do problema. Repare que o fato de mostrar que as coordenadas de um triângulo equilátero não são todas inteiras se resume a provar que se duas dessas coordenadas são inteiras a terceira necessáriamente é formada por número racional e um irracional.

Evidentemente a demonstração utilizando números complexos não é a mais simples, mas seria interessante que nesse momento o professor conseguisse mostrar ao aluno que o número racional sugerido é a coordenada média entre as abscissas dos outros dois vértices, enquanto que a coordenada irracional é $\frac{l.\sqrt{3}}{2}$ onde l é a distância entre os dois vértices de coordenadas inteiras.

Esse tipo de análise parece superficial, mas é importante lembrar que o aluno, em geral, tem grandes dificuldades em associar elementos algébricos e analíticos. A partir disso, espera-se que o aluno conseguirá visualizar com muito mais facilidade as relações existentes no triângulo equilátero. Assim, após a apresentação dessa primeira demonstração, sugiro que o professor comece a discutir com os alunos como poderia ser feita essa mesma demonstração utilizando-se apenas geometria analítica.

A partir daí o que se pretende é que o aluno consiga entender o quanto é importante nessa demonstração escolher um bom referencial no plano cartesiano e assim solucionar o problema.

7 ENTREVISTA COM PROFESSORES

Neste capítulo, buscamos realizar algumas reflexões sobre entrevistas feitas (ver Anexo A) com professores da educação básica que ministram, ou já ministraram, o conteúdo "Números Complexos"no ensino médio. É importante ressaltar que aqui não temos uma pesquisa com fundamentação científica. Estamos procurando apenas corroborar, através de alguns exemplos, como vem sendo tratado o conteúdo de números complexos na educação básica.

A escolha dos entrevistados procurou abranger os diversos tipos de profissionais que temos atuando na educação básica. Temos um professor que ministra aulas apenas na escola pública (a saber, rede estadual e municipal de educação), outro que atua tanto na rede estadual, quanto na rede particular de educação, inclusive em faculdades. Um terceiro, que também atua nas redes estadual e particular de educação e um quarto profissional, que já se aposentou e ao longo de sua carreira trabalhou apenas em colégios particulares.

A esses entrevistados foram sugeridas quatro perguntas simples à respeito do ensino de números complexos. Nessas perguntas procurei, investigar qual a visão de cada educador sobre o conteúdo e como ele o aborda com os alunos em sala de aula, além de analisar também como os professores interpretam aquilo que é proposto pela maioria dos livros didáticos para o ensino de complexos. Volto a lembrar que essa pesquisa não tem nenhum cunho científico, mas pode nos servir como referência para refletirmos e repensarmos como estamos abordando determinados conteúdos matemáticos com nossos alunos, tanto no ensino médio, quanto no ensino fundamental.

Devemos analisar como a nossa forma de apresentar determinados conteúdos reflete no nosso aluno e que tipo de significado aquela representação está gerando nesse aluno. Acredito que, para investigarmos isso, devemos pensar primeiro qual o significado daquele conteúdo para nós professores. Se por exemplo, o professor não tem a ideia global de quais são as possibilidades para aquele conteúdo que ele está ensinando, ele dificilmente conseguirá despertar nos seus alunos algum interesse sobre a disciplina.

Uma das perguntas da entrevista se refere a como foi, na graduação, o contato daquele professor com os números complexos. Você pode perceber nas respostas que, no geral, o trabalho com números complexos durante a graduação foi extremamente superficial e, tenho que confessar, mesmo o deste professor que vos fala também foi. Eu me tornei professor de matemática sem ter a menor ideia de quais eram as possibilidades para se trabalhar com os complexos. Nesse ponto, um dos entrevistados faz uma observação interessante. Ele acredita que o conteúdo é abordado superficialmente no ensino médio, pois naquele momento consideramos (nós professores) que o aluno não tem maturidade suficiente para aprofundarmos de forma mais densa naquele conteúdo. Por outro lado, quando estamos na graduação, aquilo já é tomado como algo muito simples que não merece um estudo mais rigoroso. Mas quando de fato vamos estudar esse assunto? E quando digo isso, não me refiro especificamente aos números complexos, aqui gostaria de fomentar uma discussão à respeito do currículo que está proposto para a educação básica.

Nesse ponto é preciso discutirmos o que realmente é relevante em matemática para um aluno do ensino fundamental e médio e, principalmente, como devemos abordar esses conteúdos de forma a termos um ensino significativo para o aluno. Não adianta apenas cobrir nossos alunos com uma excessiva gama de conteúdos, se não conseguimos mostrar a ele como aquilo se relaciona na matemática e com outras áreas. Espero que não seja mal interpretado nesse ponto, não estou sugerindo para mudarmos radicalmente, ou até diminuir aquilo que é ministrado na educação básica, mas sim que, de alguma forma, consigamos apresentar o currículo de matemática de tal maneira que ele faça sentido para o aluno. Não devemos deixar o discente ter a impressão de que a matemática é uma colcha de retalhos, ele deve entender, mesmo que supeficialmente, como as suas diversas áreas se relacionam.

Indo ao encontro disso podemos observar que, pelas entrevistas, muitos professores abordam os números complexos apenas como uma extensão dos números reais. É claro que essa abordagem é importante e tem que ser feita dentro da sala de aula, mas que tipo de explicação o professor consegue dar ao seu aluno, quando este o questiona sobre alguma possibilidade de aplicação para aquela raiz de um número negativo? Assim, dificilmente o professor conseguirá fazer com que os seus alunos tenham vontade de aprender aquela disciplina.

Devemos sempre buscar alternativas para promover a discussão e a investigação matemática em sala de aula. Para isso devemos produzir significado para aquilo que estamos ensinando e uma das formas de fazer isso é mostrando de que modo aquela matéria pode ser aplicada.

Nos livros didáticos, o que conseguimos levantar pelas entrevistas é que os números complexos também são tratados no geral de forma superficial, com poucas ou quase nenhuma aplicação prática. Talvez, isso explique também o porque da abordagem do professor dentro de sala de aula não se aprofundar tanto. Sabemos que em muitos casos o docente se restringe ao livro didático para ministrar suas aulas. Nós, como professores, devemos ser capazes de filtrar tudo aquilo que há de bom nos livros e também, dispensar ou rearranjar aquilo que não está apresentado de forma satisfatória. Se acreditamos que um determinado conteúdo é demasiadamente denso para ser trabalhado com um determinado grupo de alunos, podemos buscar alternativas para apresentá-lo de forma mais dinâmica para o discente. As vezes uma abordagem empírica ou instintiva, constrói no aluno muito mais conexões e significados do que uma abordagem tradicional.

Nas entrevistas os professores foram unânimes em dizer que acham importante e viável uma aplicação dos números complexos na geometria, assim esse trabalho tenta mostrar uma alternativa simples de como fazer essa aplicação de forma a não traumatizar o alunado e dando uma dimensão de quais são as possibilidades de trabalho.

8 CONCLUSÃO

O professor de educação básica deve provocar no seu aluno o desenvolvimento do senso crítico e da capacidade argumentativa, sobre os mais variados pontos de vista. Ele deve desenvolver no aluno o instinto investigativo dentro da matemática, procurando sempre fomentar a discussão e incentivar a pesquisa dentro da sala e aula. Neste trabalho os números complexos servem apenas como pano de fundo para exemplificar como o professor pode apresentar a seus alunos alternativas para o estudo e a aprendizagem da matemática.

Devemos mostrar a matemática como unidade e não somente apresentá-la como uma série de ramificações que não possuem conexões ou eixos comuns. A matemática é uma só, e assim ela deve ser mostrada e entendida. Mesmo na educação básica, o professor tem a obrigação de buscar ferramentas para isso. O aluno que não consegue fazer conexões dentro da própria matemática, não conseguirá interpretá-la como ferramenta para resolver problemas que estão ao seu redor. Não espere de seu aluno que ele consiga modelar um simples problema de equação do segundo grau, se na verdade ele sequer entende o sentido daquilo dentro da própria matemática.

Números são muito mais do que simples símbolos, eles refletem ou indicam ideias e conexões criadas entre a matemática e o mundo em que vivemos. Por isso, procurar relacionar "conteúdos"matemáticos é uma boa forma para mostrar ao aluno como correlacionar a matemática com o mundo.

REFERÊNCIAS

[1] ANDRESCU, T.; ANDRICA, D. *Números Complexos de A a Z.* 1ª edição, Fortaleza: Vestseller, 2013.

[2] GUIMARÃES, C. S. *Matemática em Nível IME/ITA, Números Complexos e Polinômios.* São José dos Campos: Vestseller, 2008.

[3] IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios e equações.* 7ª edição, São Paulo: Atual, 2005.

[4] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; PERDIGÃO, M.P. *Trigonometria-Números Complexos.* 3ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2005.

ANEXO A – Entrevistas com Professores das Educação Básica

A seguir, apresentamos uma entrevista realizada com professores da educação básica sobre o ensino dos "Números Complexos"

Questão 1: Como você aborda em sua sala de aula o conteúdo “Números Complexos”, qual o seu objetivo em tratar esse assunto?

Questão 2: Você considera significativa a forma como esse conteúdo é abordado pela maioria dos livros didáticos, ou seja, a maneira como o assunto é apresentado o aluno consegue perceber a potencialidade e aplicabilidade dessa ferramenta?

Questão 3: Durante a sua graduação lhe foi apresentada alguma abordagem e/ou aplicação especial para números complexos (Por exemplo, aplicações de complexos em geometria, ou somatórios)?

Questão 4: Você acharia viável uma exploração dos números complexos através da geometria?

Respostas.

Professor A (Professor da rede municipal e particular de educação de Juiz de Fora)

Questão 1

O assunto não faz parte do conteúdo que ministro atualmente mas, quando trabalhava com ele, abordava da forma técnica mostrando o plano de Gauss fazendo analogia com o plano cartesiano e o objetivo era mostrar como os complexos se representavam e reforçar a ideia de extensão dos números reais.

Questão 2

Nos livros que adotava, quando era abordado (às vezes os livros nem traziam), não eram exploradas as suas aplicações. Uma aplicação ou outra e só.

Questão 3

Sinceramente, não me lembro. Me lembro da parte teórica.

Questão 4

Sem dúvida. Aplicação de um assunto novo dentro de outro amplamente estudado. Isso estreitaria bastante a lacuna que causa quando tratamos como assunto isolado.

Professor B (Professor da rede estadual de educação de Minas Gerais)

Questão 1

Como trabalho em escola pública de periferia onde a escola é mais um meio de socialização do que um local de buscar conhecimentos e, fazendo com que seus conhecimentos nas mais diversas áreas são primárias, começo como a maioria dos livros abordam. Ou seja, praticamente informando que o conjunto dos números complexos “é um complemento” dos números reais. Após a abordagem inicial, falo um pouco da história de seu surgimento e informando-os que agora seus cálculos não “param” mais em uma raiz quadrada de um número negativo e suas aplicações em geometria (em muitos problemas que envolvem rotação, círculo, vetores), funções trigonométricas, movimentos periódicos, circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia, motores e mecânica quântica e que a multiplicação dos números complexos é essencial para a resolução das maiorias das situações.

Questão 2

Tenho observado que os números complexos estão “caindo no esquecimento”. Cada vez menos abordado e menos utilizado ou aplicado. Inclusive em concursos e vestibulares, em que algumas instituições, não fazem nem mais parte de seus processos seletivos. E quando utilizado é apenas em operações como somas, produtos ou razões.

Questão 3

Que eu me lembre não. Mas penso que não é falado ou aplicado na graduação por considerarem um assunto elementar de nível médio. E no ensino médio, não são aprofundados por considerarem demasiadamente difícil.

Questão 4

Sim. Principalmente se os primeiros contatos forem de uma maneira intuitiva, utilizando a geometria dinâmica. Porque assim, os alunos conseguem ver primeiramente os movimentos e os comportamentos das figuras para posteriormente serem trabalhados os cálculos, uma vez que a maioria dos nossos alunos possuem uma grande dificuldade em geometria e em operar com números complexos, por “aceitar” a operar com o que foi falado em toda a sua formação acadêmica que “não existia” (raiz quadrada de um número negativo).

Professor C (Professor da rede estadual e particular de educação de Juiz de Fora)

Questão 1

Sou professor de uma escola pública já há alguns anos. Quando cheguei a esta escola, já havia dois professores de Matemática, que lecionavam para o ensino médio. Desde então, assumi as turmas do ensino fundamental e com estas tenha trabalhado até hoje. Não tive, ainda, a oportunidade de estar com uma turma dos anos finais do ensino médio e trabalhar tal temática. No entanto, fazendo um exercício de reflexão sobre minha prática, penso que uma abordagem de tal tema a partir da História da Matemática poderia ser interessante e significativa para os alunos. Nasce, dentre outros conceitos, a possibilidade de, por exemplo, extrair a raiz quadrada de um número negativo. O que, até então, era dito IMPOSSÍVEL dentro das aulas de Matemática na séries anteriores.

Questão 2

Não. Penso que a forma que o tema tem sido apresentada nos livros didáticos invalida sua potente utilização, tornando-o mais um tema chato, complexo (como o próprio nome do conjunto numérico traz em sua identificação) e difícil tema de ser compreendido na Matemática. Daí, seu aprendizado nasce sem significado. Assume o papel de mais um tema "chato" que precisa ser estudado porque "cai na prova". Passa pela mesma trajetória de muitos temas nos livros didáticos: conceitos, exemplos e exercícios de fixação.

Questão 3

Bem, já faz alguns anos desde minha formação. No entanto, se recordo bem, a apresentação deste assunto na graduação foi de forma tradicional e comum, como as que vemos pelos livros didáticos. Sem muitas explorações de potencialidades do assunto, foi-nos apresentado o conceito, exemplos, definições e atividades. A forma mais tradicional possível do ensino da Matemática.

Questão 4

Sim! A correlação de temas e assuntos Matemáticos é de fundamental importância para a percepção da interdisciplinaridade. Agora, explorar o tema a partir da geometria não é somente relacioná-lo a uma atividade onde, para se calcular a área de uma figura geométrica, chega-se a uma equação quadrática onde o "delta" é negativo e, então, aquilo que se apresenta impossível dentro dos Reais, torna-se, agora, possível no conjunto dos Números Complexos. Mas, também, compreender a possibilidade de estudar e interpretar os complexos geometricamente, associando-o a um par ordenado (a,b), definindo e interpretando os conceitos: módulo, conjugado e argumento de um número complexo. Enfim, ... Penso que, desta maneira, os números complexos poderiam ser vivenciados com mais significação à aprendizagem, onde o aluno compreende, visualiza e constrói as ideias, assim como conta a História da Matemática.

Professor D (Professor aposentado da rede particular de educação)

Questão 1

Com o objetivo de mostrar aos alunos que se pode resolver uma equação do segundo grau com discriminante negativo, pois no 9 ano do ensino fundamental não são consideradas as raízes imaginárias, apenas se diz para o aluno que as soluções não são reais. Para isto, mostrar aos alunos como surgiu a unidade imaginária $i = sqrt(-1)$.

Questão 2

Acho que sim, porém a maioria dos alunos percebe que as aplicações e o aprofundamento do assunto não condiz com a sua realizade. Talvez a parte algébrica e trigonométrica seja percebida pelo aluno, mas a realidade do estudo dos números complexos não é para a realidade desses alunos.

Questão 3

Durante a minha graduação esse assunto foi tratado de uma maneira bem formal, abordando apenas exercícios contidos em livros didáticos. Agora, na parte prática tive algumas aplicações na parte de Física (Eletricidade e Magnetismo) com trabalho em circuitos elétricos, onde operava com números complexos.

Questão 4

Sim, desde que o aluno fosse direcionado para uma área de exatas. Acho que não se deveria fazer um estudo dos complexos dentro da geometria e também da trigonometria, para alunos que não sejam da área de exatas, pois ficam desmotivados e desinteressados.