

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Victor Emanuel Pinto Guedes**

**Uma abordagem para o ensino de teoria dos grafos no Ensino Médio**

Juiz de Fora

2014

**Victor Emanuel Pinto Guedes**

**Uma abordagem para o ensino de teoria dos grafos no Ensino Médio**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

GUEDES, Victor Emanuel Pinto

Uma abordagem para o ensino de teoria dos grafos no Ensino Médio /  
Victor Emanuel Pinto Guedes. – 2014.

38 f. : il.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos.

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora,  
Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Teoria dos Grafos. 2. Resolução de Problemas. I. VASCONCE-  
LOS, Sérgio Guilherme de Assis, orient. II. Título.

**Victor Emanuel Pinto Guedes**

**Uma abordagem para o ensino de teoria dos grafos no Ensino Médio**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 09 de agosto de 2014

---

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis  
Vasconcelos - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Francinildo Nobre Ferreira  
Universidade Federal de São João del-Rei

*Dedico este trabalho à minha família e, em especial, à Ludmila, minha noiva, pelo apoio incondicional e pelos incontáveis sábados de compreensão necessários para a conclusão do mestrado.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, direciono meus agradecimentos à Universidade Federal de Juiz de Fora, a qual, por meio do PROFMAT, possibilitou a realização desse mestrado.

Agradeço aos professores que encontrei ao longo dessa jornada, os quais foram essenciais em minha formação e enriquecimento teórico.

Ao professor Sérgio, agradeço pela orientação e compreensão no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus amigos Júlio, Marcelo e Romulo, agradeço pelas tardes e noites de trabalhos partilhadas, pelas reflexões e amizade.

Por fim, agradeço aos meus familiares pelo apoio às minhas decisões e por acreditarem em meu potencial.

"A álgebra não me satisfaz porquanto não fornece as provas mais breves nem as mais belas construções da geometria. Por conseguinte, perante isto, considero que precisamos ainda de outro tipo de análise, geométrica ou linear, que trate diretamente a posição, como a álgebra trata as quantidades"  
(Leibniz)

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem para a Teoria dos Grafos a ser aplicada no Ensino Médio. O objetivo é que, a partir dessa teoria, o aluno desenvolva a capacidade de elaborar métodos de resolução de problemas e de observar que problemas de Matemática Discreta não concernem somente problemas de contagem, como são usualmente abordados no Ensino Médio. Nesse trabalho, introduziremos conceitos da Teoria dos Grafos, grafos Eulerianos e Semieulerianos, buscando expor para um professor, uma abordagem possível da teoria, através dos conceitos, exemplos e problemas que devem ser exibidos para os alunos. Acreditamos que tal teoria deva ser apresentada no Ensino Médio devido a seu caráter investigativo, e por exigir do aluno uma capacidade interpretativa para buscar técnicas de resolução do problema.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Resolução de Problemas.



## ABSTRACT

This work presents an approach to Graph Theory to be applied in High School. The goal is that, from this theory, the student develops the ability to elaborate methods of solving problem and observe that discrete mathematics problems do not concern only counting problems, as they are usually approached in High School. In this paper, we introduce concepts of graph theory, Eulerian and Semieulerianos graphs, seeking to expose to a teacher, a possible approach to this theory, through the concepts, examples and problems that should be displayed to the students. We believe such a theory should be presented in High School due to its investigative character, and it requires the student an interpretative ability to pursue techniques to solve problems.

Keywords: Graph Theory. Problem Solving.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tabela de jogos . . . . .	13
Figura 2 – Representação gráfica . . . . .	13
Figura 3 – Vértices e arestas no grafo . . . . .	14
Figura 4 – Multigrafo . . . . .	16
Figura 5 – Grafo Conexo . . . . .	16
Figura 6 – Grafo Desconexo . . . . .	17
Figura 7 – Grafo $G$ . . . . .	17
Figura 8 – Subgrafo $G'$ . . . . .	18
Figura 9 – Subgrafo $G''$ induzido por $\{A, B, C, D\}$ . . . . .	18
Figura 10 – Grafo completo $K_5$ . . . . .	19
Figura 11 – Grafo $G$ . . . . .	19
Figura 12 – Grafo $\overline{G}$ . . . . .	20
Figura 13 – Grafo Nulo . . . . .	20
Figura 14 – Grafo Regular . . . . .	21
Figura 15 – Ciclo $C_6$ . . . . .	21
Figura 16 – Ciclo $C_6$ e Caminho $P_5$ . . . . .	22
Figura 17 – Representação geométrica . . . . .	24
Figura 18 – Possível solução . . . . .	25
Figura 19 – Outra solução . . . . .	25
Figura 20 – Representação geométrica . . . . .	26
Figura 21 – Mapa de Königsberg . . . . .	27
Figura 22 – Representação geométrica . . . . .	28
Figura 23 – Casa . . . . .	29
Figura 24 – Identificação dos Grafos . . . . .	35

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>HISTÓRIA E ORIGEM DA TEORIA DOS GRAFOS . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .</b>	<b>13</b>
3.1	NOÇÕES BÁSICAS . . . . .	13
3.2	TIPOS ESPECIAIS DE GRAFOS . . . . .	19
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS . . . . .</b>	<b>24</b>
4.1	PROBLEMA 1 . . . . .	24
4.2	PROBLEMA 2 . . . . .	26
4.3	PROBLEMA 3(Problema das Pontes de Königsberg) . . . . .	27
4.4	PROBLEMA 4(Construção da Casa) . . . . .	29
4.5	PROBLEMA 5(Identificação dos Grafos) . . . . .	34
<b>5</b>	<b>PLANO DE AULA . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>38</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho, apresentamos uma abordagem teórica para o ensino da Teoria dos Grafos para alunos do Ensino Médio. O Ensino da Matemática Discreta hoje é voltado, em grande parte, para problemas de contagem, o que, muitas vezes, empobrece o estudo para o desenvolvimento do aluno. A Teoria dos Grafos nos permite desenvolver junto ao aluno, a partir de conceitos simples que exigem pouco conhecimento prévio, uma abordagem investigativa e questionadora para o enriquecimento do ensino de Matemática em sala de aula.

Observamos que o conhecimento da Teoria dos Grafos é, muitas vezes, desconhecido pelos docentes. O motivo desse desconhecimento pode ter sua fundamentação em seu surgimento formal recente - século XX. Outra razão possível é o fato de que é provável que o professor não tenha desenvolvido esse estudo em sua graduação; ou ainda, o fato de que muitos livros didáticos não abordam tais conceitos.

Esse conceitos simples, os quais veremos posteriormente, nos permitem trabalhar com uma vasta quantidade de problemas que envolvem, desde questões cotidianas, tais como o caminho da casa do aluno para a escola utilizando-se um carro, até problemas avançados na área da computação. O nosso objetivo é discutir o ensino e a aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, e sugerir problemas que mostrem a sua importância como ferramenta de discussão e aprendizagem para o aluno. Conceitos que muitas vezes são esquecidos no ensino básico, como, por exemplo, "O problema tem solução? Essa é a única solução possível? É a melhor solução?", podem ser abordados de forma a instigar o aluno a buscar formas diferentes de resolver uma situação-problema, tema que é comumente abordado em avaliações como olimpíadas do conhecimento e provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A abordagem dessa teoria é necessária para que o aluno entenda como:

- (i) Discutir um problema, capacidade importante em qualquer área do conhecimento;
- (ii) Representar um problema através de várias formas, algébricas e geométricas, o que desenvolve no aluno uma capacidade de abstração muito importante para o ensino de matemática;
- (iii) Otimizar um problema, o que é de extrema importância para se desenvolver questões cotidianas.

Essa pesquisa apresenta a seguinte disposição: no primeiro capítulo, apresentamos um aporte teórico da Teoria dos Grafos que poderá contemplar tanto o leitor não familiarizado com a teoria, como seu emprego dentro de sala de aula visando um conhecimento mais formal por parte dos alunos. Para tanto, exibimos alguns teoremas e corolários.

No capítulo seguinte, são expostos problemas que serão norteadores para o ensino da Teoria de Grafos no Ensino Médio. A teoria vai sendo apresentada a partir da resolução de problemas que motivam o aluno a investigar e questionar conceitos que acabam por conduzi-lo a descobertas sobre a própria teoria.

Por fim, no último capítulo, sugerimos um plano de aula para o ensino, aplicação e desenvolvimento de tal conteúdo no Ensino Médio.

## 2 HISTÓRIA E ORIGEM DA TEORIA DOS GRAFOS

Iniciaremos este capítulo com um breve comentário a respeito da história e origem da Teoria dos Grafos, citando alguns problemas que foram fundamentais para seu desenvolvimento.

Historicamente, segundo Biggs [1], a primeira vez que o termo *grafo* foi usado foi em uma publicação da Nature, em 1877, por Sylvester, que utilizou tal conceito para a representação de compostos químicos. O título do texto era "Chemistry and Algebra"(Química e Álgebra) e tinha como objetivo mostrar a relação entre esses conceitos. A relação seria exibida através da utilização de grafos.

O surgimento formal da definição de grafos ocorreu apenas no século XX. Apesar disso, acredita-se que o primeiro problema de grafos seja o Problema das Pontes, de Königsberg, o qual teve sua resolução publicada por Euler em 1736. Tal problema será enunciado posteriormente no presente trabalho.

Euler refere-se ao problema, em seu artigo, como um problema de posição, onde conceitos de distância e quantidade não influem, sendo, desse modo, um problema de geometria de posição - conceito mencionado pela primeira vez por Leibniz. Leibniz declarou isso, em uma carta a Huygens, sendo esse fragmento retirado de um trabalho de Maria Leonor Moreira, publicado em [3], que:

"A álgebra não me satisfaz porquanto não fornece as provas mais breves nem as mais belas construções da geometria. Por conseguinte, perante isto, considero que precisamos ainda de outro tipo de análise, geométrica ou linear, que trate diretamente a posição, como a álgebra trata as quantidades".

Do ponto de vista histórico, segundo Wilson, em [4], o problema que gerou o maior avanço para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos na metade do século XX foi o Problema das Quatro Cores. A origem desse problema é referida por Guthrie, um aluno de De Morgan no University College de Londres. O problema trata-se de provar que:

"Todo mapa desenhado no plano e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de quatro cores, sem que duas regiões fronteiriças recebam a mesma cor."

Ocorreram tantas tentativas de demonstrações desse problema, que surgiram várias conjecturas e resultados.

Com o avanço da computação, a Teoria dos Grafos ganhou cada vez mais importância. De tal modo, que o campo da computação é hoje uma das áreas de maior aplicação da Teoria dos Grafos.

### 3 REFERÊNCIAL TEÓRICO

#### 3.1 NOÇÕES BÁSICAS

Uma boa maneira de introduzirmos conceitos teóricos sobre a Teoria dos Grafos é através de uma exemplificação. Suponhamos que haja um torneio cujos times participantes são: Argentina, Brasil, Croácia, Dinamarca e Equador. Para facilitar a representação utilizaremos a seguinte legenda: Argentina (*A*), Brasil (*B*), Croácia (*C*), Dinamarca (*D*) e Equador (*E*). Vejamos, agora, os adversários de cada seleção:

- TABELA

Seleções	Adversários
A	B, C, D, E
B	A, C, D, E
C	A, B
D	A, B, E
E	A, B, D

Figura 1 – Tabela de jogos

- REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

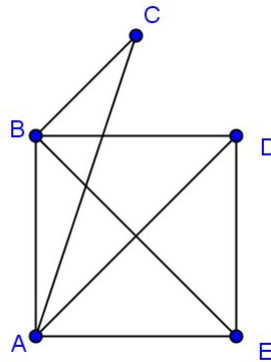


Figura 2 – Representação gráfica

Observe que as seleções são representadas por pontos e os jogos por segmentos de reta. Note que qualquer uma das duas representações apresentam a mesma situação. As estruturas que acabamos de representar são grafos.

Podemos inicialmente pensar que um grafo pode ser representado como um conjunto de pontos (vértices) e outro de pares de pontos (arestas), sendo cada aresta o par de pontos

que a determina. Podemos representar os vértices como pontos do plano e as arestas como linhas que unem esses pontos.

Segundo Jurkiewicz em [2], podemos definir certos conceitos para trabalhar com grafos. Para estar bem definido, um grafo deve possuir dois conjuntos finitos:

- O conjunto dos vértices  $V$  (na situação acima, as seleções).
- O conjunto das arestas  $A$  (na situação acima, os jogos).

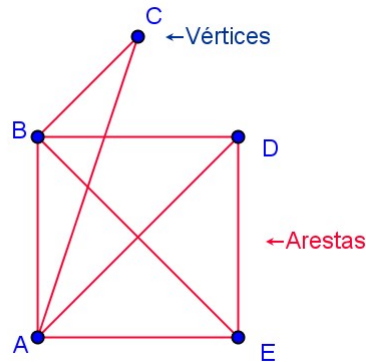


Figura 3 – Vértices e arestas no grafo

Portanto, o conjunto  $V$  é:

$$V = \{A; B; C; D; E\}$$

Também temos que o conjunto  $A$  é:

$$A = \{(A; B); (A; C); (A; D); (A; E); (B; C); (B; D); (B; E); (D; E)\}$$

Note que  $(A; B)$  e  $(B; A)$  representam a mesma aresta. Por esse motivo, no conjunto  $A$  aparece apenas  $(A; B)$ .

Quando temos dois vértices ligados por uma aresta, dizemos que os vértices são adjacentes e que a aresta é incidente aos vértices.

O número de vértices será representado pela letra  $n$ .

O número de arestas será representado pela letra  $m$ .

Para o exemplo anterior, temos:

$$n = 5 \text{ e } m = 8$$

O número de arestas incidentes a um vértice é chamado de grau do vértice. Para representar o grau de um vértice  $A$  utilizaremos a notação  $d(A)$ .



Para o exemplo anterior, temos:

$$d(A) = 4$$

$$d(B) = 4$$

$$d(C) = 2$$

$$d(D) = 3$$

$$d(E) = 3$$

Note que  $d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) = 4 + 4 + 2 + 3 + 3 = 16$ , que é exatamente o dobro do número de arestas. Será que é coincidência?

A partir do exemplo apresentaremos o primeiro resultado.

Seja  $G$  o grafo,  $V(G)$  o conjunto dos vértices de  $G$  e  $A(G)$  o conjunto das arestas de  $G$ .

### **Teorema 1**

Para todo Grafo  $G$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Sendo  $d(v)$  o grau de  $v$  e  $m$  o número de arestas.

*Demonstração:*

Basta notar que quando somamos os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas. Como cada aresta possui duas extremidades, temos que essa soma é o dobro do número de arestas.

### **Corolário 1**

Todo grafo  $G$  possui um número par de vértices de grau ímpar.

*Demonstração:*

Note que, se o número de vértices de grau ímpar fosse ímpar, teríamos que a soma dos graus dos vértices seria um número ímpar, absurdo, pois a soma dos graus dos vértices é sempre um número par.

Continuando com as definições, podemos ter uma aresta com extremos no mesmo vértice. Essa situação é chamada de *laço*.

Quando dois vértices possuem mais de uma aresta ligando esses vértices, chamamos esse grafo de *multigrafo*. A seguir, observe na figura 4, um exemplo de multigrafo.

Temos que grafos sem laços e arestas múltiplas (pelo menos duas arestas ligando o mesmo par de vértices) são chamados de grafos simples.

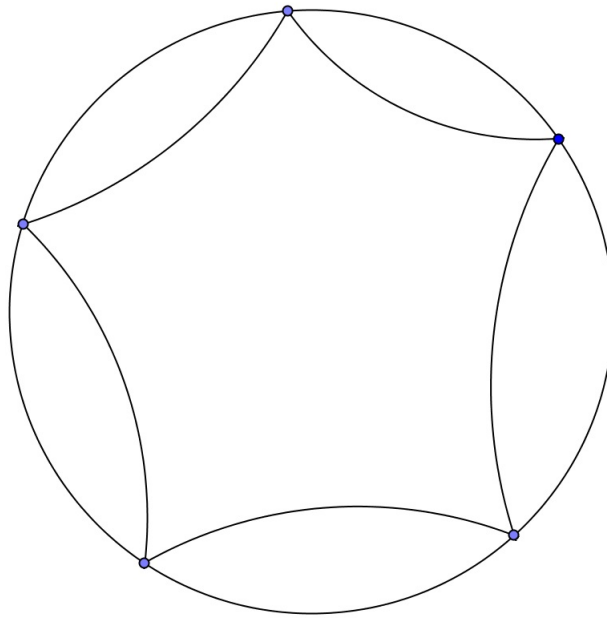


Figura 4 – Multigrafo

Um grafo é chamado de conexo se qualquer par de pontos é ligado por, ao menos, um caminho. Logo, se isso não ocorre, denominamos o grafo de desconexo. Observe, na figura 5, um exemplo de grafo conexo e na figura 6, um exemplo de grafo desconexo. Note que, por exemplo, os vértices  $D$  e  $E$  não pode ser ligado por um caminho.

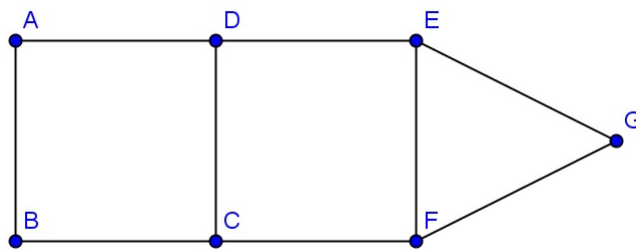


Figura 5 – Grafo Conexos

O conjunto de vértices adjacentes a um vértice  $v$  é chamado de vizinhança aberta de  $v$ , denotado por  $N(v)$ .

A vizinhança fechada de  $v$ , denotada por  $N[v]$  é  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ , ou seja, é formada pela vizinhança aberta e o próprio vértice.

-Vértice Isolado: Um vértice é dito isolado quando seu grau é zero.

-Vértice Pendente: Um vértice é dito pendente quando seu grau é um.

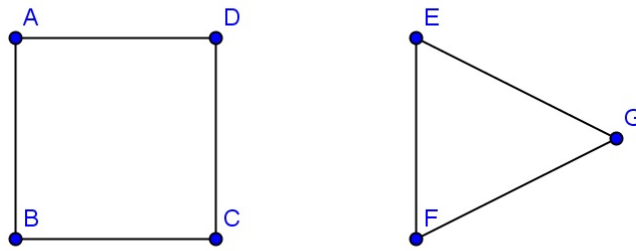


Figura 6 – Grafo Desconexo

-Grau Mínimo: O menor grau de um vértice de um grafo  $G$  é denominado grau mínimo de  $G$ , o qual é representado por  $\delta(G)$ .

-Grau Máximo: O maior grau de um vértice de um grafo  $G$  é denominado grau máximo de  $G$ , o qual é representado por  $\Delta(G)$ .

-Subgrafo: Um subgrafo de um grafo  $G$  é qualquer grafo  $G'$  tal que  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $A(G') \subseteq A(G)$ .

Para uma melhor compreensão, observe o próximo exemplo:

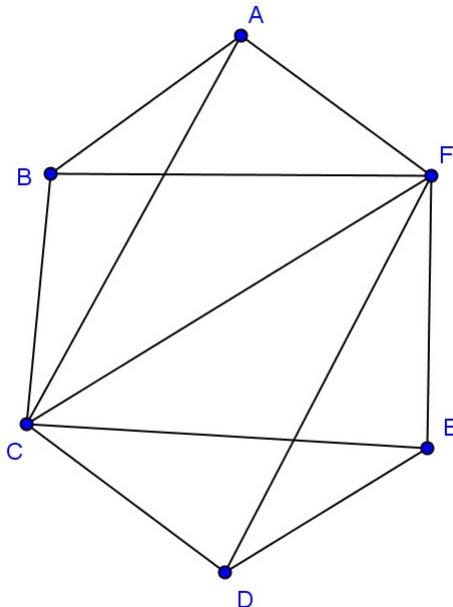
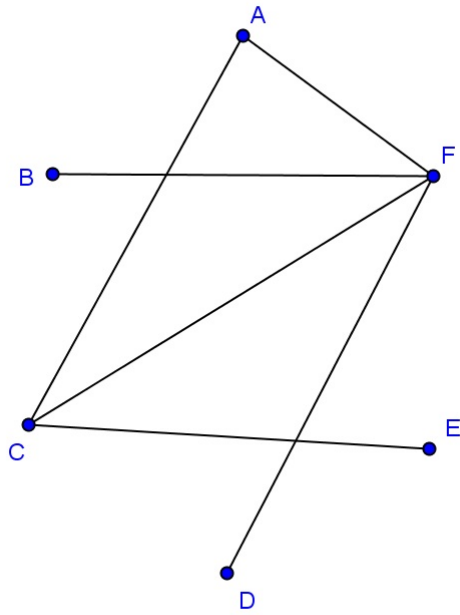
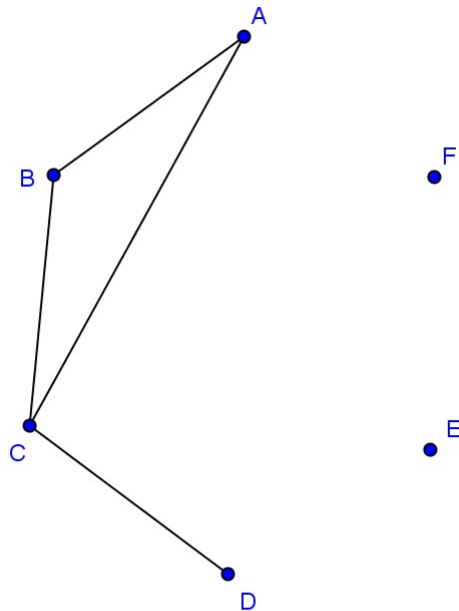


Figura 7 – Grafo  $G$

Um subgrafo  $G''$  é dito induzido por um subconjunto  $\{A, B, C, D\}$ , de  $V(G)$ , se for

Figura 8 – Subgrafo  $G'$ 

composto exatamente pelas arestas de  $G$  incidentes somente aos vértices  $A, B, C$  e  $D$ .

Figura 9 – Subgrafo  $G''$  induzido por  $\{A, B, C, D\}$

### 3.2 TIPOS ESPECIAIS DE GRAFOS

-Grafo Completo: Um grafo completo é definido como um grafo onde todo par de vértice é ligado por uma aresta. Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

Observe o grafo completo  $K_5$ .

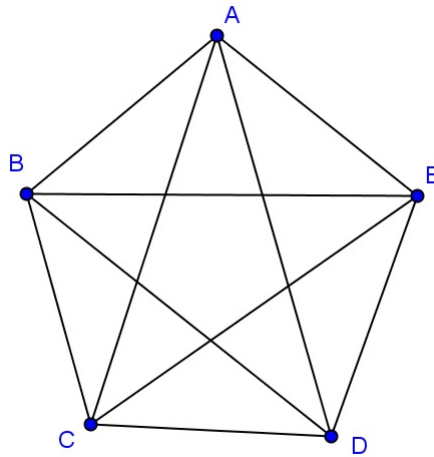


Figura 10 – Grafo completo  $K_5$

-Grafo Complementar: Um grafo complementar de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo que possui os mesmos vértices de  $G$ , possuindo como arestas, as arestas que faltam para que o grafo  $G$  seja completo.

Note que:

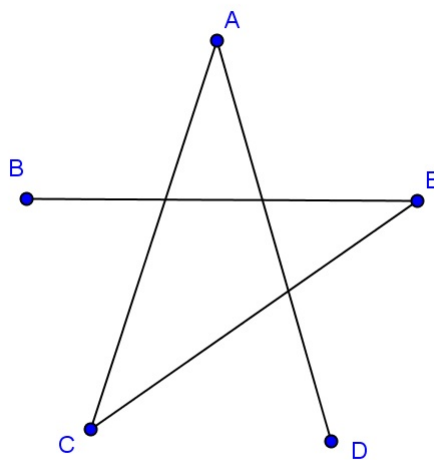


Figura 11 – Grafo  $G$

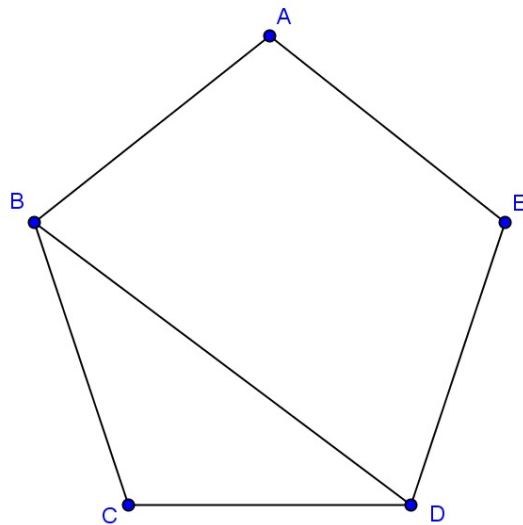


Figura 12 – Grafo  $\overline{G}$

$$V(G) = V(\overline{G})$$

$A(G) \cup A(\overline{G})$  são todas as arestas possíveis do grafo  $G$ .

Observe que os grafos das figuras 11 e 12 são complementares.

-Grafo Nulo: Um grafo  $G$  é dito nulo quando o conjunto  $A(G)$  é vazio.

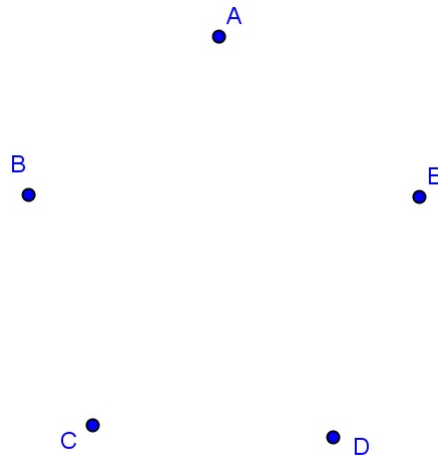


Figura 13 – Grafo Nulo

-Grafo Regular: Um grafo é regular quando todos os seus vértices são de mesmo grau. Observe na figura 14 um grafo regular cujos vértices possuem grau 2. Chamamos esse grafo de regular de grau 2 e denotamos de  $2 - regular$ .

-Ciclo: Um ciclo é um grafo conexo regular de grau 2. Utilizaremos a notação  $C_n$  onde  $n$  é o número de vértices. Veja na figura 15 um  $C_6$ .

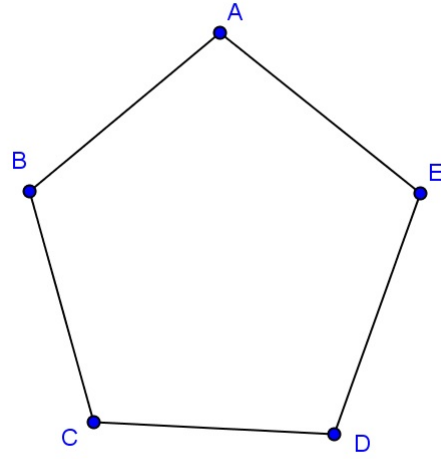
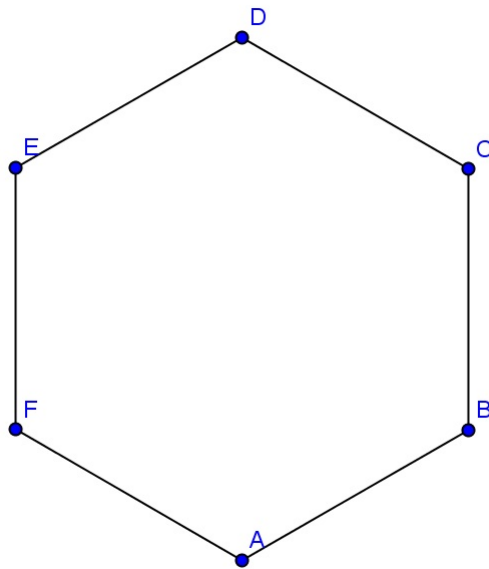


Figura 14 – Grafo Regular

Figura 15 – Ciclo  $C_6$

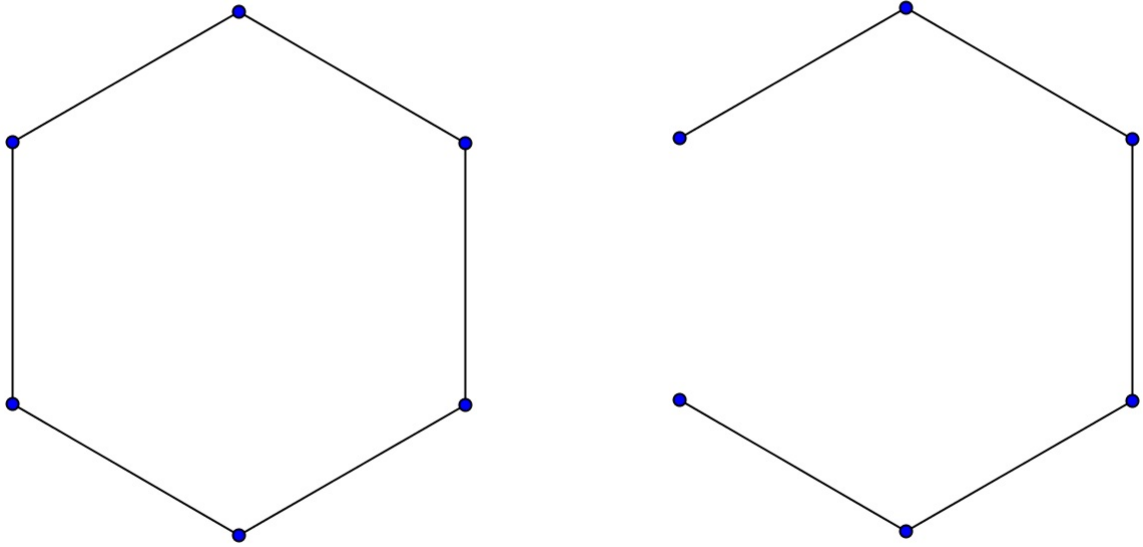


Figura 16 – Ciclo  $C_6$  e Caminho  $P_5$

-Caminho: Caminho é um ciclo do qual retiramos uma aresta. Sendo assim, o caminho  $P_n$  é obtido retirando uma aresta do ciclo  $C_{n+1}$ . Observe o exemplo na figura 16 de um ciclo  $C_6$  que, após retirar uma aresta, torna-se um caminho  $P_5$ .

Temos que um *passoio* é uma sequência de arestas do tipo,  $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{s-1}v_s$ . Note que estamos denotando a aresta  $(v_0, v_1)$  como  $v_0v_1$ . Temos que nesse caso  $s$  é o *comprimento* do *passoio*. Se todas as arestas do *passoio* são distintas, o *passoio* é chamado de *trilha*; se  $v_0 = v_s$  o *passoio* é uma *trilha fechada*. Se além das arestas, temos que todos os vértices são distintos, temos um *caminho*, e se  $v_0 = v_s$ , temos um ciclo.

-Grafos Eulerianos: Um grafo de  $m$  arestas é dito *Euleriano* se existe uma trilha fechada de comprimento  $m$  em  $G$ . Uma forma simples de entender é: se podemos percorrer cada aresta do grafo  $G$  uma única vez, partindo de um vértice e retornando a ele, esse grafo é Euleriano.

-Grafos Semieulerianos: Um grafo que não é Euleriano, mas possui uma trilha aberta de comprimento  $m$  é dito Semieuleriano. Uma forma simples de entender é a seguinte: se podemos percorrer cada aresta do grafo  $G$  uma única vez, partindo de um vértice e chegando em outro vértice, sem ser o de partida, trata-se de um grafo Semieuleriano.

### Lema 1

Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples)  $G$  tem grau maior ou igual a 2, então  $G$  contém um ciclo.

*Demonstração*



Se  $G$  contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente,  $G$  contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. A partir de um vértice  $v_0$  qualquer, iniciamos nossa trilha. Note que, como todo vértice tem pelo menos duas arestas incidentes, sempre que chegamos a um vértice por uma aresta, podemos continuar a trilha saindo por outra aresta. Então quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, em algum momento iremos chegar a um vértice já visitado, e o lema está provado.

### **Teorema 2(Teorema de Euler)**

Um grafo conexo  $G$  é Euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

#### *Demonstração*

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $G$  tenha uma trilha fechada de comprimento  $m$ . Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar, e outra para sair. Sendo assim, obrigatoriamente o grau de cada vértice deve ser um número par.

( $\Leftarrow$ ) Usaremos indução sobre o número de arestas  $m$  do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando  $m = 0$ . Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que  $m$  arestas. Sendo  $G$  conexo (não tem vértices de grau 0), todos os vértices têm grau maior ou igual a 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior,  $G$  contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em  $G$ , escolhamos uma trilha  $T$  com comprimento máximo. Se  $T$  tem comprimento  $m$ , o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo  $H$  resultante de  $G$  pela retirada das arestas de  $T$ . Note que  $H$  não é necessariamente um grafo conexo mas é composto por uma quantidade finita de subgrafos conexos chamados *componentes conexas* de  $H$ . Além disso, é fácil ver que cada componente conexa de  $H$  deve ter pelo menos um vértice em comum com a trilha  $T$ . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de  $T$ , e todos os vértices do grafo têm grau par (pela hipótese), temos uma componente com todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução,  $H$  tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de  $H$ , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando  $T$  com a trilha em  $H$ . Mas isso contraria a maximalidade na escolha de  $T$ .

Tais demonstrações foram retiradas de [2].

Um resultado que futuramente será útil é o seguinte:

### **Corolário 3**

Um grafo conexo  $G$  é Semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.

## 4 PROBLEMAS

Nesse capítulo, apresentaremos problemas que podem ser utilizados para discutir a Teoria dos Grafos no Ensino Médio, e técnicas de resolução e discussão dentro de sala de aula.

### 4.1 PROBLEMA 1

É possível que em um aniversário com 5 pessoas, cada pessoa cumprimente exatamente 2 pessoas?

*Resolução:*

Inicialmente, uma forma de atrair o interesse dos alunos seria questionar: Como iniciar um problema desse tipo?

Tal questionamento é importante para que os alunos se envolvam com o problema. Nesse momento, é interessante que o professor direcione o problema para uma representação geométrica para um maior entendimento da situação-problema.

Essa situação pode ser representada da seguinte forma:

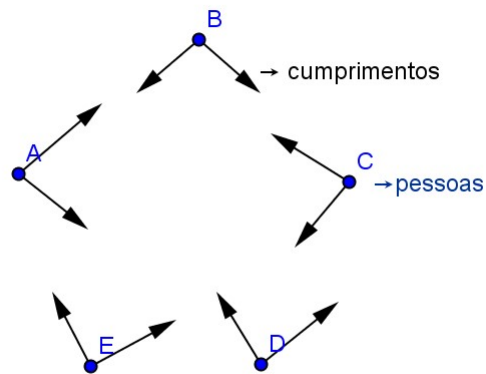


Figura 17 – Representação geométrica

Portanto, uma possível solução seria, figura 18.

Sendo:

Os pontos A, B, C, D e E representam pessoas.

Os segmentos AB, BC, CE, ED e DA os cumprimentos.

Observe que as pessoas são os vértices do grafo, e os cumprimentos são as arestas do grafo - note que AB representa a aresta que liga o vértice A ao vértice B.

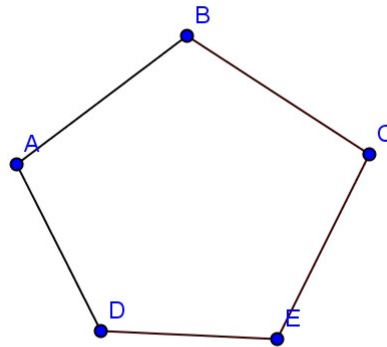


Figura 18 – Possível solução

Essa representação mostra que o problema é possível, mas essa é a única solução? Essa discussão é importante e por vezes esquecida no Ensino Médio. A falta de discussões como essa cria no aluno uma falsa ideia de que problemas matemáticos sempre possuem solução, e essa solução é única.

Veja que com a mesma representação podemos mostrar uma outra solução:

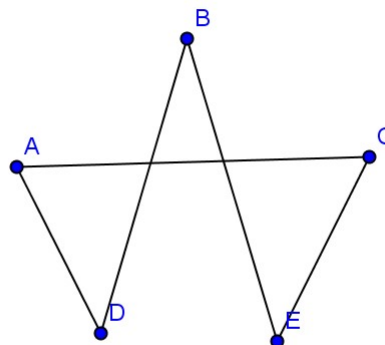


Figura 19 – Outra solução

Sendo assim, podemos notar que tal situação tem solução e essa não é única. Esse problema nos leva ao seguinte questionamento: será que para qualquer quantidade de vértices e arestas, conseguimos uma solução? Tal questionamento é importante para desenvolver no aluno o ato de ser questionador de possíveis variações de situações, o que o torna muito mais capaz de pensar e resolver um problema desse tipo.

-Objetivo didático: O objetivo desse primeiro problema é que o aluno note a possibilidade de representar um mesmo problema de formas distintas, e que um problema

pode possuir mais de uma solução.

Para alimentar essa discussão, vamos agora sugerir um outro problema.

#### 4.2 PROBLEMA 2

É possível que em um aniversário com 5 pessoas, cada pessoa cumprimente exatamente 3 pessoas?

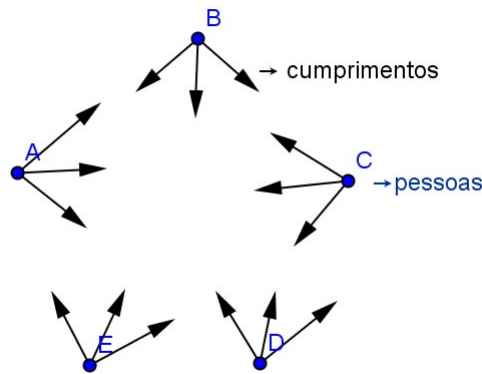


Figura 20 – Representação geométrica

Vamos observar que, à primeira vista, o problema aparenta ser análogo ao problema anterior e, justamente por isso, seria interessante deixar que os alunos tentem solucioná-lo.

É provável que, após algumas tentativas frustradas, os alunos comecem a conjecturar se a situação apresentada é possível ou não. A partir disso, seria interessante pedir aos alunos que demonstrem que tal problema não possui solução. Nesse momento, seria construtivo induzir os alunos a conjecturar o Teorema 1 e o Corolário 1, pois conhecendo-os, o problema passa a ser simplório. Basta observar que nesse problema temos que o grafo possui 5 vértices e que o grau de cada um é ímpar. Logo, o número de vértices de grau ímpar é ímpar, o que é um absurdo, uma vez que o número de vértices de grau ímpar necessariamente é par.

-Objetivo didático: Nesse problema, o interessante é incentivar o caráter investigador dos alunos, mostrar que alguns problemas podem ser impossíveis e mostrar como podemos justificar através de uma abordagem formalista a validade ou não de um resultado.

Com esses problemas, o aluno já estaria familiarizado com os conceitos básicos de grafos, tais como vértice, aresta e grau de um vértice. Partindo desse conhecimento, avançaremos para problemas mais complexos.

### 4.3 PROBLEMA 3(Problema das Pontes de Königsberg)

Antes de enunciar esse problema, aconselhamos que o professor introduza a questão falando com os alunos sobre o excepcional matemático que foi Euler, citando sua importância para a Matemática e seus incontáveis artigos e trabalhos, já que uma forte ferramenta para se desenvolver o interesse de um aluno por um problema é utilizando a história da própria Matemática como fator motivador do problema.

É importante lembrar que esse problema é considerado o precursor da Teoria dos Grafos; foi o estudo dessa situação que levou ao desenvolvimento de tal teoria.

Conta-se que o povo da cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado) se perguntava se seria possível atravessar as sete pontes do rio Pregel sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. Podemos enunciá-lo da seguinte maneira:

*Será possível fazer um passeio pela cidade, passando exatamente uma única vez em cada ponte, começando e terminando no mesmo local?*

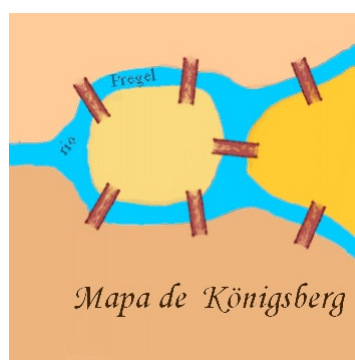


Figura 21 – Mapa de Königsberg

(Mapa disponível em <http://ptmat.fc.ul.pt/>)

É possível que o seguinte questionamento ocorra por parte dos alunos: "por que é relevante saber se essa situação é possível ou não?" Esse é um bom momento para se comentar sobre a Matemática Aplicada, principalmente utilizando a Teoria dos Grafos. Um exemplo comum para justificar um problema desse tipo é o seguinte:

"Imagine uma empresa de entregas em uma pequena cidade. Sabendo que essa empresa possui um único caminhão de entregas, e esse caminhão deve realizar todas as entregas e depois retornar para a empresa, será que é possível realizar tal serviço sem ser necessário passar mais de uma vez em uma mesma rua, tendo-se em vista a otimização de custos e tempo?"

Problemas como esse são comuns no dia a dia de uma empresa de entregas e mostram uma aplicação importante da Teoria dos Grafos. Problemas que envolvem

questões de caminhos com aplicações na computação ou em malhas, visando a otimização do processo, são um exemplo da Matemática Aplicada.

Para a solução do problema das pontes, é interessante que os alunos busquem, por tentativa, se o problema é possível ou não. Após esse primeiro contato, podemos sugerir uma abordagem através da Teoria dos Grafos, utilizando uma representação geométrica, a qual é apresentada a seguir:

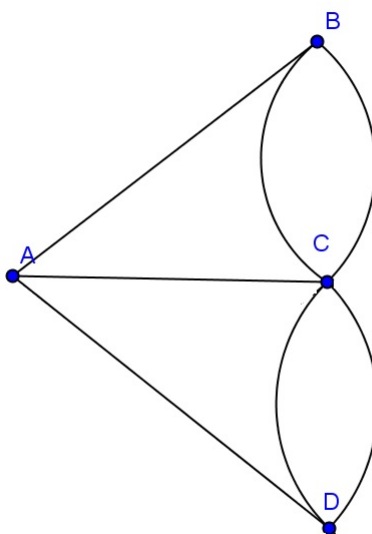


Figura 22 – Representação geométrica

Primeiramente, o aluno deve fazer um levantamento dos elementos desse problema, como:

- 1 - *O grafo é simples ou possui arestas múltiplas?*
- 2 - *Qual o grau de cada vértice?*
- 3 - *O que queremos que aconteça?*
- 4 - *Como podemos resolver o problema?*

Um questionário desse tipo direciona o aluno para uma melhor compreensão do problema e é uma das formas de se trabalhar com resoluções de problema em sala de aula.

A atividade fica mais organizada e se torna mais construtiva se esse questionário é realizado em grupos, pois, desse modo, a discussão se enriquece e o problema fica mais próximo de uma possível resolução.

Uma possível resposta ao questionário é a seguinte:

- 1 - *O grafo possui arestas múltiplas.*

$$2 - d(A) = 3, d(B) = 3, d(C) = 5 \text{ e } d(D) = 3$$

3 - queremos passar por todas as arestas uma única vez e retornar ao ponto inicial

4 - Para responder à quarta pergunta, vamos pensar um pouco. Observando o nosso objetivo no problema, fica claro que queremos que o grafo seja Euleriano, mas, para isso, sabemos que, pelo Teorema de Euler, todos os seus vértices devem possuir grau par. Portanto, concluímos que tal situação não é possível, uma vez que os graus dos vértices do problema são ímpares.

Objetivo didático: Esse problema tem por objetivo motivar o aluno ao estudo da Matemática, utilizando a História da Matemática e os conhecimentos do próprio aluno sobre grafos, para, através desses, representar o problema. É importante que o aluno crie uma linha de raciocínio (questionário) para desenvolver o problema e perceba que, a partir de uma simples mudança de representação e utilização da Teoria dos Grafos, a resolução do problema é facilitada.

#### 4.4 PROBLEMA 4(Construção da Casa)

Veja o problema a seguir:

Você conseguiria desenhar a casa abaixo sem tirar o lápis do papel, passando uma única vez em cada segmento?

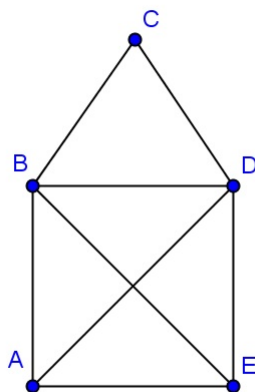
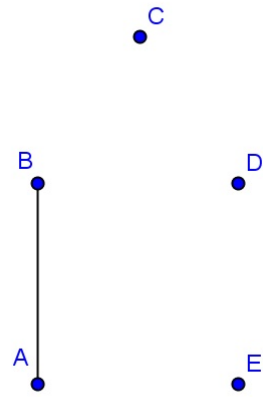


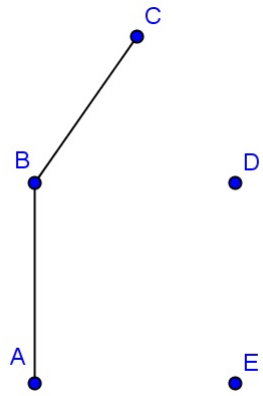
Figura 23 – Casa

Inicialmente, deixaremos que os alunos tentem desenhar a casa. É possível que algum aluno consiga construir a casa nas condições dadas. Uma possível solução é a seguinte:

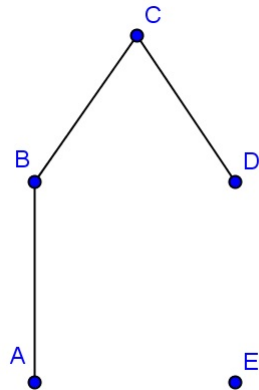
-Primeiramente aresta AB.



-Aresta BC.

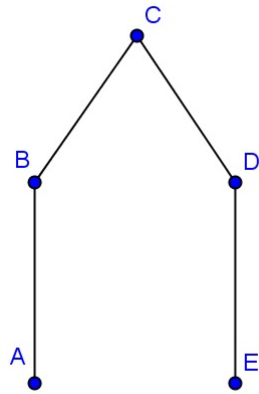


-Aresta CD.

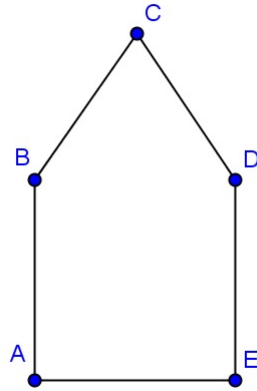


-Aresta DE.

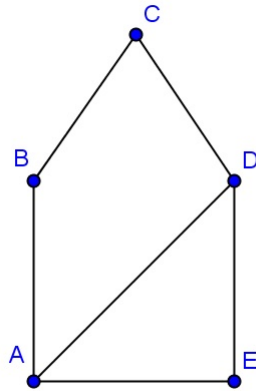




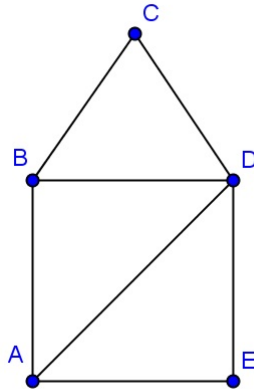
-Aresta EA.



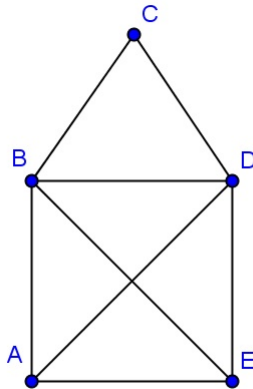
-Aresta AD.



-Aresta DB.



-E finalmente BE.



Notemos que essa não é a única solução. Nesse momento, é construtível discutir cada solução apresentada pelos alunos. A partir disso, note que todas as soluções possíveis ou iniciam em  $A$  e terminam em  $E$  ou iniciam em  $E$  e terminam em  $A$ . O questionamento agora é o seguinte:

*Será que todas as soluções começam e terminam em  $A$  ou  $E$ ?*

Podemos discutir o uso computacional para responder a um questionamento desse tipo. Observe que esse problema possui um número de possibilidades finito e relativamente pequeno, o que nos permite utilizar ferramentas computacionais para resolver esse problema.

Note que a solução apresentada pode ser descrita da seguinte maneira:

$AB \rightarrow BC \rightarrow CD \rightarrow DE \rightarrow EA \rightarrow AD \rightarrow DB \rightarrow BE$

Para facilitar essa notação, utilizaremos uma sequência da seguinte forma para representar esse caso:

$ABCDEADBE$

Podemos utilizar um computador para conhecer todas os casos possíveis, obter as soluções e concluir se todas iniciam ou terminam nos vértices  $A$  e  $E$ . Resolver um problema dessa forma em matemática é o que chamamos de resolver utilizando-se força bruta, pois, desse modo, obtemos todos os casos e observamos cada um deles. Mas sempre será possível resolver dessa forma?

Observe que, na realidade, estudar as possibilidades é obter todas as sequências possíveis dos segmentos que geram a casa. Temos que o número de arestas desse problema é 8. Portanto, para obter o número de possibilidades, basta permutar 8 elementos distintos. O número de possibilidades  $8! = 40320$  é um número de possibilidades ínfimo para qualquer computador, o que permite à máquina resolver o problema em segundos. Mas, imagine que agora a nossa figura possua 22 arestas, o que nos levaria a  $22!$  de possibilidades, e que o computador realize cerca de 1000000 de possibilidades por segundo. Como são poucos os computadores com essa capacidade atualmente, quanto tempo demoraria para sabermos se o problema possui ou não solução?

Note que:

$$22! = 1124000727777607680000$$

Como são 1000000 de possibilidades por segundo, temos:

$$1124000727777607680000 : 1000000 = 1124000727777607,68 \text{ segundos}$$

Considerando só o número inteiro, obtemos:

$$1124000727777607 : 60 = 18733345462960,11\bar{6} \text{ minutos}$$

$$18733345462960 : 60 = 312222424382,6\bar{6} \text{ horas}$$

$$312222424382 : 24 = 13009267682,58\bar{3} \text{ dias}$$

$$13009267682 : 365 = 35641829,26 \text{ anos}$$

o tempo seria próximo à 35641 milênios

Logo, nota-se que é inviável esperar todo esse tempo para saber se é possível ou não resolver esse problema.

Voltando ao problema da casa, como responder à pergunta: "é possível ou não iniciar e terminar no mesmo vértice?"

Observe que o grafo é conexo e possui vértices de grau par e ímpar, o que pelo *Teorema de Euler* o torna impossível de ser um grafo Euleriano. Portanto, não é possível iniciar e terminar no mesmo vértice.

Por que é possível realizar essa construção nas condições impostas?

Observe que o grafo é conexo e possui exatamente dois vértices de grau ímpar, o que torna esse grafo Semieuleriano. Assim, é possível determinar um caminho que passe

uma única vez em cada aresta, mas iniciando em um vértice e terminando em outro vértice distinto do primeiro.

Por que só é possível realizar essa construção iniciando em  $A$  e terminando em  $E$ , ou iniciando em  $E$  e terminando em  $A$ ?

Temos que, para conseguir o caminho desejado, cada vértice possua uma entrada e uma saída para o caminho, sendo essa entrada e saída utilizadas uma única vez, o que necessariamente torna os graus desses vértices pares. Sendo as exceções, o início e o fim do caminho, esses devem possuir graus ímpares, pois iniciamos em um deles (não sendo necessário entrar no vértice) e terminamos no outro (não sendo necessário sair do vértice). Concluimos, assim, que o problema sempre se inicia e termina em  $A$  ou em  $E$ .

-Objetivo didático: Nesse problema é importante mostrar a utilização de ferramentas computacionais para resolver problemas matemáticos, e que nem sempre será possível resolver esses problemas dessa forma.

#### 4.5 PROBLEMA 5 (Identificação dos Grafos)

Quais dessas figuras (figura 24) são possíveis de construir, sem retirar o lápis do papel, passando uma única vez em cada segmento? Se possível a construção por onde devemos começar e terminar tal construção?

Notemos que a figura 1 é um grafo conexo que possui todos os vértices de grau par. Assim sendo, trata-se de um grafo Euleriano e, portanto, é possível construir a figura 1 nas condições estabelecidas. Nesse caso, podemos iniciar e terminar em qualquer vértice.

No caso da figura 2, temos um grafo conexo que possui exatamente dois de seus vértices de grau ímpar. Como esse é um grafo Semieuleriano, é possível construir a figura 1 nas condições estabelecidas. Nesse caso, necessariamente, devemos iniciar em  $L$  e terminar em  $H$ , ou iniciar em  $H$  e terminar em  $L$ , pois esses são os vértices de grau ímpar.

No caso da figura 3, temos um grafo conexo, que não é Euleriano nem Semieuleriano. Consequentemente, é impossível construir tal figura sem retirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma aresta.

-Objetivo didático: Que o aluno consiga identificar grafos Eulerianos e Semieulerianos, e que o aluno utilize as teorias de tais grafos para justificar a possibilidade ou impossibilidade de tais problemas.

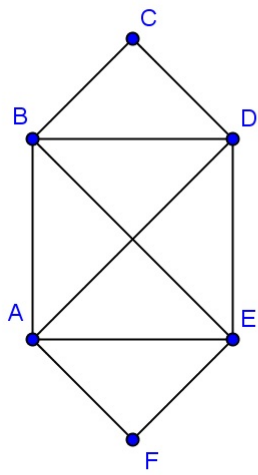


Figura 1

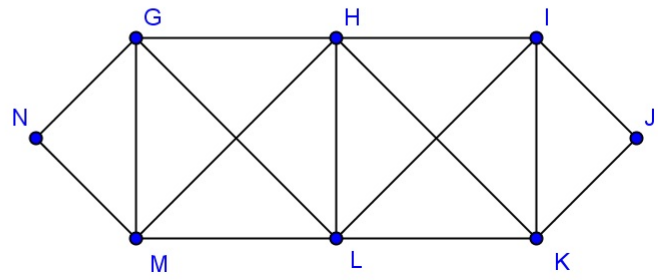


Figura 2

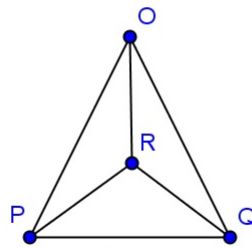


Figura 3

Figura 24 – Identificação dos Grafos

## 5 PLANO DE AULA

Nesse capítulo apresentaremos um plano de aula para trabalhar com a Teoria dos Grafos em uma turma de Ensino Médio.

-Objetivo: Apresentar a Teoria dos Grafos e mostrar sua utilização em problemas de Matemática Aplicada. Desenvolver no aluno o caráter investigativo e a capacidade interpretativa para transformar a forma como é apresentado um problema.

Inicialmente, para motivar os alunos no estudo de Teoria dos Grafos, comece apresentando o Problema das Pontes de Königsberg, problema que foi atacado por Euler. Conte da importância desse matemático e desse problema para o desenvolvimento da teoria. Dessa forma, utilizamos a História da Matemática para motivar o estudo.

Separe a sala em grupos e deixe que eles busquem soluções. Após um tempo, mostre os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, tais como vértice, aresta e grau de um vértice. Em seguida, peça que os alunos façam uma representação do problema utilizando a Teoria dos Grafos, e que classifiquem o grau de cada um dos vértices.

Para a sala de aula, um modo interessante de induzir o aluno à ideia que produzirá a solução do problema, sem necessariamente enunciar um teorema, é a seguinte:

Pense em um caso com duas margens e uma ponte. É possível atravessar de uma margem para a outra, e voltar a margem inicial passando uma única vez pela ponte? A resposta é não, já que seriam necessárias, pelo menos, duas pontes.

Pense em um caso com duas margens e cinco pontes. É possível passar por todas as pontes e retornar à margem inicial? A resposta é não. Note que, para isso acontecer, é necessário que a quantidade de pontes seja par.

Nesse momento, seria interessante enunciar o teorema 2, fornecendo todo o aporte teórico necessário para o aluno conseguir interpretar o teorema. A partir disso, a impossibilidade do problema torna-se evidente.

Através da exibição desse problema, tendo-se em vista o objetivo de solucioná-lo, podemos observar de que forma se pode abordar conceitos da Teoria dos Grafos e suas aplicações.

## 6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, foi apresentada uma abordagem voltada para o Ensino Médio acerca da Teoria dos Grafos, sendo nosso objetivo central, desenvolver no aluno noções a respeito de conceitos introdutórios da Teoria dos Grafos, grafos Eulerianos, Semieulerianos e sua utilização em Matemática Aplicada.

Mostramos como podemos, através da Teoria dos Grafos, levar o aluno a questionar a possibilidade de um determinado problema, a sua aplicabilidade e suas possíveis formas de resolução.

Inicialmente, buscamos motivar o aluno através de problemas básicos. Mais tarde, o fizemos por meio de problemas de cunho histórico (Problema 3) e, finalmente, com problemas que instigam o aluno a buscar uma solução, não por vias de contagem, o que lhe é comum, mas por observação empírica, buscar uma formalização que solucione o problema.

Esse trabalho reforça a necessidade de se desenvolver no aluno conhecimentos mais aplicáveis em situações do dia a dia, o que o impulsiona a ampliar sua capacidade interpretativa de um problema, tema que cada vez mais é discutido no Ensino Médio por se tratar de uma capacidade tão necessária em processos seletivos como o ENEM.

Esperamos que, com essa abordagem, professores que não possuem conhecimento a respeito da Teoria dos Grafos notem que esse fundamento pode funcionar como força motriz para o ensino de matemática, utilizando-se ferramentas como a História da Matemática e a Matemática Aplicada.

## REFERÊNCIAS

- [1] BIGGS, LLOYD e WILSON. *Graph Theory 1736-1936*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- [2] JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução*, Apostila 5 do Estágio de treinamento dos alunos premiados da OBMEP, 2009.
- [3] SÁ, C. C. de, ed.; ROCHA, J.,ed. *Treze viagens pelo mundo da Matemática*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [4] WILSON, R. *Four Colors Suffice - How the four color problem was solved*. Princeton: Princeton University Press, 2005.