

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT

# Geometria Dedutiva e Experimental Para o Ensino Fundamental e Médio

por

**Damião Ferreira de Paulo**

sob orientação do

**Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra**

Junho de 2014



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT



# Geometria Dedutiva e Experimental Para o Ensino Fundamental e Médio<sup>†</sup>

por

**Damião Ferreira de Paulo**

sob orientação do

**Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra**

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho de 2014  
João Pessoa - PB

---

<sup>†</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

P331g Paulo, Damião Ferreira de.  
Geometria dedutiva e experimental para o ensino  
fundamental e médio / Damião Ferreira de Paulo.-- João  
Pessoa, 2014.  
65f. : il.  
Orientador: Flank David Morais Bezerra  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Geometria dedutiva e experimental.  
3. Ilustrações geométricas. 4. Poliedros. 5. Áreas. 6. Volumes.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Geometria Dedutiva e Experimental Para o Ensino Fundamental e Médio

por

**Damião Ferreira de Paulo**

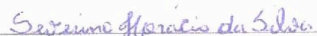
Trabalho de conclusão de curso apresentada ao corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:



Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra -UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

Junho de 2014

# Agradecimentos

A *Deus* por ter me dado força e sabedoria pra fazer tudo que preciso.

À minha mãe Marieta e a meus irmãos Francisco, Marcelo, Vasconcelos, Conceição e Juliana.

À sociedade Brasileira de Matemática, por ter tido a maravilhosa idéia de criar o PROFMAT, a CAPES, por ter acreditado e apoiado essa idéia.

À UFPB, em particular ao Departamento de Matemática dessa instituição e aos professores Bruno, Carlos Bocker, Elisandra, Fernando, Flank, Flávia, Gilmar, João Marcos, Manassés, Miriam, Napoleon, Pedro Venegas, Pedro Hinojosa e Sergio.

Quero agradecer também ao Departamento de Matemática da UFCG onde terminei minha graduação.

E por fim, agradeço aos meus colegas de mestrado que estiverão comigo nesses dois anos de muita luta.

# Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que contribuíram de alguma forma para que eu pudesse terminar o mestrado.

Essas duas frases resumem bem esses dois anos que dediquei ao mestrado:

"Superar um passo não tem mérito é obrigação. Vencer o impossível é glorificante".

"Quando uma criatura humana desperta para um grande sonho e sobre ele lança toda a força de sua alma, todo o universo conspira a seu favor".

# Resumo

Neste trabalho estudamos os princípios da geometria dedutiva e experimental tratada no Ensino Fundamental e Médio. Iniciamos o trabalho com um conjunto de axiomas da geometria plana, e seguimos o mesmo estudando alguns tópicos da geometria espacial. A fim de ilustrar algumas definições e resultados discutidos ao longo do trabalho, alguns sólidos são construídos com cartolina, isopor, canudos e etc.

***Palavras-chave:*** Geometria Dedutiva e Experimental; Ilustrações Geométricas; Poliedros; Áreas; Volumes.

# Abstract

In this work we study the principle of the Deductive and Experimental Geometry treated in the High School. We begin the work with a set of axioms of the Plane Geometry, and we follow the work studying some topics of the Spatial Geometry. To illustrate some definitions and results along of the work, some solids are constructed with paperboard, straw and etc.

***Keywords:*** Deductive and Experimental Geometry; Geometry illustrations; Polyhedrons; Areas; Volumes.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Tópicos de Geometria Plana</b>	<b>1</b>
1.1	Noções Primitivas . . . . .	1
1.2	Noções Primitivas . . . . .	2
1.3	Axiomas: Um ponto de partida da geometria . . . . .	3
1.4	Posições relativas entre duas retas . . . . .	4
1.5	Determinação de um Plano . . . . .	7
1.6	Posições relativas entre reta e plano . . . . .	8
1.7	Posições Relativas entre Planos . . . . .	9
1.8	Projeção ortogonal . . . . .	10
1.9	Distâncias . . . . .	12
1.10	Ângulos no espaço . . . . .	14
1.11	Diedros . . . . .	14
1.12	O número pi e o comprimento da circunferência . . . . .	15
1.13	Área do círculo . . . . .	18
1.14	Área de uma região triangular . . . . .	20
1.15	Desigualdade triangular . . . . .	21
1.16	Soma dos ângulos internos do triângulo . . . . .	22
1.17	Soma dos ângulos internos de um quadrilátero . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Teorema de Pitágoras Generalizado</b>	<b>29</b>
2.1	Teorema de Pitágoras . . . . .	29
2.2	Teorema de Pitágoras generalizado . . . . .	32
	2.2.1 Aplicação do Teorema de Pitágoras generalizado: O problema de Hipócrates . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Tópicos de Geometria Espacial</b>	<b>35</b>
3.1	Poliedros . . . . .	35
	3.1.1 Elementos de um poliedro . . . . .	36
3.2	Relação de Euler . . . . .	37
3.3	Poliedros regulares . . . . .	39
3.4	Definição de prisma . . . . .	41

3.5	Entendendo a noção de volume de um sólido . . . . .	42
3.6	Princípio de Cavalieri . . . . .	45
3.7	Teorema Pitágoras/Cavalieri . . . . .	46
3.8	Volume de uma pirâmide . . . . .	47
	3.8.1 Volume de uma pirâmide triangular . . . . .	47
	3.8.2 Volume de uma pirâmide qualquer . . . . .	48
3.9	Volume de uma Esfera . . . . .	50
3.10	Área da superfície esférica . . . . .	52
3.11	Poliedros regulares e suas planificações . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Interpretação geométrica dos produtos notáveis</b>	<b>59</b>
4.1	Quadrado da soma de dois termos . . . . .	59
4.2	Cubo da soma de dois termos . . . . .	60
4.3	O binômio de Newton . . . . .	61
	4.3.1 Sir Isaac Newton . . . . .	61
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras

1.1	Euclides de Alexandria . . . . .	1
1.2	Ponto, reta, plano . . . . .	3
1.3	Semiplano . . . . .	3
1.4	Semiespaço . . . . .	4
1.5	Bloco retangular . . . . .	4
1.6	Retas coincidentes . . . . .	5
1.7	Retas paralelas . . . . .	5
1.8	Retas concorrentes . . . . .	6
1.9	Retas reversas . . . . .	6
1.10	Retas perpendiculares . . . . .	6
1.11	Retas ortogonais . . . . .	6
1.12	Plano . . . . .	7
1.13	Plano . . . . .	7
1.14	Plano . . . . .	7
1.15	Plano . . . . .	8
1.16	Reta paralela a um plano . . . . .	8
1.17	Reta secante a um plano . . . . .	8
1.18	Reta contida em um plano . . . . .	9
1.19	Planos coincidentes . . . . .	9
1.20	Planos paralelos . . . . .	9
1.21	Planos secantes . . . . .	10
1.22	Planos perpendiculares . . . . .	10
1.23	Projeção ortogonal . . . . .	10
1.24	Projeção ortogonal . . . . .	11
1.25	Projeção ortogonal . . . . .	11
1.26	Projeção ortogonal . . . . .	11
1.27	Projeção ortogonal . . . . .	12
1.28	Distância ponto reta . . . . .	12
1.29	Distância ponto plano . . . . .	13
1.30	Distância reta plano paralelo . . . . .	13
1.31	Distância planos paralelos . . . . .	13
1.32	Distância entre duas retas reversas . . . . .	14

1.33	Ângulos entre retas reversas . . . . .	14
1.34	Ângulos entre dois planos . . . . .	15
1.35	Diedro . . . . .	15
1.36	ângulo plano . . . . .	15
1.37	Polígonos inscritos e circunscritos a circunferência . . . . .	16
1.38	Circunferências: moeda, bambolê, terra. . . . .	17
1.39	Polígono hexagonal . . . . .	18
1.40	Circunferência inscrita a um hexágono . . . . .	19
1.41	Circunferência inscrita a um polígono . . . . .	19
1.42	Triângulo $ABC$ e paralelogramo $ABCD$ . . . . .	20
1.43	Ilustração: paralelogramo e triângulo . . . . .	21
1.44	Triângulo $ABC$ . . . . .	21
1.45	Triângulo $BCD$ . . . . .	22
1.46	Ilustração: triângulos feitos com canudos . . . . .	23
1.47	Triângulo $ABC$ . . . . .	23
1.48	Triângulo $ABC$ e Reta $r$ . . . . .	24
1.49	Ilustração: soma dos ângulos interno do triângulo . . . . .	25
1.50	Quadrilátero . . . . .	25
1.51	Ilustração: soma dos ângulos interno do quadrilátero . . . . .	26
1.52	Retângulo Áureo . . . . .	27
1.53	Retângulo áureo e a seqüência de Fibonacci . . . . .	27
1.54	Pártenon, em Atenas . . . . .	27
1.55	Monalisa, de Leonardo da Vinci . . . . .	28
1.56	Elementos da natureza e a razão áurea . . . . .	28
2.1	Triângulo retângulo . . . . .	29
2.2	Teorema de Pitágoras . . . . .	30
2.3	Ilustração: Teorema de Pitágoras . . . . .	30
2.4	Demonstração do Teorema de Pitágoras . . . . .	31
2.5	Teorema de Pitágoras . . . . .	32
2.6	Teorema de Pitágoras generalizado . . . . .	32
2.7	Lúnulas . . . . .	33
2.8	Lúnulas e triângulo retângulo . . . . .	34
2.9	Triângulo retângulo e polígonos . . . . .	34
3.1	Poliedros . . . . .	35
3.2	Elementos do poliedro . . . . .	36
3.3	Poliedro convexo ou não convexo . . . . .	36
3.4	Poliedro convexo ou não convexo . . . . .	37
3.5	Superfície Poliédrica Aberta . . . . .	38
3.6	Poliedro Não Convexo . . . . .	39
3.7	Poliedro Não Convexo . . . . .	39

3.8	Poliedros regulares . . . . .	40
3.9	Ilustração dos poliedros regulares . . . . .	40
3.10	Poliedros Regulares . . . . .	41
3.11	Poliedros regulares usados como dados . . . . .	41
3.12	Prisma hexagonal . . . . .	42
3.13	Ilustração do prisma hexagonal . . . . .	43
3.14	Paralelepípedo reto-retângulo . . . . .	43
3.15	Paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $a, b$ e $c$ . . . . .	44
3.16	Cubo de aresta $a$ . . . . .	44
3.17	Pilha de moedas . . . . .	45
3.18	Pilha de tijolos . . . . .	45
3.19	Sólidos geométricos . . . . .	46
3.20	Resma de papel . . . . .	46
3.21	Prismas quadrangulares . . . . .	47
3.22	Prismas e pirâmides . . . . .	48
3.23	Ilustração da decomposição do prisma triangular em 3 pirâmides . . . . .	49
3.24	Pirâmide pentagonal . . . . .	49
3.25	Cilindro e anticlépsidra . . . . .	50
3.26	Esfera e anticlépsidra . . . . .	51
3.27	Esfera e anticlépsidra . . . . .	51
3.28	Coroa circular . . . . .	51
3.29	Secção meridiana da anticlépsidra . . . . .	52
3.30	Esfera e pirâmide . . . . .	53
3.31	Planificação do tetraedro regular . . . . .	53
3.32	Planificação do hexaedro regular . . . . .	54
3.33	Planificação do octaedro regular . . . . .	54
3.34	Planificação do dodecaedro regular . . . . .	54
3.35	Planificação do icosaedro regular . . . . .	55
3.36	Tetraedro regular planificado . . . . .	55
3.37	Hexaedro regular planificado . . . . .	55
3.38	Octaedro regular planificado . . . . .	56
3.39	Dodecaedro regular planificado . . . . .	56
3.40	Icosaedro regular planificado . . . . .	57
3.41	Planificação do prisma hexagonal . . . . .	57
3.42	Planificação do paralelepípedo . . . . .	57
3.43	Planificação da pirâmide hexagonal . . . . .	58
3.44	Planificação da pirâmide quadrangular . . . . .	58
4.1	Quadrado da soma . . . . .	59
4.2	Ilustração: quadrado da soma . . . . .	60
4.3	Cubo da soma . . . . .	60

---

4.4	Ilustração: cubo da soma . . . . .	61
4.5	Isaac Newton . . . . .	61

# Introdução

Neste trabalho dissertamos sobre alguns tópicos de Geometria Plana e Espacial, e como estes podem ser trabalhados em sala de aula. Com este fim, buscamos construir um material didático visando melhorar a aprendizagem, por parte dos alunos.

Este trabalho tem como objetivo facilitar o entendimento de alguns tópicos de Geometria Plana e Espacial vistos no Ensino Fundamental e Ensino Médio, para isso procuramos usar material didático para ilustrar definições e resultados. O nosso foco é motivar os alunos e fazer com que eles possam descobrir muitas das propriedades vistas nas aulas de geometria, ao invés de simplesmente decorar o que o professor diz. Conseguindo fazer isso, estaremos atingindo, o que julgamos ser, um dos objetivos do PROFMAT, que é melhorar o ensino de matemática nas escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O conhecimento matemático, como construção lógico-dedutiva, como exercício de pensamento ou como auxiliar na experiência humana, permeia a linguagem e as práticas cotidianas. Para alguns desperta interesse e instiga, para outros pode ser indiferente. Mas, para muitos, a assimilação (ou não) do conhecimento matemático no contexto escolar pode tornar-se constrangedor, gerando dificuldades, rejeição e pouco aproveitamento. Assim questiona-se, frequentemente, tanto os limites da construção como as formas de apropriação desse conhecimento. Sendo assim, a nossa metodologia consiste em representar sólidos e outros entes geométricos confeccionados com cartolina, isopor, palitos, canudos, etc, para serem utilizados como material didático nas aulas de geometria.

O TCC consiste em quatro capítulos. No primeiro capítulo, tratamos de alguns temas básicos que servem de embasamento teórico para os capítulos seguintes. Nele falamos sobre princípios essenciais da geometria, como por exemplo: as noções básicas (ponto, reta, plano), os axiomas (ou postulados), e algumas definições importantes.

No segundo capítulo, destacamos o Teorema de Pitágoras e terminamos o capítulo apresentando uma aplicação desse teorema: o problema de Hipócrates.

O terceiro capítulo é dedicado a alguns tópicos de geometria espacial. Definimos prisma e mostramos uma ilustração usando um prisma hexagonal feito com isopor e palitinos, falamos do Princípio de Cavalieri, deduzimos fórmulas de volume de alguns

---

sólidos, apresentamos um resultado que denominamos Teorema Pitágoras/Cavalieri que relaciona volumes de sólidos geométricos. Finalmente concluimos o capítulo com uma seção com a planificação de alguns poliedros, as quais podem ser usadas para contruí-los.

No quarto capítulo estudamos a fórmula do Binômio de Newton, ilustramos com sólidos construídos com cartolinas o cubo da soma de dois termos e para o quadrado da soma de dois termos usamos isopor para ilustrar geometricamente o resultado.



# Capítulo 1

## Tópicos de Geometria Plana

Este primeiro capítulo servirá de embasamento teórico para os capítulos seguintes, trataremos de alguns princípios da geometria plana, como por exemplo, das noções básicas (ponto, reta e plano), dos axiomas (ou postulados), de algumas definições e resultados, para assim fazer a transição do plano para o espaço. O capítulo é baseado em [1], [7] e [10].

### 1.1 Noções Primitivas

Vamos começar falando do matemático Euclides de Alexandria, que deu uma importante contribuição para o desenvolvimento da geometria veja [2], [9] e [13].



Figura 1.1: Euclides de Alexandria

Euclides de Alexandria, matemático grego, ficou conhecido pelo seu mais famoso trabalho "Os Elementos". Muito pouco se sabe da vida deste matemático, sabe-se que ensinou em Alexandria, no Egito, durante o reinado do rei Ptolomeu I (306-283 a.c.). Alcançou grande prestígio pela forma brilhante como ensinava Geometria e

Álgebra, conseguindo assim atrair para as suas lições públicas um grande número de discípulos. O nome de Euclides ficou na história da ciência para sempre associado à primeira concepção da Geometria como um conjunto sistematizado e lógico de propriedades. Muitas dessas propriedades eram já utilizadas anteriormente, de forma dispersa e com objetivos, tanto utilitário como de mero prazer intelectual ou artístico, por outras civilizações, mas Euclides organizou-as de forma lógica e demonstrou-as tomando como ponto de partida um conjunto reduzido de proposições que toma como verdadeiras sem necessitarem de demonstração, são os chamados axiomas ou postulados. A obra "Os Elementos", atribuída a Euclides, é uma das mais influentes na história da matemática, servindo como o principal livro para o ensino de matemática, especialmente geometria, desde a data da sua publicação até o fim do século XIX ou início do século XX. Nessa obra, os princípios do que é hoje chamado de geometria euclidiana foram deduzidos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. A obra Os Elementos é composta por treze volumes, sendo: cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre conjuntos incomensuráveis e três (os últimos) sobre geometria no espaço.

Escrita em grego, a obra cobre a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas até então no mundo grego, reunindo o trabalho de predecessores de Euclides, como Hipócrates e Eudóxio. Sistematizou todo o conhecimento geométrico dos antigos, intercalando os teoremas já então conhecidos com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado. Após sua primeira edição foi copiado e recopiado inúmeras vezes, tendo sido traduzido para o árabe no ano de 774. A obra possui mais de mil edições desde o advento da imprensa, sendo a sua primeira versão impressa datada de 1482 (Veneza, Itália). Essa edição foi uma tradução do árabe para o latim. Tem sido - segundo George Simmons - "considerado como responsável por uma influência sobre a mente humana maior que qualquer outro livro, com exceção da Bíblia". Embora muitos dos resultados descritos em Os Elementos originarem-se em matemáticos anteriores, uma das reconhecidas habilidades de Euclides foi apresentá-los em uma única estrutura logicamente coerente, tornando-a de fácil uso e referência, incluindo um sistema rigoroso de provas matemáticas que continua a ser a base da matemática 23 séculos mais tarde.

## 1.2 Noções Primitivas

Na Geometria, *pontos*, *retas* e *planos* são algumas noções aceitas sem definição, e por isso chamadas de noções primitivas. Como são produtos da mente humana, as noções primitivas funcionam como modelos para explicar a realidade. Assim:

- um ponto não tem dimensão, nem massa, nem volume;

### 1.3. AXIOMAS: UM PONTO DE PARTIDA DA GEOMETRIA

---

- uma reta não tem espessura, nem começo, nem fim;
- um plano não tem espessura nem fronteiras.

Representaremos os pontos por letras maiúsculas ( $A, B, C, \dots$ ), as retas por letras minúsculas ( $r, s, t, \dots$ ), e os planos por letras gregas minúsculas ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ). Graficamente, representaremos como na figura abaixo.



Figura 1.2: Ponto, reta, plano

**Definição 1** (*semiplano*) Toda reta  $r$  contida em um plano  $\alpha$  divide-o em duas regiões. A reunião da reta  $r$  com qualquer uma dessas regiões é chamada de *semiplano de origem  $r$* .

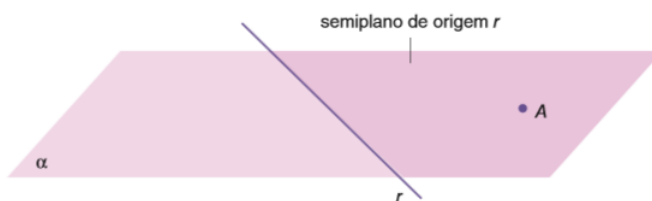


Figura 1.3: Semiplano

**Definição 2** (*espaço, semiespaço*) Essas três noções ponto, reta e plano fazem parte do **espaço**, que é o conjunto dos infinitos pontos existentes. Todo plano  $\alpha$  divide o espaço em duas regiões. A reunião do plano  $\alpha$  com qualquer uma dessas regiões é chamada de **semiespaço** de origem  $\alpha$  (figura 1.4).

## 1.3 Axiomas: Um ponto de partida da geometria

Já iniciamos nossa reflexão a respeito das bases sobre as quais se assenta o desenvolvimento da geometria com as noções primitivas de ponto, reta e plano. Dando continuidade, foram estabelecidos como propriedades fundamentais desses elementos os chamados **Axiomas** ou **Postulados** apresentados a seguir.

## 1.4. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

---

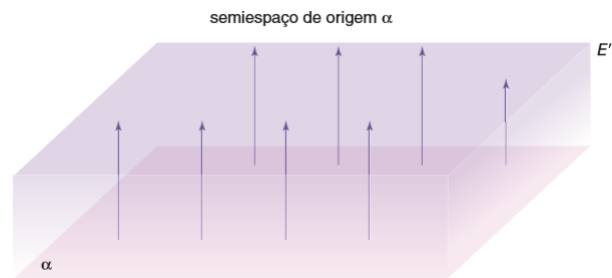


Figura 1.4: Semiespaço

**Axioma 1** *Existem infinitos pontos.*

**Axioma 2** *Em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.*

**Axioma 3** *Em um plano e fora dele existem infinitos pontos.*

**Axioma 4** *Dois pontos distintos determinam uma única reta.*

**Axioma 5** *Três pontos não colineares determinam um único plano.*

**Axioma 6** *Se uma reta possui dois pontos distintos num plano ela está contida nesse plano.*

**Axioma 7** *Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , existe uma única reta que passa por  $P$  e é paralela a  $r$ .*

### 1.4 Posições relativas entre duas retas

Para representar retas e planos no espaço, você pode desenhar antes um paralelepípedo reto-retângulo e nele destacar as retas e planos que precisa desenhar.

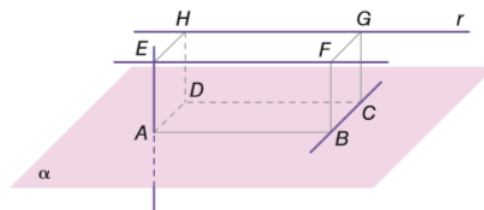


Figura 1.5: Bloco retangular

## 1.4. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

---

Duas retas **coplanares** (aquelas que pertencem a um mesmo plano) podem ter três posições relativas possíveis: **coincidentes**, **paralelas** ou **concorrentes**. No espaço, duas retas podem ter uma terceira posição relativa: elas podem ser **reversas**, acompanhe as definições a seguir.

**Definição 3** (*Retas coincidentes*) Duas retas,  $r$  e  $s$ , são coincidentes quando têm todos os pontos comuns.

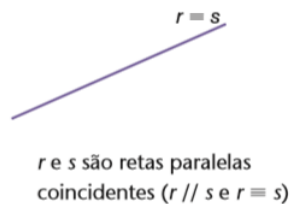


Figura 1.6: Retas coincidentes

**Definição 4** (*Retas paralelas*) Duas retas coplanares,  $r$  e  $s$ , são paralelas quando não possui nenhum ponto comum.

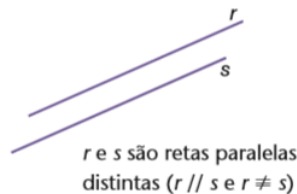


Figura 1.7: Retas paralelas

**Definição 5** (*Retas concorrentes*) Duas retas,  $r$  e  $s$ , são concorrentes se, e somente se, têm um único ponto em comum (figura 1.8).

**Definição 6** (*Retas reversas*) Duas retas,  $r$  e  $s$ , são reversas quando não são coplanares (figura 1.9).

**Definição 7** (*Retas perpendiculares*) Duas retas concorrentes,  $r$  e  $s$ , são **perpendiculares** quando o ângulo formado pelas duas retas for reto (figura 1.10).

**Definição 8** (*Retas ortogonais*) As retas  $r$  e  $s$  representadas na figura abaixo são reversas, e a reta  $t$  é perpendicular a  $r$  e paralela a  $s$ . Sob essas condições dizemos que as retas  $r$  e  $s$  são ortogonais (figura 1.11).

## 1.4. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

---

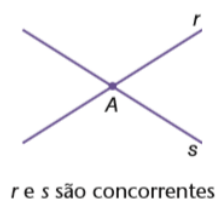


Figura 1.8: Retas concorrentes

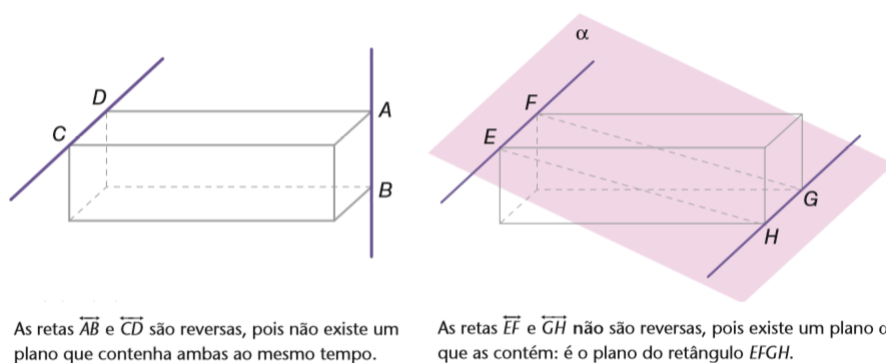


Figura 1.9: Retas reversas

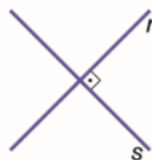


Figura 1.10: Retas perpendiculares

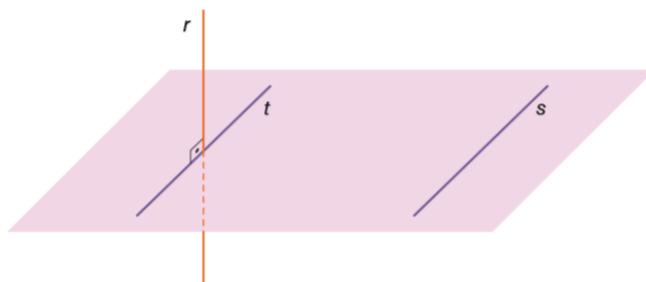


Figura 1.11: Retas ortogonais

## 1.5 Determinação de um Plano

Um plano pode ser determinado por meio de uma das quatro afirmações fundamentais a seguir.

**Afirmção 1** *Três pontos não colineares determinam um plano (axioma 5).*

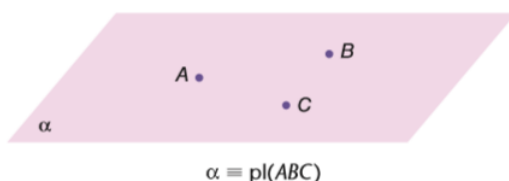


Figura 1.12: Plano

**Afirmção 2** *Uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano.*

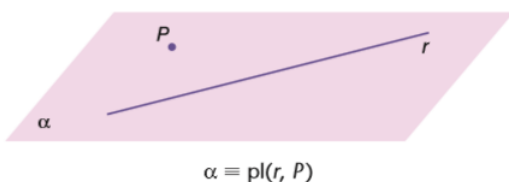


Figura 1.13: Plano

De fato, se considerarmos dois pontos distintos  $A$  e  $B$  de  $r$ , teremos três pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  não colineares e, pelo axioma 5, eles determinam um plano.

**Afirmção 3** *Dois retas concorrentes determinam um plano.*

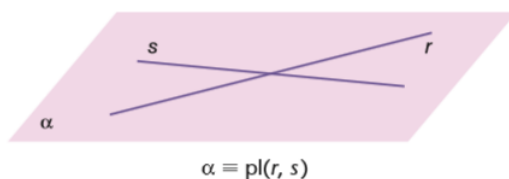


Figura 1.14: Plano

De fato, se considerarmos dois pontos distintos  $A$  e  $B$  de modo que  $A \neq P$ ,  $A \in r$ ,  $B \neq P$ ,  $B \in s$ , temos que pelo axioma 1, os pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  determinam um plano.

**Afirmção 4** *Dois retas paralelas distintas determinam um plano.*

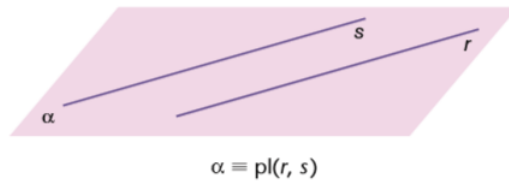


Figura 1.15: Plano

## 1.6 Posições relativas entre reta e plano

Uma reta e um plano podem ter três posições relativas, conforme é descrito a seguir.

**Definição 9** (*Reta paralela a um plano*) Uma reta  $r$  é paralela a um plano  $\alpha$  quando  $r$  e  $\alpha$  não têm nenhum ponto em comum.

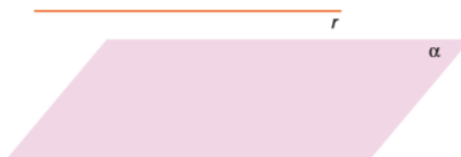


Figura 1.16: Reta paralela a um plano

**Definição 10** (*Reta secante ou concorrente a um plano*) Uma reta  $r$  é secante (ou concorrente) a um plano  $\alpha$  quando  $r$  e  $\alpha$  têm um único ponto em comum.

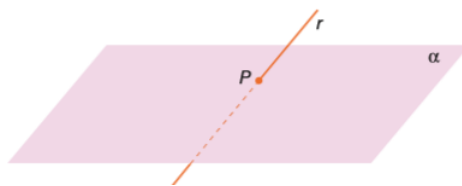


Figura 1.17: Reta secante a um plano

**Definição 11** (*Reta contida em um plano*) Uma reta  $r$  está contida em um plano  $\alpha$  quando todos os pontos de  $r$  pertencem ao plano  $\alpha$  (figura 1.18).





Figura 1.18: Reta contida em um plano

## 1.7 Posições Relativas entre Planos

Uma reta e um plano podem ter três posições relativas, conforme é descrito a seguir.

**Definição 12** (*Planos coincidentes*) Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são coincidentes quando têm todos os seus pontos em comum.



Figura 1.19: Planos coincidentes

**Definição 13** (*Planos paralelos*) Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos quando não têm ponto em comum.



Figura 1.20: Planos paralelos

**Definição 14** (*Planos secantes*) Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são secantes quando têm uma única reta em comum (figura 1.21).

**Definição 15** (*Planos perpendiculares*) Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Indicamos que um plano  $\alpha$  é perpendicular a um plano  $\beta$  por:  $\alpha \perp \beta$  (figura 1.22).

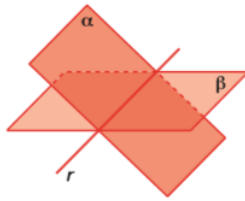


Figura 1.21: Planos secantes

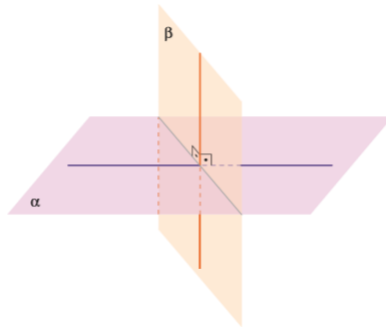


Figura 1.22: Planos perpendiculares

## 1.8 Projecção ortogonal

**Definição 16** (*Projecção ortogonal de um ponto sobre uma reta*) A *projecção ortogonal* de um ponto  $P$  sobre uma Reta  $r$  é o ponto  $P'$  tal que  $P' \in r$  e  $\overline{PP'} \perp r$ .

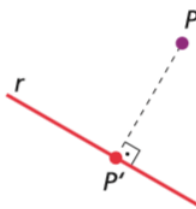


Figura 1.23: Projecção ortogonal

**Definição 17** (*Projecção ortogonal de um ponto sobre um plano*) A *projecção ortogonal* de um ponto  $P$  sobre um plano  $\alpha$  é o ponto  $P'$  tal que  $P' \in \alpha$  e  $\overline{PP'} \perp \alpha$ . (figura 1.24)

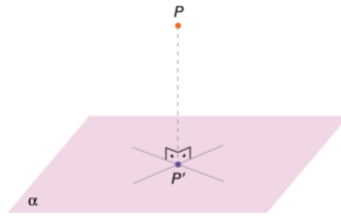


Figura 1.24: Projeção ortogonal

**Definição 18** (*Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano*)

Consideremos uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$ .

a) Se  $r \perp \alpha$ , com  $r \cap \alpha = A$ , então a projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\alpha$  é o ponto  $A$  (figura I).

b) Se a reta  $r$  não é perpendicular ao plano  $\alpha$ , então a projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\alpha$  é a reta  $s$  determinada pela projeção de dois pontos distintos de  $r$  sobre  $\alpha$  (figura II).

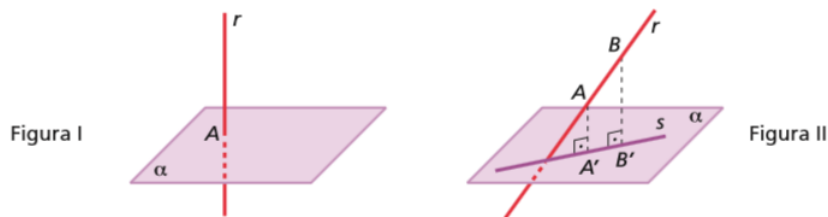


Figura 1.25: Projeção ortogonal

**Definição 19** (*Projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um plano*)

A projeção ortogonal sobre um plano  $\alpha$  de um segmento  $\overline{AA'}$  cuja reta que o contém (retasuporte) não é perpendicular ao plano  $\alpha$  é o segmento  $\overline{BB'}$ .

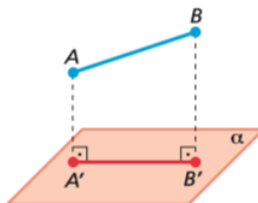


Figura 1.26: Projeção ortogonal

**Definição 20** (*Projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano*)

A projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre esse plano.

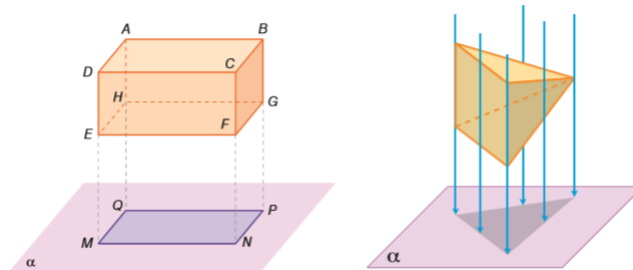


Figura 1.27: Projeção ortogonal

## 1.9 Distâncias

**Definição 21** (*Distância entre um ponto e uma reta*) A distância entre um ponto  $P$  e uma reta  $r$  é a distância entre  $P$  e sua projeção ortogonal  $P'$  sobre  $r$ .

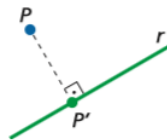


Figura 1.28: Distância ponto reta

**Definição 22** (*Distância entre um ponto e um plano*) A distância entre um ponto  $A$  e um plano  $\alpha$  é a distância entre o ponto  $A$  e a sua projeção ortogonal  $A'$  sobre  $\alpha$  (figura 1.29).

**Definição 23** (*Distância entre uma reta e um plano paralelo*) Dados um plano  $\alpha$  e uma reta  $r$  paralela, a distância entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  é a distância entre um ponto  $A$  qualquer de  $r$  e o plano  $\alpha$  (figura 1.30).

**Definição 24** (*Distância entre dois planos paralelos*) Dados dois planos paralelos,  $\alpha$  e  $\beta$ , a distância entre eles é a distância entre qualquer ponto de  $\alpha$  e o plano  $\beta$ , ou vice-versa (figura 1.31).

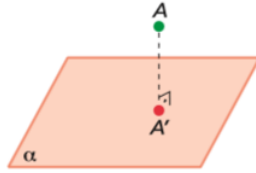


Figura 1.29: Distância ponto plano

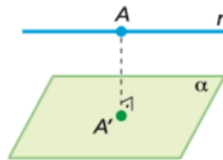


Figura 1.30: Distância reta plano paralelo

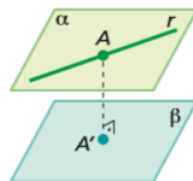


Figura 1.31: Distância planos paralelos

## 1.10. ÂNGULOS NO ESPAÇO

---

**Definição 25** (*Distância entre duas retas reversas*) Dadas duas retas reversas,  $r$  e  $s$ , a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de  $r$  e o plano que contém  $s$  e é paralelo a  $r$ , ou vice-versa.

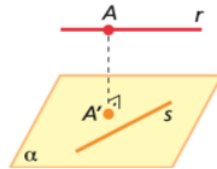


Figura 1.32: Distância entre duas retas reversas

## 1.10 Ângulos no espaço

**Definição 26** (*Ângulos entre retas reversas*) O ângulo  $\theta$  entre duas retas reversas,  $r$  e  $s$ , é o ângulo formado entre  $r$  e  $s'$ , sendo  $s'$  uma reta paralela a  $s$  e concorrente com  $r$ .

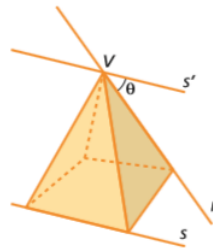


Figura 1.33: Ângulos entre retas reversas

**Definição 27** (*Ângulos entre dois planos*) Seja  $t$  a reta comum a dois planos secantes,  $\alpha$  e  $\beta$ , e sejam as retas  $r$  e  $s$ , contidas em  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, com  $r \perp t$  e  $s \perp t$ . Os ângulos formados por  $\alpha$  e  $\beta$  são aqueles formados por  $r$  e  $s$  (figura 1.34).

## 1.11 Diedros

**Definição 28** (*diedro ou ângulo diedro*) Sejam  $E_1$  e  $E_2$  dois semiplanos de mesma origem  $t$ , não contidos num mesmo plano. Chama-se diedro ou ângulo diedro a figura formada pela reunião dos semiplanos  $E_1$  e  $E_2$  (figura 1.35).

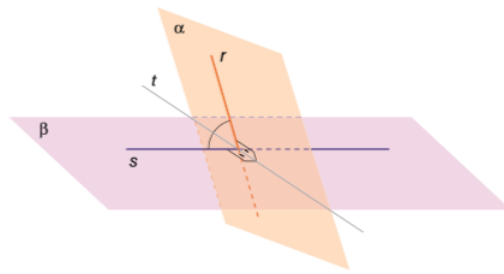


Figura 1.34: Ângulos entre dois planos

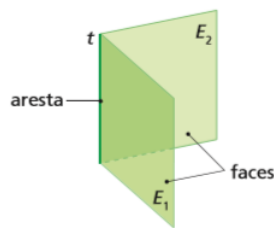


Figura 1.35: Diedro

**Definição 29** (*ângulo plano*) Dado um diedro e um plano  $\alpha$  perpendicular à aresta do diedro, chama-se *ângulo plano* a intersecção do plano  $\alpha$  com o diedro. A medida desse ângulo é considerada a medida do diedro.

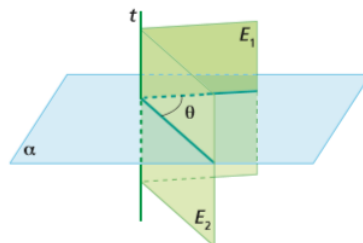


Figura 1.36: ângulo plano

## 1.12 O número pi e o comprimento da circunferência

Você conhece algum método para determinar o valor do número irracional  $\pi$ ? O matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que

## 1.12. O NÚMERO PI E O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

resultou na aproximação  $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ . Para isso, ele considerou um círculo de raio de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência do círculo estava entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito na circunferência e o perímetro de qualquer polígono regular circunscrito na circunferência. Hoje sabemos que a razão entre o comprimento  $c$  de uma circunferência de raio  $r$  e a medida do seu diâmetro é constante, ou seja, a razão é sempre a mesma, qualquer que seja a circunferência. Essa constante é denotada por  $\pi$ , [1] e [9].

**Definição 30** Definimos o número  $\pi$  como o número tal que  $2\pi$  é o comprimento de uma circunferência de raio um, fixada uma unidade de medida.

**Teorema 31** O comprimento  $c$  de uma circunferência de raio  $r$  é dado por:

$$c = 2\pi r$$

.

**Demonstração:** Seja  $p_n$  o perímetro de um polígono regular com  $n$  lados, cada um com comprimento  $a_n$ , inscrito numa circunferência  $\lambda$ , e  $P_n$  o perímetro de um polígono regular com  $n$  lados, cada um com comprimento  $b_n$ , circunscrito a  $\lambda$ . Portanto,  $p_n = na_n$  e  $P_n = nb_n$ . As figuras (ilustram o caso  $n = 7$ ) permitem deduzir facilmente que  $a_n = 2r \operatorname{sen}(\pi/n)$  e que  $b_n = 2R_n \operatorname{sen}(\pi/n)$ , onde  $R_n = CA'$  é o raio do polígono circunscrito, já que o triângulo  $ACE$  é retângulo.

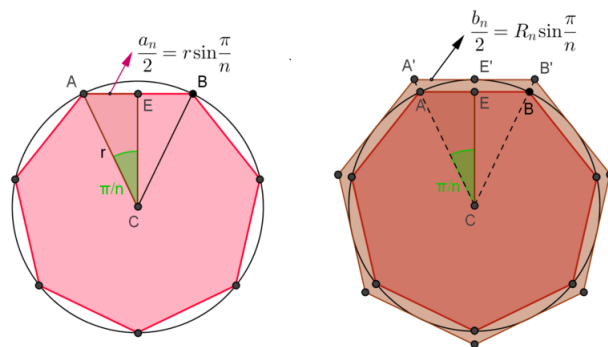


Figura 1.37: Polígonos inscritos e circunscritos a circunferência

É claro que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = r$  e  $p_n \leq P_n$ . Assim, ambos os limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  existem e são iguais, portanto, sendo  $c$  o perímetro da circunferência, temos:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$



## 1.12. O NÚMERO PI E O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

De fato, usando o limite fundamental  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ , podemos provar que os limites acima referidos são ambos iguais a  $2\pi r$ , como seria de esperar:

$$p_n = n2r\text{sen}(\pi/n) = \frac{2r\text{sen}(\pi/n)}{1/n} = \frac{\pi 2r\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n},$$

passando o limite quando  $n$  tende ao infinito, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi r\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n} = 2\pi r \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(\pi/n)}{\pi/n}}_1 = 2\pi r \cdot 1 = 2\pi r.$$

Daí,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\pi r$ , e de modo análogo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2\pi r$ . Assim, o comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é  $c = 2\pi r$ , como queríamos demonstrar. ■

**Experimento 1** Na figura abaixo, temos três exemplos de circunferências com raios bem distintos:



Figura 1.38: Circunferências: moeda, bambolê, terra.

- uma **moeda** de um real que tem **diâmetro** de  $2r = 27\text{mm}$  e **comprimento** de  $c = 85\text{mm}$ , portanto  $c/2r = 3,148148\dots$ ;
- um **bambolê** que tem **diâmetro** de  $2r = 60\text{cm}$  e **comprimento** de  $c = 188,5\text{cm}$ , portanto  $c/2r = 3,1416\dots$ ;
- e o **planeta terra** tem **diâmetro** de  $2r = 12756,32\text{Km}$  (aproximadamente) na linha do equador e **comprimento** de  $c = 40075,1612\text{Km}$  (aproximadamente), portanto  $c/2r = 3,1411592\dots$

Observando os três casos, podemos perceber que a razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro é sempre muito próximo de 3,14... que é aproximadamente o valor de  $\pi$  que já conhecemos. Isso ocorre independentemente do tamanho da circunferência, basta ver a diferença entre o raio da terra e o da moeda, porém

### 1.13. ÁREA DO CÍRCULO

---

mesmo com essa diferença de tamanho muito grande a razão foi a mesma nos dois casos. O objetivo desse experimento é o de conduzir o aluno a descobrir que mesmo variando o tamanho da circunferência, vamos ter sempre:  $\frac{C}{2r} = 3,14\dots$

**Curiosidade 1** Por mera curiosidade aqui fica o número  $\pi$  até a tricentésima casa decimal:

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209$   
74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647  
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462  
29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091  
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273...

## 1.13 Área do círculo

**Teorema 32** Num círculo de raio  $r$  sua área  $A$  é dada pela expressão:

$$A = \pi r^2.$$

**Demonstração:** Para qualquer polígono regular, sua área é dada pela fórmula:

$$A = \frac{\ell \cdot n \cdot s}{2},$$

onde  $\ell$  é o comprimento do apótema do polígono,  $n$  é o número de lados do polígono e  $s$  é o comprimento de cada lado do polígono, conforme a figura.

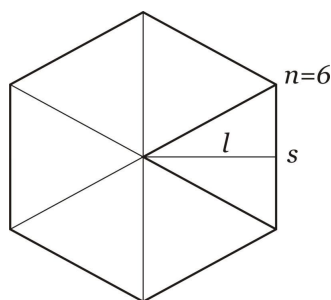


Figura 1.39: Polígono hexagonal

Agora, consideremos um círculo inscrito a um polígono regular, o raio deste círculo é igual ao apótema do polígono, conforme ilustra a figura (1.40).

Sabemos que  $\pi$  é a razão entre o comprimento  $c$  da circunferência e o seu diâmetro  $2r$ , ou seja,  $\pi = c/2r$ . Construimos, então, um círculo de raio  $r$  inscrito a um polígono regular de  $n$  lados (figura 1.41).

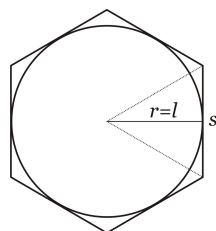


Figura 1.40: Circunferência inscrita a um hexagono

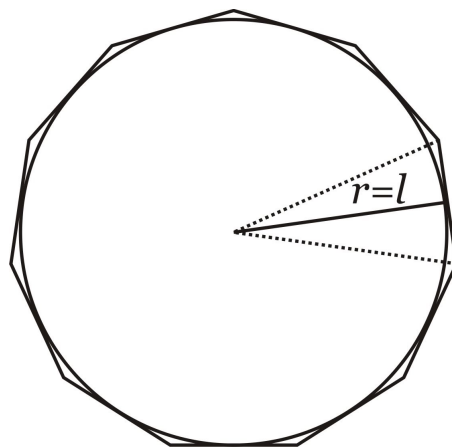


Figura 1.41: Circunferência inscrita a um polígono

## 1.14. ÁREA DE UMA REGIÃO TRIANGULAR

Representando a área do círculo por  $A_c$ , a do polígono por  $A_p$ , o perímetro do polígono por  $P$  e o comprimento da circunferência por  $C$ , para  $n$  suficientemente grande, temos

$$A_p = \frac{rns}{2} \cong A_c \quad \text{e} \quad P = ns \cong c.$$

Além disso, se  $n$  cresce indiscriminadamente, o polígono de  $n$  lados se confunde com o círculo circunscrito e obtemos os limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rns}{2} = A_c$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} ns = c$ , como  $\pi = c/2r$  temos

$$\pi = \frac{c}{2r} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} ns}{2r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{2r}.$$

Se multiplicarmos o numerador e o denominador de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rns}{2} = A_c$  por  $r$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rns}{2} \cdot \frac{r}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 ns}{2r} = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{2r}.$$

Mas, como  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{2r}$ , temos  $A_c = \pi r^2$ . ■

## 1.14 Área de uma região triangular

**Teorema 33** A área  $S$  de uma região triangular  $ABC$ , é igual a  $1/2$  do produto da medida de um dos lados  $b$  pela medida da altura  $h$  relativa a esse lado, ou seja:

$$S = \frac{b \cdot h}{2}.$$

**Demonstração:** A partir do triângulo  $ABC$  de base  $b = AC$  e altura  $h$  relativa a essa base, traçamos uma reta paralela ao segmento  $AC$  que passa pelo ponto  $B$ , e uma outra reta paralela ao segmento  $AB$  que passa pelo ponto  $C$ . Essas duas retas se encontram no ponto  $D$  e dessa forma obtemos o paralelogramo  $ABCD$ , conforme mostra a figura abaixo.

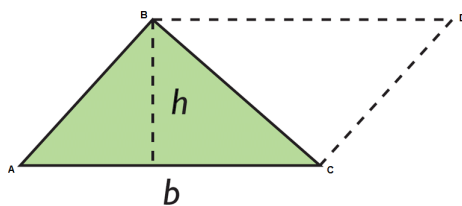


Figura 1.42: Triângulo  $ABC$  e paralelogramo  $ABCD$

Assim a área do triângulo  $ABC$  é metade da área do paralelogramo  $ABCD$ . Como a área do paralelogramo é igual ao produto da base pela altura concluímos que a área  $S$  do triângulo é  $S = \frac{b \cdot h}{2}$ , como queremos demonstrar. ■

## 1.15. DESIGUALDADE TRIANGULAR

---

**Ilustração 1** Podemos usar a ilustração abaixo, feita com isopor, para ajudar na compreensão dessa demonstração.

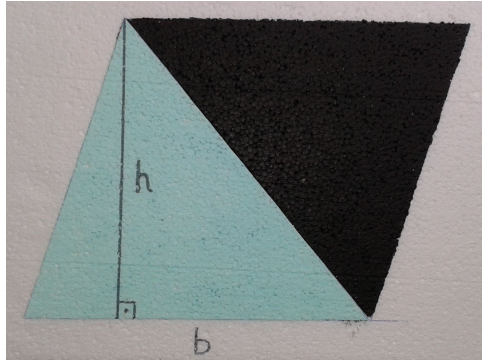


Figura 1.43: Ilustração: paralelogramo e triângulo

## 1.15 Desigualdade triangular

**Teorema 34** Dado um triângulo  $ABC$ , a medida de um lado é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Assim, se  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$  são as medidas dos três lados de um triângulo qualquer, na mesma unidade de medida, então temos que:

$$a < b + c;$$

$$b < a + c;$$

$$c < a + b.$$

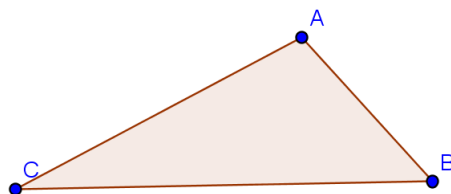


Figura 1.44: Triângulo  $ABC$

**Demonstração:** No triângulo  $ABC$  da figura (1.45) suponha, sem perda de generalidade, que  $BC$  é o maior lado.

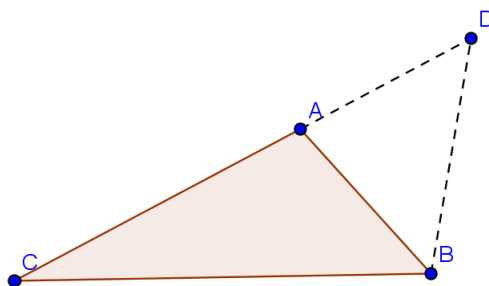


Figura 1.45: Triângulo  $BCD$

Prolongando o lado  $CA$  e tomando sobre o prolongamento o ponto  $D$ , tal que  $AD \equiv AB$ . No triângulo isósceles  $ADB$ , resulta portanto,  $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD}$ . Sendo  $\widehat{ABD} < \widehat{CBD}$ , segue que  $\widehat{ADB} < \widehat{CBD}$  e, como ao maior ângulo de um triângulo opõe-se o maior lado, temos no triângulo  $DBC$ :  $BC < CD$  ou  $BC < CA + AD$ , sendo, porém,  $AD \equiv AB$ , vem finalmente  $BC < AB + CA$ . ■

**Aplicação 1** *Um homem foi a um cartório registrar um terreno triangular cujas medidas dos lados eram 12m, 15m e 29m porém o escrivão não quis registrar tal terreno. Justifique matematicamente o motivo da recusa.*

*Olha, sem duvidas o escrivão conhecia a desigualdade triangular e observou que não existe triângulo com as medidas 12m, 15m e 29m, pois  $12 + 15 < 29$ .*

**Experimento 2** *Esse experimento pode ser feito usando canudinhos de refrigerante e linha (ou barbante, ou fio dental). Recorte os canudinhos em tamanhos diversos, junte três a três e passe a linha por dentro dos canudinhos e tente formar triângulos, podemos perceber que só será possível formar tais triângulos quando a soma de dois lados for maior do que a do terceiro lado. É o que acontece no primeiro caso da figura abaixo, já no segundo caso não foi possível formar porque a soma de dois lados é igual ao terceiro lado e por fim, também não foi possível no terceiro caso porque a soma de dois lados é menor que o terceiro lado. Esse experimento nos leva a concluir que a medida de um lado de um triângulo é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois lados (figura 1.46).*

## 1.16 Soma dos ângulos internos do triângulo

**Teorema 35** *Em todo triângulo a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a  $180^\circ$  (figura 1.47).*

1.16. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO

---

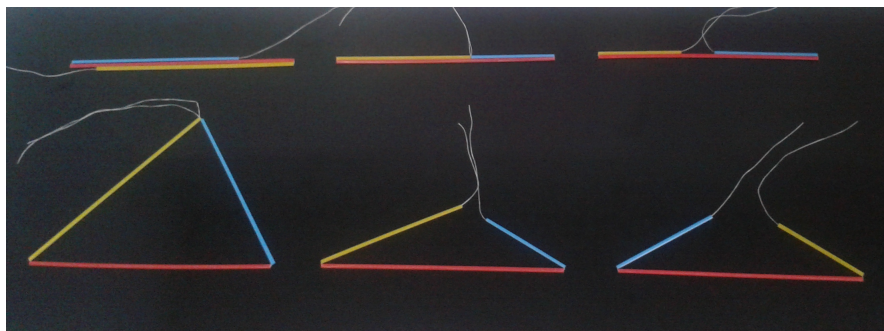


Figura 1.46: Ilustração: triângulos feitos com canudos

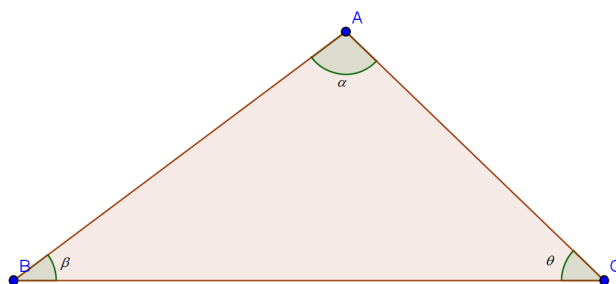


Figura 1.47: Triângulo  $ABC$

## 1.17. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO

---

**Demonstração:** Vamos traçar uma reta  $r$  por  $A$ , paralela ao lado  $BC$  (figura 1.48). Observando a figura podemos escrever:

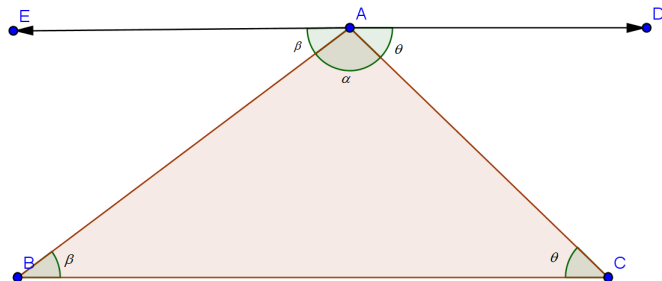


Figura 1.48: Triângulo  $ABC$  e Reta  $r$

- I. Os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\beta$  são congruentes, pois são alternos internos, ou seja  $\widehat{ABC} = \beta$ ;
- II. Os ângulos  $\widehat{ACB}$  e  $\theta$  são congruentes, pois são alternos internos, ou seja  $\widehat{ACB} = \theta$ ;
- III.  $\beta, \alpha$  e  $\theta$  formam um ângulo raso, que por sua vez tem medida igual a  $180^\circ$ , concluímos que  $\beta + \alpha + \theta = 180^\circ$ .

■

**Experimento 3** *Desenhe um triângulo qualquer em uma folha de papel ou cartolina; recorte seus ângulos; em seguida, junte os três ângulos do triângulo. Nessa experiência podemos perceber que os três ângulos do triângulo formam um ângulo raso, logo a soma dos três é  $180^\circ$ .*

## 1.17 Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

**Teorema 36** *Em todo quadrilátero a soma das medidas dos ângulos internos é igual a  $360^\circ$ .*

**Demonstração:** Para demonstrar essa propriedade basta dividir o quadrilátero em dois triângulos, traçando uma de suas diagonais. Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é  $180^\circ$  então o quadrilátero terá  $360^\circ$  que é duas vezes os  $180^\circ$  correspondente aos ângulos do triângulo. ■



1.17. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO

---

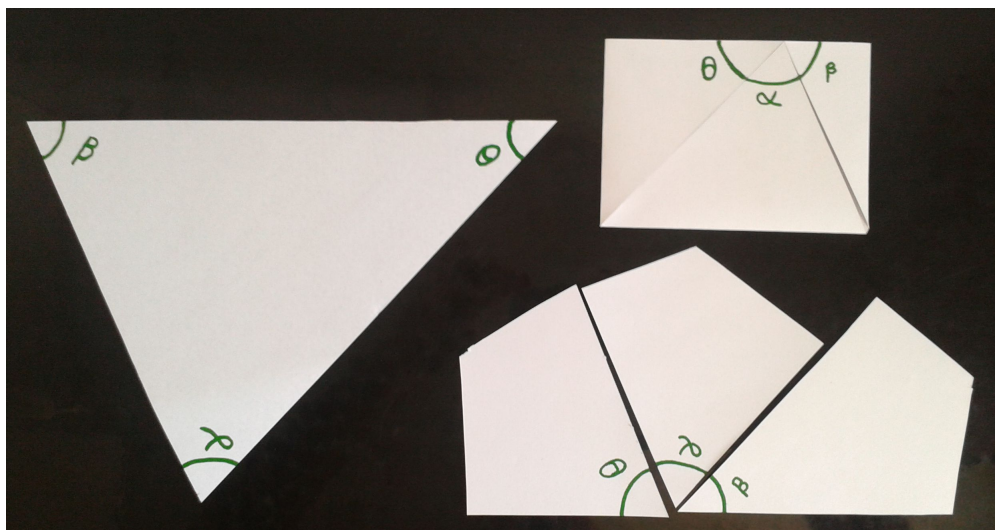


Figura 1.49: Ilustração: soma dos ângulos interno do triângulo

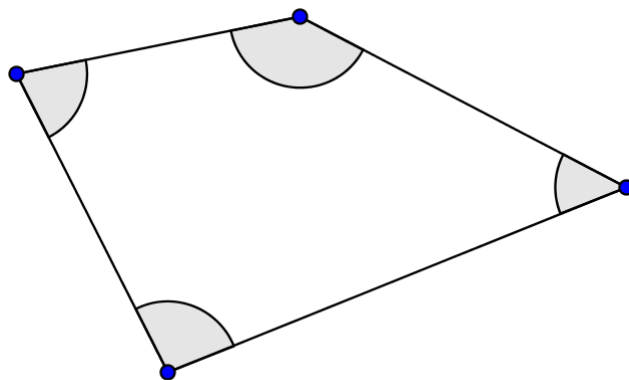


Figura 1.50: Quadrilátero

## 1.17. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO

**Experimento 4** *Desenhe um quadrilátero em uma folha de papel ou cartolina; recorte seus ângulos; em seguida, junte-os como na figura abaixo. Nessa experiência podemos perceber que os quatro ângulos do quadrilátero formam um ângulo de  $360^\circ$ , uma volta completa, portanto a soma dos ângulos internos do quadrilátero é  $360^\circ$ .*

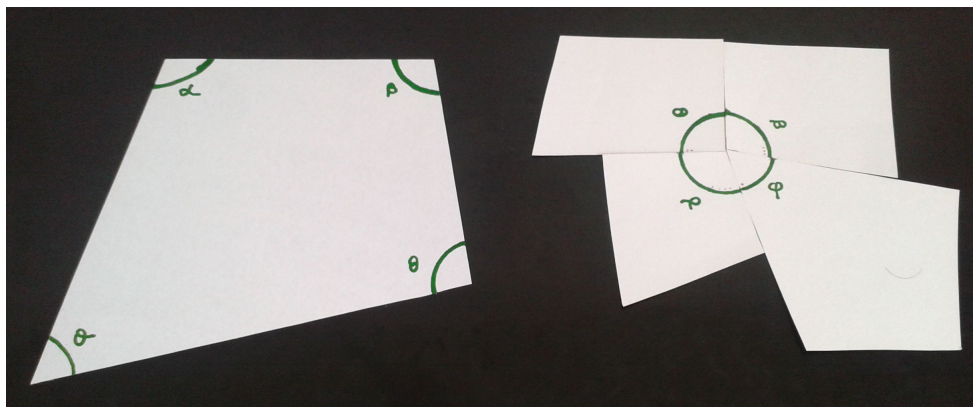


Figura 1.51: Ilustração: soma dos ângulos interno do quadrilátero

**Curiosidade 2 (A divina proporção ou retângulo áureo)** *O que há em comum entre a disposição dos flóculos do girassol, a espiral que delinea a concha de um molusco, a conformação de uma galáxia, a estrutura molecular de cristais e a árvore genealógica de um zangão? Uma razão constante, que há muito intriga a mente humana: a chamada **razão áurea**, ou **número de ouro** ou - em consonância com o deslumbramento que provoca nos seres humanos - **divina proporção**. Dada sua importância na construção do pentagrama, a razão áurea já foi definida na Antiguidade, pelo matemático grego Euclides (325 a.C. -265 a.C.), e tem percorrido toda a história da cultura, em especial nas artes plásticas e visuais, nas quais aparece como parâmetro de equilíbrio e beleza. Esse interesse contínuo justificaria que, ainda hoje, estudiosos de Psicologia investiguem a possibilidade de ela ser a mais prazerosa proporção estética percebida pelo ser humano. A razão áurea é uma constante denotada pela letra grega  $\Phi$  com o valor arredondado para três casas decimais temos  $\Phi = 1,618$ . Na imagem abaixo temos um retângulo áureo, cuja razão entre os comprimentos dos lados maior e menor é igual ao número de ouro  $\Phi$ .*

*Podemos ainda associar o retângulo áureo com a Seqüência de Fibonacci (figura 1.53)*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

*A designação adaptada para este número,  $\Phi$  (Phi maiúsculo), é a inicial do nome de Fídias que foi escultor e arquiteto encarregado da construção do Pártenon, em Atenas (figura 1.54).*

1.17. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO

---

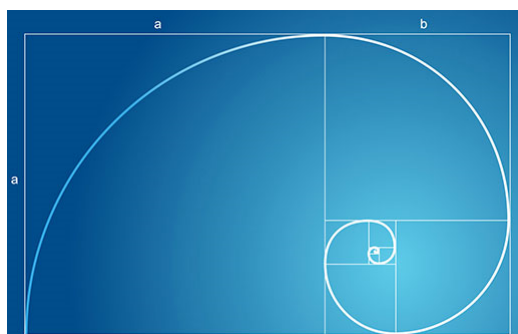


Figura 1.52: Retângulo Áureo

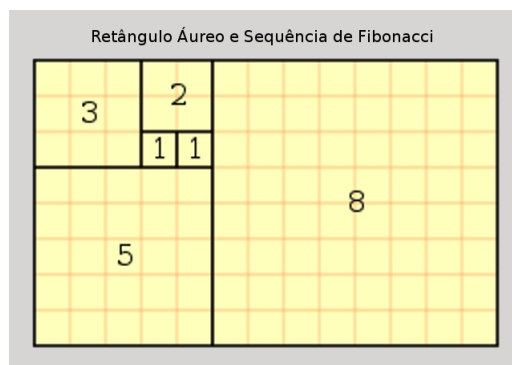


Figura 1.53: Retângulo áureo e a seqüência de Fibonacci



Figura 1.54: Pártenon, em Atenas

### 1.17. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO

---

Leonardo da Vinci, afirmava que a arte deveria manifestar por ela própria um movimento contínuo de beleza. Para se atingir este fim, Leonardo utilizou extensivamente o retângulo de ouro nas suas obras (figura 1.55).

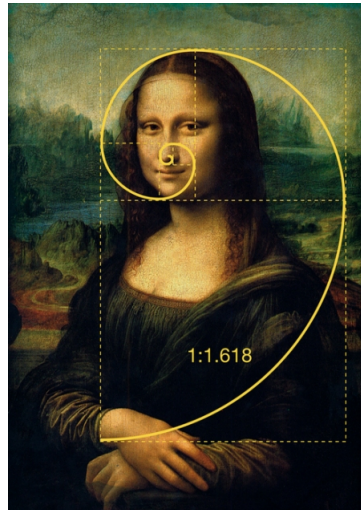


Figura 1.55: Monalisa, de Leonardo da Vinci

O  $\Phi$  é um número misterioso que tem algumas quantidades relacionadas e formas, e ele aparece nas proporções do corpo humano e outros animais, nas plantas, no DNA, no sistema solar, na arte e na arquitetura, na música, etc (figura 1.56). Esse tema daria uma boa dissertação de mestrado, pois é uma grande fonte de pesquisa. Informações obtidas de [14] e [15].

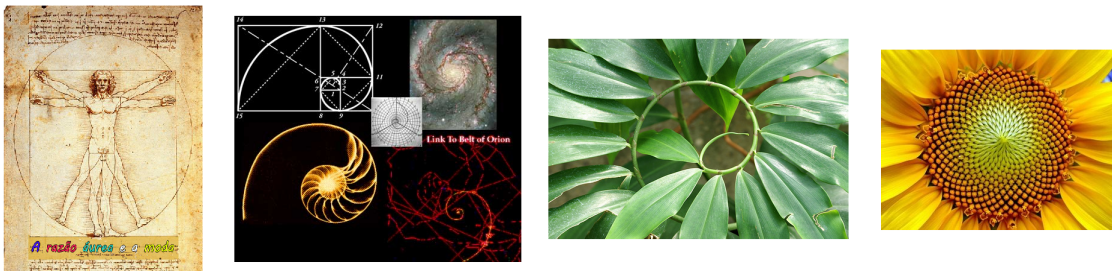


Figura 1.56: Elementos da natureza e a razão áurea

# Capítulo 2

## Teorema de Pitágoras Generalizado

### 2.1 Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Na geometria euclidiana, enunciamos assim:

**Teorema 37** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

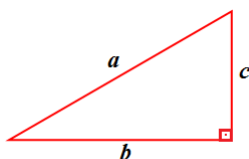


Figura 2.1: Triângulo retângulo

Por definição, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto, e os catetos são os dois lados que o formam. O enunciado anterior relaciona comprimentos, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre áreas:

**Teorema 38** *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos (figura 2.2).*

**Ilustração 2** *A ilustração da figura (2.2), feita com isopor, ajuda a entender o significado desse teorema .*

## 2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS

---

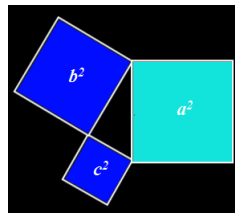


Figura 2.2: Teorema de Pitágoras

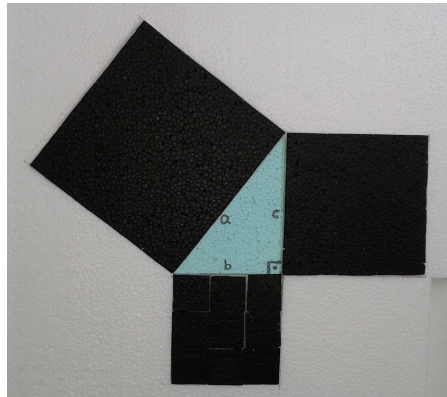


Figura 2.3: Ilustração: Teorema de Pitágoras

Para ambos os enunciados, se  $a$  representa o comprimento da hipotenusa, e  $b$  e  $c$  representam os comprimentos dos catetos, pode-se equacionar

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

O teorema de Pitágoras leva o nome do matemático grego Pitágoras (570 a.C. à 495 a.C.), que tradicionalmente é creditado pela sua descoberta e demonstração, embora seja frequentemente argumentado que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há muitas evidências de que matemáticos babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o teorema de Pitágoras). Não se sabe ao certo qual seria a demonstração utilizada por Pitágoras. O teorema de Pitágoras já teve muitas demonstrações publicadas, o livro *The Pythagorean Proposition*, de *Elisha Scott Loomis*, por exemplo, contém 370 demonstrações diferentes. Há uma demonstração no livro *Os Elementos*, de Euclides. E também ofereceram demonstrações, o matemático indiano Bhaskara Akaria, o italiano Leonardo da Vinci, e o vigésimo presidente dos Estados Unidos, James A. Garfield. O teorema de Pitágoras é tanto uma afirmação a respeito de áreas quanto a respeito de comprimentos, algumas provas do teorema são baseadas em uma dessas interpretações, e outras provas são baseadas na outra interpretação. Faremos aqui a *Demonstração Classica* do Teorema 38, [8].

## 2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS

---

Esta simples e engenhosa demonstração pode ter sido a que os pitagóricos imaginaram.

**Demonstração:** Dado um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , considere o quadrado cujo lado é  $b + c$ .

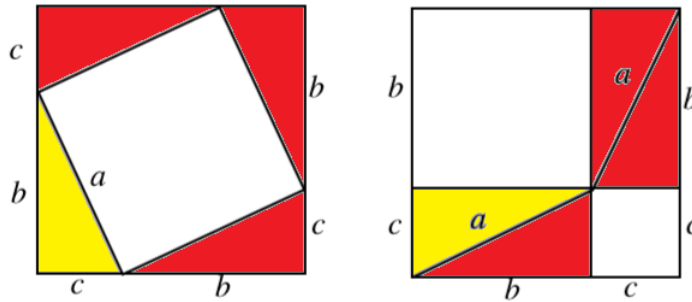


Figura 2.4: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Na figura da esquerda, retiramos do quadrado de lado  $b + c$  quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado  $a$ . Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado  $b + c$  os quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo dado, restando um quadrado de lado  $b$  e um quadrado de lado  $c$ . Logo, a área do quadrado de lado  $a$  é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem  $b$  e  $c$ , ou seja  $a^2 = b^2 + c^2$ , como queríamos demonstrar. ■

**Ilustração 3** Podemos usar a ilustração da figura (2.5), feita com isopor, para ajudar na compreensão dessa demonstração.

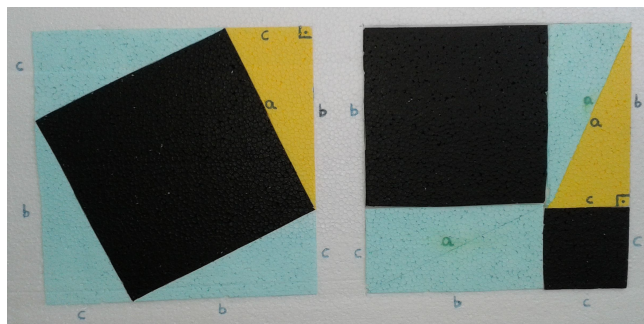


Figura 2.5: Teorema de Pitágoras

## 2.2 Teorema de Pitágoras generalizado

No enunciado do Teorema de Pitágoras, vimos que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Nesta seção vamos demonstrar que esse resultado pode ser generalizado para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo. O teorema pode ser enunciado como segue:

**Teorema 39** *Se figuras semelhantes são construídas sobre os três lados de um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , então a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos.*

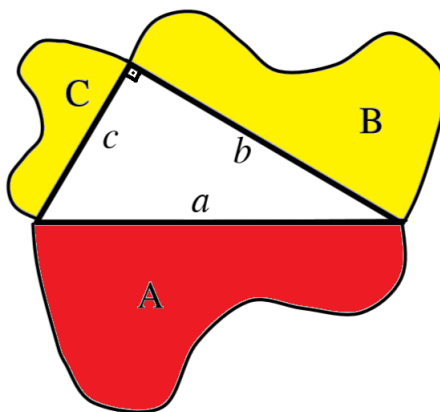


Figura 2.6: Teorema de Pitágoras generalizado

**Demonstração:** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  as áreas dessas figuras, conforme está indicado na figura acima. Pela propriedade da razão entre áreas de figuras semelhantes, sabemos que ela é igual ao quadrado da razão de semelhança. Daí temos que:  $\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$



## 2.2. TEOREMA DE PITÁGORAS GENERALIZADO

---

e  $\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$  ou seja  $\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$  e  $\frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$ . Usando a seguinte propriedade das proporções  $\frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$  obtemos então que  $\frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$

Como, pelo Teorema de Pitágoras,  $a^2 = b^2 + c^2$  concluímos que  $A = B + C$ . Portanto, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos, como queríamos demonstrar. ■

### 2.2.1 Aplicação do Teorema de Pitágoras generalizado: O problema de Hipócrates

Seja dado um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados desse triângulo como diâmetro. Conforme mostra a figura a seguir, [8]:

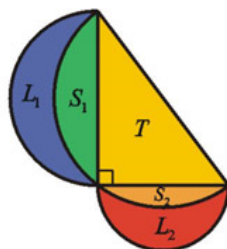


Figura 2.7: Lúnulas

Neste caso, temos

**Proposição 1** *A soma das áreas das duas lúnulas é igual à área do triângulo retângulo.*

**Demonstração:** De fato, sejam  $T$  a área triângulo,  $L_1$  e  $L_2$  as áreas das lúnulas e  $S_1$  e  $S_2$  as áreas compreendidas entre as lúnulas e os catetos do triângulo, conforme mostra a figura acima.

Aplicando o Teorema de Pitágoras generalizado, podemos concluir que a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos. Então temos  $T + S_1 + S_2 = (L_1 + S_1) + (L_2 + S_2)$ . Portanto  $T = L_1 + L_2$ , ou seja, a soma das áreas das duas lúnulas é igual à área do triângulo retângulo.

A figura (2.9) mostra triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares construídos sobre a hipotenusa e os catetos do mesmo triângulo retângulo. ■

Assim, pelo teorema de Pitágoras generalizado, as áreas dos polígonos regulares construídos sobre a hipotenusa são iguais a soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos.

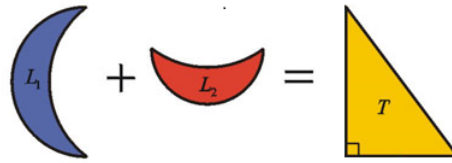


Figura 2.8: Lúnulas e triângulo retângulo

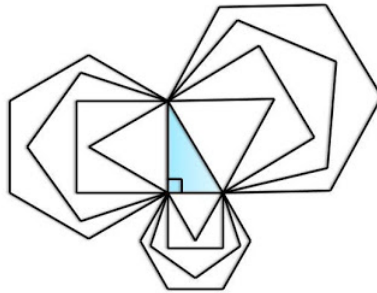


Figura 2.9: Triângulo retângulo e polígonos

Agora fica a pergunta, será que é possível relacionar volumes no espaço, assim como é possível relacionar áreas no triângulo retângulo num plano? Não encontramos nenhuma literatura que pudesse nos responder a essa indagação, porém analisando o Teorema de Pitágoras juntamente com o Princípio de Cavalieri chegamos a conclusão que é possível sim tal resultado e trataremos dele no capítulo seguinte.

# Capítulo 3

## Tópicos de Geometria Espacial

### 3.1 Poliedros

Considere os sólidos geométricos das figuras abaixo, neste capítulo nos baseamos em [1], [3], [10] e [11].

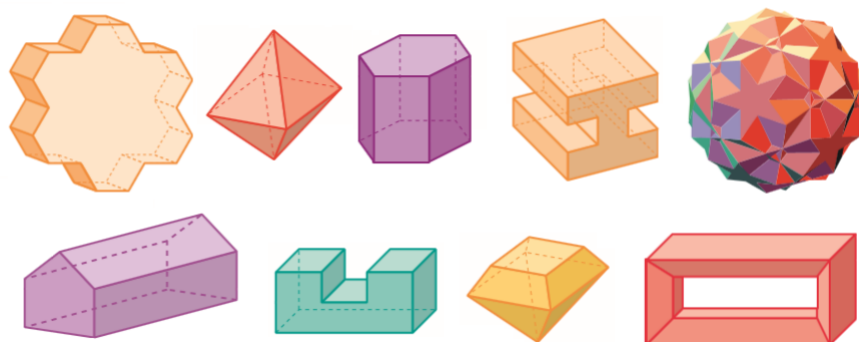


Figura 3.1: Poliedros

Todos esses sólidos são regiões do espaço limitadas por polígonos, esses tipos de sólidos são exemplos de **poliedros**, os quais definiremos a seguir.

**Definição 40** *Poliedro é o sólido geométrico limitado por regiões poligonais planas chamadas faces, onde:*

- (a) *cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma, e apenas uma, outra região poligonal;*
- (b) *a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro;*

(c) é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

### 3.1.1 Elementos de um poliedro

Os elementos do poliedro são: **face**, cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro; **aresta**, lado comum a duas faces e **vértice**, ponto comum a três ou mais arestas.

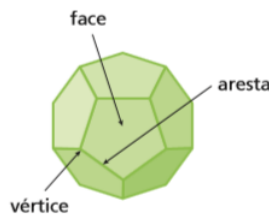


Figura 3.2: Elementos do poliedro

**Definição 41** "Um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, diz-se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ ".

Podemos trabalhar, também, com as duas definições seguintes de poliedro convexo ou não convexo:

**Definição 42** Se cada plano que contém uma face de um poliedro posiciona as demais faces num mesmo semiespaço, então o poliedro em questão é convexo; caso contrário, é não convexo (ou côncavo).

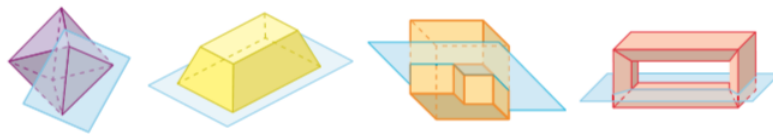


Figura 3.3: Poliedro convexo ou não convexo

No caso dos poliedros, podemos substituir essa definição por outra equivalente, que nos será mais útil.

**Definição 43** Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos (figura 3.4).

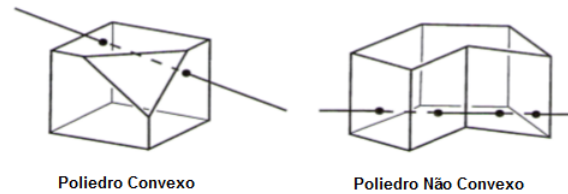


Figura 3.4: Poliedro convexo ou não convexo

## 3.2 Relação de Euler

Os elementos dos poliedros mantêm uma relação numérica, denominada **Relação de Euler**, é o que trata o seguinte teorema:

**Teorema 44 (Relação de Euler)** *Sendo  $V$  o número de vértices,  $A$  o número de arestas e  $F$  o número de faces de qualquer poliedro convexo, vale a relação:*

$$V + F = A + 2.$$

**Demonstração:**

**1ª Parte** Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar, em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação:  $V_a + F_a = A_a + 1$ , onde  $V_a$  é o número de vértices,  $A_a$  o de arestas e  $F_a$  o de faces da superfície poliédrica limitada convexa aberta.

Para  $F_a = 1$ , a superfície se reduz a um polígono plano convexo de  $n$  lados e, então,  $V_a = n$  e  $A_a = n$ , assim:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1.$$

Logo, a relação está verificada para  $F_a = 1$ .

Admitindo que a relação vale para uma superfície de  $F'$  faces (que possui  $V'$  vértices e  $A'$  arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de  $F' + 1$  faces (que possui  $F' + 1 = F_a$  faces,  $V_a$  vértices e  $A_a$  arestas). Por hipótese de indução, para a superfície de  $F'$  faces,  $V'$  vértices e  $A'$  arestas vale:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando a essa superfície, que é aberta, uma face de  $p$  arestas (lados) e considerando que  $q$  dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com  $F_a$  faces e  $V_a$  vértices tais que:

$$F_a = F' + 1,$$

### 3.2. RELAÇÃO DE EULER

---

$$A_a = A' + p - q \text{ (} q \text{ arestas coincidiram),}$$

$$V_a = V' + p - (q + 1) \text{ (} q + 1 \text{ vértices coincidem).}$$

Formando a expressão  $V_a - A_a + F_a$  e substituindo os valores acima, temos:

$$\begin{aligned} V_a - A_a + F_a &= [V' + p - (q + 1)] - [A' + p - q] + [F' + 1] \\ &= V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 \\ &= V' - A' + F'. \end{aligned}$$

Como  $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$  provamos que essa expressão não se altera se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície. Uma vez que, por hipótese,  $V' - A' + F' = 1$ , temos  $V_a - A_a + F_a = 1$ , o que prova a relação preliminar.

**2ª Parte** Tomemos a superfície de um poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces) e dela retiremos uma face.

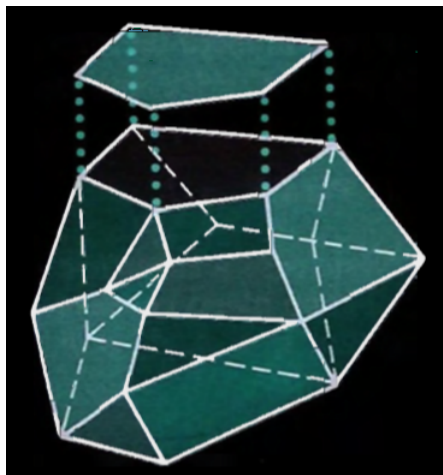


Figura 3.5: Superfície Poliédrica Aberta

Ficamos, então com uma superfície aberta (com  $V_a$  vértices,  $A_a$  arestas e  $F_a$  faces) para a qual vale a relação  $V_a - A_a + F_a = 1$ . Como  $V_a = V$ ,  $A_a = A$  e  $F_a = F - 1$ , temos  $V - A + (F - 1) = 1$ , ou seja

$$V - A + F = 2.$$

■

**Observação**



Figura 3.6: Poliedro Não Convexo

- Todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas nem todo poliedro que satisfaz a relação de Euler é convexo (figura 3.6).

No poliedro não convexo da figura acima temos que:  $V = 24$ ,  $A = 36$  e  $F = 14$ , assim  $V - A + F = 24 - 36 + 14 = 2$ , ou seja, o poliedro satisfaz a relação de Euler, mas não é convexo.

- A expressão  $V - A + F$  pode assumir valores diferentes de 2 quando o poliedro não é convexo.



Figura 3.7: Poliedro Não Convexo

No poliedro não convexo da figura acima temos que:  $V = 16$ ,  $A = 32$  e  $F = 16$ , assim  $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0 \neq 2$ .

## 3.3 Poliedros regulares

**Definição 45** Um *poliedro convexo* é **regular** quando todas as faces são regiões poligonais regulares e congruentes entre si e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

**Teorema 46** *Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares.*

As cinco figuras seguintes mostram um exemplo de cada classe de poliedros regulares um deles, o **hexaedro regular**, recebe nome especial: **cubo**. Os demais são denominados **tetraedro regular**, **octaedro regular**, **dodecaedro regular** e **icosaedro regular** (figura 3.8).

**Ilustração 4** *Vejam, na figura (3.9), uma ilustração dos poliedros regulares que foi feita com cartolina.*

### 3.3. POLIEDROS REGULARES

---



Figura 3.8: Poliedros regulares

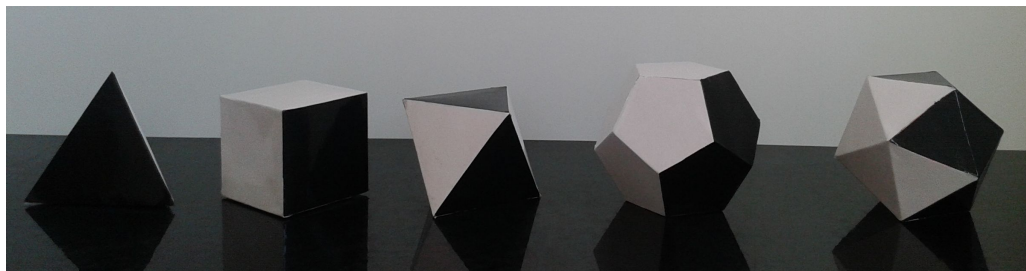


Figura 3.9: Ilustração dos poliedros regulares

**Demonstração:** Seja  $P$  um poliedro regular, sendo  $n$  o número de lados de cada face e  $m$  o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos então  $2A = nF = mV$ , daí

$$A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{m}.$$

Substituindo esses valores na relação de Euler  $F + V = 2 + A$ , obtemos:

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Rightarrow F = \frac{4m}{2m + 2n - mn}.$$

Assim, devemos ter:  $2m + 2n - mn > 0$ , ou seja,  $\frac{2n}{n-2} > m$ . Como  $m \geq 3$ , concluímos que  $n < 6$ . Portanto, temos as seguintes possibilidades:  $n = 3, n = 4$  e  $n = 5$ . Analisemos cada caso:

- Para  $n = 3$ , temos

$$F = \frac{4m}{6 - m},$$

e podemos notar que, para  $m = 3$ , temos  $F = 4$  (tetraedro); para  $m = 4$  temos  $F = 8$  (octaedro); para  $m = 5$  temos  $F = 20$  (ícosaedro).

- Para  $n = 4$ , temos

$$F = \frac{2m}{4 - m},$$

e podemos notar que, para  $m = 3$  temos  $F = 6$  (hexaedro).



### 3.4. DEFINIÇÃO DE PRISMA

---

- Para  $n = 5$ , temos

$$F = \frac{4m}{10 - 3m},$$

e podemos notar que, para  $m = 3$  temos  $F = 12$  (dodecaedro).

■

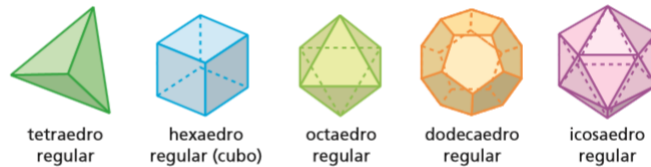


Figura 3.10: Poliedros Regulares

**Curiosidade 3** No estudo de probabilidade é muito frequente os problemas que envolvem o dado (objeto com 6 faces quadrangulares congruentes). Se quisermos fabricar outros dados com um número de lados diferentes de 6 (o hexaedro regular), só teríamos mais quatro opções, que são exatamente os outros quatro poliedros regulares, assim teríamos o dado com 4 lados (o tetraedro regular), o dado com 8 lados (octaedro regular), o dado com 12 lados (o dodecaedro regular) e o dado com 20 lados (o icosaedro regular).



Figura 3.11: Poliedros regulares usados como dados

## 3.4 Definição de prisma

**Definição 47** Consideremos dois planos paralelos,  $\alpha$  e  $\beta$  uma região poligonal  $P$  contida em  $\alpha$  e uma reta  $r$  que intercepta os planos  $\alpha$  e  $\beta$  (figura 3.12). Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a  $r$  tais que uma de suas extremidades é um ponto da região  $P$  e a outra extremidade é um ponto no plano  $\beta$ .

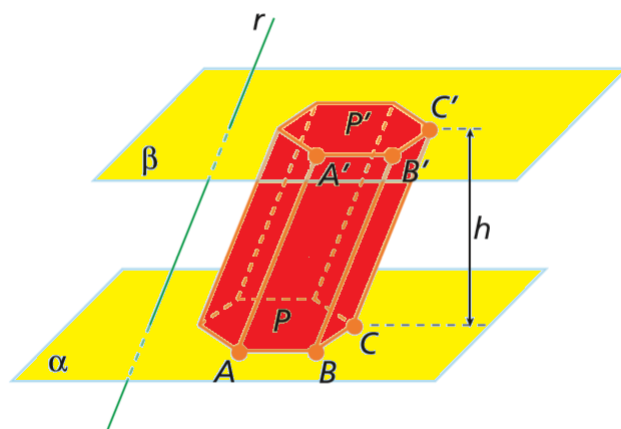


Figura 3.12: Prisma hexagonal

**Ilustração 5** Para um melhor entendimento dessa definição podemos fazer uma ilustração do prisma usando isopor e palitinhos de churrasco. Na ilustração do prisma da figura abaixo usamos dois pedaços de isopor para representarem os planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  e um palito de cor vermelha para representar a reta  $r$  que intersecta os dois planos. No plano  $\alpha$  foi desenhado um hexágono e desse hexágono e de seu interior saem varios palitos pretos representando retas paralelas a reta  $r$  e definindo no plano  $\beta$  um hexágono congruente ao do plano  $\alpha$ , os dois hexágonos formam a base do prisma.

Acreditamos que essa ilustração ajuda aquele aluno que está vendo pela primeira vez esta definição a ter uma idéia melhor da forma do prisma.

### 3.5 Entendendo a noção de volume de um sólido

Um sólido geometrico qualquer ocupa uma certa parte do espaço, esse espaço ocupado pelo sólido é chamado de volume.

O volume de um sólido corresponde a um único número real  $V$  positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado por ele com a porção do espaço ocupado por uma unidade de medida de volume.

A unidade de medida de volume que usualmente consideramos é o volume de um cubo unitário, isto é, de um cubo de aresta  $1u$ , sendo  $u$  certa unidade de comprimento. Assim, dizemos que o volume desse cubo unitário é  $1u^3$ . Quando a aresta do cubo unitário mede  $1m$ , seu volume é de  $1m^3$ ; se a aresta do cubo unitário mede  $1cm$ , o volume desse cubo é  $1cm^3$ , e assim por diante.

**Exemplo:** Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário de aresta  $1cm$  cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões  $4cm$ ,  $2cm$  e  $2cm$ .

3.5. ENTENDENDO A NOÇÃO DE VOLUME DE UM SÓLIDO

---

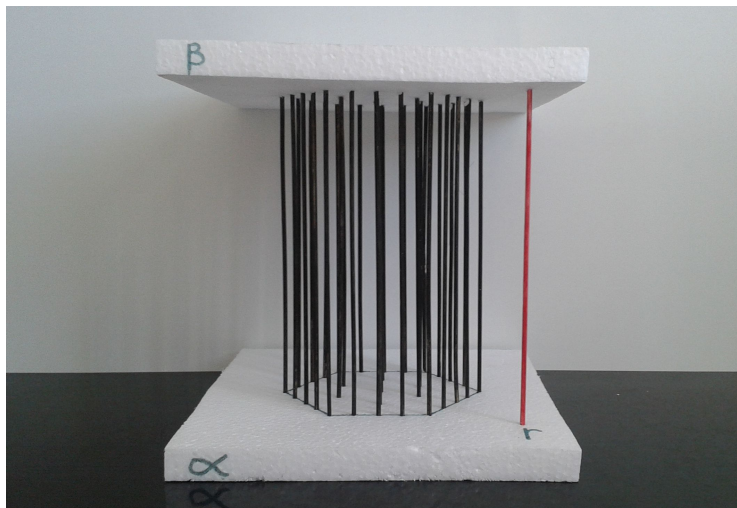


Figura 3.13: Ilustração do prisma hexagonal

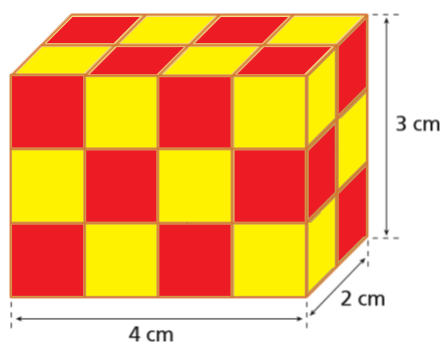


Figura 3.14: Paralelepípedo reto-retângulo

### 3.5. ENTENDENDO A NOÇÃO DE VOLUME DE UM SÓLIDO

---

Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por  $4 \cdot 2 = 8$  cubos unitários na base e que tem 3 camadas iguais à camada da base. Logo, tem  $3 \cdot 8 = 24$  cubos unitários no total, ou ainda, o paralelepípedo é formado por  $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$  cubos de  $1\text{cm}^3$  de volume. Dizemos, então, que o volume do paralelepípedo é  $24\text{cm}^3$ .  $\diamond$

No exemplo acima, podemos verificar que um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números inteiros tem volume igual ao produto desses três números. Esse fato pode ser demonstrado, verificando-se que ele é válido para qualquer paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números reais positivos. Desse modo, temos que:

**Afirmção 47.1** *O volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números reais positivos é:*

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

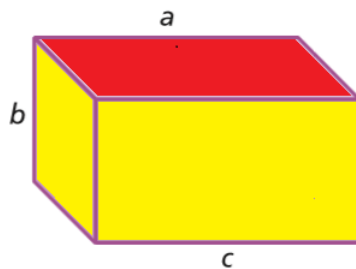


Figura 3.15: Paralelepípedo reto-retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$

**Afirmção 47.2** *O volume de um cubo de aresta  $a$  é:*

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

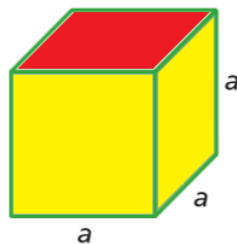


Figura 3.16: Cubo de aresta  $a$

## 3.6 Princípio de Cavalieri

A foto da figura (3.17) mostra 12 moedas idênticas empilhadas de duas maneiras diferentes. Que relação existe entre o volume da primeira pilha de moedas e o volume da segunda pilha?



Figura 3.17: Pilha de moedas

É claro que as pilhas têm volumes iguais, pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes das moedas que a compõem, e as duas pilhas são compostas por um mesmo número de moedas idênticas. O mesmo acontece com a pilha de tijolos da figura (3.18).

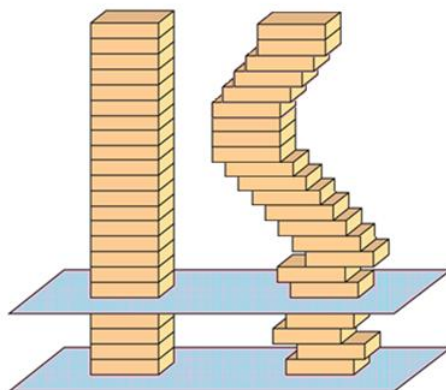


Figura 3.18: Pilha de tijolos

Essa ideia intuitiva foi transformada em uma importante proposição pelo matemático, professor da Universidade de Bolonha (Itália), Bonaventura Cavalieri. A obra mais importante de Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum* (Geome-

### 3.7. TEOREMA PITÁGORAS/CAVALIERI

tria dos indivisíveis contínuos), publicada em 1635, apresenta o princípio, enunciado a seguir, para a comparação dos volumes de dois sólidos geométricos.

**Teorema 48** (*Princípio de Cavalieri*) *Dois sólidos,  $S_1$  e  $S_2$ , apoiados num plano  $\alpha$  e contidos num mesmo semiespaço, terão o mesmo volume  $V$  se todo plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma área ( $A$ ).*

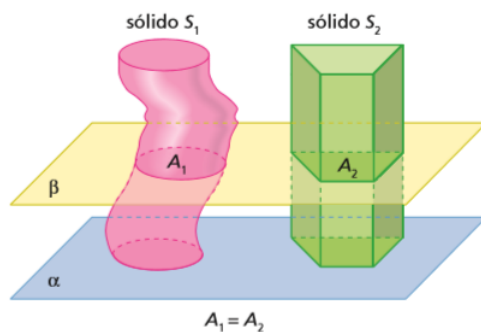


Figura 3.19: Sólidos geométricos

Se imaginarmos os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, concluímos que os dois sólidos têm volumes iguais. Como exemplo podemos tomar duas resmas de papel idênticas que mostra um caso particular desse argumento, onde os dois sólidos são formado pelas resmas, cada um, com 500 fatias, todas iguais.

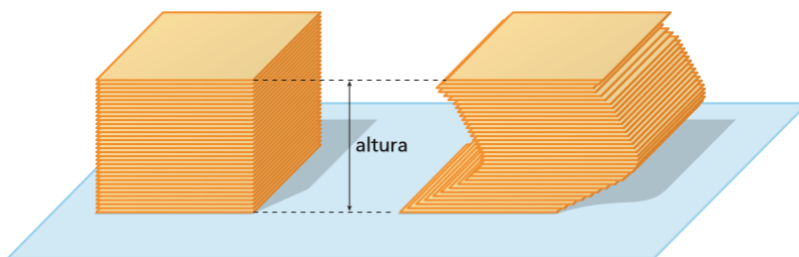


Figura 3.20: Resma de papel

## 3.7 Teorema Pitágoras/Cavalieri

**Teorema 49** *O volume de um prisma de altura  $h$  cuja base é um quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos volumes*

### 3.8. VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

---

dos prismas, também de altura  $h$ , construídos sobre os quadrados dos catetos desse triângulo.

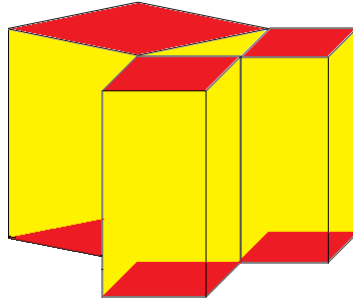


Figura 3.21: Prismas quadrangulares

**Demonstração:** Pelo Teorema de Pitágoras sabemos que a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, e assim será com toda seção de um plano paralelo às bases dos prismas. Isto é, as seções dos prismas construídos sobre os catetos terão área igual a seção determinada no prisma construídos sobre a hipotenusa. Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do prisma cuja base é o quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma dos volumes dos prismas construídos sobre os quadrados dos catetos desse triângulo, considerando, por hipótese que os prismas envolvidos tem mesma altura  $h$ . ■

## 3.8 Volume de uma pirâmide

Nesta seção demonstraremos a fórmula para calcular o volume de uma pirâmide, para tal usaremos a fórmula para calcular o volume de um prisma e o fato de que um prisma triangular pode ser decomposta em três pirâmides.

### 3.8.1 Volume de uma pirâmide triangular

**Lema 49.1** *o volume de uma pirâmide triangular é  $1/3$  do volume de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura da pirâmide.*

**Demonstração:** Vamos demonstrar que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume, conforme mostra a figura a seguir.

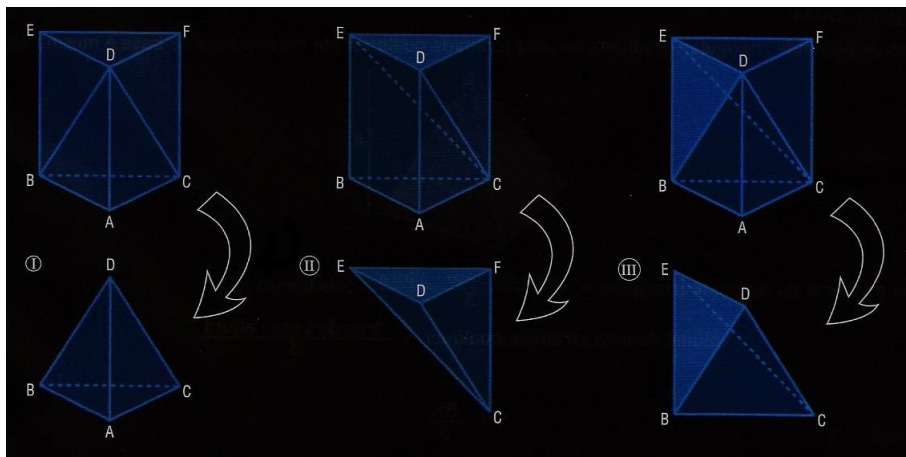


Figura 3.22: Prismas e pirâmides

As pirâmides I e II têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes e a distância de  $D$  ao plano  $(ABC)$  é igual à distância de  $C$  ao plano  $(DEF)$  - altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.

As pirâmides II e III também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo  $CEF$  é congruente ao triângulo  $BCE$ , pois cada um deles é metade do paralelogramo  $BCFE$ , e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de  $D$  ao plano  $(BCFE)$ . Logo, II e III têm mesmo volume. Assim,  $V_I = V_{II}$  e  $V_{II} = V_{III}$  e portanto,  $V_I = V_{II} = V_{III}$ . Lembrando que  $V_{prisma} = V_I + V_{II} + V_{III}$  e fazendo  $V_I = V_{II} = V_{III} = V$ , temos

$$V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}.$$

Como o volume do prisma é igual a área da base  $A_b$  vezes a altura do prisma  $h$ , temos, então que o volume da pirâmide triangular é:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

■

**Ilustração 6** A ilustração mostrada na foto da figura (3.23), feita com cartolina, mostra a decomposição de um prisma triangular em três pirâmides, ela pode ser usada na demonstração do cálculo da fórmula do volume de uma pirâmide triangular.

### 3.8.2 Volume de uma pirâmide qualquer

Agora, usando o Lema anterior, para provar o Teorema seguinte que trata do volume de uma pirâmide qualquer.



### 3.8. VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

---

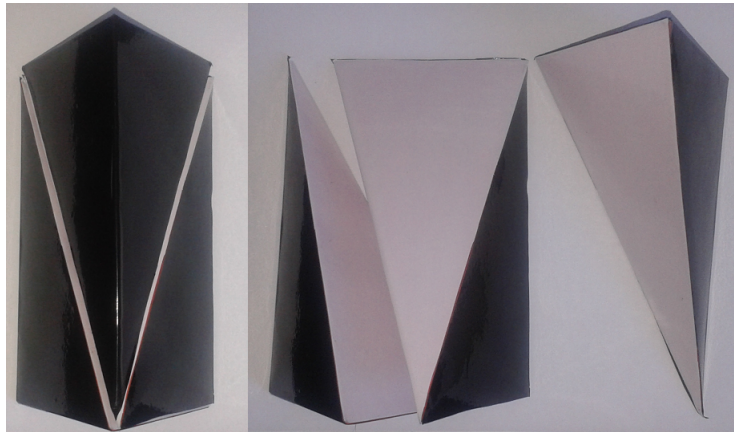


Figura 3.23: Ilustração da decomposição do prisma triangular em 3 pirâmides

**Teorema 50** *o volume de uma pirâmide qualquer é  $1/3$  do volume de um prisma que tem a mesma base de área  $A_b$  e a mesma altura  $h$  da pirâmide, isto é:*

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

**Demonstração:** Para uma pirâmide qualquer, podemos dividir o polígono de sua base em triângulos justapostos por meio de diagonais. Assim, a pirâmide fica



Figura 3.24: Pirâmide pentagonal

dividida em pirâmides triangulares de mesma altura  $h$ . Se a base foi dividida em  $n$  triângulos de áreas  $A_1, A_2, \dots$  e  $A_n$ , então a área da base é dada por:  $A_b = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ . Como o volume  $V$  da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \dots + \frac{1}{3}A_nh$$
$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \frac{1}{3}A_bh$$

### 3.9. VOLUME DE UMA ESFERA

---

Portanto, o volume de uma pirâmide qualquer é igual a  $1/3$  do produto da área da base  $A_b$  por sua altura  $h$ , ou seja:

$$V = \frac{A_b h}{3}.$$

■

## 3.9 Volume de uma Esfera

Para o cálculo do volume da esfera, utilizamos um sólido auxiliar chamado de *anticlepsidra*.

**Definição 51** A *anticlepsidra* é o sólido obtido retirando-se de um cilindro equilátero de diâmetro  $2R$  dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro e cujos vértices coincidem com o centro do cilindro.

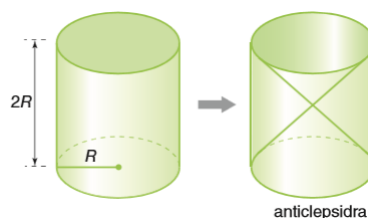


Figura 3.25: Cilindro e anticlepsidra

**Lema 51.1** O volume da *anticlepsidra* é igual à diferença entre o volume do cilindro equilátero de raio da base  $R$  e o volume do sólido formado por dois cones circulares retos de altura  $R$  e raio da base  $R$ .

**Demonstração:**

O volume  $V_1$  do cilindro é  $V_1 = \pi R^2 \cdot 2R$ , ou seja:  $V_1 = 2\pi R^3$  e o volume  $V_2$  do sólido formado pelos dois cones é  $V_2 = 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R \right)$ , ou seja  $V_2 = \frac{2\pi R^3}{3}$ , logo o volume  $V$  da anticlepsidra é:

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

■

**Teorema 52** O volume de uma esfera de raio  $R$  é igual ao volume de uma anticlepsidra de altura  $2R$ .

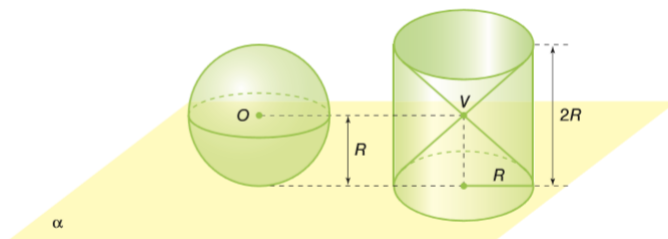


Figura 3.26: Esfera e anticlépsidra

**Demonstração:** Consideremos esses dois sólidos em um mesmo semiespaço de origem em um plano  $\alpha$  de modo que a base da anticlépsidra esteja contida em  $\alpha$  e a esfera seja tangente a  $\alpha$  (figura 3.26): Todo plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , que secciona a esfera, também secciona a anticlépsidra. Se  $\beta$  passa pelo centro  $O$  da esfera, então passa também pelo centro  $V$  da anticlépsidra e determina em ambos os sólidos secções de áreas iguais a  $\pi R^2$ , pois as duas secções são círculos de raio  $R$ . Suponhamos que  $\beta$  seccione esses sólidos à distância  $d$ , com  $d > 0$ , do centro da esfera, ou do centro da anticlépsidra (figura 3.27): Se  $r$  é o raio da secção determinada na esfera,

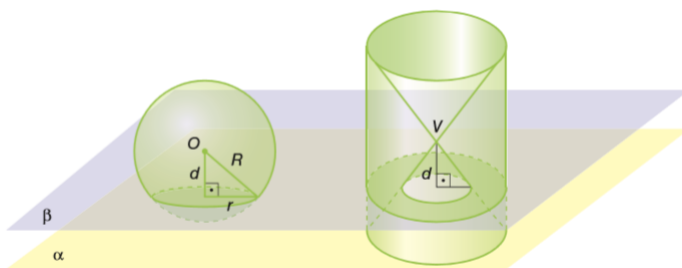


Figura 3.27: Esfera e anticlépsidra

então a área  $A_1$  dessa secção é:  $A_1 = \pi r^2$ . Observamos, pelo teorema de Pitágoras, que:  $r^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$ . Assim, podemos expressar a área  $A_1$  por:  $A_1 = \pi(R^2 - d^2)$ . A secção determinada pelo plano  $\beta$  na anticlépsidra é uma coroa circular: Note que o raio interno dessa coroa é igual à distância  $d$  entre o plano  $\beta$  e

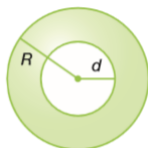


Figura 3.28: Coroa circular

o centro da anticlépsidra. Para compreender essa afirmação, considere uma secção

### 3.10. ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

meridiana da anticlipsis (figura 3.29):

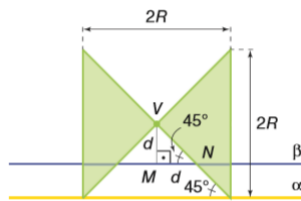


Figura 3.29: Seção meridiana da anticlipsis

O triângulo  $VMN$  é isósceles; logo, o raio interno da coroa circular é igual a  $d$ . Assim, a área  $A_2$  dessa coroa é:  $A_2 = \pi(R^2 - d^2)$ . Observe que:  $A_1 = A_2$ . Resumindo, todo plano que secciona a esfera também secciona a anticlipsis, determinando, em ambas, seções de mesma área. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera tem o mesmo volume da anticlipsis. Assim, o volume  $V$  de uma esfera de raio  $R$  é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

■

## 3.10 Área da superfície esférica

Qualquer que seja o método que imaginarmos para obter a área de uma superfície esférica, em algum momento precisaremos de uma "passagem ao limite". Entretanto, para justificar o valor  $4\pi R^2$  para a área da esfera ao aluno do Ensino Médio, existem processos que, apesar de não constituírem uma demonstração, tornam esse resultado bastante aceitável. Um deles usa o volume da esfera, é o que apresentemos.

**Teorema 53** A área da superfície esférica de raio  $R$  é  $A = 4\pi R^2$ .

**Demonstração:** Suponha a esfera de raio  $R$ , dividida em um número  $n$  muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequenos. Como se a esfera estivesse coberta por uma rede de malha muito fina.

Cada uma dessas regiões, que é "quase" plana se  $n$  for muito grande, será base de uma pirâmide com vértice no centro da esfera. Assim, a esfera ficará dividida em  $n$  pirâmides, todas com altura aproximadamente igual a  $R$  (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base da pirâmide). Se  $A$  é a área da esfera e  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  são as áreas das diversas regiões. Lembrando que o volume de cada pirâmide é:  $\frac{A_i R}{3}$ , com  $1 \leq i \leq n$  e que  $A_1 + \dots + A_n = A$  é a área da superfície esférica, temos:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3}A_1 R + \frac{1}{3}A_2 R + \dots + \frac{1}{3}A_n R = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)R,$$

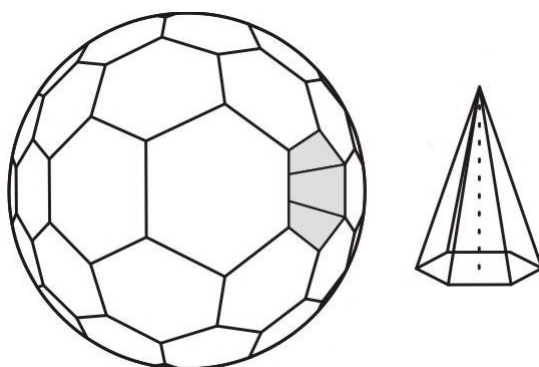


Figura 3.30: Esfera e pirâmide

e passando o limite quando  $n$  tende ao infinito, supondo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 + \dots + A_n)$  exista, obtemos:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 + \dots + A_n) R = \frac{1}{3} AR,$$

ou seja:  $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} AR$ , portanto a área da superfície esférica de raio  $R$  é  $A = 4\pi R^2$ .  
 ■

### 3.11 Poliedros regulares e suas planificações

As figuras seguintes mostram como podemos confeccionar alguns poliedros usando cartolinas ou algum material similar, para tal basta desenhar suas planificações, não esquecendo de deixar "abas" para colar e fechar o sólido.

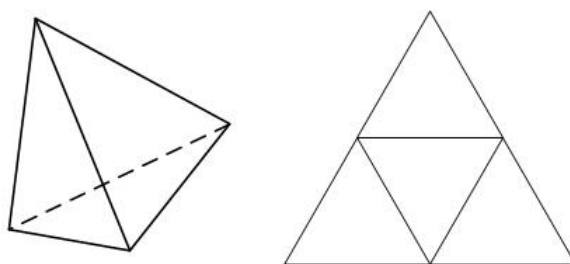


Figura 3.31: Planificação do tetraedro regular

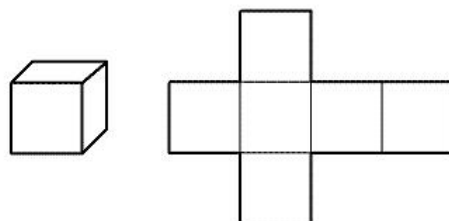


Figura 3.32: Planificação do hexaedro regular

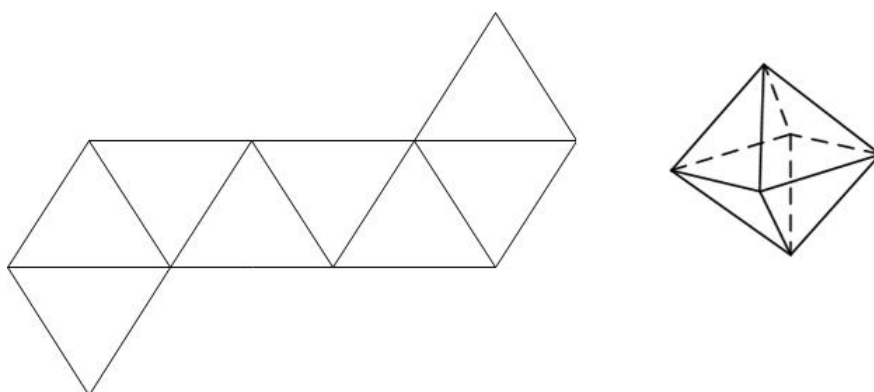


Figura 3.33: Planificação do octaedro regular

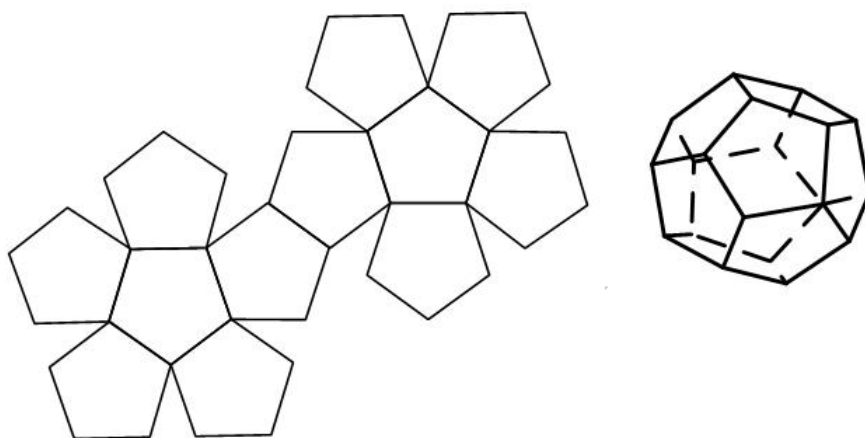


Figura 3.34: Planificação do dodecaedro regular

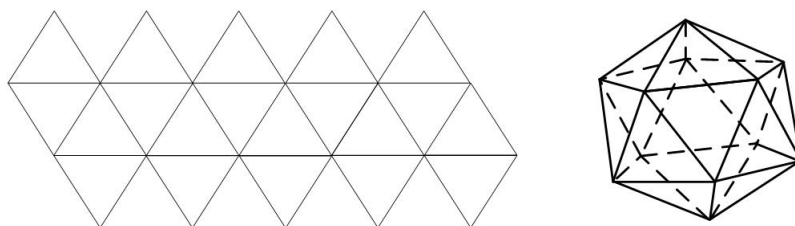


Figura 3.35: Planificação do icosaedro regular

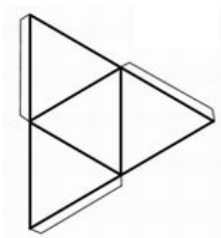


Figura 3.36: Tetraedro regular planificado

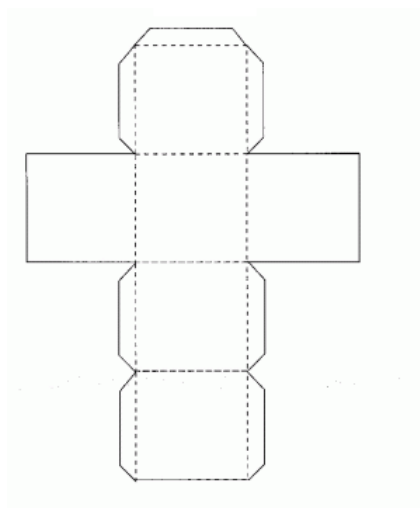


Figura 3.37: Hexaedro regular planificado

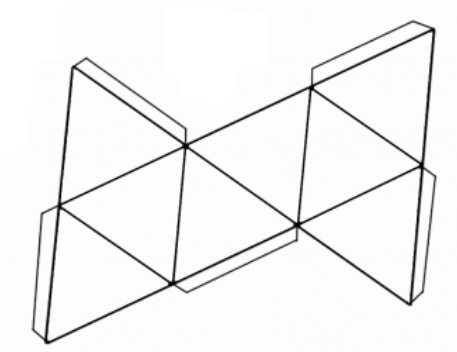


Figura 3.38: Octaedro regular planificado

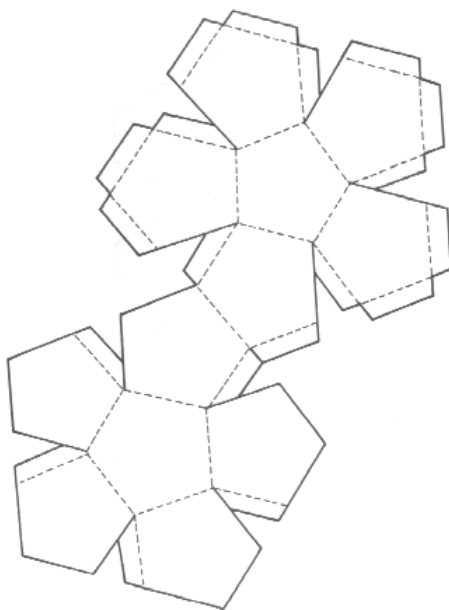


Figura 3.39: Dodecaedro regular planificado



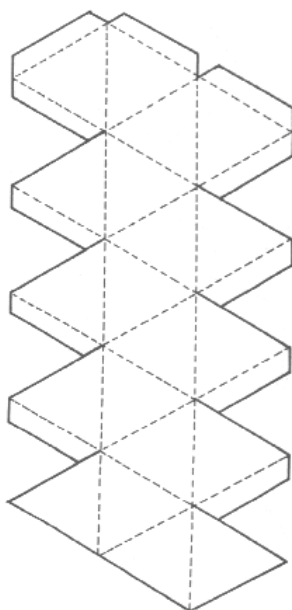


Figura 3.40: Icosaedro regular planificado

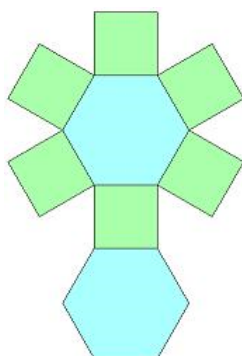


Figura 3.41: Planificação do prisma hexagonal

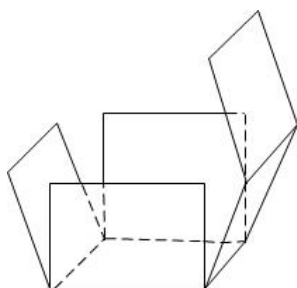


Figura 3.42: Planificação do paralelepípedo

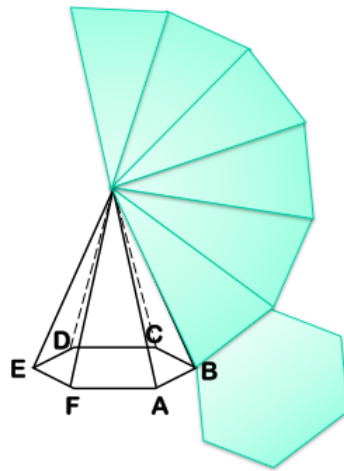


Figura 3.43: Planificação da pirâmide hexagonal

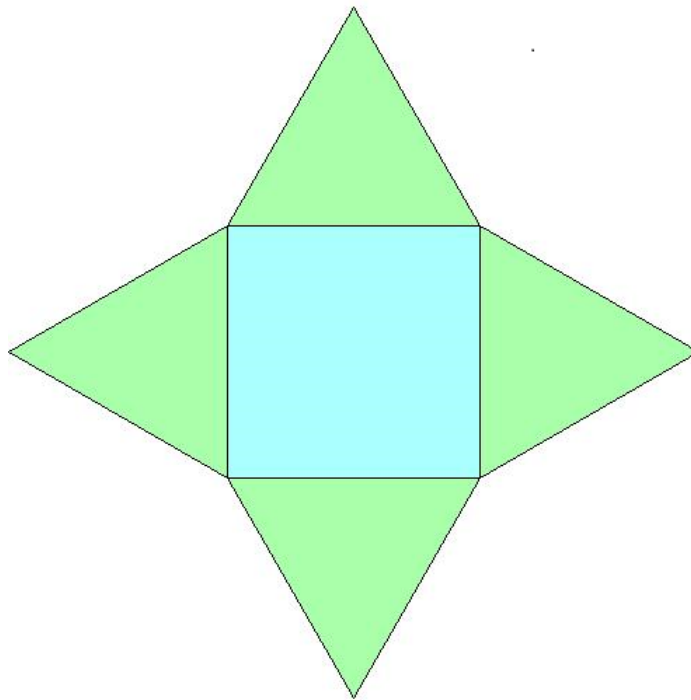


Figura 3.44: Planificação da pirâmide quadrangular

# Capítulo 4

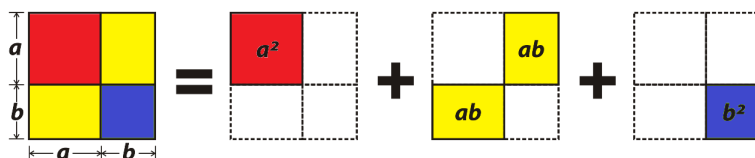
## Interpretação geométrica dos produtos notáveis

### 4.1 Quadrado da soma de dois termos

**Afirmção 53.1** *O quadrado da soma de dois termos  $a$  e  $b$  é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo [4] e [5]. Algebricamente, temos*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

**Afirmção 53.2** *Geometricamente  $(a + b)^2$  indica a área de um quadrado de lado com medida  $a + b$ , dado que  $a$  e  $b$  são números reais positivos. Esse quadrado pode ser dividido em 4 partes: duas retangulares de área  $ab$  cada uma, uma quadrada de área  $a^2$  e outra quadrada de área  $b^2$ .*



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 4.1: Quadrado da soma

**Ilustração 7** *Vejamos uma ilustração, feita com isopor, para ajudar na compreensão da afirmação acima.*

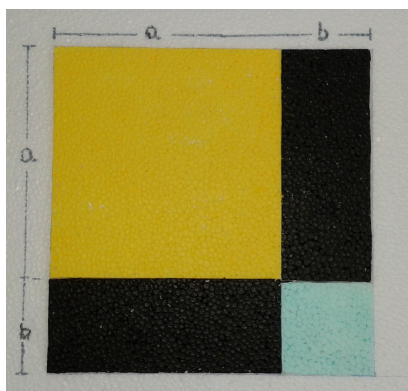


Figura 4.2: Ilustração: quadrado da soma

## 4.2 Cubo da soma de dois termos

**Afirmação 53.3** *O cubo da soma de dois termos  $a$  e  $b$  é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o quadrado do primeiro termo multiplicado pelo segundo, mais três vezes o primeiro multiplicado pelo quadrado do segundo termo, mais o cubo do segundo termo [4]. Algebricamente, temos:*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

**Afirmação 53.4** *Geometricamente  $(a+b)^3$  indica o volume de um cubo com arestas medindo  $a+b$ , dado que  $a$  e  $b$  são números reais positivos. Esse cubo pode ser dividido em 8 partes: um cubo de volume  $a^3$ , três paralelepípedos de volume  $a^2b$  cada um, três paralelepípedos de volume  $ab^2$  cada um e outro cubo de volume  $b^3$ .*

**Ilustração 8** *Vejam os uma ilustração dos paralelepípedos, feita com cartolina, para ajudar na compreensão da afirmação acima.*

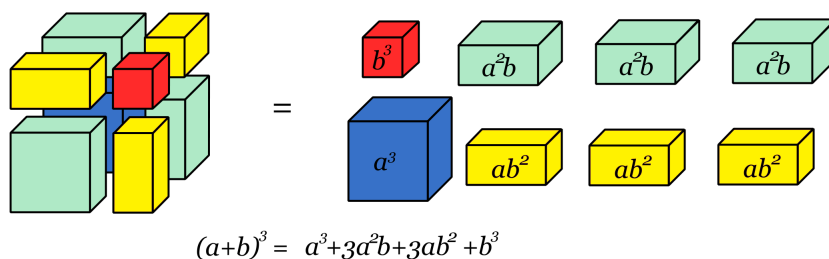


Figura 4.3: Cubo da soma



Figura 4.4: Ilustração: cubo da soma

## 4.3 O binômio de Newton

Nesta seção apresentaremos o binômio de Newton que recebe esse nome em homenagem ao grande matemático Isaac Newton que descobriu a fórmula desse binômio. Vejamos agora uma pequena biografia desse grande gênio [2], [6] e [12].

### 4.3.1 Sir Isaac Newton

Sir Isaac Newton nasceu em Londres, no ano de 1643, e viveu até o ano de 1727.

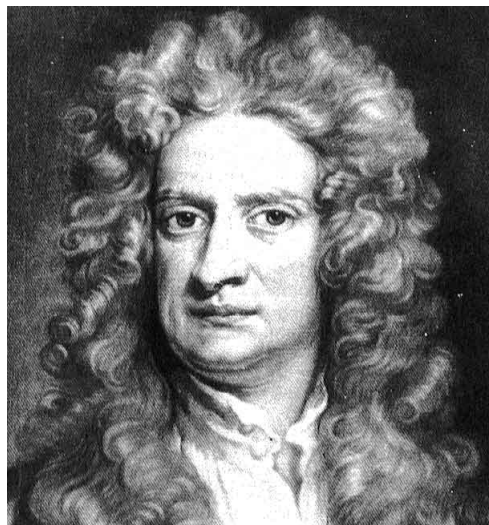


Figura 4.5: Isaac Newton

Ele atuou em varias áreas do conhecimento foi cientista, químico, físico, mecânico, astrônomo, alquimista, teólogo e matemáticos, trabalhou com Leibniz na elaboração do cálculo infinitesimal. Durante sua trajetória, ele descobriu várias leis

da física, entre elas, a lei da gravidade. Além de seu trabalho em cálculo infinitesimal, como matemático Newton contribuiu para o estudo das séries de potências, generalizou o teorema binomial para expoentes não inteiros, e desenvolveu o método de Newton para a aproximação das raízes de uma função, além de muitas outras contribuições importantes.

Sua obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* é considerada uma das mais influentes na história da ciência. Publicada em 1687, esta obra descreve a lei da gravitação universal e as três leis de Newton, que fundamentaram a mecânica clássica. Newton também dedicou muito de seu tempo ao estudo da alquimia e da cronologia bíblica, mas a maior parte de seu trabalho nessas áreas permaneceu não publicada até muito tempo depois de sua morte.

Em uma pesquisa promovida pela *Royal Society of London*, Newton foi considerado o cientista que causou maior impacto na história da ciência. De personalidade sóbria, fechada e solitária, para ele, a função da ciência era descobrir leis universais e enunciá-las de forma precisa e racional. Interrogado sobre como conseguia suas descobertas, respondeu: "Para descobrir todos os fenômenos que deseja, basta ao sábio três coisas: pensar, pensar e pensar". Os estudiosos de sua obra afirmam que ele foi a inteligência suprema que a raça humana produziu, "cujo gênio superou o tipo humano". Segundo Voltaire, Newton seria "o maestro que regeria a orquestra quando, um dia, todos os gênios do mundo se reunissem".

**Definição 54 (Binômio de Newton)** *Sejam  $a$  e  $b$  números reais e  $n$  um número natural. Toda potência da forma  $(x + y)^n$  é conhecida como Binômio de Newton.*

**Teorema 55 (Desenvolvimento do binômio de Newton)** *O desenvolvimento do binômio de Newton é dado pela expressão:*

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \dots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n, \end{aligned}$$

onde para  $n \geq k$  temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad e \quad n! = n \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Aqui, convenciamos que  $0! = 1$  e  $1! = 1$ .

**Demonstração:** A demonstração desse teorema será feita por indução sobre  $n$ .

A igualdade é trivialmente verificada para  $n = 0$  e  $n = 1$ , veja que

$$\text{Para } n = 0, \text{ temos } (x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0.$$

### 4.3. O BINÔMIO DE NEWTON

---

Para  $n = 1$ , temos  $(x + y)^1 = x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1$ .

Agora suponha, por hipótese de indução, que a igualdade é válida para  $n > 1$  natural, isto é

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Vamos mostrar que é válida para  $n + 1$ , ou seja

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k.$$

Multiplicando ambos os membros da hipótese de indução por  $x + y$ , obtemos

$$(x + y)^{n+1} = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Por distributividade de produto sob a soma

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= x^{n+1} + x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_I x^{n-k+1} y^{k-1} + y^{n+1} \end{aligned}$$

Usando a relação de Stiefel:  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$  em  $I$ , obtemos

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + y^{n+1}.$$

Reagrupando o somatório, temos:

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k.$$

■

# Referências Bibliográficas

- [1] Barroso, Juliane Matsubara, *Conexões com a matemática, volume 2*. 1º ed. - São Paulo: Moderna (2010).
- [2] Boyer, Carl B., Merzbach, Uta C., *História da matemática*. 3º ed. - São Paulo: Blucher (2012).
- [3] Dante, Luiz Roberto, *Contexto e aplicações, volume 2*. 1º ed. - São Paulo: Ática (2003).
- [4] Dante, Luiz Roberto, *Tudo é matemática, 7ª série*. 2ª ed. - São Paulo: Ática (2005).
- [5] Dehira, Nelson T., *Conceitos e histórias, 7ª série*. 2ª ed. - São Paulo: Editora Scipione (1995).
- [6] Elon, L., Paulo, C., Eduardo, W., Augusto, C., *A matemática do ensino médio Vol. 1*. 6º ed. - Rio de Janeiro: SBM (2006).
- [7] Elon, L., Paulo, C., Eduardo, W., Augusto, C., *A matemática do ensino médio Vol. 2*. 6º ed. - Rio de Janeiro: SBM (2006).
- [8] Elon, L., Paulo, C., Eduardo, W., Augusto, C., *Temas e Problemas Elementares*. 2º ed. - Rio de Janeiro: SBM (2006).
- [9] Osvaldo, D., José Nicolau, P., *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 9*. 7º ed. - São Paulo: Atual (1993).
- [10] Osvaldo, D., José Nicolau, P., *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 10*. 7º ed. - São Paulo: Atual (1993).
- [11] Paiva, Manoel Rodrigues, *Matemática 2 Paiva*. 1º ed. - São Paulo: Moderna (2009).
- [12] <http://www.somatematica.com.br/biograf/newton.php>. Acesso em: 13 de maio de 2014



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [13] <http://www.somatematica.com.br/biograf/euclides.php>. Acesso em: 13 de maio de 2014
- [14] <http://danilosaretratista.blogspot.com.br/2010/11/proporcao-aurea-belezas-fases.html>. Acesso em: 13 de maio de 2014
- [15] <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br>. Acesso em: 13 de maio de 2014