UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA/PROFMAT

DIONISIO JOSÉ DA COSTA SÁ

TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA POR MEIO DO GEOGEBRA

BELÉM
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA/PROFMAT

DIONISIO JOSÉ DA COSTA SÁ

TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA POR MEIO DO GEOGEBRA

Dissertação de Conclusão de Curso apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática do programa de Pós-Graduação (PPGME-PROFMAT) da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. JUACI PICANÇO
Co-Orientadora: Prof[a]. JOELMA MORBACH

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Sá, Dionisio José da Costa, 1969-
Tópicos da geometria plana por meio do geogebra / Dionisio José da Costa Sá. - 2014.

Orientador: Juaci Picanço da Silva;
Coorientador: Joelma Morbach.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Geometria plana. 2. Software educacional. 3. Ensino auxiliado por computador. 4. Software Geogebra. I. Título.

CDD 22. ed. 516.22

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

DIONISIO JOSÉ DA COSTA SÁ

TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA POR MEIO DO GEOGEBRA

Dissertação de Conclusão de Curso apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática do programa de Pós-Graduação (PPGME-PROFMAT) da Universidade Federal do Pará e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Juaci Picanço da Silva

Profº. Dr. Juaci Picanço da Silva. (Orientador)
UFPa - Universidade Federal do Pará

Pedro Sá

Profº. Dr. Pedro Franco Sá.(Membro Externo)
UEPa - Universidade do Estado do Pará

Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento.(Membro Interno)
UFPa - Universidade Federal do Pará

DATA DA AVALIAÇÃO: 30 / 05 / 2014.

CONCEITO: Excelente

ii

Dedico este trabalho à minha esposa Cynthia e aos meus filhos: Rafael, Yasmim, Gabriel e Felipe, que foram compreensivos nas diversas vezes que se privaram da minha companhia em decorrência do tempo absorvido pelos estudos e me deram força para realizar mais este sonho na minha vida acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, por ser a minha fonte de força de coragem. Aos meus pais, Dionisio e Conceição, maiores exemplos de retidão de caráter que tenho em minha vida, os reais responsáveis por ter uma família que sempre privilegiou os estudos.

À Cynthia, minha mulher, minha melhor amiga e companheira. Aquela que sempre esteve ao meu lado dando força, carinho, afeto, a pessoa com quem eu sempre contei para os melhores e piores momentos da vida.

Aos meus amados filhos, Rafael, Yasmim, Gabriel e Felipe, que representam a minha mais sublime alegria de viver.

Aos meus irmãos, eternos incentivadores, amigos com quem conto a qualquer hora, muitas vezes são os primeiros ombros nos quais procuro me apoiar. Em resumo, pessoas mais que especiais.

Às direções, às coordenação e aos colegas de trabalho dos Colégios Moderno, Santo Antônio, Unamea, Escolas Estaduais Tiradentes e Dr. Freitas pelo incentivo, companheirismo e compreensão e, de forma muito especial, gostaria de agradecer aos Professores Marlene Vianna, Luiz Olavo Mattos, Patrícia Azevedo, Fabiana Cunha, Valquíria Mufarrej, Jesus, Marly e Irmã Maria.

A um casal de amigos que viraram meus irmãos, Fernando e Célia Pereira.

Ao meu grande amigo Prof. Msc. Carlos Miranda, pelo incentivo a voltar para vida acadêmica, pelos conselhos, ensinamentos e parceria nesses 25 anos de profissão, dos quais boa parte pude desfrutar da sua companhia como colega de trabalho.

A turma do PROFMAT-2012 que virou uma família, pois, por muitas vezes, passávamos mais tempo juntos estudando do que com nossos próprios familiares, amigos que, com certeza, foram determinantes também nessa jornada e que são para a vida toda.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Juaci Picanço e Profª Ms. Joelma Morbach pela disponibilidade, incentivo e exemplo.

A todos os professores do mestrado, que foram determinantes na minha formação acadêmica.

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes".

Isaac Newton.

RESUMO

A presente produção científica aborda o uso do software GEOGEBRA para o ensino de Tópicos da Geometria Plana. Os conteúdos aqui contemplados partem dos axiomas primitivos da Geometria para as demonstrações de teoremas e suas consequências. Neste trabalho, fizemos juntos a mais dois colegas de turma, também concluintes do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), os alunos Fernando Roberto Braga Colares e Gilberto Alves Teixeira Junior, uma consulta com professores de Matemática das redes pública e privada sobre a utilização do Geogebra em sala, cujo objetivo foi verificar junto aos professores da Educação Básica se eles utilizavam o Geogebra em suas práticas de ensino. Os resultados foram expostos neste documento. Além disso, apresentamos o software mostrando todos as suas janelas, botões e desenvolvendo atividades exploratórias experimentais que possibilitem ao aluno descobrir ou redescobrir conceitos e teoremas da Geometria Plana.

Palavras-chave:GEOGEBRA. Atividades exploratórias. Geometria plana, Axiomas, teoremas

ABSTRACT

The present scientific production discusses the use of GEOGEBRA software aiming the teaching of Topics of the Plane Geometry. The contents approached starts from the primitive axioms of geometry to the demonstrations of theorems and their consequences. In this work, we made, with two other classmates, also graduates of the Professional Masters in Mathematics (PROFMAT), the students Fernando Roberto Braga Colares e Gilberto Alves Teixeira Junior, a consultation with mathematic teachers from public and private schools about the utilization of Geogebra in the classroom, aiming to verify with teachers of Basic Education if they utilize the Geogebra in their teaching practices. The results were exposed in this document. Furthermore, we present the software showing all of its windows and buttons and developing exploratory and experimental activities that enable the students to discover or rediscover concepts and theorems of plane geometry.

Key-works:GEOGEBRA. Exploratory activities, Plane Geometry, Axioms, Theorems

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Considerações Iniciais

1.1 Introdução

Na vida profissional, percebemos que, nas escolas onde trabalhamos, o ensino da geometria plana nem sempre é visto com a mesma ênfase quando comparado com a aritmética e a álgebra e isso se torna até mais evidente nas escolas públicas, onde notamos que uma fração considerável do corpo discente chega a concluir toda a educação básica sem ter o mínimo de conhecimento dessa parte da ciência.

Observamos que há, nas escolas públicas em que atuamos, um grande avanço no que tange o aparelhamento das mesmas com recursos eletrônicos como televisores, datashows, notebooks, tablets, assim como, todas essas possuem laboratórios de informática funcionando, entretanto percebemos que todos esses recursos são pouco utilizados pelos professores de Matemática.

Averiguando junto às equipes de professores de Matemática que trabalham nessas escolas os motivos que levam o baixo domínio de nossos alunos nos assuntos relacionados à geometria plana, não conseguimos obter, com exatidão, uma resposta e, quando propusemos a utilização do Geogebra ou mesmo de outro recurso, percebemos que muitos se sentem inseguros em utilizar na sua plenitude metodologias diferentes da aula expositiva com o auxílio do pincel e do quadro branco.

Quando olhamos para os nossos os alunos, vemos crianças e jovens que se mostram com bastante desenvoltura em utilizar recursos eletrônicos como celulares, smathphones, tablets e computadores, logo, eles nos parecem potencialmente preparados para o uso da tecnologia. Nesse sentido, entendemos que a utilização de um recurso como o Geogebra poderá proporcionar ao educando uma aproximação significativa com a geometria plana.

Assim, esse trabalho tem a intenção de auxiliar os professores de Matemática, trazendo uma maneira de se ensinar alguns tópicos da geometria por meio do Geogebra, pensando, assim, em ajudá-los a transpor o que talvez seja o maior desafio que é fazer com que os alunos passem a ver a Matemática e, em particular, a geometria plana de uma forma mais agradável e que eles possam interagir com a ciência desenvolvendo o estudo com maior reflexão, entusiasmo e sentido.

Somado a tudo que foi exposto, outro fator que nos motivou a usar esse software foi o acesso ao conhecimento desse e de outros softwares para o ensino da matemática no curso de RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA, ofertado pela Universidade Federal do Pará durante o mestrado PROFMAT, que foi ministrado pelo Prof. Dr. Juacir Picanço com apoio da Prof. Msc. Joelma Morbach e como o Geogebra, pois além de ser uma poderosa ferramenta, é um programa livre, o que nos permite usar nas escolas públicas sem problema algum.

Neste trabalho, após apresentarmos as motivações que nos levaram a abordar esse tema e os seus objetivos, temos no 2º capítulo os resultados obtidos na consulta feita com professores de Matemática sobre o uso do Geogebra nas suas aulas. No 3º capítulo, apresentamos o software, mostrando a sua finalidade. como instalá-lo e todas as funções que ele possui.

No 4º capítulo, abordamos tópicos importantes da Geometria Plana com enfoque em ângulo, triângulos e quadriláteros. Vale ressaltar, que, na abordagem teórica desses tópicos, partimos dos axiomas para chegarmos em definições teoremas e consquências. Sempre que possível, iremos construir as demonstrações de teoremas e suas consequências. O material, dependendo da necessidade, irá apoiar-se nas representações gráficas para que o leitor possa acompanhar o desenvolvimento dos temas com mais facilidade.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Elaborar uma proposta de ensino de conceitos da geometria plana relacionados com ângulos propriedades de triângulos e quadriláteros por meio do Geogebra para professores e alunos, como um material de apoio que pretende facilitar o ensino e aprendizagem de geometria plana a partir de atividades experimentais em ambiente de geometria dinâmica.

1.2.2 Considerações Sobre a Proposta de Ensino

A proposta de ensino que estamos apresentando neste trabalho contempla vinte e uma seções de ensino. As seções foram distribuídas por tópicos da Geometria Plana com a finalidade de desenvolver habilidades básicas dos alunos diante de elementos que contemplem as noções de ângulo, triângulos e quadriláteros por meio da utilização de um software denominado GEOGEBRA. No currículo, tais noções, geralmente, são objetos de ensino do 8º ano do Ensino Fundamental, mas a proposta é livre para ser aplicada ao longo de todo o Ensino Fundamental II.

O ambiente destinado para o desenvolvimento das seções de ensino deverá possuir um Datashow, um quadro branco e um grupo de computadores com o software GEOGEBRA instalado. Em geral, as escolas públicas de ensino e mesmo as particulares denominam tais ambientes como Laboratório de Informática. A quantidade de alunos por máquina dependerá do número de máquinas em funcionamento do laboratório, mas nossa proposta de ensino não restringe nenhuma condição que relacione o aluno à máquina. Diante disso, podemos sugerir um único aluno por máquina, dois alunos por máquina ou mais.

A primeira etapa da proposta de ensino é destinada à familiarização dos alunos com o GEOGEBRA, prevista para ocorrer em 100 minutos (2 horas aulas), independente dos alunos já possuírem alguma habilidade com as ferramentas do programa. Na nossa compreensão, é importante esse momento até mesmo para a criação de uma ambiência saudável, pois, em experiências ocorridas em nossa prática, observamos que alguns alunos ao adentrarem nos Laboratórios procuram acessar a Internet para visitar páginas de jogos, redes sociais ou outras atividades divergentes dos objetivos das aulas. Em cada máquina, deverá constar o tutorial impresso, descrito no capítulo 3, para que os alunos aprendam manipular com as ferramentas do GEOGEBRA. O desenvolvimento dessa etapa dar-se-á pela apresentação e utilização das ferramentas do programa, principalmente, as que serão utilizadas nas seções de ensino.

A próxima etapa consiste na realização das seções de ensino prevista para um desenvolvimento de 50 minutos por seção. O capítulo 4, deste trabalho, será apostilado e entregue aos alunos como material de apoio. Cada seção de ensino refere-se ao desenvolvimento das atividades que constam no referido material.

No próximo capítulo iremos apresentar os resultados de uma consulta feita a professores da educação básica sobre o uso do software Geogebra no ensino da Matemática.

Capítulo 2

Consulta aos Docentes

2.1 Como foi feita a consulta

Neste capítulo, apresentamos os resultados de uma consulta feita com professores de matemática, com o objetivo de verificar, antes de elaborar a proposta de ensino de tópicos da geometria plana por meio do Geogebra, até que ponto os docentes conheciam e acreditavam ser uma possibilidade de melhoria no ensino da matemática o uso do software citado. A consulta foi realizada por meio da internet através do site *www.survio.com*, parte dos participantes são amigos de trabalho que foram convidados a participar recebendo o link da pesquisa, por isso em sua totalidade a forma de resposta foi o link direto (como mostra o gráfico central na figura 2.1); obtivemos 207 visitantes dos quais 100 questionários foram analisados pelo SURVIO por estarem completos (na figura 2.1 observe gráfico a esquerda).

Essa consulta constava de onze perguntas sendo que em nove delas era para marcar uma única alternativa como resposta e em duas delas (as perguntas 4 e 7), o professor consultado poderia responder livremente. Esse instrumento foi também utilizado em trabalho de conclusão de curso do PROFMAT pelos alunos Fernando Roberto Braga Colares e Gilberto Alves Teixeira Junior que abordaram o estudo da Trigonometria e de Funções, respectivamente.

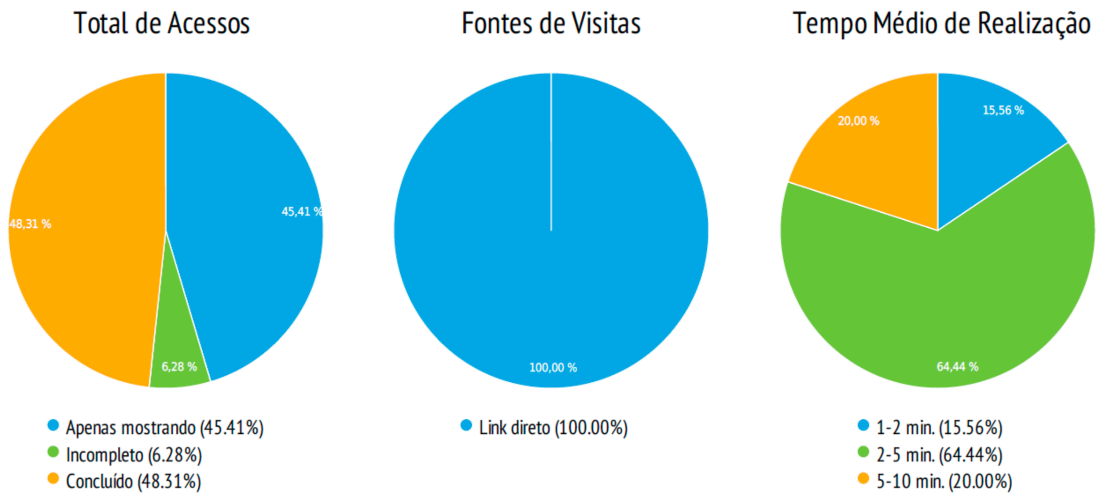


Figura 2.1: Total de Acessos

2.2 1ª Pergunta

Há quanto tempo você trabalha como professor?

Resposta	Respostas	Ratio
menos de 1 ano	3	3.00%
1 a 3 anos	5	5.00%
4 a 6 anos	10	10.00%
7 a 9 anos	22	22.00%
mais de 10 anos	60	60.00%

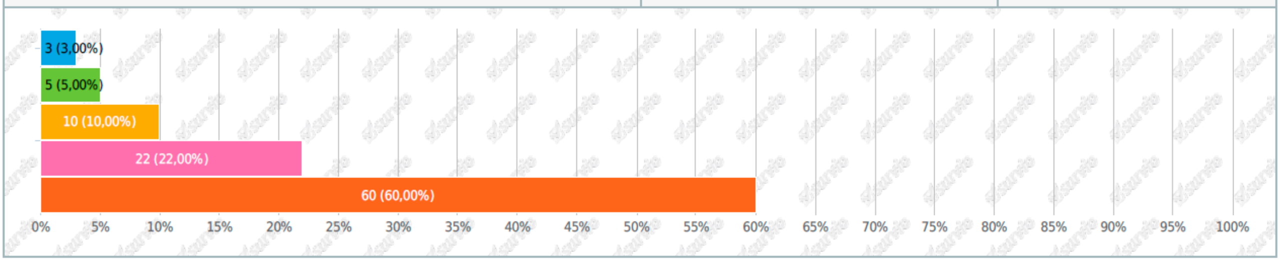


Figura 2.2: Primeira Pergunta

Nessa pergunta, percebemos que mais da metade dos professores que responderam completamente à consulta (60%) já ministram aulas de matemática há mais de 10 anos e menos de 20% deles ainda está no início da carreira profissional, ou seja, com até 6 anos de profissão.

2.3 2ª Pergunta

Você conhece o software geogebra?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	91	91.00%
NÃO	9	9.00%

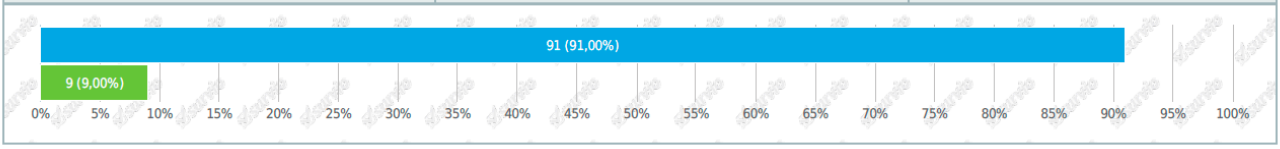


Figura 2.3: Segunda Pergunta

Nessa pergunta, temos que a grande maioria dos docentes (91%) dizem já conhecer o programa Geogebra, apenas nove professores relatam desconhecerem o programa.

2.4 3ª Pergunta

Já utilizou este software em suas aulas?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	52	52.00%
NÃO	48	48.00%

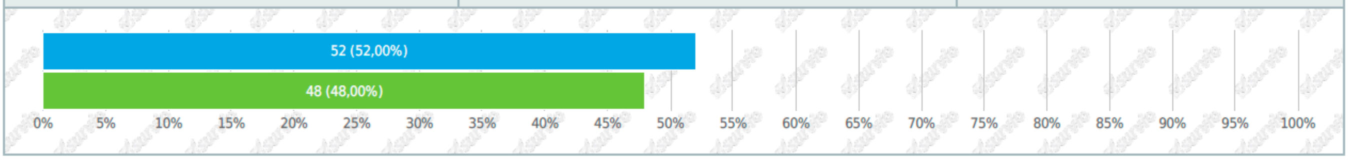


Figura 2.4: Terceira Pergunta

Observamos que, mesmo a maioria conhecendo o Geogebra, apenas um pouco mais da metade dos consultados (52 %) dizem já terem utilizado tal ferramenta.

2.5 4ª Pergunta

Como você aprendeu a usar o Software Geogebra?

Resposta	Respostas
Na Graduação, ou na Pós-Graduação, ou em cursos ofertados redes públicas e privada de ensino.	48
Sozinho	29
Pela internet em vídeos ou tutoriais	17
Não sabe usar	13
Não respondeu	1

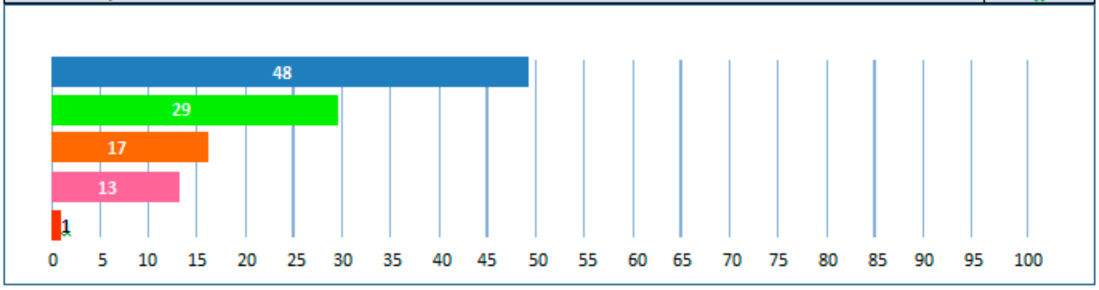


Figura 2.5: Quarta Pergunta

Essa era uma das perguntas que não possuía alternativas para marcar, ou seja, o professor redigia a sua resposta. Dos cem (100) profissionais consultados, tivemos apenas um (1) que não respondeu. Dessa forma, as respostas obtidas foram tabuladas conforme a figura 2.5.

Assim temos que quarenta e oito (48) professores disseram que aprenderam o Geogebra fazendo o curso da graduação ou da pós-graduação ou então em cursos oferecidos pelas redes públicas ou privada de ensino; vinte e nove dissram que aprenderam sozinhos; dezessete (17) com auxílio de vídeos e tutoriais na internet; treze (13) disseram que ainda não sabem usar o recurso e um (1) não respondeu ao questionamento.

2.6 5ª Pergunta

O programa facilitou o processo de ensino do conteúdo?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	55	55.00%
NÃO	4	4.00%
NUNCA UTILIZEI O PROGRAMA	41	41.00%

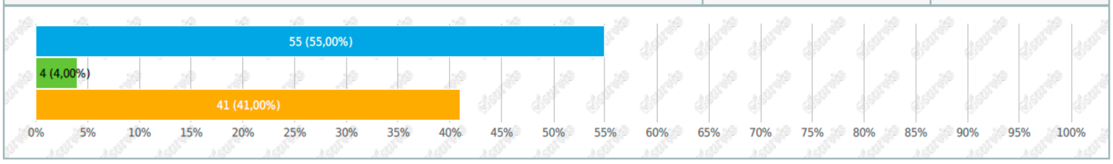


Figura 2.6: Quinta Pergunta

Nessa pergunta, tivemos quarenta e um (41) professores afirmando que nunca utilizaram o programa, quatro (4) relatam que que o Geogebra não facilitou o processo de ensino e cinquenta e dois (52) afirmam já ter usado em suas aulas o Geogebra (veja a figura 2.6).

2.7 6ª Pergunta

A visualização do conteúdo pelo software GEOGEBRA facilitou o aprendizado desse conteúdo mais do que em sala de aula no quadro?

Resposta	Respostas	Ratio
SIM	55	55.00%
NÃO	2	2.00%
NUNCA USEI O PROGRAMA, MAS CERTAMENTE SIM!	43	43.00%

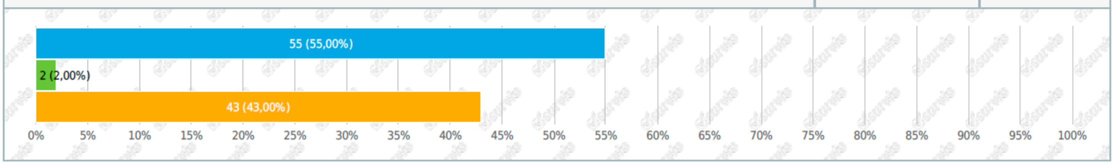


Figura 2.7: Sexta Pergunta

Agora, que pedimos para o professor comparar entre o uso do Geogebra para o ensino da matemática e o uso do quadro para mesma finalidade , temos que os mesmos cinquenta e cinco (55) professores que, na questão anterior, afirmaram que o Geogebra auxilia nessa aprendizagem e também afirmam que ela é mais significativa ao aluno, dois (2) dizem que não e quarenta e três (43) garantem ainda não terem usado o programa .

2.8 7ª Pergunta

Em qual (quais) conteúdo (s) você já usou o software GEOGEBRA?

Resposta	Respostas
Funções e Gráficos	36
Geometria Plana	35
Nunca usou o Geogebra	30
Geometria Analítica	15
Geometria Espacial	7
Trigonometria	5

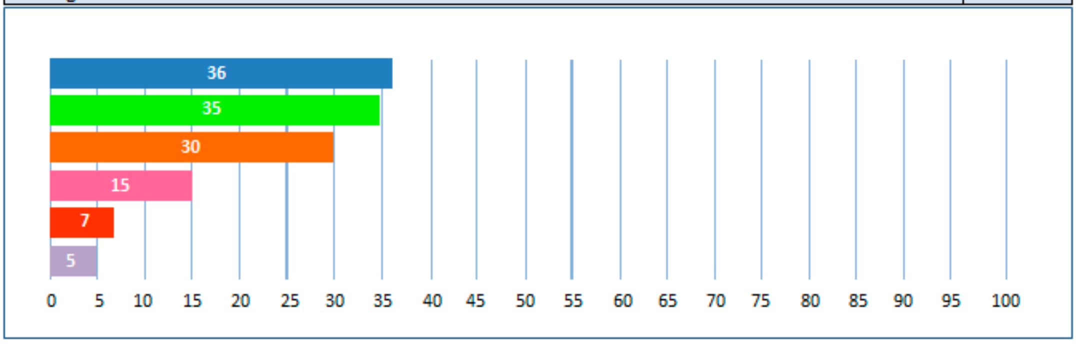


Figura 2.8: Sétima Pergunta

Essa é a segunda pergunta da consulta em que o professor respondeu com as suas palavras, então tabulamos as informações obtidas conforme a figura 2.8. Daí temos que trinta e seis professores (36) trabalharam funções e gráficos; trinta e cinco (35), geometria plana; trinta (30) disseram que nunca usaram o Geogebra; quinze (15), geometria analítica; sete (7), geometria espacial e cinco (5), trigonometria.

2.9 8ª Pergunta

Como você considera sua habilidade no manuseio do software GEOGEBRA?

Resposta	Respostas	Ratio
EXCELENTE	11	11.00%
BOM	30	30.00%
REGULAR	36	36.00%
INSUFICIENTE	23	23.00%

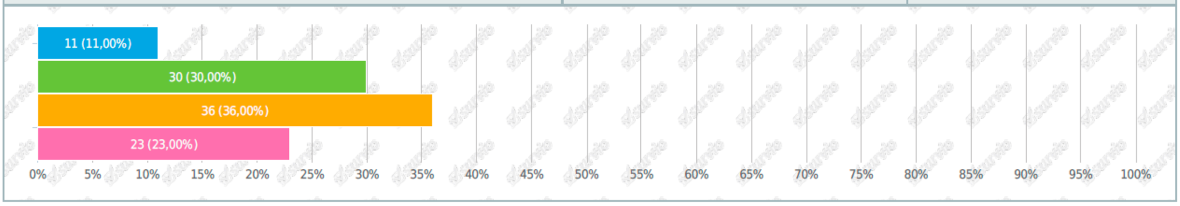


Figura 2.9: Oitava Pergunta

Observamos que 11% considera sua habilidade no manuseio do Geogebra **excelente**, 30% acha **bom**, 36% **regular** e 23% **insuficiente**.

2.10 9ª Pergunta

Quantas atividades, no software GEOGEBRA, você realizou com seus alunos nos últimos dois anos?

Resposta	Respostas	Ratio
NENHUMA	52	52.00%
UMA	2	2.00%
DUAS	7	7.00%
TRÊS	6	6.00%
MAIS DE TRÊS	33	33.00%

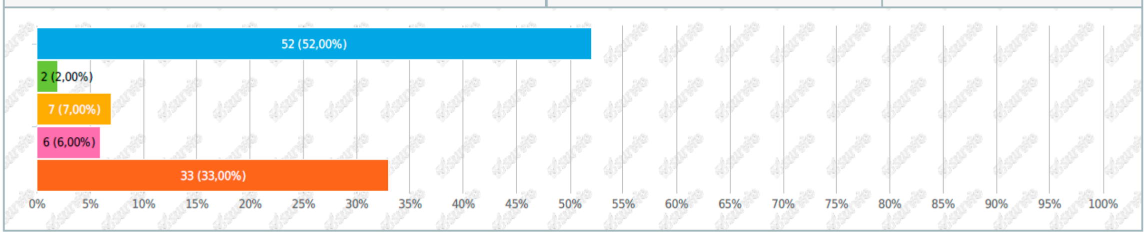
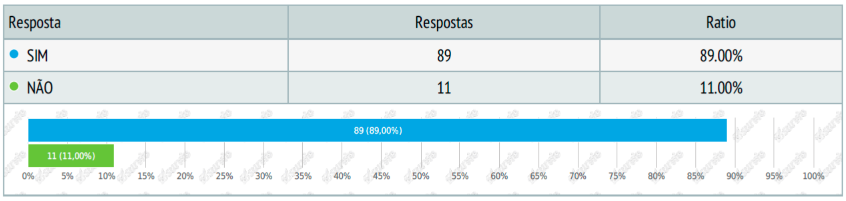


Figura 2.10: Nona Pergunta

Nessa pergunta temos que a maioria (52%) não fez nenhuma atividade com o Geogebra nos últimos dois anos, e apenas 33% fez mais de três atividades nesses últimos dois anos.

2.11 10ª Pergunta

Se o governo do estado ofertasse um curso de utilização e aperfeiçoamento desse software GEOGEBRA você participaria?



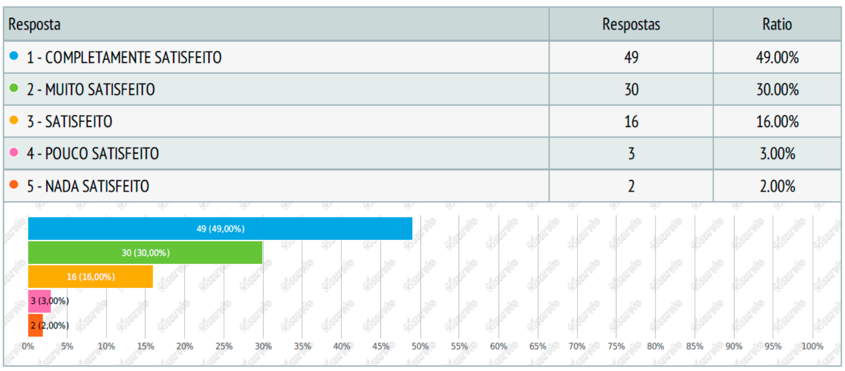
Resposta	Respostas	Ratio
SIM	89	89.00%
NÃO	11	11.00%

Figura 2.11: Décima Pergunta

Observamos que a maioria dos consultados (89%) gostaria de fazer parte de um curso de utilização e aperfeiçoamento do uso do geogebra.

2.12 11ª Pergunta

Qual seria seu grau de satisfação (de 1 a 5) em receber do governo do estado um material didático completo sobre esse software GEOGEBRA em sala de aula?



Resposta	Respostas	Ratio
1 - COMPLETAMENTE SATISFEITO	49	49.00%
2 - MUITO SATISFEITO	30	30.00%
3 - SATISFEITO	16	16.00%
4 - POUCO SATISFEITO	3	3.00%
5 - NADA SATISFEITO	2	2.00%

Figura 2.12: Décima Primeira Pergunta

Observamos que, dentre os professores consultados, 49% ficariam completamente satisfeitos em receberem um material didático sobre o uso do Geogebra em sala de aula, 30% ficariam muito satisfeitos, 16% ficariam satisfeitos e apenas 5% ficariam pouco ou nada satisfeitos.

2.13 Comentários

Observando os resultados obtidos nessa consulta, temos que, na primeira pergunta, veja a figura 2.2, encontramos 60% dos professores com mais de dez (10) anos de experiência profissional, o que nos leva a concluir que eles, se tiverem também os mesmos anos de formados, não viram, pelo menos na graduação, a utilização deste programa pois o mesmo foi criado há apenas 13 anos. Entretanto, percebemos que a maioria dos consultados (91%) diz conhecer o software (veja figura 2.3) e o terceiro questionamento nos assegura que um pouco mais da metade desses docentes já utilizou o Geogebra em classe.

Quando, na quarta pergunta, se questionou como o professor aprendeu a usar esse recurso, vale ressaltar que alguns citavam mais de uma forma de aprender a utilizar o software, como por exemplo, um dos entrevistados relatou que fez um curso ofertado pela Universidade Federal do Pará e também acessou vídeos e tutoriais na internet para compreender melhor , assim, tivemos nove (9) professores informando mais de uma maneira de acesso ao programa, daí, a soma das informações nesta pergunta ultrapassa os cem (100) professores que foram consultados.

Quando perguntamos se o programa facilitou o processo de ensino, tivemos quarenta e um (41) professores afirmando que nunca utilizaram o programa, quatro (4) relatam que que o Geogebra não facilitou o processo de ensino (veja a figura 2.6), sendo que desses últimos, dois (2) afirmam nunca ter usado o Geogebra e os outros estão entre os cinquenta e dois (52) professores que já teriam usado o programa em suas aulas (veja a figura 2.4). Logo, dos cinquenta e cinco (55) docentes que afirmam que o Geogebra ajudou na aprendizagem dos seus alunos, temos que cinquenta (50) já usaram o recurso e cinco (5) não, o que nos deixa em dúvida se tanto os dois (2) professores que nunca usaram e disseram que o programa não ajuda no processo de aprendizagem quanto os outros cinco (5) que também não usaram mas acreditam que o programa serviu para a aprendizagem, entenderam o questionamento feito.

Notamos ainda, que os docentes consultados se revelam, na sua maioria, com habilidades regular ou boa no uso do Geogebra, entretanto, não realizaram ou fizeram muito pouco com o Geogebra nos últimos dois anos e, quando perguntamos se gostariam de serem treinados para o uso em classe desse recurso e também se gostariam de receber um material de apoio sobre experiências com o Geogebra, quase que a totalidade disse que sim, o que reforça a nossa motivação em produzir o material a que nos propomos.

No próximo capítulo, iremos abordar o que é o software Geogebra, como instalar o mesmo em um computador e mostrar as suas principais ferramentas.

Capítulo 3

O GEOGEBRA

3.1 O Que é GEOGEBRA?

O GEOGEBRA é um software de matemática dinâmica criado por Markus Hohenwarter no fim de 2001 que tem como principal objetivo aprender e ensinar matemática nas escolas. É uma poderosa ferramenta com uma interface bem amigável e de fácil utilização por todas as faixas etárias. Segundo Nobriga (2010, P. 1) "Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros softwares de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar as funções, tanto via botões na Barra de ferramenta, quanto pelo Campo de Entrada", o que facilita e diversifica as maneiras de se trabalhar.

Dentre as vantagens do Geogebra, podemos destacar que é um software que nos permite construir figuras geométricas e manuseá-las livremente mantendo as suas propriedades, podemos exportar seus arquivos na extensão html e publicar em páginas da internet que possuam o objetivo primordial: a socialização do conhecimento científico. Outra grande vantagem é que podemos ter o programa rodando em diversos sistemas operacionais nos computadores e tablets, além de estar todo em Português.

3.2 Como Instalar o GEOGEBRA?

Acesse o site www.geogebra.org e baixe o instalador de acordo com o seu sistema operacional, Uma vez obtido o arquivo de instalação do GeoGebra, realize a instalação dele da seguinte forma:

1. Execute o arquivo de instalação do GeoGebra, que você acabou de salvar em seu computador.

2. Selecione o idioma e clique no botão OK.

3. Clique em AVANÇAR.

4. Após a leitura dos termos do contrato de licença, marque a caixa de verificação Aceito os termos do Contrato de Licença e clique no botão AVANÇAR.

5. Continue clicando em AVANÇAR até que a instalação comece.

6. Aguarde a instalação.

7. Clique em AVANÇAR.

8. Clique em CONCLUÍDO.

3.3 Conhecendo o GEOGEBRA

Ao iniciar o GeoGebra abrirá a janela conforme figura a seguir:

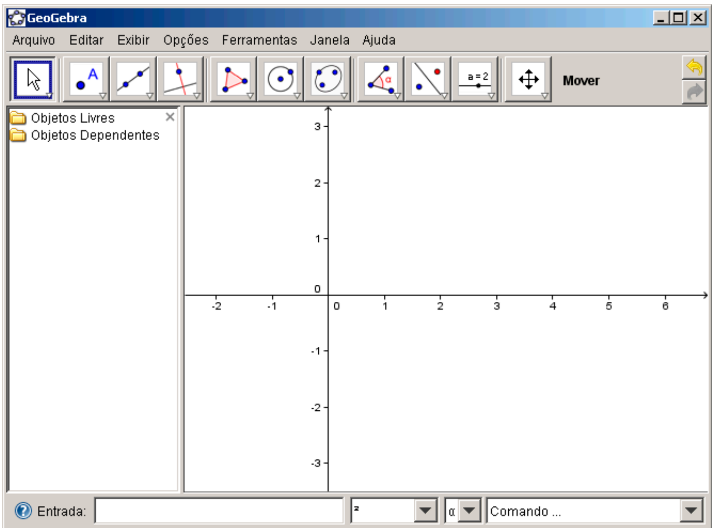


Figura 3.1: GeoGebra

Observe que a esquerda aparece a janela de algebra e a de geometria, à direita, abaixo o campo de entrada e acima, a barra de ferramentas:

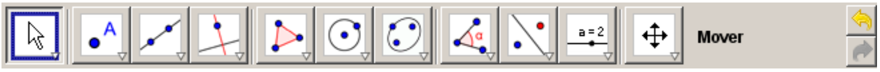


Figura 3.2: Barra de Ferramentas

Clicando no canto inferior direito de cada ícone da barra de ferramentas, abriremos uma janela que mostra algumas opções de botões.

Vamos agora definir cada botão das diversas janelas.

3.3.1 Janela 1

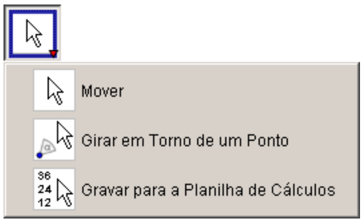


Figura 3.3: Janela 1

BOTÃO MOVER ⇛ Acionando o botão podemos mover qualquer objeto livre ou selecionar objetos.

BOTÃO GIRAR EM TORNO DE UM PONTO ⇛ Com o botão podemos girar um objeto em torno de um ângulo.

BOTÃO GRAVAR PARA PLANILHA DE CÁLCULOS ⇛ O botão copia dados para planilha de cálculos.

3.3.2 Janela 2

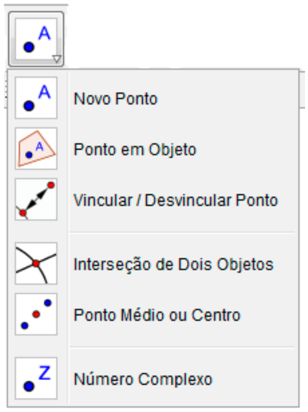


Figura 3.4: Janela 2

BOTÃO NOVO PONTO $\Rrightarrow$ Utilizando o botão podemos criar pontos clicando em qualquer lugar da janela de geometria enquanto o botão estiver acionado. Também podemos criar pontos através do campo de entrada digitando (x,y) as coordenadas e apertando enter.

BOTÃO INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS $\Rrightarrow$ O botão permite marcar interseção de dois objetos clicando no primeiro objeto e, posteriormente, no segundo.

BOTÃO PONTO MÉDIO OU CENTRO $\Rrightarrow$ Acionando clicamos no primeiro ponto e, posteriormente, no segundo para obter o ponto médio, ou em um segmento para determinar o ponto médio, ou, ainda, para determinar o centro de uma secção cônica.

3.3.3 Janela 3

Figura 3.5: Janela 3

BOTÃO RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS ⇛ A partir de dois pontos, clique neste botão e nos pontos dados para construir a reta.

BOTÃO SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS ⇛ Dois pontos marcados determinam as extremidades de um segmento. Observe que na janela algébrica aparecerá sua medida.

BOTÃO SEGMENTO COM COMPRIMENTO FIXO ⇛ Marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para ele, em uma janela que se abre automaticamente.

BOTÃO SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS ⇛ Traça-se uma semi-reta a partir do primeiro ponto dado, passando pelo segundo.

BOTÃO VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS ⇛ Cria-se dois pontos e traça-se o vetor com origem no primeiro ponto e ponto final no segundo.

BOTÃO VETOR A PARTIR DE UM PONTO ⇛ Construído um vetor, podemos construir um representante dele a partir de um ponto considerado. Para isso, marca-se um ponto (que será a origem do outro representante de v), seleciona-se esta ferramenta, clica-se sobre o vetor v já construído e, depois, sobre o ponto considerado.

3.3.4 Janela 4

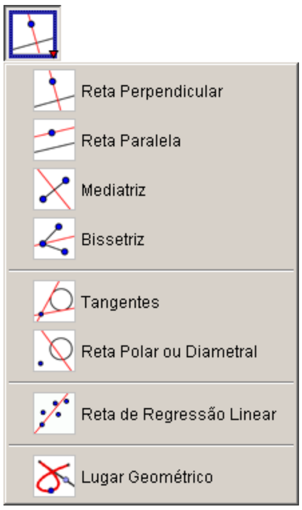


Figura 3.6: Janela 4

BOTÃO RETA PERPENDICULAR ⇛ Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma perpendicular à reta passando por tal ponto. Isso vale para segmento e semirreta também.

BOTÃO RETA PARALELA ⇛ Constrói-se uma reta e um ponto fora dela, clica-se na ferramenta e temos uma paralela à reta passando por tal ponto. Isso vale para segmento e semirreta também.

BOTÃO MEDIATRIZ ⇛ A partir de um segmento, clica-se nele e na ferramenta e ela vai criar uma perpendicular pelo ponto médio.

BOTÃO BISSETRIZ ⇛ Marcando-se três pontos A, B e C, constrói-se a bissetriz do ângulo ABC. Clicando-se sobre as duas linhas concorrentes, já traçadas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos determinados pelas linhas.

BOTÃO TANGENTES ⇛ Podemos construí-las selecionando um cônica c e um ponto A (todas as tangentes a c por A são traçadas) ou selecionando uma linha e uma cônica.

BOTÃO RETA POLAR OU DIAMETRAL ⇛ A reta polar ou diametral à uma cônica pode ser construída selecionando-se um ponto e uma cônica ou uma linha ou um vetor e uma cônica.

BOTÃO RETA DE REGRESSÃO LINEAR ⇛ A reta de regressão pode ser construída selecionando botão e selecionando um conjunto da pontos.

BOTÃO LUGAR GEOMÉTRICO ⇛ Clica-se em um objeto, como ponto e ativa a ferramenta, então, podemos conhecer o lugar geométrico deste objeto.

3.3.5 Janela 5

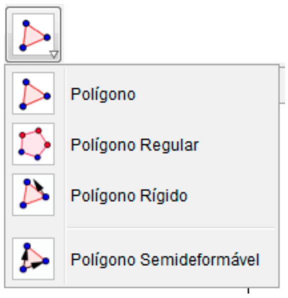


Figura 3.7: Janela 5

BOTÃO POLÍGONO ⇛ Clicando na janela de geometria, cria-se os vértices. Para fechar, clique no primeiro vértice. Na janela de álgebra é fornecida a área.

BOTÃO POLÍGONO REGULAR ⇛ Crie os dois primeiros vértices, uma janela se abrirá automaticamente perguntando a quantidade de lados do polígono.

BOTÃO POLÍGONO RÍGIDO ⇛ Idêntico ao polígono com a diferença que neste caso não é possível modificar o polígono.

POLÍGONO SEMIDEFORMÁVEL ⇛ Idêntico ao polígono com a diferença que neste caso não é possível modificar o primeiro vértice.

3.3.6 Janela 6

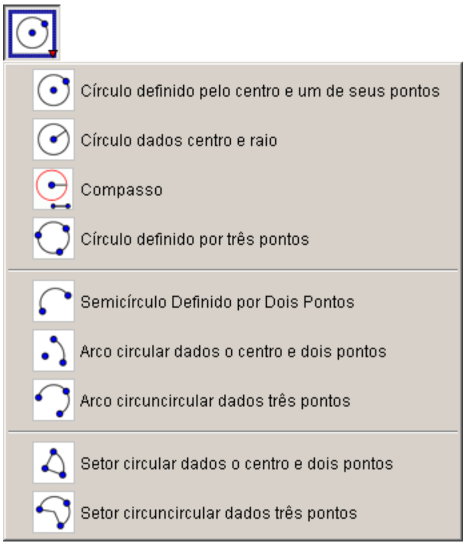
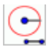


Figura 3.8: Janela 6

 BOTÃO CÍRCULO DEFINIDO PELO CENTRO E UM DE SEUS PONTOS $\Rrightarrow$ O primeiro clique na janela de geometria produz o centro e o segundo, um ponto da circunferência.

 BOTÃO CÍRCULO DADOS CENTRO E RAIO $\Rrightarrow$ Inicialmente, define-se o centro, uma janela abrirá automaticamente perguntando o raio.

 BOTÃO COMPASSO $\Rrightarrow$ Os primeiros dois pontos definem a abertura do compasso e o terceiro o centro da circunferência.

 BOTÃO CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS $\Rrightarrow$ Crie três pontos na janela de geometria.

 BOTÃO SEMICÍRCULO DEFINIDO POR DOIS PONTOS $\Rrightarrow$ Defina o ponto inicial e o final do semicirculo.

 BOTÃO ARCO CIRCULAR DADOS OS CENTROS E DOIS PONTOS $\Rrightarrow$ O primeiro ponto define o centro e os demais início e fim do semicirculo; no final é indicado o comprimento do arco.

 BOTÃO ARCO CIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS $\Rrightarrow$ Selecione os três pontos que define o arco. Ao final, é indicado o comprimento do arco.

 BOTÃO SETOR CIRCULAR DADOS O CENTRO E DOIS PONTOS $\Rrightarrow$ Crie o centro e os pontos do setor. Ao final, será indicado, a área do setor.

 BOTÃO SETOR CIRCULAR DADOS TRÊS PONTOS $\Rrightarrow$ Neste caso, os três pontos pertencem ao setor.

3.3.7 Janela 7

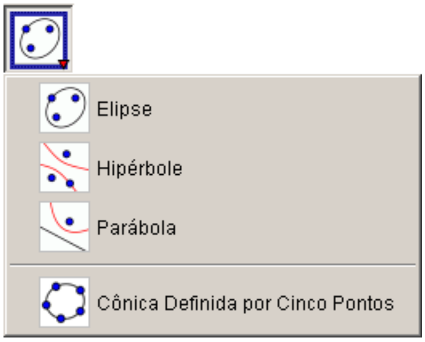
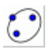


Figura 3.9: Janela 7

 BOTÃO ELIPSE ⇛ Defina os focos e um ponto da elípse, na janela de álgebra será indicada a equação da cônica.

 BOTÃO HIPÉRBOLE ⇛ Defina os focos e um ponto da hipérbole, na janela de álgebra será indicada a equação da cônica.

 BOTÃO PARÁBOLA ⇛ Selecione o foco e depois a reta diretriz, na janela de álgebra será indicada a equação da cônica.

 BOTÃO CÔNICA DEFINIDA POR CINCO PONTOS ⇛ Crie os cinco pontos que pertencem à cônica. O Geogebra indicará a cônica associada qualquer que seja ela.

3.3.8 Janela 8

Figura 3.10: Janela 8

 BOTÃO ÂNGULO ⇛ Com tal ferramenta, podemos traçar ângulo entre três pontos; entre dois segmentos; entre duas retas (ou semirretas); entre dois vetores ou ainda interiores de um polígono.

BOTÃO ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA ⇛ Marca-se dois pontos e digita-se a medida desejada para o ângulo em uma janela que aparece automaticamente.

BOTÃO DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO ⇛ Essa ferramenta fornece, na janela algébrica, a distância entre dois pontos; duas linhas ou entre um ponto e uma linha.

BOTÃO ÁREA ⇛ Determina a área da figura selecionada.

BOTÃO INCLINAÇÃO ⇛ Indica a inclinação da reta.

{1,2} BOTÃO CRIAR LISTA ⇛ Aperte e arraste para selecionar objetos para uma lista.

3.3.9 Janela 9

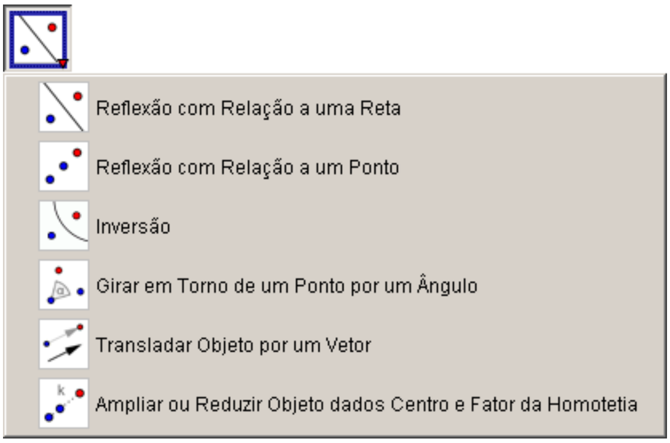


Figura 3.11: Janela 9

BOTÃO REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA ⇛ Com esta ferramenta, faz-se reflexão de um objeto em relação a uma reta.

BOTÃO REFLEXÃO COM RELAÇÃO A UM PONTO ⇛ Reflete um ponto em relação a outro.

BOTÃO INVERSÃO ⇛ Faz reflexão em relação a um círculo.

BOTÃO GIRAR EM TORNO DE UM PONTO POR UM ÂNGULO ⇛ Esta ferramenta gira um objeto em relação a um ponto.

BOTÃO TRANSLADAR OBJETO POR UM VETOR ⇛ Esta ferramenta translada objetos.

BOTÃO AMPLIAR OU REDUZIR OBJETOS DADOS CENTRO E FATOR DE HOMOTETIA ⇛ Crie o centro e, depois, na janela que se abrirá, digite o fator de ampliação.

3.3.10 Janela 10

Figura 3.12: Janela 10

 BOTÃO INSERIR TEXTO ⇛ Permite criar uma caixa de texto.

 BOTÃO INSERIR IMAGEM ⇛ Insere imagens na janela.

 BOTÃO CANETA ⇛ Realiza traços livres.

 BOTÃO FUNÇÃO À MÃO LIVRE ⇛ Descrever uma função desenhando seu grafico.

 BOTÃO RELAÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS ⇛ Conhecer relação entre dois objetos.

 BOTÃO CALCULADORA DE PROBABILIDADES ⇛ Calcular probabilidades.

 BOTÃO INSPETOR DE FUNÇÕES ⇛ Determina elementos da função como máximo, mínimo, raiz e etc...

3.3.11 Janela 11

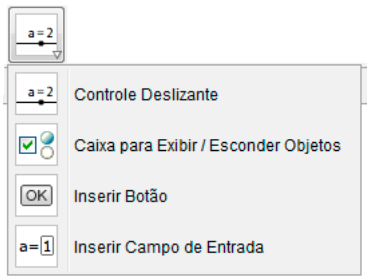


Figura 3.13: Janela 11

 BOTÃO CONTROLE DESLIZANTE ⇛ Cria um controle que permite modificar valores de uma variável. Clique na tela e na janela que abrirá automaticamente, digite os valores máximo e mínimo, bem como o incremento do número.

BOTÃO CAIXA PARA EXIBIR/ESCONDER OBJETOS ⇛ Cria um botão para esconder, ou exibir, objetos ou lista de objetos.

BOTÃO INSERIR BOTÃO ⇛ Esta ferramenta posibilita a criação de um botão para ações programáveis.

BOTÃO INSERIR CAMPO DE ENTRADA ⇛ Possibilita a criação de um campo de entrada para um valor.

3.3.12 Janela 12

Figura 3.14: Janela 12

BOTÃO DESLOCAR EIXOS ⇛ Botão que permite mover a janela de geometria.

BOTÃO AMPLIAR ⇛ Aumentar o zoom.

BOTÃO REDUZIR ⇛ Diminuir o zoom.

BOTÃO EXIBIR/ESCONDER OBJETOS ⇛ Exibir ou esconder objetos.

A A BOTÃO EXIBIR/ESCONDER RÓTULOS ⇛ Exibir ou esconder o nome (rótulo) do objeto.

BOTÃO COPIAR ESTILOVISUAL ⇛ Copiar o estilo visual.

BOTÃO APAGAR OBJETOS ⇛ Apagar objetos.

No próximo capítulo, iremos abordar os tópicos da geometria plana relacionadas a ângulos, triângulo e quadriláteros.

Capítulo 4

Tópicos da Geometria Plana

4.1 Noções preliminares da geometria plana

Neste capítulo, iniciamos o estudo de tópicos da Geometria Plana apresentanso os principais axiomas, definições e observações relacionadas a ponto, reta, plano, segmento de reta e ângulos, que serão de suma importância para as abordagens dos assuntos desse capítulo. Para Freitas (2013), este ponto de partida é o alicerce que os alunos irão precisar para compreenderem demonstrações futuras mais elaboradas, o que os torna primordial para iniciarmos o nosso estudo. Baseado em Iezzi(2009) e Neto(2012) vamos desenvolver todo o referencial teórico que servirá como referência para as seções de ensino no Geogebra propostas nesse trabalho. Já as seções de ensino tiveram com suporte o referencial de Sá (2009) e Sá (2006)

4.1.1 Ponto, reta e plano

Axioma 4.1 (Da existência em relação à reta)**.** *Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.*

Axioma 4.2 (Da existência em relação ao plano)**.** *Num plano, há infinitos pontos.*

Observação 4.1.1. *Dados dois pontos A e B, eles podem ser coincidentes (mesmo ponto com o os dois nomes: A e B) ou distintos.*

Observação 4.1.2. *Dado um ponto P e uma reta r, há duas condições possíveis, o Ponto P pertence a r ou o ponto P não está na reta r.*

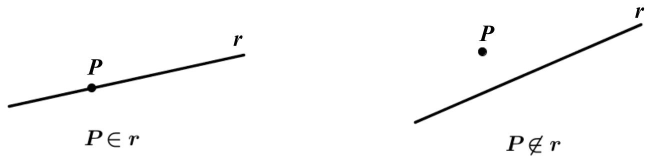


Figura 4.1: Posições entre ponto e reta

Axioma 4.3 (Da determinação em relação à reta)**.** *Por dois pontos distintos de um plano, passa uma única reta.*

Axioma 4.4 (Da determinação em relação ao plano)**.** *Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.*

Axioma 4.5 (Da inclusão)**.** *Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então, a reta está contida nesse mesmo plano.*

Observação 4.1.3. *Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum(veja figura 4.2)*

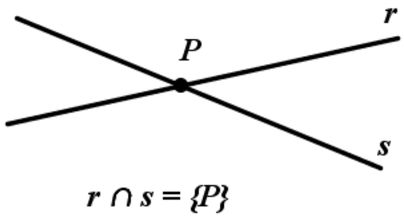


Figura 4.2: Retas concorrentes

4.1.2 Segmento de reta

Dados os pontos A, B e C, a noção de *estar entre* obedece aos seguintes axiomas:

Axioma 4.6. *Se C está entre A e B, então A, B e C são colineares.*

Axioma 4.7. *Se C está entre A e B, então A, B e C são pontos distintos.*

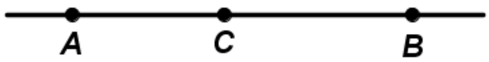
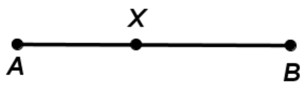


Figura 4.3: Noção estar entre

Axioma 4.8. *Se C está entre A e B, então A não está entre C e B e nem B está entre A e C.*

Axioma 4.9. *Seja* **r** *uma reta qualquer e A e B dois pontos distintos de r, existe então, um ponto C que está entre A e B.*

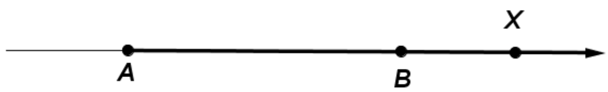
Definição 4.1.1 (Segmento de reta)**.** *Dados dois pontos distintos, o conjunto formado por esses pontos e por todos os demais que estão entre eles é chamado de* segmento de reta*.*



$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X | X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

Figura 4.4: Segmento de reta $\overline{AB}$

Definição 4.1.2 (Semirreta)**.** *Dados dois pontos distintos A e B, a reunião de todos os pontos do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tal que B esteja entre A e X é a semirreta $\overrightarrow{AB}$.*



$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X | B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

Figura 4.5: Semirreta AB

Definição 4.1.3 (Segmentos consecutivos)**.** *Dois segmentos de reta são consecutivos se. e somente se, tiverem uma extremidade comum.*

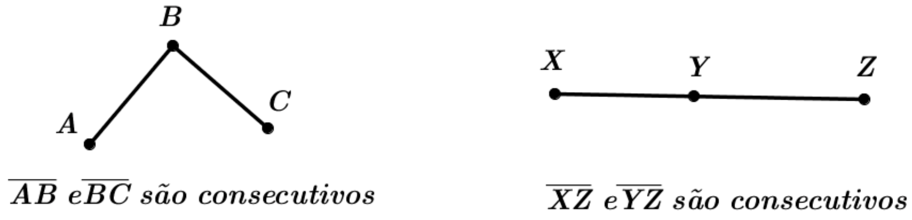


Figura 4.6: Segmentos consecutivos

Definição 4.1.4 (Segmentos colineares)**.** *Dois segmentos de reta são colineares se. e somente se, estiverem numa mesma reta.*

Figura 4.7: Segmentos colineares

Definição 4.1.5 (Segmentos adjacentes)**.** *Dois segmentos de reta são adjacentes se. e somente se, possuem apenas uma extremidade em comum.*

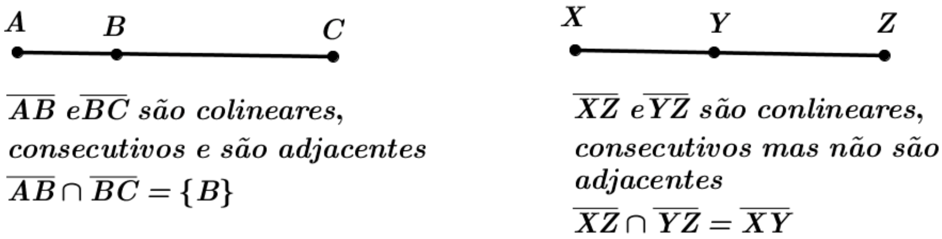


Figura 4.8: Segmentos adjacentes

Definição 4.1.6 (ponto médio de um segmento)**.** *Dado um segmento $\overline{AB}$ existe um único ponto M que está entre A e B tal que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$*

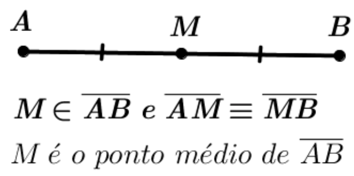


Figura 4.9: Ponto médio de um segmento

Observação 4.1.4 (Unicidade do ponto médio)**.** *O ponto médio de um segmento é único*

Demonstração Dados pontos distintos C e D, vamos supor que eles sejam pontos médios de um mesmo segmento de reta $\overline{AB}$. Assim teríamos:

$$\overline{AC} \equiv \overline{CB} \text{ e } \overline{AD} \equiv \overline{DB}$$

Observe:
Considerando agora C como ponto médio,

- Se C está entre A e D, então $\overline{AD} > \overline{AC}$;
- Se D está entre C e B, então $\overline{CB} > \overline{DB}$.

Assim teríamos que $\overline{AD} > \overline{AC} \equiv \overline{CB} > \overline{DB}$, o que é um absurdo, logo o ponto médio de $\overline{AB}$ é único.

4.2 Ângulos

Axioma 4.10 (da separação dos pontos de um plano)**.** *Uma reta r de um plano α separa este plano em dois conjuntos α' e α''. Cada um desses conjuntos é chamado de semiplano aberto. A reunião da reta r com cada um dos conjuntos é chamado de semiplano e α' e α'' são semiplanos opostos.*

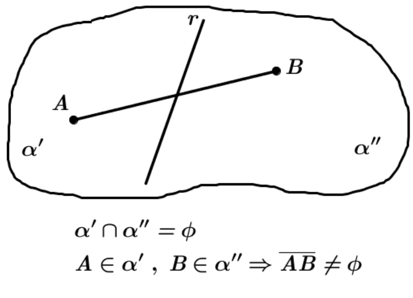


Figura 4.10: Semiplanos

Definição 4.2.1 (Ângulo)**.** *Ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem.*

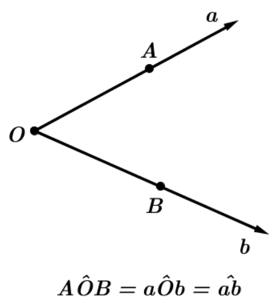


Figura 4.11: Ângulo

$$A\widehat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

O ponto O é o vértice do ângulo $A\widehat{O}B$

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo

Observação 4.2.1. *O interior de um ângulo $A\widehat{O}B$ é a interseção de dois semiplanos abertos α_1 e β_1. A reunião dos pontos internos do ângulo ($\alpha_1 \cap \beta_1$) com as semirretas que formam os lados do ângulo ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$)é o que chamamos de ângulo completo ou setor angular. (Ver figura 4.12)*

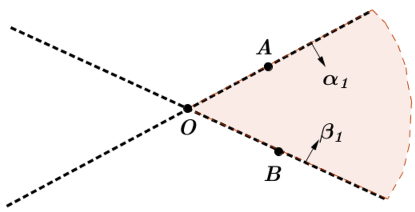


Figura 4.12: Região interna do ângulo $A\widehat{O}B$

Definição 4.2.2 (Ângulos consecutivos)**.** *Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, possuem um lado em comum*

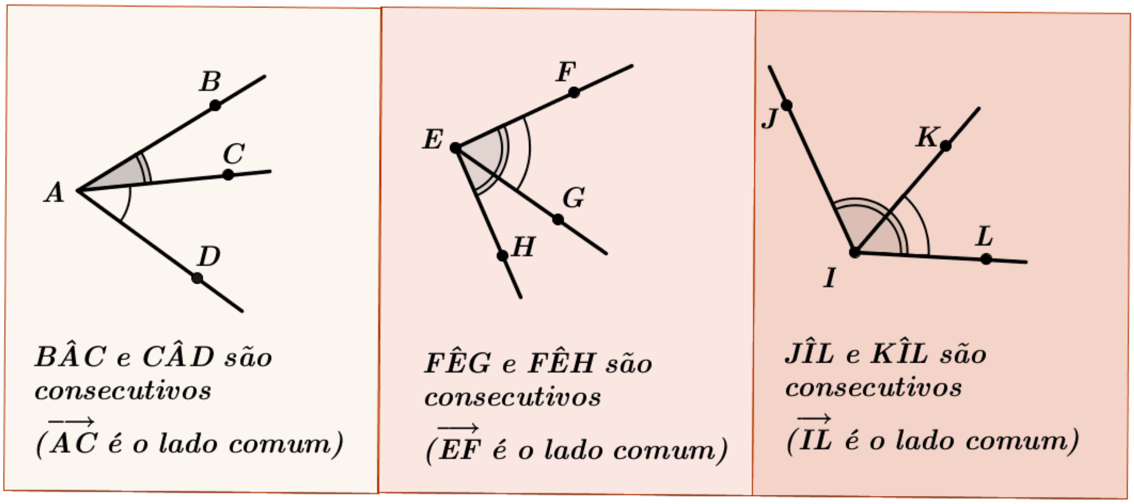


Figura 4.13: Ângulos consecutivos

Definição 4.2.3 (Ângulos adjacentes)**.** *Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não têm pontos internos comuns.*

Na figura acima o único par de ângulos adjacentes são $B\widehat{A}C$ *e* $C\widehat{A}D$

1ª Atividade no GEOGEBRA - Ângulos consecutivos

Objetivo: Reconhecer ângulos consecutivos

Abra o **GEOGEBRA**.

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Com a ferramemta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) crie, no lado esquerdo da **Janela de Visualização**, três segmentos de mesma origem: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e marque os ângulos $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{A}D$. Você deve, inicialmente, clicar em um ponto de um dos lados, depois no vértice e por fim no ponto pertencente ao outro lado, sempre no sentido anti horário.

Coloque o cursor do mouse sobre a marcação do ângulo $B\widehat{A}C$ e clique com o botão direito, irá abrir uma janela, então clique em *Propriedades...*. Uma nova janela se abrirá e você fará as seguintes mudanças:

- Em cor, será azul e transparência 25

- Em estilo mude o tamanho para 60

Agora, na parte central da **Janela de Visualização**, trace com o auxílio da ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) os segmentos $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{EH}$

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e marque os ângulos $F\widehat{E}H$ e $G\widehat{E}H$

Coloque o cursor do mouse sobre a marcação do ângulo $F\widehat{E}H$ e clique com o botão direito, irá abrir uma janela, então clique em *Propriedades...*. Uma nova janela se abrirá e você fará as seguintes mudanças:

- Em cor, será azul
- Em estilo mude o tamanho para 60

Por fim, no lado esquerdo da **Janela de Visualização**, trace com o auxílio da ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) os segmentos $\overline{IJ}$, $\overline{IK}$, $\overline{IL}$ e $\overline{IM}$

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e marque os ângulos $J\widehat{I}K$ e $L\widehat{I}M$

Você deve obter a seguinte imagem no GEOGEBRA.

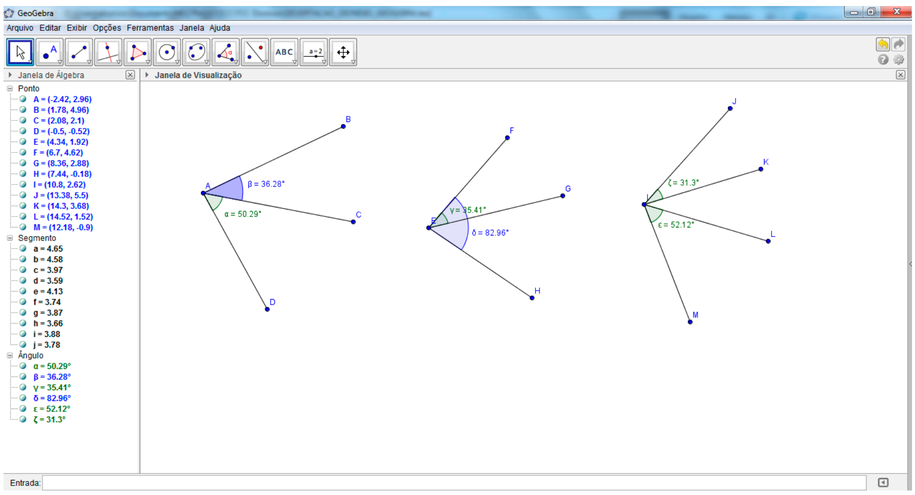


Figura 4.14: 1ª Atividade no Geogebra

Observando três pares de ângulos desenhados, preencha a tabela abaixo:

Pares de ângulos	Lado comum entre os ângulos	Possui pontos internos comuns?
$B\widehat{A}C$ e $C\widehat{A}D$		( ) SIM ( ) NÃO
$F\widehat{E}G$ e $F\widehat{E}H$		( ) SIM ( ) NÃO
$J\widehat{I}K$ e $L\widehat{I}M$		( ) SIM ( ) NÃO

Sabendo que dois ângulos distintos são consecutivos quando possuem um lado em comum, determine qual ou quais pares de ângulos, na tabela acima, são consecutivos?

2ª Atividade no GEOGEBRA - Ângulos adjacentes

Objetivo: Reconhecer ângulos adjacentes

Sabendo que dois ângulos consecutivos são **adjacentes** se não possuírem pontos internos comuns, assim, observando os ângulos e a tabela preenchida na atividade anterior reconheça qual o par de ângulos que são adjacentes.

Definição 4.2.4 (Ângulos opostos pelo vértice - opv)**.** *Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um desses ângulos são semirretas opostas aos lados do outro. Notemos que duas retas concorrentes formam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.*
Ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes

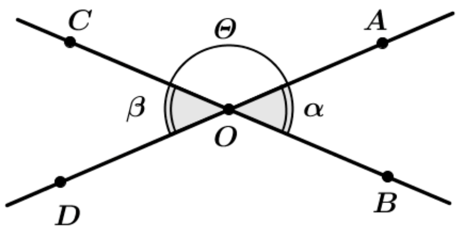


Figura 4.15: Ângulos opostos pelo vértice

Demonstração Na figura 4.2, vemos que os ângulos $A\widehat{O}B \doteq \alpha$ e $C\widehat{O}D \doteq \beta$ são opostos pelo vértice. O mesmo ocorre com o par de ângulos $A\widehat{O}C \doteq \theta$ e $B\widehat{O}D$
Observe que $\alpha + \theta = 180°$ (1) e $\beta + \theta = 180°$ (2)
Subtraindo (2) de (1), obtemos $\alpha - \beta = 0$, logo $\alpha = \beta$, ou seja, ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

3ª Atividade no GEOGEBRA - Ângulos opostos pelo vértice

Objetivo: Determinar as relações existentes entre os ângulos formados por duas retas concorrentes

Abra o **GEOGEBRA**.

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Com a ferramemta ***RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3), crie duas retas concorrentes

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2) da seguinte forma: clique uma vez em cada reta, surgirá assim o ponto E na interseção das retas

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e marque os ângulos $B\widehat{E}D = \alpha$, $D\widehat{E}A = \beta$, $A\widehat{E}C = \gamma$ e $C\widehat{E}B = \delta$ tomando os mesmos cuidados que tivemos no momento de marcar os ângulos da 1ª tarefa no Geogebra

Dessa forma, você deverá obter a seguinte imagem no Geogebra.

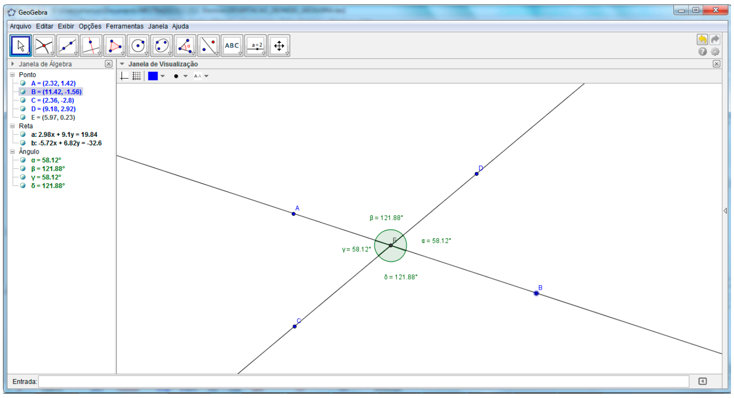


Figura 4.16: 3ª Atividade no Geogebra

Com o auxílio da ferramenta ***MOVER*** (janela 1) clique nos pontos A, B, C e D manipulando assim a figura, para que o ângulo $B\widehat{E}D = \alpha$ tenha as medidas indicadas na tabela abaixo.

A cada medida de $B\widehat{E}D = \alpha$ preencha a linha referente na tabela.

$B\widehat{E}D = \alpha$	$D\widehat{E}A = \beta$	$A\widehat{E}C = \gamma$	$C\widehat{E}B = \delta$
$30°$			
$50°$			
$60°$			
$90°$			
$110°$			

Observando a figura 4.16 e os valores obtidos na tabela acima, responda:

- Quais são os pares de ângulos opostos pelo vértice nessa figura?

- Quanto às medidas de dois ângulos opostos pelo vértice, o que você percebeu?

- Dentre os quatro ângulos marcados na figura, quando você soma as medidas de dois ângulos adjacentes que valor você encontra?

- De acordo com a resposta acima, a que conclusão você chega?

Definição 4.2.5 (Bissetriz de um ângulo)**.** *A bissetriz de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em ângulos congruentes.*
Cada ângulo possui uma, e somente uma, bissetriz.

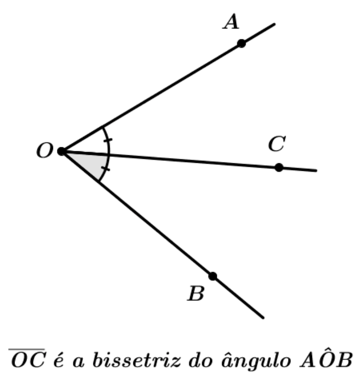


Figura 4.17: Bissetriz de um ângulo

Demonstração Sejam as semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, com $\overrightarrow{OC} \neq \overrightarrow{OD}$, bissetrizes do ângulo $A\widehat{O}B$, logo teremos:

- se $\overrightarrow{OC}$ for interna ao ângulo $A\widehat{O}D$, então $A\widehat{O}D > A\widehat{O}C$

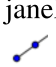
- se $\overrightarrow{OD}$ for interna ao ângulo $B\widehat{O}C$, então $B\widehat{O}C > B\widehat{O}D$

Daí concluimos que $A\widehat{O}D > A\widehat{O}C \equiv B\widehat{O}C > B\widehat{O}D$ que é absurdo, logo a bissetriz de um ângulo é única.

4ª Atividade no GEOGEBRA - Bissetriz de um ângulo

Objetivo: Verificar quais as relações existentes entre os ângulos formados pela bissetriz

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

 Com a ferramemta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3), crie duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) da seguinte forma: clique no ponto C, no ponto A e no ponto B, respectivamente

Com a ferramenta ***BISSETRIZ*** (janela 4) marque nessa ordem os pontos C, A e B

Use a ferramenta ***NOVO PONTO*** (janela 2) e marque o ponto D sobre a bissetriz de $B\hat{A}C$da seguinte forma: clique no ponto C, no ponto A e no ponto D, assim você determina a medida do ângulo $B\hat{A}C$

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) da seguinte forma: clique no ponto C, no ponto A e no ponto D, assim, você determina a medida do ângulo $B\hat{A}C$

Coloque o cursor do mouse sobre a marcação do ângulo $B\widehat{A}C$ e clique com o botão direito, irá abrir uma janela, então, clique em *Propriedades...*. Uma nova janela se abrirá e você fará as seguintes mudanças:

- Em cor, será vermelho e transparência 25%.
- Em estilo mude tamanho para 60,

Faça o mesmo para o ângulo $B\widehat{A}D$ só mudando os valores das alterações conforme instruções abaixo:

- Em cor, será verde e transparência 25%.
- Em estilo mude tamanho para 80.

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, ter a seguinte imagem no Geogebra.

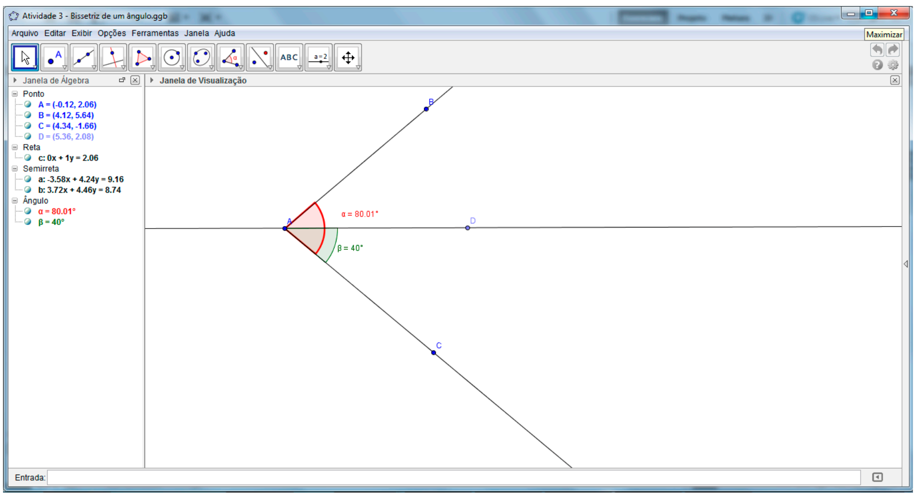


Figura 4.18: 4ª Atividade no Geogebra

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1) selecione ou o ponto B ou o ponto C para movimentá-los até que a medida do ângulo $B\widehat{A}C$ seja as indicadas na tabela abaixo

$B\widehat{A}C$	$B\widehat{A}D$	$D\widehat{A}C$
$80°$		
$90°$		
$100°$		
$150°$		

Agora, responda as seguintes perguntas:

- Qual é a relação entre as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}D$?
- Qual é a relação entre as medidas dos ângulos $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$?
- Ao movimentar o ponto B, mudando assim a medida do ângulo $B\hat{A}C$ as relações acima se alteram?
- Defina o que é uma bissetriz de um ângulo,

Definição 4.2.6 (Ângulos complementares)**.** *Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas for* 90^o.

Definição 4.2.7 (Ângulos suplementares)**.** *Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas for* 180^o.

4.3 Triângulos

4.3.1 Conceitos, elementos e classificação

Definição 4.3.1. *Dado um plano α, sejam os pontos não colineares $A, B \text{ e } C \in \alpha$, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ determinam o triângulo ABC como vemos na figura a seguir.*

Indicamos o triângulo ABC como $\triangle ABC$ ou $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

4.3.2 Elementos

Baseados na figura 4.3.1 temos que:

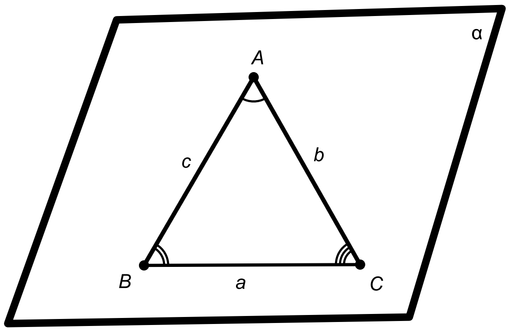


Figura 4.19: Triângulo ABC

Vértices: Os pontos A , B e C são os vértices do $\triangle ABC$

Lados: Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do $\triangle ABC$

Ângulos Internos: Os ângulos $B\widehat{A}C$ ou $\widehat{A}$, $A\widehat{B}C$ ou $\widehat{B}$ E $A\widehat{C}B$ ou $\widehat{C}$ são os ângulos internos, ou simplesmente, os ângulos do $\triangle ABC$

4.3.3 Classificação

- Quanto às medidas de seus lados:
  - Equiláteros: quando possuem os três lados congruentes
  - Isósceles: quando possuem dois lados congruentes
  - Escaleno: quando dois lados quaisquer não sao congruentes
- Quanto às medidas de seus ângulos:
  - Acutângulo: quando todos os seus ângulos são agudos (menores que 90○)
  - Retângulo: quando um de seus ângulos for reto (medir 90○)
  - Obtusângulo: quando um de seus ângulos for obtuso (maior que 90○)

5^a Atividade no GEOGEBRA - Triângulo equilátero

Objetivo: Identificar as principais características do triângulo equilátero

Abra o **GEOGEBRA**.

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Com a ferramemta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3), crie, no Geogebra, o segmento $\overline{AB}$

Use a ferramenta ***CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS*** (janela 5) da seguinte forma: primeiramente trace a circunferência de centro em A passando pelo ponto B, depois, trace uma nova circunferência com centro em B passando por A

Com a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS***(janela 2) marque as duas circunferências, irão aparecer dois pontos de interseção: os ponto C e D

Com a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Com a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela12), apague as duas circunferências e o ponto D

Com a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8), marque os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Com a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) depois de selecionada, marque os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ para medir o ângulo $\widehat{B}$, faça a mesma coisa para medir os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, ter a seguinte imagem no Geogebra.

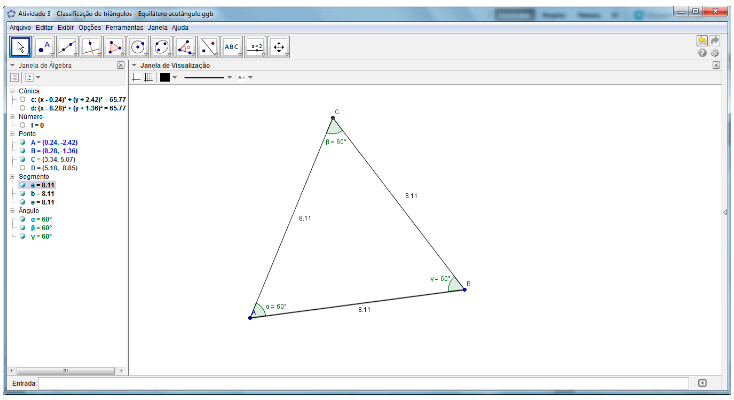


Figura 4.20: 5ª Atividade no Geogebra

Após realizar todas as tarefas acima, manipule o triângulo ABC ampliando-o e reduzindo-o de tal sorte que você obtenha as medidas do lado $\overline{AB}$ indicadas na tabela abaixo. A cada medida encontrada, preencha a linha correspondente da tabela

$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$B\widehat{A}C$	$A\widehat{C}B$	$C\widehat{B}A$
4					
5					
6					
7					

Agora, analisando a imagem 4.3.3 e a tabela acima, responda às seguintes questões

- O que você percebeu quanto às medidas dos lados desse triângulo quando ampliamos ou reduzimos a imagem?
- O que você percebeu quanto as medidas dos ângulos internos desse triângulo quando ampliamos ou reduzimos a imagem?
- Como se pode classificar o triângulo quanto à medida de seus ângulos?
- Defina o que é um triângulo equilátero?

4.3.4 Congruência de Triângulos

Definição 4.3.2. *Dois triângulos são congruentes quando se torna possível fazer uma correspondência entre seus vértices de tal forma que os lados homólogos entre os triângulos são congruentes e o mesmo ocorre com as medidas dos ângulos correspondentes.*

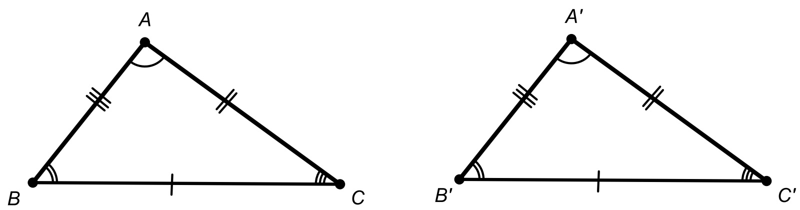


Figura 4.21: Congruência de Triângulos

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & & \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & e & \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & & \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{array}$$

4.3.5 Casos de congruência

Acima, quando definimos dois triângulos congruentes, avaliamos seis condições necessárias, ou seja, três congruências entre os lados e três entre os ângulos. Agora, vamos estudar critérios de congruências, ou seja, quais são as condições mínimas para podermos afirmar que dois triângulos são congruentes.

1º caso - LAL - postulado

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então, eles são congruentes.

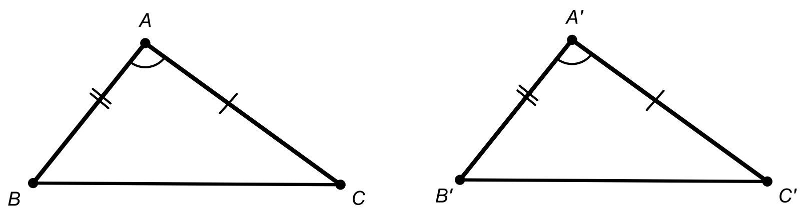


Figura 4.22: Caso de Congruência - LAL

$$\begin{array}{rcl} \overline{AB} & \equiv & \overline{A'B'} \\ \widehat{A} & \equiv & \widehat{A'} \\ \overline{AC} & \equiv & \overline{A'C'} \end{array} \quad \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \implies \begin{array}{rcl} \widehat{B} & \equiv & \widehat{B'} \\ \overline{BC} & \equiv & \overline{B'C'} \\ \widehat{C} & \equiv & \widehat{C'} \end{array}$$

6ª Atividade no GEOGEBRA - Congruência de Triângulos

Objetivo: Demonstrar a congruência triângulos

Abra o **GEOGEBRA**.

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Com a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11), crie o que será o valor da medida do lado $\overline{AB}$ do $\triangle ABC$.

No preenchimento dos dados deste controle, faça as alterações mostradas na figura 4.23

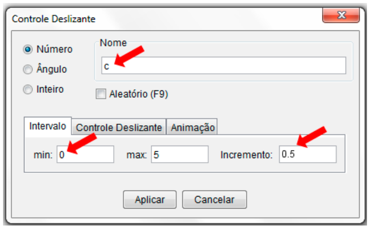
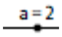
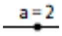


Figura 4.23: Dados do controle deslizante c



Com a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11), crie o que será o valor da medida do ângulo $\widehat{A}$ do $\triangle ABC$.

No preenchimento dos dados deste controle, faça as alterações mostradas na figura 4.24.



Com a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE***, (janela 11) crie o que será o valor da medida do

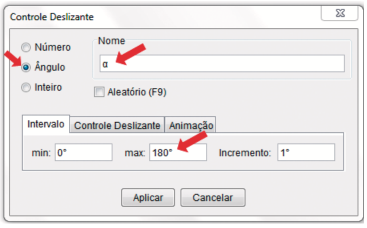


Figura 4.24: Controle deslizante do ângulo A

lado $\overline{AC}$ do $\triangle ABC$

No preenchimento dos dados deste controle, faça as alterações mostradas na figura 4.25

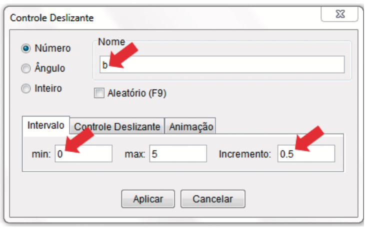


Figura 4.25: Dados do controle deslizante b


Com a ferramenta ***SEGMENTO COM COMPRIMENTO FIXO*** (janela 3), crie o segmento $\overline{AB}$ de comprimento c.


Com a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA*** (janela 8), crie o ângulo $B\widehat{A}B'$ de amplitude α.

Com a ferramenta ***RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3), crie a reta $\overleftrightarrow{AB'}$.

Com a ferramenta ***CÍRCULO DADOS CENTTRO E RAIO*** (janela 6), crie uma circunferência de centro em A e raio medindo b.

A reta $\overleftrightarrow{AB'}$ e a circunferência de centro em A se interceptam em dois pontos, ative a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2) e clique sobre a circunferência e a reta. Aparecerão os pontos C e D

Com a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), clique sobre o pornto D com o botão direito do mouse e selecione ***RENOMEAR***, renomeie o ponto com a letra C, você verá que o antigo ponto C passará a ser escrito como C_1.

A circunferência, a reta $\overleftrightarrow{AB'}$ e os pontos B' e C_1 não precisam mais aparecer. Para que eles desapareçam, ative a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela 12) e clique sobre os objetos citados.

Com a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3), faça um segmento que una os pontos A e C e posteriormente B e C.

Com a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMETO OU PERÍMETRO*** (janela 8) ativada, clique sobre cada um dos lados do $\triangle ABC$.

Com a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) ativada, marque os ângulos $A\widehat{C}B$ e $C\widehat{B}A$.

Agora, refaça todo o procedimento e crie um triângulo $A'B'C'$. Daí teremos a seguinte imagem no Geogebra

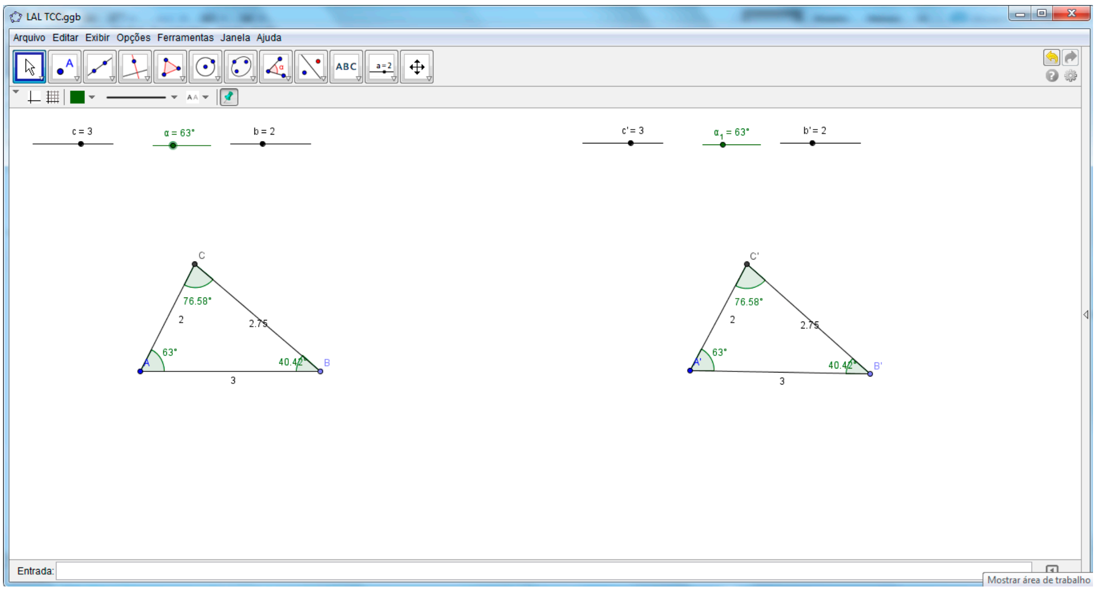


Figura 4.26: 6ª Atividade no Geogebra

Como você já percebeu, em cada triângulo, pode-se alterar as medidas de dois de seus lados e do ângulo compreendido entre eles. Veja a tabela abaixo.

Controle deslizante	Representa a medida do
c	lado $\overline{AB}$
α	ângulo $\widehat{A}$
b	lado $\overline{AC}$
c'	lado $\overline{A'B'}$
α_1	ângulo $\widehat{A'}$
b'	lado $\overline{A'C'}$

Agora, manipulando os controles deslizantes, preencha a tabela abaixo:

$\overline{AB}$	$\widehat{A}$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	$\overline{A'B'}$	$\widehat{A'}$	$\overline{A'C'}$	$\overline{B'C'}$	$\widehat{B'}$	$\widehat{C'}$
3	$63°$	2				3	$63°$	2			
2.5	$48°$	3.5				2.5	$48°$	3.5			
4.5	$120°$	4.5				4.5	$120°$	4.5			
5	$90°$	2				4	$90°$	2			
3	$60°$	4				3	$60°$	3			
5	$40°$	5				5	$40°$	4.5			

Analise linha a linha, na tabela acima os valores que você encontrou. a que conclusão você chegou?

Teorema 4.1 (Do triângulo isósceles I)**.** *"Se um triângulo tem dois lados congruentes (triângulo isósceles), então, os ângulos opostos a esses lados também são congruentes"*

Demonstração Seja por hipótese o triângulo ABC onde $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$

Vamos considerar, assim, os triângulos ABC e ACB de tal sorte que A, B e C do $\triangle ABC$ são correspondentes a A, C e B do $\triangle ACB$, nessa ordem. Daí temos que

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{AB} & \equiv & \overline{AC} \\ B\widehat{A}C & \equiv & C\widehat{A}B \\ \overline{AC} & \equiv & \overline{AB} \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle ABC \;\Rightarrow\; \widehat{B} \equiv \widetilde{C}$$

7ª Atividade no GEOGEBRA - Triângulos isósceles

Objetivo: Identificar as principais características do triângulo isósceles

Abra o **GEOGEBRA**.

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela jde Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Com a ferramemta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3,) crie, no Geogebra, o segmento $\overline{AB}$

Com a ferramemta ***MEDIATRIZ*** (janela 4), crie, no Geogebra, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$

Com a ferramemta ***NOVO PONTO*** (janela 2), crie, no Geogebra, um ponto C na reta mediatriz

Com a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3), trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Com a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela12), apague a mediatriz

Com a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8), marque os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Com a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8), depois de selecionada, marque os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ para medir o ângulo $\widehat{B}$, faça a mesma coisa para medir os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$.

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

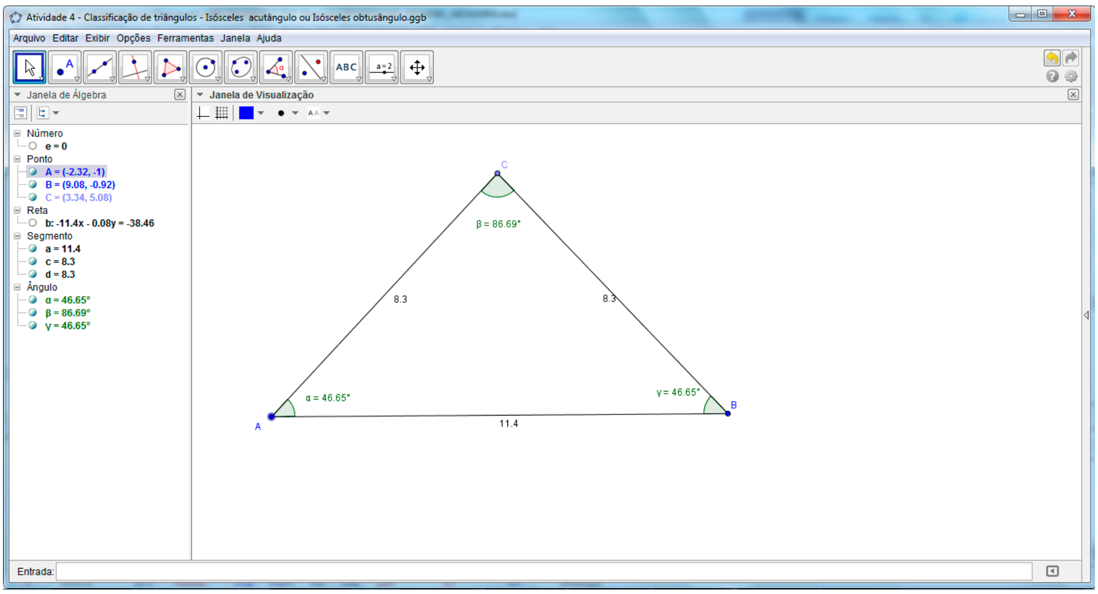


Figura 4.27: 7ª Atividade no Geogebra

Após realizadas todas as tarefas acima, manipule convenientemente o triângulo ABC ampliando-o e reduzindo-o e preencha a tabela abaixo

$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
4					$50°$
7				$60°$	
6				$40°$	
9					$100°$

Agora, responda as questões abaixo

- O que você percebeu quanto às medidas dos lados desse triângulo?
- Como se pode classificar o triângulo quanto a medida de seus lados?
- O que você percebeu quanto às medidas dos ângulos internos desse triângulo?
- Observe as medidas encontradas na segunda linha da tabela. O que há de especial nesse triângulo? A que conclusão você chega?

2º caso - ALA

Se dois ângulos de um triângulo e o lado comum a eles são congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado comum a estes, então, esses triângulos são congruentes.

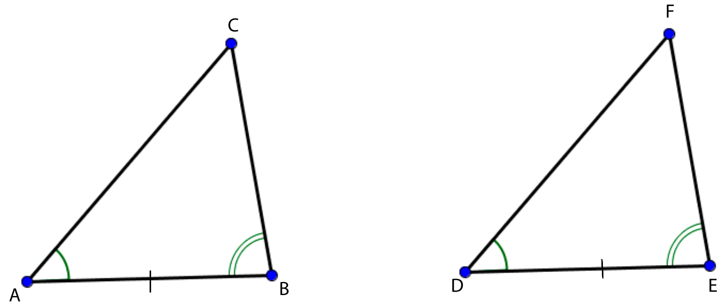


Figura 4.28: Caso de Congruência - ALA

$$\begin{array}{rcl} \widehat{A} & \equiv & \widehat{D} \\ \overline{AB} & \equiv & \overline{DE} \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{E} \end{array} \overset{LAL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \overline{AC} & \equiv & \overline{DF} \\ \widehat{C} & \equiv & \widehat{F} \\ \overline{BC} & \equiv & \overline{EF} \end{array}$$

DemonstraçãoTemos por hipótese que $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$, $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, vamos supor, então, que um ponto $G \in \overline{AC}$ (ver figura 4.29) é tal que $\overline{AG} \equiv \overline{DF}$, assim, pode-se afirmar pelo caso LAL que $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$ dessa forma teremos que $A\widehat{B}G \equiv \widehat{E}$, mas, como por hipótese, $A\widehat{B}C \equiv \widehat{E}$, conclui-se que $G \equiv C$, portanto $\triangle ABG \equiv \triangle ABC$ e como $\triangle ABG \equiv \triangle DEF$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$, como queríamos demonstrar.

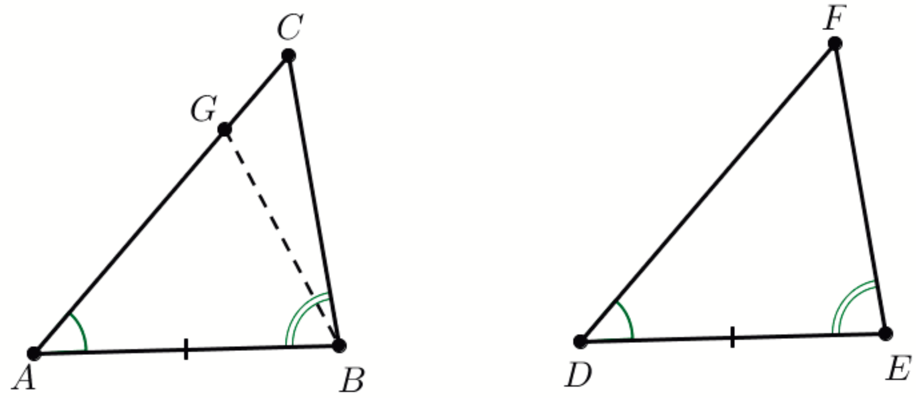


Figura 4.29: Demonstração do Caso de Congruência - ALA

8ª Atividade no GEOGEBRA - Congruência de Triângulos - Caso ALA

Objetivo: Demonstrar via Geogebra, o caso de congruência de triângulos ALA

Se ao abrir o Geogebra na **Janela de Visualização** estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Com a ferramemta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela11), crie três controles, sendo que, o primeiro tem nome a, mínimo zero e máximo 10; no segundo, comece marcando ângulo, nome α e valor máximo 179° e, por fim, o terceiro, marque ângulo, nome β e valor máximo 179°


Use a ferramenta ***SEGMENTO COM COMPRIMENTO FIXO*** (janela 3) da seguinte forma: clique no lado esquerdo abaixo da área de trabalho do GEOGEBRA, irá abrir uma janela pedindo o comprimento do segmento, escreva a, isso irá criar o segmento $\overline{AB}$ de comprimento a, faça o mesmo procedimento só tomando o cuidado de começar clicando no meio da tela mais para baixo. Ao final, você terá criado o segmento $\overline{CD}$ de comprimento a.

Com a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA***(janela 8), marque o ponto B, depois o A, nesse momento abrirá uma janela pedindo o valor do ângulo, preencha α. Isso fará surgir o ponto B' no GEOGEBRA. Faça o mesmo para o segmento $\overline{CD}$ clicando primeiro no ponto D.

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e marque o ponto A e depois o ponto B'. Faça o mesmo para o segmento $\overline{CD}$ criando, assim, a semirreta $overrightarrowCD'$.

Com a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA***(janela 8), marque o ponto A, depois, o B. Nesse momento abrirá, uma janela pedindo o valor do ângulo, preencha β e marque **sentido horário**, isso fará surgir o ponto A' no GEOGEBRA. Faça o mesmo para o segmento CD clicando primeiro no ponto C

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e marque o ponto B e, depois, o ponto A'. Faça o mesmo no segmento $\overrightarrow{CD}$ criando, assim, a semirreta $\overrightarrow{DC'}$.

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2), selecione as semirretas $\overrightarrow{AB'}$ e $\overrightarrow{BA'}$ surgirá o ponto E. Faça o mesmo com as semirretas $\overrightarrow{CD'}$ e $\overrightarrow{DC'}$, surgirá o ponto F

Use a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela 12) e selecione as semirretas $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CD'}$ e $\overrightarrow{DC'}$ e os pontos A', B', C', e D'

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINODO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e trace os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DF}$

Pronto. Você criou dois triângulos, os quais possuem dois ângulos ordenadamente congruentes e os lados que estão entre esses ângulos também são congruentes entre si.

Use a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8) e selecione os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DF}$

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e selecione os ângulos $A\widehat{E}B$ e $C\widehat{F}D$, nessa ordem

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, ter a seguinte imagem no Geogebra.

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule os três controles deslizantes para preencher a tabela abaixo

a	α	β	$\overline{AB}$	$\overline{BE}$	$\overline{EA}$	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{E}$	$\overline{CD}$	$\overline{CF}$	$\overline{FD}$	$\widehat{C}$	$\widehat{D}$	$\widehat{F}$
3	63°	60°												
4	90°	64°												
5	30°	70°												
6	55°	65°												
3	63°	60°												

Observando as medidas da tabela responda às seguintes perguntas:

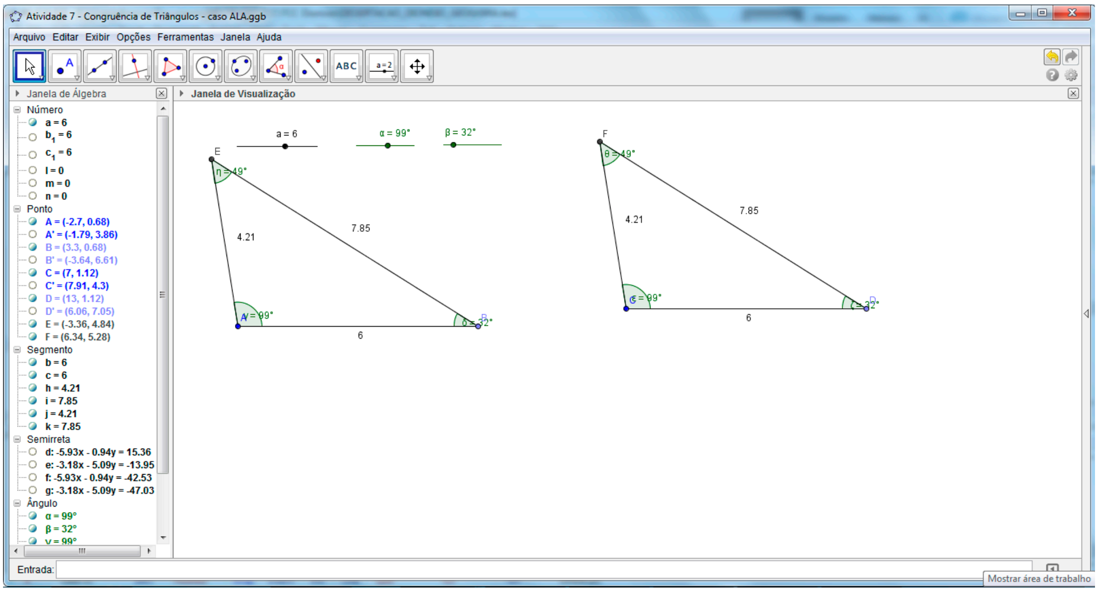


Figura 4.30: 8ª Atividade no Geogebra

- Qual análise, quanto às medidas dos lados e dos ângulos desses triângulos, você pode fazer?
- A qual conclusão você chega?

Teorema 4.2 (Do triângulo isósceles II)**.** *Tomando por base o 2º caso de congruência de triângulos (ALA) pode-se provar a recíproca do Teorema do Triângulo Isósceles, ou seja, se um triângulo possui dois ângulos congruentes, ele é isósceles*

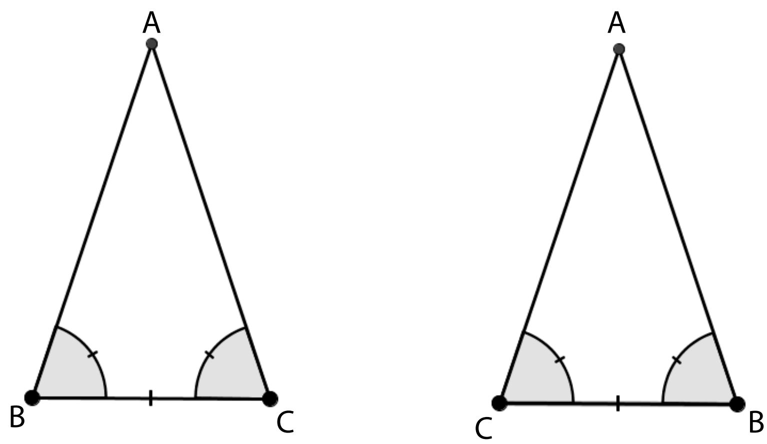


Figura 4.31: Demonstração do Teorema do Triângulo Isósceles

Demonstração Considere um triângulo ABC, no qual $\hat{B} = \hat{C}$. Gostaríamos de mostrar que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Para isso, consideremos as duas cópias do triângulo (conforme figura 4.31)e a seguinte correspondência biunívoca $B\widehat{A}C = C\widehat{A}B$, $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$, segue-se pelo caso ALA que a correspondência biunívoca

$A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$ nos garante a congruência dos triângulos ABC e CAB, daí, decorre, particularmente que $\overline{AB} = \overline{AC}$,como queríamos demonstrar.

9ª Atividade no GEOGEBRA - Triângulo isósceles

Objetivo: Verificar a relação que existe entre a congruência de dois ângulos em um triângulo e a classificação do mesmo   Usando a atividade anterior, manipule os controles deslizantes de tal sorte que você obtenha os seguintes valores:

	a	α	β
01	7	45°	45°
02	8	40°	60°
03	9	60°	60°
04	10	30°	60°
05	6	100°	20°

Agora responda as seguintes perguntas:

- Qual a classificação de cada triângulo da tabela em relação à medida de seus lados?
- Qual a relação entre essa classificação e as medidas de seus ângulos?

3º caso - LLL

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então, esses triângulos são congruentes

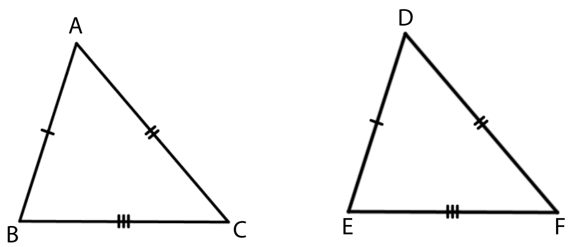


Figura 4.32: Caso de Congruência - LLL

$$\begin{array}{rcl} \overline{AB} & \equiv & \overline{DE} \\ \overline{AC} & \equiv & \overline{DF} \\ \overline{BC} & \equiv & \widehat{EF} \end{array} \overset{LLL}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \widehat{A} & \equiv & \widehat{D} \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{E} \\ \widehat{C} & \equiv & \widehat{F} \end{array}$$

Demonstração Considere os triângulos ABC e DEF, temos como hipótese que $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$. Tomando o triângulo ABC e traçando o segmento $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$ de tal sorte que os pontos A e G estejam em semiplanos opostos e $G\widehat{B}C \equiv G\widehat{B}C$ (Ver figura 4.33). Ao traçarmos o segmento $\overline{GC}$, temos que os triângulos DEF e GBC são congruentes devido ao caso de congruência LAL. Assim, pode-se afirmar que $\overline{AB} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{GB}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF} \equiv \overline{GC}$ E $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, ao traçar o segmento $\overline{AG}$, criamos os triângulos isósceles BGA e CGA, logo, temos $B\widehat{A}G \equiv B\widehat{G}A$ e $C\widehat{A}G \equiv C\widehat{G}A$, daí, valem as seguintes conclusões $B\widehat{A}G + C\widehat{G}A \doteq \widehat{A}$, $B\widehat{G}A + C\widehat{G}A \doteq \widehat{G}$, logo $\widehat{GA} = \widehat{G}$ e também usando o caso LAL afirma-se que os triângulos ABC e GBC são congruentes. Sabe-se que se dois triângulos são congruentes a um terceiro, então, eles são congruentes entre si dessa forma fica evidenciado que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

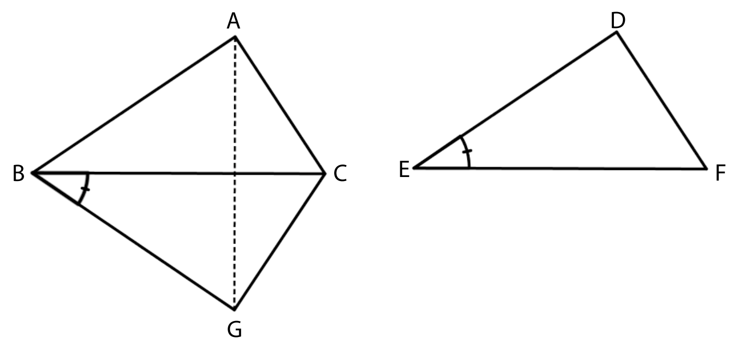


Figura 4.33: Demonstração do Caso de Congruência - LLL

Teorema 4.3 (do ângulo externo)**.** *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes*

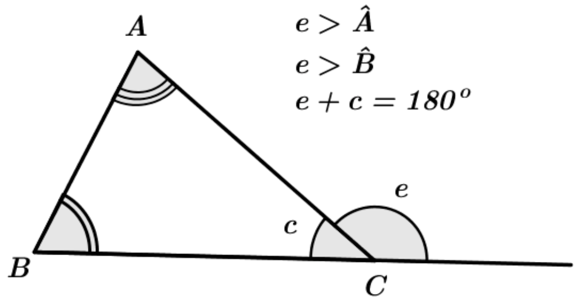


Figura 4.34: Teorema do ângulo externo

Demonstração Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertence à semirreta $\overrightarrow{BM}$ tal que $\overline{BM} \equiv \overline{MP}$. Pelo caso LAL, $\triangle BAM \equiv \triangle PMC$ e daí $B\widehat{A}M \equiv P\widehat{C}M$ (1).

Como P é interno ao ângulo $\widehat{e} = A\widehat{C}X$ vem: $\widehat{e} > P\widehat{C}M$. (2)

De (1) e (2), decorre que $\hat{e} > \widehat{A}$.

Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$, e usando os ângulos opostos pelo vértice, concluímos que $\hat{e} > \widehat{B}$, como queríamos demonstrar.

10ª Atividade no GEOGEBRA - Teorema do ângulo externo

Objetivo: Verificar a relação entre um ângulo externo de um triângulo e os dois ângulos internos não adjacentes

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.

Com a ferramemta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela11) crie dois controles, marcando ângulo, o primeiro terá nome α e valor máximo 179° e o segundo terá nome β e valor máximo 179°

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie a semirreta $\overrightarrow{AB}$

Use a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA*** (janela 8) e clique no ponto B, depois no ponto A, abrirá uma janela pedindo o valor da medida do ângulo, então escreva α de clique em OK. Irá surgir o ponto B'

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie o segmento $\overline{AB'}$

Use a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela 12) e selecione o ponto B

Use a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA*** (janela 8) e clique no ponto A, depois no ponto B', abrirá uma janela pedindo o valor da medida do ângulo, então escreva β de clique em OK. Irá surgir o ponto A'

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie a semirreta $\overrightarrow{B'A'}$

Com a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS PONTOS***(janela 2) e clique nas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{B'A'}$, irá surgir o ponto C.

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie o segmento $\overline{B'C}$

Use a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela 12) e selecione o ponto A' e a semirretas $\overrightarrow{B'A'}$

Com a ferramenta ***REFLEXÃO COM RELAÇÃO A UM PONTO***(janela 8) clique primeiramente no ponto A e depois no ponto C, irá surgir sobre a semirretas $\overrightarrow{AC}$ o ponto A'_1

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e clique no ponto A'_1, depois no ponto C' e finalmente no ponto B'

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

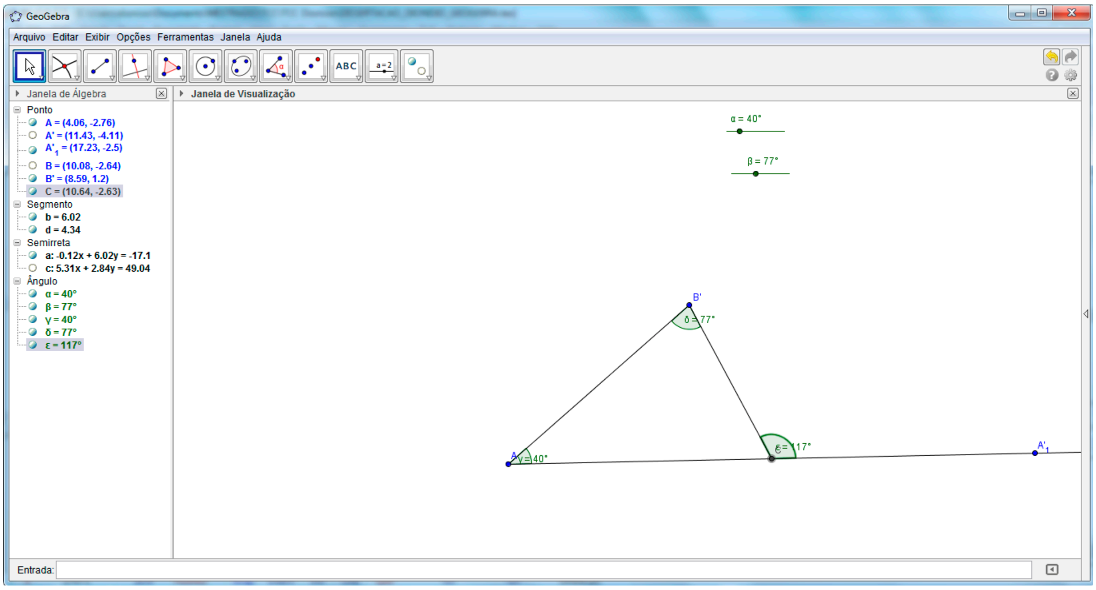


Figura 4.35: 10ª Atividade no Geogebra

Manipulando os controles deslizantes, preencha a tabela abaixo

$\alpha = \widehat{A}$	$\beta = \widehat{B'}$	$A'_1\widehat{C}B'$	$\widehat{A} + \widehat{B'}$
$50°$	$60°$		
$30°$	$100°$		
$34°$	$76°$		
$90°$	$30°$		

Agora, observando a tabela acima, responda:

- Quando você compara a medida do ângulo externo do triângulo com a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes, a que conclusão você chega?

4º caso - LAA_o

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então, esses triângulos são congruentes

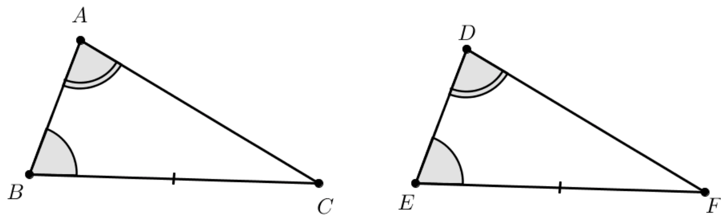


Figura 4.36: Caso de Congruência - LAA_o

$$\begin{array}{rcl} \overline{BC} & \equiv & \overline{EF} \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{E} \\ \widehat{A} & \equiv & \widehat{D} \end{array} \overset{LAAo}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \overline{AB} & \equiv & \overline{DE} \\ \overline{AC} & \equiv & \overline{DF} \\ \widehat{C} & \equiv & \widehat{F} \end{array}$$

5º caso - Caso especial do triângulo retângulo

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então, esses triângulos são congruentes

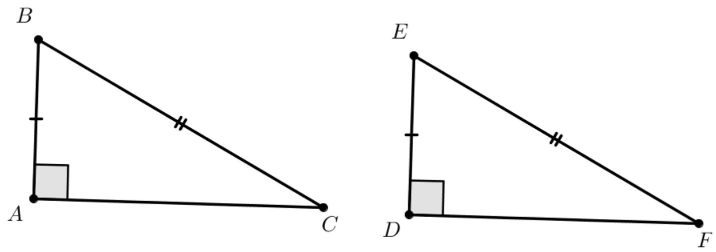


Figura 4.37: Caso Especial de Congruência

$$\begin{array}{rcl} \widehat{A} & \equiv & \widehat{D} \\ \overline{AB} & \equiv & \overline{DE} \\ \overline{BC} & \equiv & \overline{EF} \end{array} \overset{casoespecial}{\Longrightarrow} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \overline{AC} & \equiv & \overline{DF} \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{E} \\ \widehat{C} & \equiv & \widehat{F} \end{array}$$

Desigualdades nos triângulos

Observação 4.3.1. *Ao maior lado opõe-se o maior ângulo*

Se dois lados de um triângulo não sao congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles é oposto ao maior lado.

Observação 4.3.2. *Desigualdade triangular*

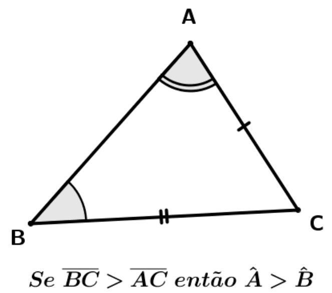


Figura 4.38: Relação entre lado e ângulo

Em um triângulo a medida de um de seus lados é sempre maior que a diferença entre as medidas dos outros e sempre menor que a soma dessas mesmas medidas.

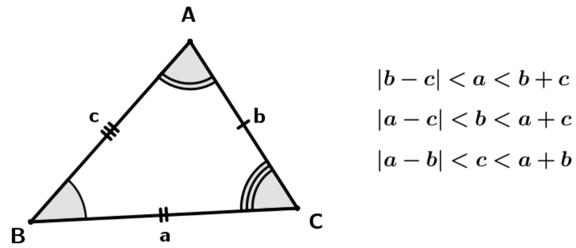


Figura 4.39: Desigualdade triangular

4.4 Paralelismo

4.4.1 Conceitos e propriedades

Definição 4.4.1. *Retas paralelas*

Duas retas são paralelas (símbolo: $\|$) se, e somente se, sao coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto em comum

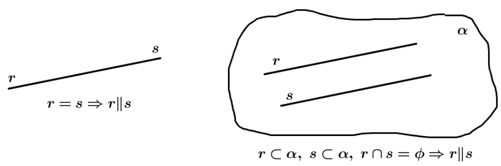


Figura 4.40: Retas paralelas

Axioma 4.11 (Unicidade da paralela - Postulado de Euclides)**.** *Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada*

Observação 4.4.1. *Quando duas retas coplanares distintas concorrem com uma terceira reta coplanar que chamaremos de transversal, elas formam oito ângulos, como vemos na figura 4.41*

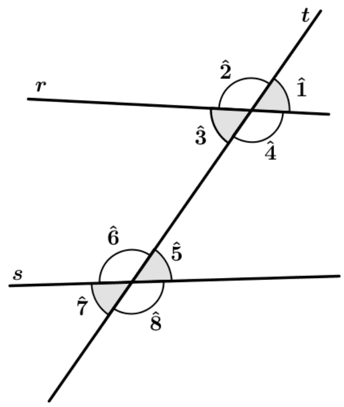


Figura 4.41: Retas coplanares

Esses oito ângulos serão classificados da seguinte forma:

- Alternos:
  - Alternos internos: $\widehat{3}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{6}$
  - Alternos externos: $\widehat{2}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{1}$ e $\widehat{7}$
- Colaterais:
  - Colaterais internos: $\widehat{3}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{5}$
  - Colaterais externos: $\widehat{1}$ e $\widehat{8}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{7}$
- Correspondentes: $\widehat{1}$ e $\widehat{5}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{6}$, $\widehat{3}$ e $\widehat{7}$, $\widehat{4}$ e $\widehat{8}$

Com base nesse axioma, podemos provar o teorema seguinte:

Teorema 4.4 (Existência da paralela)**.** *Se uma transversal* t *intercepta duas outras retas* r *e* s*, determinando um par de ângulos correspondentes congruentes, então,* r *e* s *são paralelas. Duas retas paralelas distintas coplanares e distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então, essas duas retas são paralelas.*

Axioma 4.12 (Unicidade da paralela - Postulado de Euclides)**.** *Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.*

Com base nesse axioma, podemos provar o teorema seguinte.

Teorema 4.5. *Duas retas paralelas distintas coplanares e distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então, essas duas retas são paralelas.*

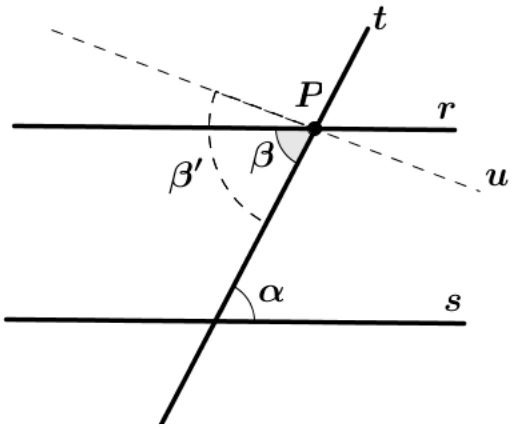


Figura 4.42: Retas paralelas cortadas por uma transversal

Demonstração Temos como hipótese que as retas r e s, sendo $r\|s$. Vamos considerar um outra reta u, passando pelo ponto $P \in r$ (veja figura) logo $r \cap u = \{P\}$, tal que: $\widehat{ut} = \beta'$ alterno a α e $\beta' \equiv \alpha$.

Pelo teorema da existência, temos que se $\alpha \equiv \beta'$ então $u\|s$.

Assim, teríamos duas retas paralelas a s passando por P, o que contraria o postulado das paralelas.

Logo, α é congruente a β, isto é, $\alpha \equiv \beta$

11ª Atividade no GEOGEBRA - Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

---

Objetivo: Encontrar todas as relações existentes entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois, clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.

Use a ferramenta ***RETA DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie uma reta.

Com a ferramenta ***NOVO PONTO***(janela 2), marque o ponto C, fora da reta.

Use a ferramenta ***RETA PARALELA*** (janela 4) e crie uma reta paralela à primeira que passe pelo ponto C.

Use a ferramenta ***RETA DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie uma reta transversal às duas paralelas clicando em cada uma das retas paralelas

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e encontre todos os ângulos formados pelas duas retas paralelas cortadas pela transversal.Se for necessário, antes de marcar os ângulos, crie pontos nas retas utilizando a ferramenta (Janela 2)

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

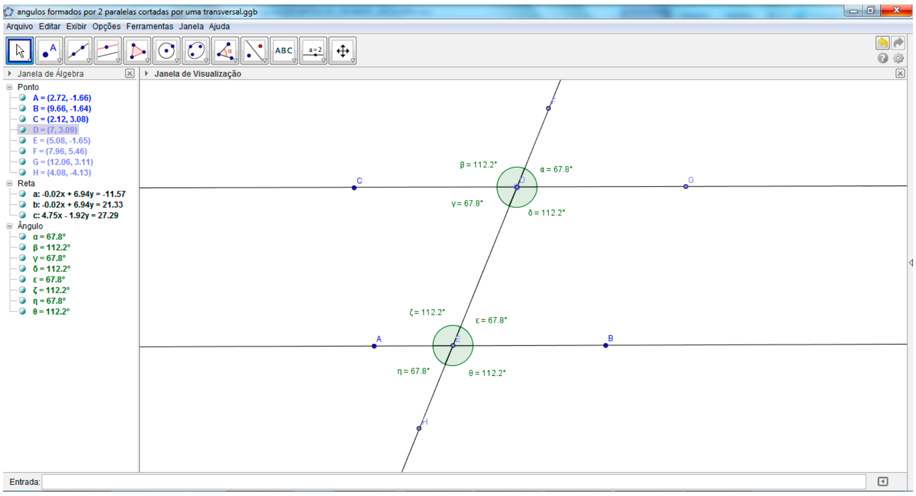


Figura 4.43: 11ª Atividade no Geogebra

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule livremente as retas e observe o que ocorre com as medidas dos ângulos

Agora, responda a seguinte pergunta:

- Quando você compara a medida dos ângulos formados pelas retas paralelas cortadas pela transversal, quais relações você consegue vislumbrar?

- Qual é a relação entre os ângulos correspondentes? e entre os colaterais? e, por fim, entre os alternos?

Teorema 4.6. *Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele*

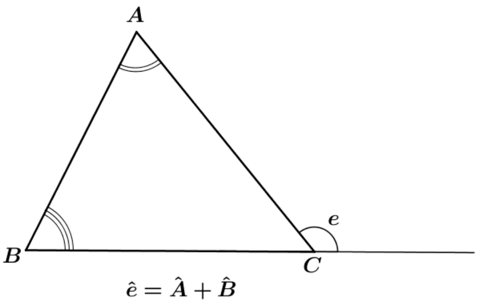


Figura 4.44: Teorema do ângulo externo de um triângulo

Teorema 4.7. *Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos, ou seja, é igual* 180°

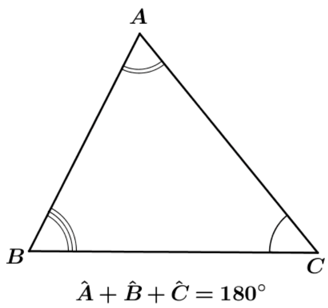


Figura 4.45: Teorema do ângulo interno de um triângulo

12ª Atividade no GEOGEBRA - Soma dos ângulos internos de um triângulo

---

Objetivo: Determinar a relação existente entre os ângulos internos de um triângulo.

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois, clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.

 Use a ferramenta ***POLÍGONO*** (janela 4) e crie um triângulo.

 Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8), encontre os três ângulos internos do triângulo.

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

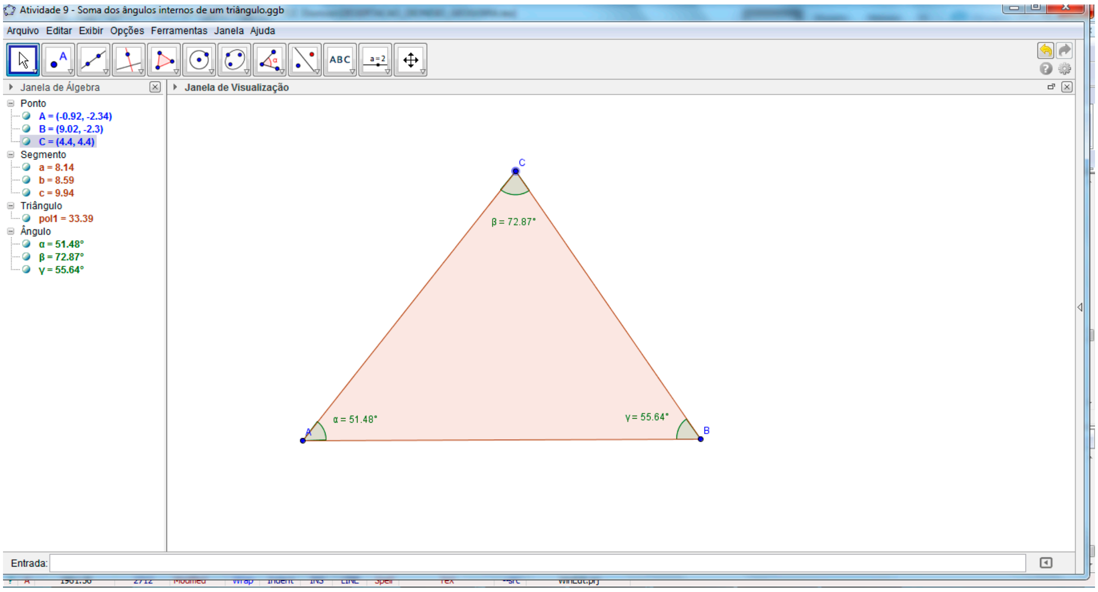


Figura 4.46: 12ª Atividade no Geogebra

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule livremente o triângulo para preencher a tabela abaixo.

$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$	$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}$
$68°$			
$46°$			
$38°$			
$76°$	\$		

Agora, responda a seguinte pergunta:

- Qual é o valor da soma dos três ângulos internos do triângulo?

- O que você pode concluir quanto à resposta do item anterior?

Observação 4.4.2 (Ângulos de lados paralelos)**.** *Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.*

Observação 4.4.3 (Ângulo interno de um triângulo equilátero)**.** *Num triângulo equilátero, cada ângulo mede* $60°$.

Observação 4.4.4 (Triângulo equilátero)**.** *Todo triângulo retângulo e equiângulo, pois cada ângulo mede* $60°$

4.5 Perpendicularidade

4.5.1 Conceitos e propriedades

Definição 4.5.1 (Retas perpendiculares)**.** *Duas retas são perpendiculares (símbolo $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.*

$r \perp s \Leftrightarrow r \cap s = \{P\}$ *e* $C\widehat{P}A = C\widehat{P}B$*, onde* $C \in r$ *e* A *e* $B \in s$ *conforme figura abaixo.*

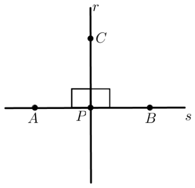


Figura 4.47: Retas perpendiculares

Definição 4.5.2 (Altura de um triângulo)**.** *A altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.*

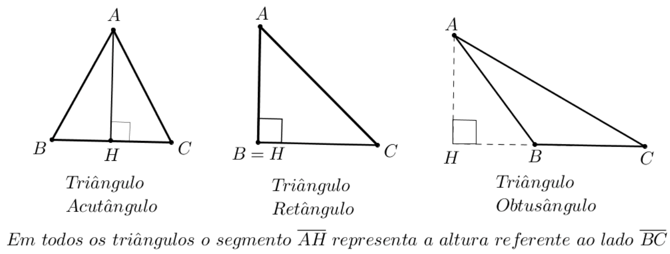


Figura 4.48: Altura do Triângulo

Definição 4.5.3 (Mediatriz de um segmento)**.** *A mediatriz de um segmento de reta perpendicular a esse segmento pelo seu ponto médio.*

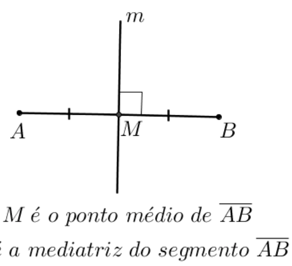


Figura 4.49: Mediatriz do segmento $\overline{AB}$

Observação 4.5.1 (Propriedade dos pontos da mediatriz)**.** *Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.*

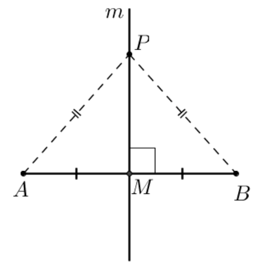


Figura 4.50: Propriedade da mediatriz

Demonstração Por hipótese, temos que m é mediatriz de $\overline{AB}$ e $P \in m$, logo percebemos dois triângulos retângulos APM e BPM sendo $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, $A\widehat{M}P \equiv B\widehat{M}P$ e $\overline{MP}$ é um lado comum dos triângulos, então, pelo caso de congruência LAL, temos que $\triangle APM \equiv \triangle BPM$ e, consequentemente, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

13ª Atividade no GEOGEBRA - Propriedade dos pontos da mediatriz

Objetivo: Determinar a partir do experimento a propriedade dos pontos da mediatriz

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie um segmento $\overline{AB}$.

Use a ferramenta ***MEDIATRIZ*** (janela 4) clicando sobre o segmento $\overline{AB}$.

Use a ferramenta ***NOVO PONTO*** (janela 2) clicando sobre a mediatriz cria-se o ponto$C$.

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Use a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8) e clique sobre os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, ter a seguinte imagem no Geogebra.

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule livremente o ponto C observando os comprimentos

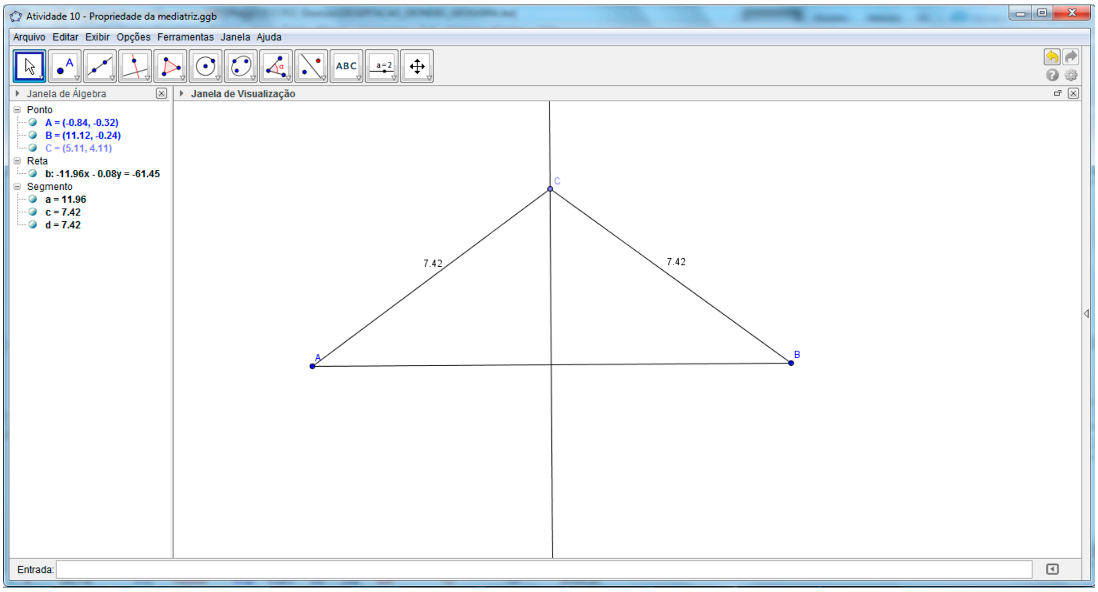


Figura 4.51: 13ª Atividade no Geogebra

dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Agora responda a seguinte pergunta:

- Qual é a relação entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$?

- Analise o motivo que garante essa igualdade.

Observação 4.5.2 (Propriedade dos pontos da bissetriz)**.** *Todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.*

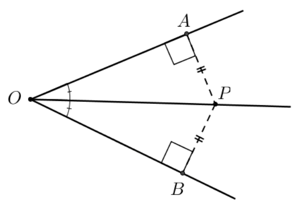


Figura 4.52: Propriedade da bissetriz

Demonstração Por hipótese temos que $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$, logo $A\widehat{O}P \equiv P\widehat{O}B$. Percebe-se também que o segmento $\overline{OP}$ é um lado comum dos triângulos OPA e OPB e $P\widehat{O}A \equiv P\widehat{O}B \equiv 90°$. Daí pode-se concluir pelo caso de congruência $LAA_{\circ}$ que $\triangle OPA \equiv \triangle OPB$ e, por consequência, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ e $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ como queríamos demonstrar.

14ª Atividade no GEOGEBRA - Propriedade dos pontos da bissetriz

Objetivo: Determinar através do experimento a propriedade dos pontos da bissetriz

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie a semirreta $\overrightarrow{AB}$ e depois outra semirreta, $\overline{AC}$.

Use a ferramenta ***BISSETRIZ*** (janela 4) clicando sobre os pontos B, A e C

Use a ferramenta ***NOVO PONTO*** (janela 2), clicando sobre a bissetriz, cria-se o ponto$D$

Use a ferramenta ***RETA PERPENDICULAR*** (janela 3) e clique no ponto D e na semirreta $\overrightarrow{AB}$, depois, refaça o mesmo procedimento para o ponto D e a semirreta $\overrightarrow{AC}$

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2) e crie os pontos de interseção entre cada reta perpendicular e o lado do ângulo $B\widehat{A}C$, surge, assimm os pontos de interseção E e F

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$.

Use a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8) e clique sobre os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$.

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule livremente o ponto D observando os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Agora, responda a seguinte pergunta:

- Qual é a relação entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$?

- Analise o motivo que garante essa igualdade

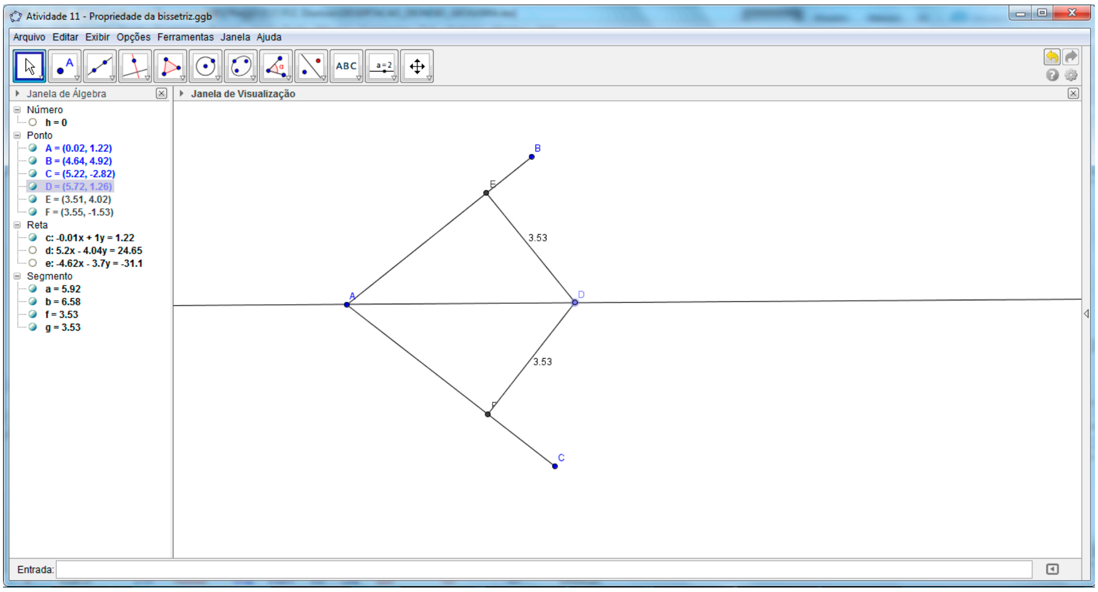


Figura 4.53: 14ª Atividade no Geogebra

4.6 Quadriláteros Notáveis

4.6.1 Quadrilátero - Definição e elementos

Definição 4.6.1 (Quadrilátero)**.** *Sejam A, B, C e D quatro pontos coplanares, distintos e de forma que três nunca são colineares. Se os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ *interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.*

Elementos:

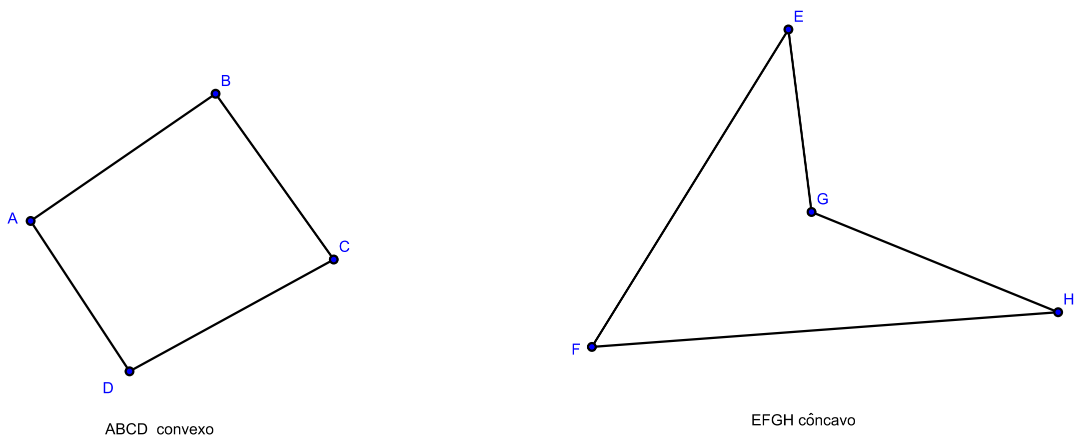


Figura 4.54: Quadriláteros

- *A, B, C e D são chamados vértices.*

- *Os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ *são lados.*

- *Segmentos que unem vértices não consecutivos são chamados diagonais* $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

Um quadrilátero possui duas diagonais (segmentos que ligam vértices não consecutivos), a soma de seus ângulos internos e externos é 360º.

4.6.2 Quadriláteros Notáveis-Definição

Trapézio

Definição 4.6.2. *Um quadrilátero convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos. Os lados paralelos são as bases do trapézio.*

$$ABCD \text{ é trapézio } \iff (\overline{AB}//\overline{CD} \text{ ou } \overline{BC}//\overline{DA})$$

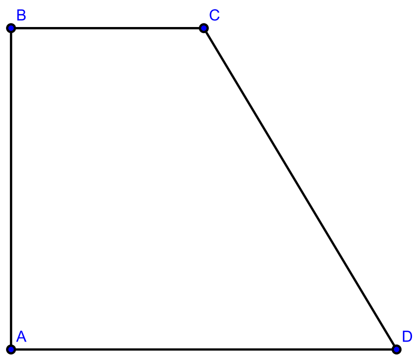


Figura 4.55: Trapézio

De acordo com os lados não paralelos, o trapézio pode ser:

1. Isósceles: quando os lados não paralelos são congruentes.

2. Escaleno: quando os lados não paralelos não são congruentes.

O trapézio pode ser retângulo se possuir dois ângulos internos retos.

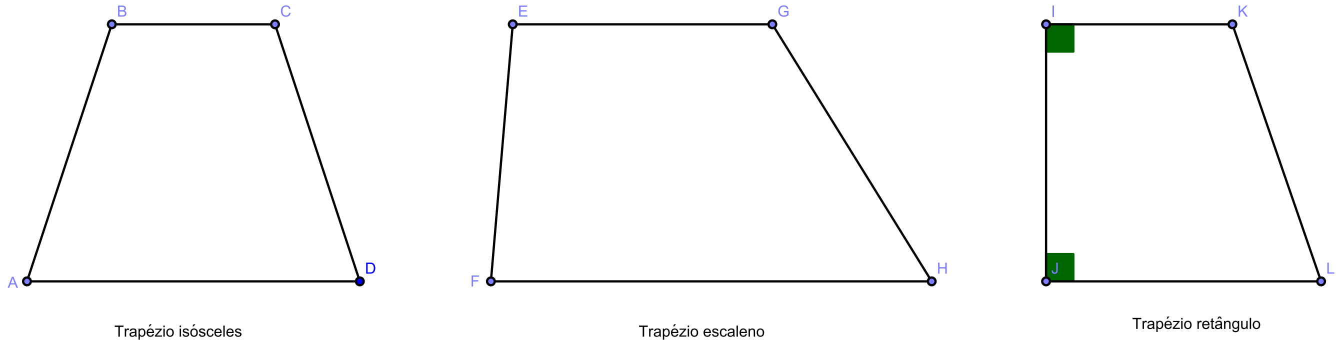


Figura 4.56: Tipos de Trapézio

Paralelogramo

Definição 4.6.3. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.*

$$ABCD \text{ é paralelogramo } \iff (\overline{AB}//\overline{CD} \text{ e } \overline{BC}//\overline{DA})$$

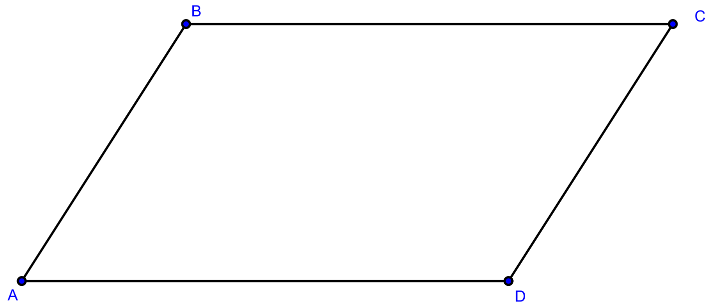


Figura 4.57: Paralelogramo

Retângulo

Definição 4.6.4. *Um quadrilátero convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.*

$$ABCD \text{ é retângulo } \iff \widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D}$$

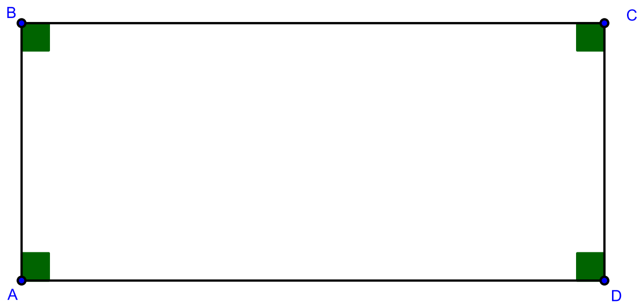


Figura 4.58: Retângulo

Losango

Definição 4.6.5. *Um quadrilátero convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.*

$$ABCD \text{ é losango } \iff \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

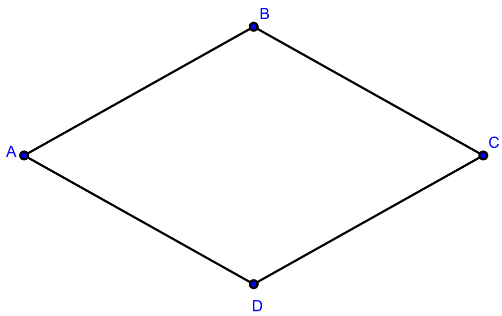


Figura 4.59: Losango

Quadrado

Definição 4.6.6. *Um quadrilátero convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes.*

$$ABCD \text{ é quadrado } \iff \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA} \text{ e } \widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D}$$

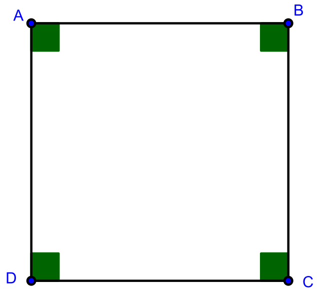


Figura 4.60: Quadrado

4.6.3 Propriedades

Dos Trapézios

1. Seja ABCD um trapézio qualquer de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos que a soma dos ângulos internos formados por um lado não paralelo e as bases é igual a 180º, ou seja: $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{o}$

2. Seja ABCD um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, temos que os ângulos internos formados pelos lados não paralelos e a base são congruentes, ou seja: $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{D}$.

3. Seja ABCD um trapézio isósceles, então, suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes.

15ª Atividade no GEOGEBRA - Propriedades dos trapézios

Objetivo: Determinar através do experimento as propriedades dos trapézios

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *número* e preencha *nome=a*, *min=0*, *max=10* e *Incremento=0.1*.

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *número* e preencha *nome=r*, *min=0*, *max=a/2* e *Incremento=0.1*.

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *ângulo* e preencha *nome*$=\alpha$, *min*$=1^\circ$, *max*$=79^\circ$ e *Incremento*$=1^\circ$.

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *ângulo* e preencha *nome*$=\beta$, *min*$=1^\circ$, *max*$=79^\circ$ e *Incremento*$=1^\circ$.

Use a ferramenta ***SEGMENTO COM COMPRIMENTO FIXO*** (janela 3) e crie a segmento $\overline{AB}$ e preencha no valor *comprimento*, a.

Use a ferramenta ***CÍRCULO DADOS CENTRO E RAIO*** (janela 6) e crie a circunferência de centro A e preenchendo no valor *comprimento*, r.

Use a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA*** (janela 8) e clique, primeiramente, no ponto B, depois no ponto A, abrirá uma janela. Nela, em ângulo, preencha α, marque a opção *sentido anti-horário* e clique no botão *OK*, irá aparecer o ângulo γ e o ponto B'.

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) clicando sobre o ponto A e depois sobre o ponto B', criando assim a semirreta $\overrightarrow{AB'}$.

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2) clicando sobre a circunferência e a semirreta $\overrightarrow{AB'}$, criando assim o ponto C.

Use a ferramenta ***RETA PARALELA*** (janela 4) clicando sobre os pontos C e, depois, sobre o segmento $\overline{AB}$.

Use a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA*** (janela 8) e clique, primeiramente, no ponto A, depois no ponto B, abrirá uma janela. Nela, em ângulo, preencha β, marque a opção *sentido horário* e clique no botão *OK*, irá aparecer o ângulo δ e o ponto A'.

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) clicando sobre o ponto B e depois sobre o ponto A', criando, assim, a semirreta $\overrightarrow{BA'}$.

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2) clicando sobre a semirreta $\overrightarrow{BA'}$ e a reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ criando assim o ponto D.

Use a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela 12) e clique sobre as semirretas $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{BA'}$, os pontos A' e B' e sobre a reta paralela ao segmento $\overline{AB}$.

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ criando assim o trapézio $ABDC$.

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e marque os ângulos $A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}B$.

Use a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8) e marque os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.

Agora, estamos prontos para avaliarmos algumas propriedades dos trapézios, vejamos:

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule livremente os controles deslizantes, verifique que, a cada manipulação, o trapézio muda as sua medidas. Agora, vamos às experiências.

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então teremos a seguinte imagem no Geogebra.

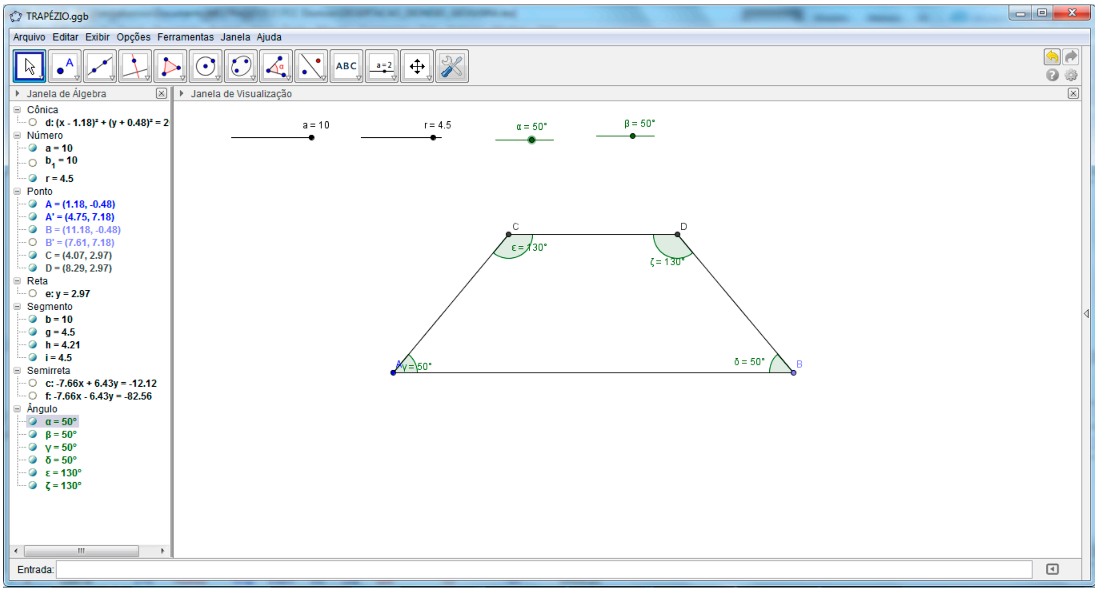


Figura 4.61: 15ª Atividade no Geogebra

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule os controles deslizantes para os seguintes valores: $a = 10$, $r = 5$, $\alpha = 30°$ e $\beta = 40°$. Agora, verifique qual é o valor da soma dos ângulos internos formados por um lado não paralelo e as bases.

Fazendo novas manipulações dos controles deslizantes, crie outros trapézios e faça para cada um a mesma verificação.‘(É necessário ter atenção para que os valores escolhidos nos controles deslizantes nos garantam que a figura seja um trapézio, pois dependendo dos valores escolhidos, poderá gerar uma linha poligonal fechada e não simples que, obviamente, não será nem polígono)

O que você pode concluir?

Como comprovar essa conclusão?

Ainda manipulando os controles deslizantes, faça com que os controles α e β sejam iguais. Agora, analise as medidas dos lados não paralelos, refaça essa experiência com diversos outros valores para esses ângulos. A que conclusão você chega?

Como se pode classificar esses trapézios?

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ que representam as diagonais do trapézio $ABDC$.

Use a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8) e marque os comprimentos dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$

Observe, agora, as medidas dessas diagonais quando os ângulos α e β são diferentes e quando são congruentes. A que conclusão se chega?

Dos Paralelogramos

1. Ângulos opostos congruentes.
   - Em todo paralelogramo, dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.
   - Todo quadrilátero convexo que possui ângulos opostos congruentes é paralelogramo.
   - **Consequência:** todo retângulo é paralelogramo.
2. Lados opostos congruentes.
   - Em todo paralelogramo, dois lados opostos são congruentes.
   - Todo quadrilátero que possui lados opostos congruentes é paralelogramo.
   - **Consequência:** todo losango é paralelogramo.
3. As diagonais dividem-se ao meio.
   - Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.
   - Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é paralelogramo.
   - **Consequência:** se dois segmentos interceptam-se em seus respectivos pontos médios, então, suas extremidades são vértices de um paralelogramo.
4. Dois lados paralelos e congruentes.
   - Todo quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.
   - **Consequência:** se dois segmentos são paralelos e congruentes, então, suas extremidades são vértices de um paralelogramo.

16ª Atividade no GEOGEBRA - Propriedades dos paralelogramos

Objetivo: Determinar a partir do experimento as propriedades dos paralelogramos

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.

 Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

 Use a ferramenta ***RETA PARALELA*** (janela 4) e clique no ponto A e no segmento $\overline{BC}$, criando assim

uma reta paralela, refaça o mesmo procedimento com o ponto C e o segmento $\overline{AB}$.

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 4) e marque as retas paralelas criadas anteriormente, surge assim o ponto de interseção D.

Use a ferramenta ***EXIBIR/ESCONDER OBJETOS*** (janela 12) e marque as retas paralelas.

Use a ferramenta ***SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS*** (janela 3) e crie os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ que são os lados que faltam no paralelogramo e também crie os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ que serão as diagonais.

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 4) e marque as diagonais do paralelogramo, surge assim o ponto de interseção E.

Use a ferramenta ***ÂNGULO*** (janela 8) e marque os ângulos $B\widehat{A}D$, $A\widehat{D}C$, $D\widehat{C}B$ e $C\widehat{B}A$, nessa ordem.

Use a ferramenta ***DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO*** (janela 8) e marque os comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, assim como com a mesma ferramenta clique nos pontos A e E para medir o segmento $\overline{AE}$, procedendo da mesma forma crie as medidas dos segmentos $\overline{EC}$, $\overline{BE}$ e $\overline{ED}$.

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, ter a seguinte imagem no Geogebra.

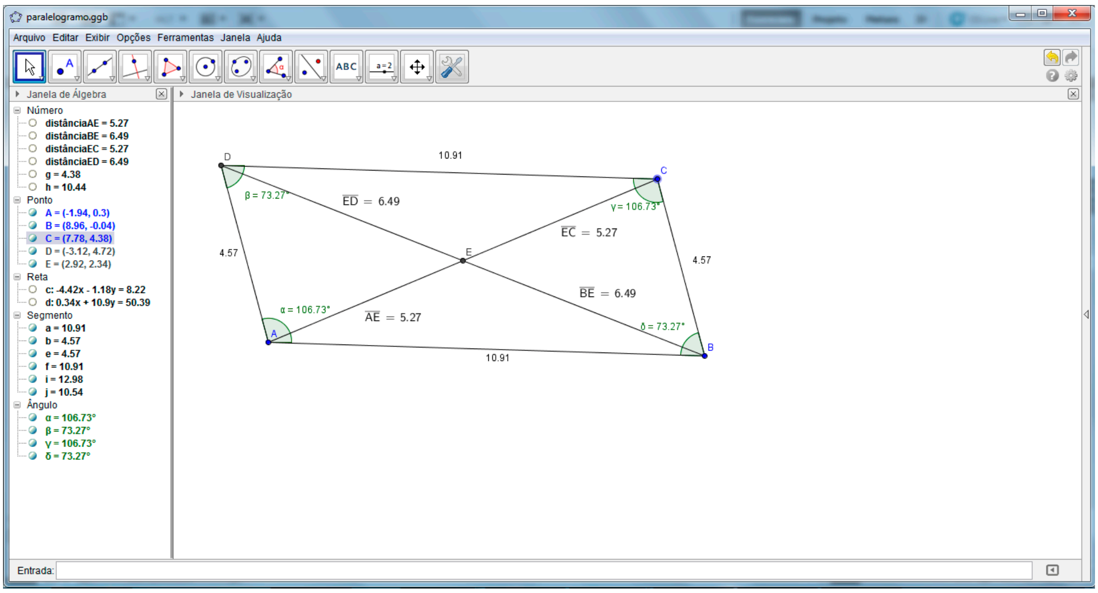


Figura 4.62: 16ª Atividade no Geogebra

Agora, estamos prontos para avaliarmos algumas propriedades dos paralelogramos, vejamos

Use a ferramenta ***MOVER*** (janela 1), manipule, livremente, os pontos A, B ou C e verifique que, a cada manipulação o paralelogramo muda as sua medidas.

Agora, vamos às perguntas.

Qual é a relação entre os comprimentos dos segmentos opostos de cada paralelogramo?

Qual é a relação entre as medidas dos ângulos internos opostos de cada paralelogramo?

Observando as medidas dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ e, depois, dos segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{ED}$, a que conclusão se chega quanto a cada diagonal e ao ponto de interseção entre elas (Ponto E)?

Retângulo

1. Diagonais congruentes.

    - Em todo retângulo as diagonais são congruentes.
    - Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

4.6.4 Losango

1. Diagonais perpendiculares.

    - Todo losango tem diagonais perpendiculares.
    - Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Quadrado

1. Todo quadrado é retângulo e também é losango.

NOTA: Se o quadrado é retângulo e também é losango, então, suas diagonais são congruentes e perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios.

17ª Atividade no GEOGEBRA - Paralelogramos Notáveis

Objetivo: Determinar a partir do experimento as características dos paralelogramos notáveis

Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois, clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *número* e preencha *nome=a*, *min=0*, *max=10* e *Incremento=0.1*.

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *número* e preencha *nome=b*, *min=0*, *max=10* e *Incremento=0.1*.

Use a ferramenta ***CONTROLE DESLIZANTE*** (janela 11) e crie um controle deslizante com as seguintes especificações: marque a opção *ângulo* e preencha *nome*$=\alpha$, *min*$=1°$, *max*$=179°$ e *Incremento*$=1°$.

Use a ferramenta ***SEGMENTO COM COMPRIMENTO FIXO*** (janela 3) e crie a segmento $\overline{AB}$ e preencha no valor *comprimento*, a.

Use a ferramenta ***CÍRCULO DADOS CENTRO E RAIO*** (janela 6) e crie a circunferência de centro A e preenchendo no valor *comprimento*, b.

Use a ferramenta ***ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA*** (janela 8) e clique, primeiramente, no ponto B, depois no ponto A, abrirá uma janela. Nela, em ângulo, preencha α, marque a opção *sentido anti-horário* e clique no botão *OK*, irá aparecer o ângulo γ e o ponto B'.

Use a ferramenta ***SEMIRRETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS*** (janela 3) clicando sobre o ponto A e depois sobre o ponto B', criando assim a semirreta $\overrightarrow{AB'}$.

Use a ferramenta ***INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS*** (janela 2) clicando sobre a circunferência e a semirreta $\overrightarrow{AB'}$, criando assim o ponto C.

Use a ferramenta ***RETA PARALELA*** (janela 4) clicando sobre os pontos C e, depois, sobre o segmento $\overline{AB}$ criando uma reta paralela ao segmento $\overrightarrow{AB}$. *seguida, clique no ponto B e na semirreta $\overrightarrow{AB'}$ criando assim uma reta paralela à semirreta citada.*

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 2) clicando as duas retas criadas no comando anterior, criando assim o ponto D.*

Use a ferramenta **EXIBIR/ESCONDER OBJETOS** *(janela 12) e marque a circunferência, as retas paralelas criadas, a semirreta $\overrightarrow{AB'}$ e o ponto B'.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$que são os lados que faltam no paralelogramo e também crie os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ que serão as diagonais.*

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 4) e marque os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, surge assim o ponto de interseção E.*

Use a ferramenta **ÂNGULO** *(janela 8) e marque os ângulos internos do paralelogramo e um dos ângulos formados entra as suas diagonais.*

Use a ferramenta **DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO** *(janela 8) e marque os comprimentos dos segmentos referentes aos lados do paralelogramo e às suas diagonais*

Agora, estamos prontos para avaliarmos algumas propriedades dos paralelogramos notáveis. Vejamos:

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, teremos a seguinte imagem no Geogebra.

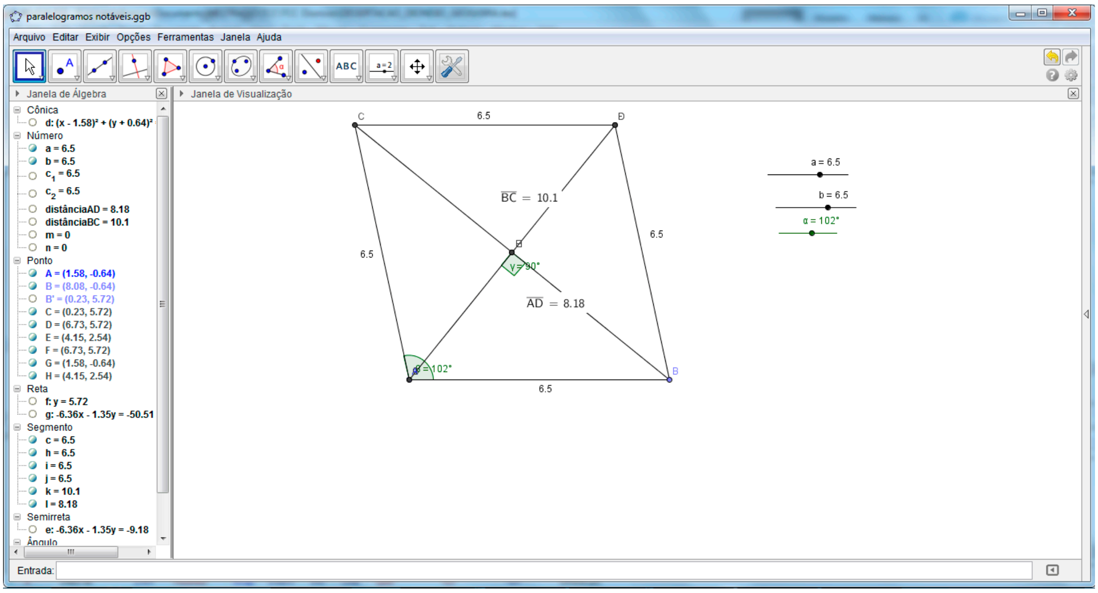


Figura 4.63: 17ª Atividade no Geogebra

Use a ferramenta **MOVER** *(janela 1), manipule livremente os controles deslizantes referentes aos parâmetros a e b, já no controle referente ao ângulo α faça ele ser igual a* $90°$ *criando assim um retângulo.*

Agora, responda o que você percebe quanto às medidas da diagonais.

Altere novamente as medidas dos controles deslizantes a e b e volte a observar as medidas das diagonais, refaça essa experiência outras vezes.

Qual é a conclusão que você chega?

Volte a usar a ferramenta **MOVER** *(janela 1), manipule os controles deslizantes referentes aos parâmetros a e b de tal sorte que as medidas sejam congruentes e, no controle referente ao ângulo α, faça-o ser diferente de* $90°$*, criando assim um losango.*

Agora, responda: O que você percebe quanto às medidas da diagonais e quanto ao ângulo formado entre elas?

Altere novamente as medidas do controle deslizante α e volte a observar as medidas das diagonais e a medida do ângulo formado por elas. Refaça essa experiência outras vezes.

A qual conclusão você chega?

Volte a usar a ferramenta **MOVER** *(janela 1), manipule os controles deslizantes referentes aos parâmetros a e b de tal sorte que as medidas sejam congruentes, no controle referente ao ângulo α faça ele ser igual a* $90°$ *criando assim um quadrado.*

Agora, responda:

O que você percebe quanto às ,medidas da diagonais e quanto ao ângulo formado entre elas.

Altere novamente as medidas do controle deslizante a e b tomando o cuidado para que $a = b$ e volte a observar as medidas das diagonais e a medida do ângulo formado por elas, refaça essa experiência outras vezes.

E agora, qual é a conclusão que você observa?

4.6.5 Consequências-Bases Médias

Do Triângulo

1. *Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:*
    - *Ele é paralelo ao terceiro lado;*
    - *Ele é metade do terceiro lado.*
2. *Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então, esta extremidade é o ponto médio do terceiro lado.*

Do Trapézio

1. *Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:*
    - *Ele é paralelo às bases;*
    - *Ele é igual à semi-soma das bases.*
2. *Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos lados e a outra extremidade no quarto lado, então, essa extremidade é o ponto médio desse lado.*

4.7 Pontos Notáveis do Triângulo

4.7.1 Medianas - Baricentro

Definição 4.7.1 (Mediana)**.** *Em um triângulo, mediana é o segmento de reta cujos extremos são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.*

As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice o dobro da outra.

Definição 4.7.2 (Baricentro)**.** *O ponto de interseção das três medianas de um triângulo é o baricentro do triângulo.*

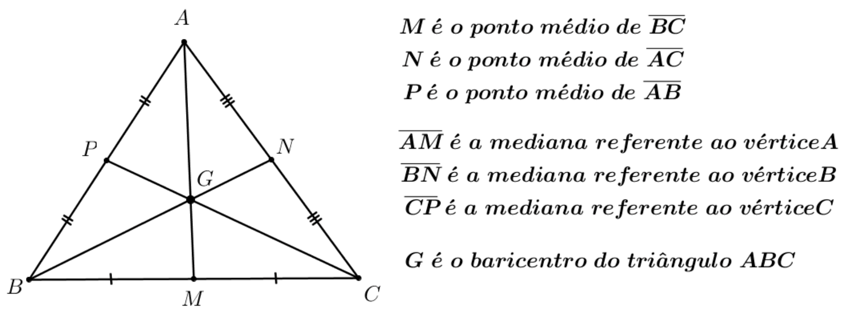


Figura 4.64: Medianas e baricentro

18ª Atividade no GEOGEBRA - Medianas e baricentro

Objetivo: Determinar a partir do experimento as propriedades das medianas de um triângulo

*Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ construindo assim o triângulo ABC.*

Use a ferramenta **PONTO MÉDIO OU CENTRO** *(janela 2) e clique sobre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ criando assim, respectivamente, os pontos médios D, E e F.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ elas serão as medianas do triângulo ABC.*

Perceba que as medianas se cruzam em um único ponto.

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 2), clicando sobre duas medianas quaisquer, criando, assim, o ponto G que é chamado de* baricentro.

Use a ferramenta **DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO** *(janela 8) e marque os comprimentos dos segmentos referentes aos segmentos $\overline{CG}$ e $\overline{GD}$. Para isso clique nos extremos de cada segmento, observe, agora, que os valores encontrados são exatamente os mesmos que estão representados na* janela de álgebra *pelos segmentos g e h.*

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, teremos a seguinte imagem no Geogebra.

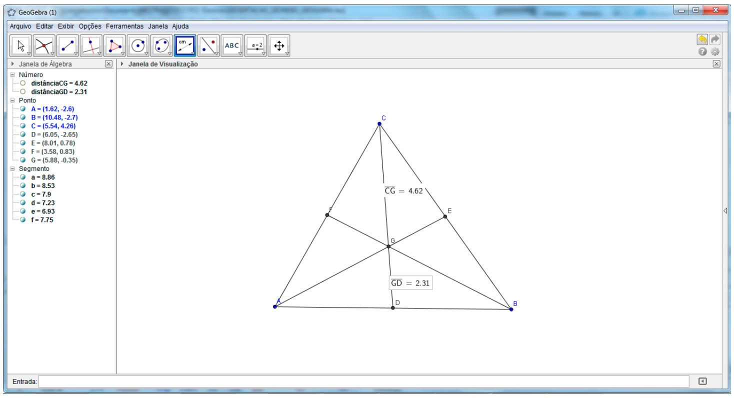


Figura 4.65: 18ª Atividade no Geogebra

Use a ferramenta **MOVER** *(janela 1) manipule, livremente, os vértices do triângulo ABC e perceba qual é a relação entre os segmentos $\overline{CG}$ e $\overline{GD}$.*

A qual conclusão você chega?

4.7.2 Bissetrizes internas - Incentro

Definição 4.7.3 (Bissetriz interna)**.** *Em um triângulo, a bissetriz interna é o segmento de reta que divide um ângulo interno desse triângulo em dois ângulos congruentes e tem como extremos um vértice do triângulo e um ponto pertencente ao lado oposto a esse vértice.*

Definição 4.7.4 (Incentro)**.** *O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é o incentro do triângulo.*

O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

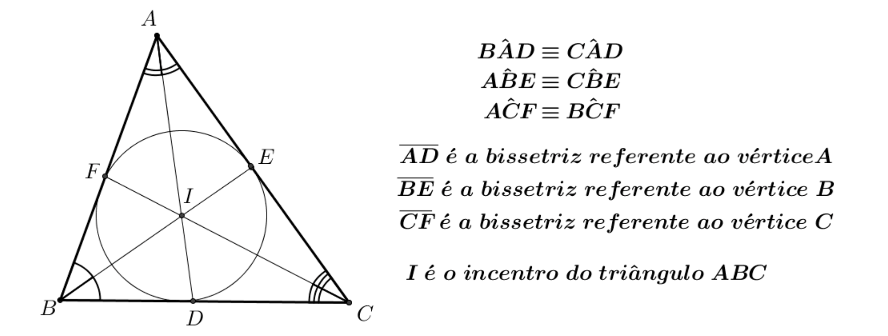


Figura 4.66: Bissetrizes e incentro

19ª Atividade no GEOGEBRA - Bissetrizes internas e incentro

Objetivo: Determinar a partir do experimento que as propriedades das bissetrizes internas de um triângulo.

*Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{CA}$ *construindo assim o triângulo* ABC.

Use a ferramenta **BISSETRIZ** *(janela 4) e crie as bissetrizes internas referentes ao vértices do triângulo* ABC*, observe que elas se cruzam em um mesmo ponto.*

Perceba que as medianas se cruzam em um único ponto (incentro).

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 2) clicando sobre cada lado do triângulo e a bissetriz que toca nele, assim, como entre duas bissetrizes.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos que unem cada vértice ao ponto de interseção entre a sua bissetriz e o lado oposto a ele.*

Use a ferramenta **EXIBIR/ESCONDER OBJETOS** *(janela 3) e clique sobre as três bissetrizes.*

Observe que, ao mover livremente o triângulo, o ponto de encontro das bissetrizes será será interno ao triângulo.

Use a ferramenta **RETA PERPENDICULAR** *(janela 4) e clique no ponto de interseção das bissetrizes e em um dos lados do triângulo.*

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 2) clicando sobre cada reta perpendicular traçada no comando anterior e o lado do triângulo.*

Use a ferramenta **EXIBIR/ESCONDER OBJETOS** *(janela 3) e clique sobre a reta perpendicular.*

Use a ferramenta **CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS** *(janela 6) e clique* *sobre o incentro e o ponto de interseção entre um dos lados e a reta perpendicular.*

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então, ter a seguinte imagem no Geogebra.

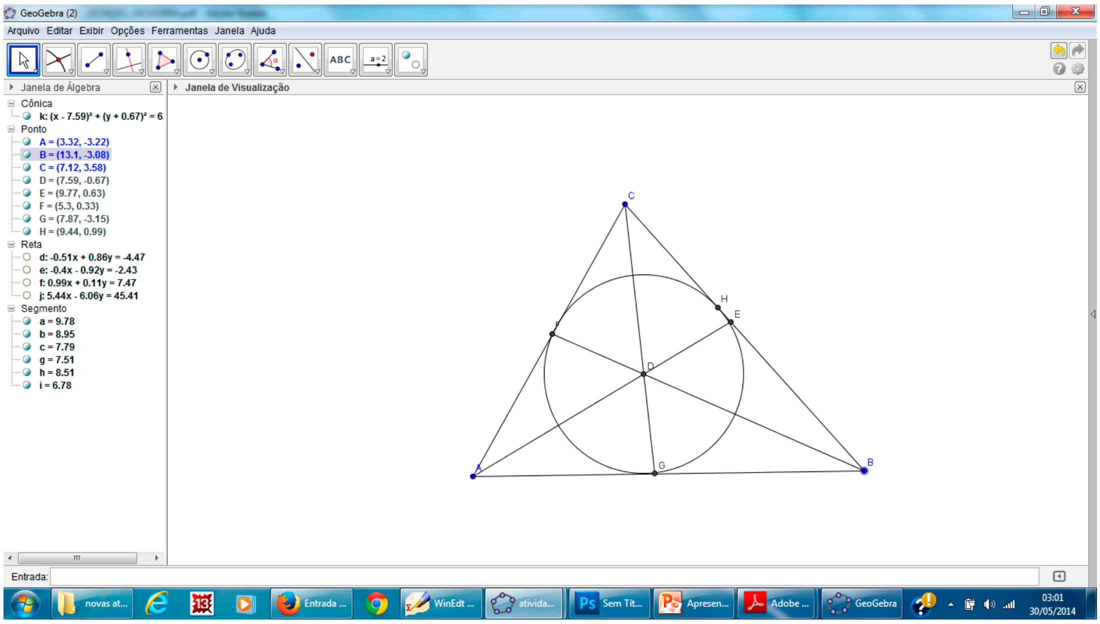


Figura 4.67: 19ª Atividade no Geogebra

 *Use a ferramenta* **MOVER** *(janela 1) manipule livremente os vértices do triângulo ABC e perceba o que ocorre com a circunferência em relação ao triângulo ABC.*

A qual conclusão você chega?

4.7.3 Mediatrizes - Circuncentro

Definição 4.7.5 (Mediatriz)**.** *Em um triângulo, a mediatriz é a reta que intercepta perpendicularmente o ponto médio de um lado do triângulo.*

Definição 4.7.6 (Circuncentro)**.** *O ponto de interseção das três mediatrizes de um triângulo é o circuncentro do triângulo.*

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. O circuncento é equidistante aos vértices do triângulo e essa distância é igual ao raio da circunferência circunscrita a ele.

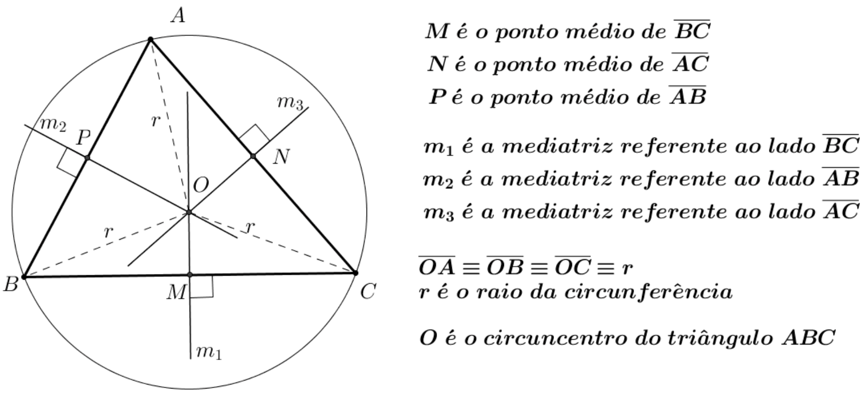


Figura 4.68: Mediatrizes e circuncentro

20ª Atividade no GEOGEBRA - Mediatrizes e circuncentro

Objetivo: Determinar a partir do experimento as propriedades das mediatrizes dos lados de um triângulo

*Se ao abrir o Geogebra, na **Janela de Visualização**, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na **Janela de Visualização** com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em **EIXOS**, você verá que eles irão desaparecer.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{CA}$ *construindo, assim, o triângulo* ABC.

Use a ferramenta **MEDIATRIZ** *(janela 4) e crie as mediatrizes referentes aos lados do triângulo* ABC*, observe que elas se cruzam em um mesmo ponto que chamamos de* circuncentro.

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 2) clicando sobre cada lado do triângulo e a sua mediatris assim como entre duas mediatrizes.*

Use a ferramenta **DISTÃNCIA, COMPRIMENTO OU PEÍMETRO** *(janela 8) e meça os segmentos com extremos em um dos vértice e no ponto de interseção de um lado adjacente ao vértice selecionado e a sua mediatriz, também meça a distância entre cada vértice e o cincuncentro.*

Use a ferramenta **ÂNGULO** *(janela 8) e meça os ângulos internos do triângulo.*

Ao mover livremente o triângulo, observe a posição do circuncentro em relação ao triângulo e também às medidas de seus ângulos internos.

O ponto de encontro das mediatrizes sempre será interno ao triângulo?

De acordo com a posição ocupada pelo circuncentro, como poderia classificar o triângulo quanto às medidas de seus ângulos internos?  *Use a ferramenta* **CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS** *(janela 6) e clique sobre o incentro e sobre um dos vértices do triângulo*

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

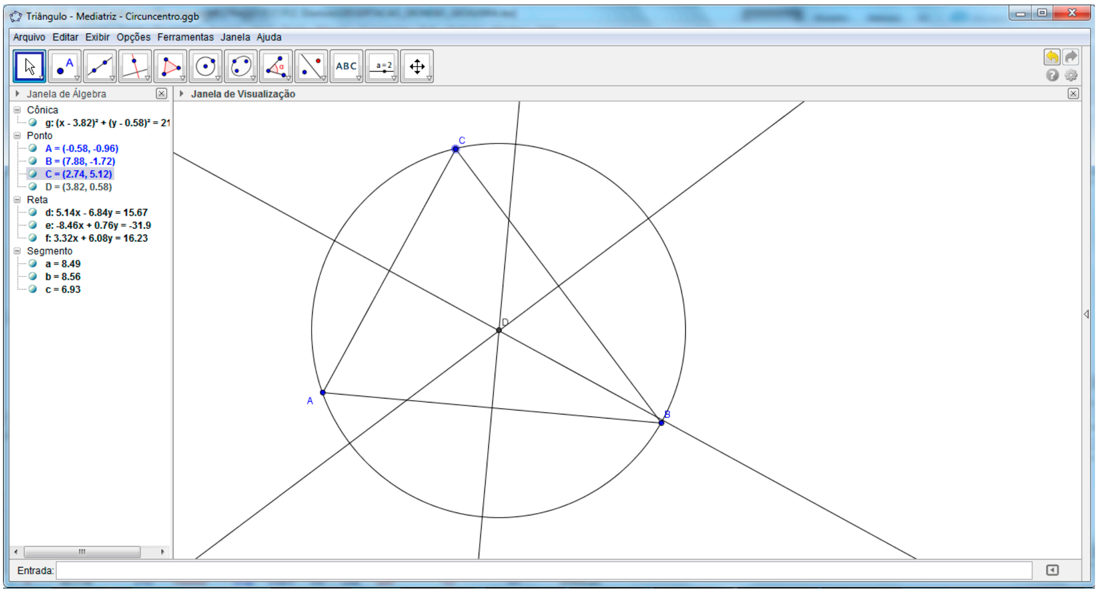


Figura 4.69: 20ª Atividade no Geogebra

 *Use a ferramenta* **MOVER** *(janela 1), manipule, livremente os vértices do triângulo ABC e perceba o que ocorre com a circunferência em relação ao triângulo ABC.*

A qual conclusão você chega?

Como provar que as conclusões obtidas no comando anterior?

4.7.4 Alturas - Ortocentro

Definição 4.7.7 (Altura)**.** *Em um triângulo, a altura é o segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo cujos extremos é um ponto pertencente a esse lado e o vértice oposto a ele.*

Definição 4.7.8 (Ortocentro)**.** *O ponto de interseção das três alturas de um triângulo é o ortocentro do triângulo.*

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. O circuncento é equidistante aos vértices do triângulo e essa distância é igual ao raio da circunferência circunscrita a ele.

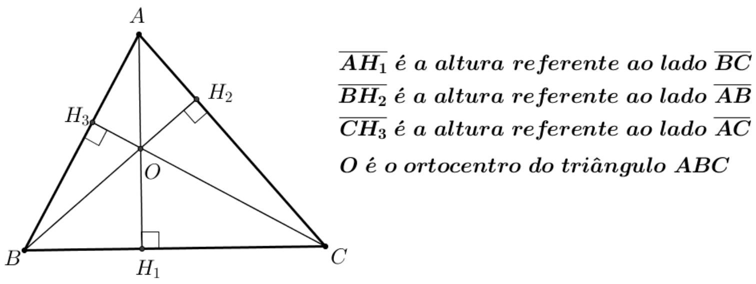


Figura 4.70: Alturas e ortocentro

21ª Atividade no GEOGEBRA - Alturas e ortocentro

Objetivo: Determinar a partir do experimento que as propriedades das alturas relativas aos lados de um triângulo

Se ao abrir o Geogebra, na ***Janela de Visualização****, estiverem aparecendo os eixos do plano cartesiano, proceda da seguinte forma: clique na* ***Janela de Visualização*** *com o botão direito do mouse, abrirá uma janela, depois clique em* ***EIXOS****, você verá que eles irão desaparecer.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e crie os segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *e* $\overline{CA}$ *construindo assim o triângulo* ABC.

Use a ferramenta **RETA PERPENDICULAR** *(janela 4) e clique em um vértice do triângiulo e no lado oposto a esse vértice. Marque essa reta perpendicular com o botão direito do mouse, irá se abrir uma janela, clique em* ***PROPRIEDADES****, abrirá uma nova janela, clique em cor e escolha vermelho, em seguida clique em* ***ESTILO*** *e escolha reta pontilhada.*

Repita esse procedimento para os outros dois vértices do triângulo só alterando a escolha da cor. para a segunda perpendicular escolha azul e para terceira escolha verde.

Use a ferramenta **INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS** *(janela 2) clicando sobre cada lado do triângulo e a sua perpendicular assim como entre duas perpendiculares.*

Use a ferramenta **SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS** *(janela 3) e trace os segmentos cujos extremos são um vértice do triângulo e o ponto de interseção entre o lado oposto a esse vértice e a sua perpendicular, esses segmentos representarão as alturas do triângulo e o ponto de interseção dessas alturas é chamado de* ***ORTOCENTRO****.*

Use a ferramenta **ÂNGULO** *(janela 8) e meça os ângulos internos do triângulo assim como o ângulo formado por cada lado e sua altura relativa.*

Se tudo foi feito corretamente, deverá, então ter a seguinte imagem no Geogebra.

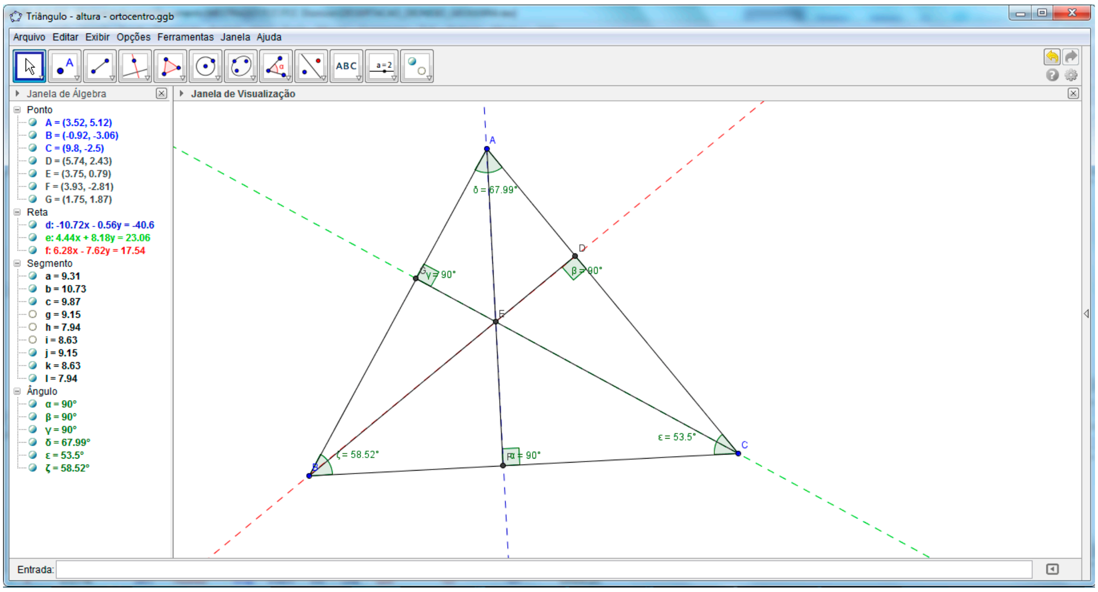


Figura 4.71: 21ª Atividade no Geogebra

 *Use a ferramenta* **MOVER** *(janela 1), manipule, livremente os vértices do triângulo ABC e perceba o que ocorre com a circunferência em relação ao triângulo ABC.*

O ortocentro é sempre um ponto no interior do triângulo?

Há alguma relação entre a localização do ortocentro e a classificação do triângulo quanto às medidas de seus lados?

Capítulo 5

Considerações Finais

5.1 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para o ensino de tópicos da Geometria Plana por meio do Geogebra, a fim de contemplar alguns assuntos que percebemos em nosso cotidiano profissional e que por muitas vezes, causam algum desconforto em nossos alunos em de fato se apropriarem deste conhecimento. Entendemos que, por ser uma proposta de ensino de Tópicos da Geometria Plana que ainda não foi testada, teremos o cuidado de, inicialmente, aplicá-la com outros colegas professores, para podermos fazer futuros ajustes ou, até mesmo, correções que , de fato, sirvam de forma contundente aos objetivos para o qual ela foi pensada.

Objetivando, realmente, aprimorar este trabalho, iremos propor que a equipe de professores de matemática de uma escola pública (E E E F e M Dr, Freitas) e outra da rede particular (Colégio Moderno) sejam os primeiros a analisarem o material e, com isso, fazer as sugestões para que, só depois, possamos aplicá-las com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Esperamos, com isso, estar num caminho que, efetivamente, faça valer o curso de Mestrado Profissional em Matemática que tem como objetivo qualificar o professor para o ensino de Matemática, elevando o nível de aprendizagem dos nossos alunos.

É importante enfatizar que o projeto de Mestrado profissional em Matemática, é uma oportunidade ímpar para nós, professores, repensarmos toda a nossa prática. Podemos afirmar que durante esses 2 anos em que estivemos de volta à vida acadêmica, o nosso fazer pedagógico, a nossa visão da ciência Matemática já sofreu profundas e irreversíveis mudanças para melhor.

Referências Bibliográficas

[1] *SÁ, Pedro Franco de* ***Atividades para o ensino da Matemática no nível fundamental*** *, Editora EDUEPA, 1ª Edição, Belém, 2009.*

[2] *SÁ, Pedro Franco de.; MENDES, Iran Abreu* ***Matemática por atividades - sugestões para sala de aula*** *, Editora Flecha do Tempo, 1ª Edição, Natal, 2006.*

[3] *IEZZI, Gelson at all.* ***Fundamentos de Matemática Elementar*** *vol 9, Editora Atual, 8ª Edição, São Paulo, 2005.*

[4] *NETO, Antonio Caminha Muniz.****Tópicos da Matemática Elementar - Geometria Euclidiana Plana****, vol 2, SBM, 1 ed. Rio de Janeiro, 2012*

[5] *FREITAS, Basílio Costa* ***Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra.*** *Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional),Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.*

[6] *LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C.P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C.* ***A Matemática do Ensino Médio*** *vol 2, SBM, 6ª Edição, Rio de Janeiro, 2006.*

[7] *NÓBRIGA, Jorge Cássio C. ; DE ARAUJO, Luís Cláudio L.* ***Aprendendo Matemática com o Geogebra****, Editora Exato, 1ª Edição, São Paulo, 2010.*

[8] *OHENWARTER, Markus,* ***GeoGebra Quickstart - Guía Rápida de Referência sobre GeoGebra*** *Material retirado do site www.geogebra.org em 20/01/2014*