



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



NÚMEROS COMPLEXOS e GEOMETRIA

Stanley Borges de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB

Julho/2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



NÚMEROS COMPLEXOS e GEOMETRIA

por

Stanley Borges de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Julho/2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

O482n Oliveira, Stanley Borges de.
Números complexos e geometria [manuscrito] / Stanley
Borges de Oliveira. - 2014.
76 p. : il.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências
e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento
de Matemática".

1. Números complexos. 2. Geometria. 3. Plano complexo. I.
Título.

21. ed. CDD 516

NÚMEROS COMPLEXOS e GEOMETRIA

por

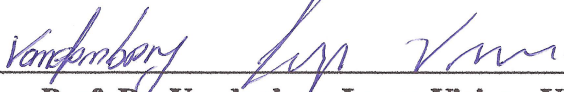
Stanley Borges de Oliveira

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:



Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG.



Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira - UEPB



**Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Orientador**

**Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

Julho/2014

Dedicatória

Dedicado a minha mãe, Valdirene, esposa, Josiane e aos meus filhos Cauê e Cauã pelo constante apoio e inspiração para continuar na caminhada.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus por todas as bênçãos alcançadas na minha vida, e por vivenciar este momento de término do trabalho de conclusão de curso. Agradeço à Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) por acreditar e apoiar minha formação, inclusive, fornecendo a liberação total de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT. Agradeço ao professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida que sempre me apoia, incentiva e muito contribui para o meu desenvolvimento acadêmico.

Agradecimentos especiais vão para minha família, mãe; irmão; esposa e filhos, que foram, inesgotavelmente, minha fonte de energia para que pudesse prosseguir, dia após dia, enfrentando as diversas dificuldades no caminho.

Agradeço aos professores do programa do mestrado, que com suas colocações e posicionamentos produziram uma imagem admirável e inspiradora, tenho agora como meta alcançar essa mesma postura na minha carreira profissional.

Ao meu orientador, Dr. Aldo Trajano Lourêdo, deixo um imenso agradecimento pelo apoio constante na minha formação, pela profissionalidade exemplar de quem orienta, incentiva e nos põe de pé e firmes no objetivo. Muito obrigado, Dr. Aldo Trajano, por acreditar na minha capacidade de concluir esse trabalho com sua orientação.

Agradeço aos membros da banca, Professor Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG e o Professor Dr. Vandenberg Lopes Vieira da Universidade Estadual da Paraíba, pelas suas valiosas contribuições.

Por mais que tenhamos capacidade, sempre podemos perceber que não somos sozinhos e precisamos muito dos grandes amigos. Por isso, agradeço à todos os alunos da turma do PROFMAT 2012.1 da UEPB; Cícero Dos Santos; Felipe Albuquerque Gonçalves; Herede Norões Botelho; Jonh Cleidson Da Silva; José Ronaldo Alves; Josimar Dos Santos Macedo; Loana Araujo Souza; Maxsuel Gonçalves De Oliveira; Raimundo Alves Maia Filho; Uelder Alves Galdino; Weskley Carneiro De Medeiros; Wilson Luiz Dos Santos Filho; por fazerem parte da minha formação. Um agradecimento particular deixo a Loana Araújo que contribuiu para um melhor entendimento dos conteúdos nas diversas vezes que estudamos juntos. Ainda

agraço à todos os meus alunos e alunas que sempre me apoiaram e contribuíram com meu desenvolvimento através de indagações e comentários. Especialmente sou imensamente grato a minha grande amiga Maria Joseane Ferreira de Souza que muito contribui com a versão final deste trabalho.

Muitas pessoas me ajudaram de forma direta e indiretamente nessa trajetória. Tantas que, com certeza, nossa memória não pode registrar conscientemente todas elas. Outras tantas, temos consciência e necessitaríamos de dezenas de páginas para agradecer cada uma delas. Por isso peço a Deus que abençoe todas as pessoas que fazem parte da minha vida, mesmo aquelas que estão muito distante e não tem ciência do quanto contribuíram para minha evolução.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

No presente trabalho de conclusão de curso trataremos sobre os números complexos com uma atenção especial ao seu aspecto geométrico. Alguns problemas geométricos podem ser solucionados usando a notação algébrica dos números complexos com ajuda das suas ricas interpretações geométricas com certa facilidade. O aspecto geométrico dos números complexos muitas vezes não é ensinado no ensino médio, nem sequer a forma trigonométrica (ou polar). Por essa razão, os alunos não aplicam os conhecimentos de números complexos para resolver problemas geométricos. Em muitos casos, essa abordagem vem a facilitar a resolução das soluções. Neste trabalho faremos uma abordagem dos números complexos aplicados para resolver problemas, ora geométricos, ora algébricos, fazendo relacionar os conceitos geométricos com os conceitos algébricos dos números complexos e vice versa, e lançamos como proposta para desenvolver a habilidade dos alunos em relacionar os conteúdos matemáticos oferecendo oportunidade dos mesmo fixarem melhor conceitos dos números complexos.

Palavras Chaves: Números Complexos. Geometria. Plano complexo.

Abstract

In the present dissertation we study complex numbers with a special attention to the geometric aspect. Many geometric problems can be answered using the algebraic notation of complex numbers with their rich geometric interpretations with relative ease. The geometric aspects of the complex numbers are often not taught in high school, not even the trigonometric form (or polar form). Therefore, students do not apply the knowledge of complex numbers to solve geometric problems. In this paper we will approach the complex numbers applied to solve both geometric as algebraic problems, making relate geometric concepts with algebraic concepts of complex numbers, and launched as a proposal to develop the ability of students to relate mathematical content offering opportunity of even better fix the concepts of complex numbers.

Keywords: Complex numbers. Geometry. Complex plane.

Lista de Figuras

1.1	Imagem de $M(z), M'(\bar{z})$ e $M''(-z)$	12
1.2	Vetor associado a z ($\overrightarrow{OM}(z)$).	13
1.3	Círculo de raio 1 e centro na origem.	14
1.4	Vetores $\overrightarrow{OM}_1(z_1) + \overrightarrow{OM}_2(z_2)$	14
1.5	Vetor $\overrightarrow{OM}(9 + 6i)$	15
1.6	Vetor $\overrightarrow{OM}(4 + 3i)$	15
1.7	Vetor $\overrightarrow{OM}(-5 - 2i)$	16
1.8	Vetor $\overrightarrow{OM}(5 + 2i)$	16
1.9	Múltiplo positivo e negativo do vetor associado a z	17
1.10	Vetor $\overrightarrow{OM}'(3 + 6i)$	17
1.11	Vetor $\overrightarrow{OM}'(6 - 4i)$	18
2.1	Coordenadas polares.	20
2.2	Representação polar de z	22
2.3	Imagem de $M_3(z_1, z_2)$	26
2.4	Triângulo equilátero $M_0M_1M_2$	29
3.1	Circunferência de raio R circunscrita ao triângulo $A_1A_2A_3$	36
3.2	Para $k < 0$, $k \in (0, 1)$ e $k > 1$	37
3.3	Ponto $G(z_G)$	37
3.4	Triângulo M_1OM_2 orientado negativamente.	38
3.5	Triângulo M_1OM_2 orientado positivamente.	38
3.6	Ângulo $M_1\hat{O}M_2$	39
3.7	Ângulo reto $M_1\hat{O}M_2$	40
3.8	Ângulos entre retas.	41
3.9	Rotação do ponto M	42
3.10	Rotação de B em relação A por um ângulo α	43
3.11	Ponto B do Exercício 3.4	44
3.12	Quadriláteros $ABCD$ e $BNMK$	44
3.13	Quadriláteros do Exercício 3.6.	45
3.14	Pontos concíclicos M_1, M_2, M_3 e M_4	49

3.15	Triângulos ABC e DEF com mesmo baricentro G	53
3.16	Triângulo equilátero $A_1A_2A_3$	56
3.17	Triângulo equilátero determinado pelos baricentro dos triângulos $AC'B$, $BA'C$ e $CB'A$	58
3.18	$A_1A_2A_3$ diretamente orientado.	65

Lista de Símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Conjunto dos números irracionais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
i	Unidade imaginária
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Produto cartesiano dos reais nos reais (ou plano cartesiano)
$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$	Produto cartesiano dos complexos nos complexos
(AB)	Segmento aberto determinado pelos pontos A e B
$[AB]$	Segmento fechado determinado pelos pontos A e B
(\overrightarrow{AB})	Semirreta com origem em A e contendo B
\overleftrightarrow{AB}	Reta determinada pelos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	Semirreta com origem em A e contendo B
\mathbb{R}^*	Conjunto dos números reais não nulos
$i\mathbb{R}^*$	Conjunto dos números complexos com a parte real igual a zero e parte imaginária diferente de zero

Sumário

Introdução	3
História	3
1 Números complexos e algumas propriedades	7
1.1 Números complexos	7
1.1.1 Conjugado de um número complexo	10
1.1.2 Módulo de um número complexo	10
1.2 Imagem geométrica de um número complexo	11
1.2.1 Interpretação geométrica do módulo	13
1.2.2 Interpretação geométrica das operações algébricas	14
2 Representação trigonométrica dos números complexos	19
2.1 As coordenadas polares no plano	19
2.1.1 A representação polar de um número complexo	21
2.1.2 Operações com números complexos na representação polar	22
2.1.3 Interpretação geométrica da multiplicação	26
2.2 As n raízes de um número complexo	27
2.2.1 Definição das n raízes de um número complexo	27
3 Aplicações dos Números Complexos à Geometria	30
3.1 Algumas noções geométricas simples e propriedades	30
3.1.1 Distância entre dois números complexos	30
3.1.2 Segmentos e retas	31
3.1.3 Dividir um segmento dada a razão	36
3.1.4 Medida de um ângulo	37
3.1.5 Ângulo entre duas retas	40
3.1.6 Rotação de um ponto	42
3.1.7 Condições para colinearidade, ortogonalidade e conciclicidade	47
3.1.8 Triângulos semelhantes	52
3.1.9 Triângulos equiláteros	54
3.2 Alguns conceitos de geometria analítica no plano complexo	59
3.2.1 Equação de uma reta	59

3.2.2	A equação de uma reta determinada por dois pontos	61
3.2.3	A área de um triângulo	63
3.2.4	Equação do círculo	67
Bibliografia		69
A Módulo e Conjugado de um Número Complexo		71
B Questionário		75

INTRODUÇÃO

Com muita frequência o ensino dos números complexos têm uma abordagem puramente algébrica, deixando uma grande ausência de significado e grandes dificuldades em entender onde estes números podem ser aplicados. Uma abordagem geométrica dos números complexos pode minimizar esse desconforto de significado e reforçar a aprendizagem desse conteúdo que também tem aplicações na física, na engenharia elétrica, na aerodinâmica, entre outras áreas.

A interpretação geométrica dos números complexos como um ponto (ou um vetor) do plano cartesiano traz valores significativos para resoluções de problemas geométricos com vantagens em muitos problemas. Um ponto chave nessa interpretação geométrica recai na multiplicação de números complexos que, em linhas gerais, é uma composição de rotações, como veremos nesse trabalho em varias aplicações de problemas estudado na referência [1].

Antes de prosseguir com uma abordagem teórica citaremos um pouco da história do surgimento dos números complexos.

História

Sabemos resolver, quando possível, equações da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quando a, b e c são números reais e $a \neq 0$. É comum usarmos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para encontrarmos suas soluções. Mas, quando $b^2 - 4ac$ é um valor negativo, concluímos que a equação não tem solução no conjunto dos números reais. Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

em \mathbb{R} , encontramos as soluções

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

e como o símbolo $\sqrt{-16}$ não representa um número real, segue que a equação dada não tem solução em \mathbb{R} . Mas, sendo ousado a operar com um novo símbolo, a saber $\sqrt{-1}$, como se fosse um número, ficaríamos com o resultado

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16(-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1}.$$

Qualquer um dos dois resultados será uma solução para a equação $x^2 - 6x + 13 = 0$, se tratarmos o símbolo $\sqrt{-1}$ como um número com a particularidade que $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Vejamos o que acontece para $x = 3 + 2\sqrt{-1}$ quando substituimos na equação dada:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (3 + 2\sqrt{-1})^2 - 6(3 + 2\sqrt{-1}) + 13 \\ &= 9 + 12\sqrt{-1} + 4(\sqrt{-1})^2 - 18 - 12\sqrt{-1} + 13 \\ &= 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

O caso de $x = 3 - 2\sqrt{-1}$ é análogo. Isto é, para $x = 3 \pm 2\sqrt{-1}$ teríamos uma raiz para a equação. Assim, operando ousadamente com o símbolo como discutido acima, estrariamos encontrando uma solução para equações quadráticas que antes não tinha soluções.

Destacamos, no entanto, que o surgimento dos números complexos não está ligado à resoluções de equações algébricas do 2º grau cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos, como vimos acima. O surgimento dos números complexos está ligado diretamente à resolução de equações algébricas do 3º grau. Quando equações do 2º grau apresentavam raízes quadradas de números negativos de imediato eram consideradas insolúveis (no conjunto dos números reais).

No início do século XVI, um grupo de matemáticos italianos procurava uma fórmula que desse as raízes das equações algébricas de 3º grau em função dos seus coeficientes (reais), semelhante à fórmula da equação do 2º grau.

Em 1545, Girolamo Cardano (1501-1576) publica uma fórmula, em seu livro *Ars Magna*, que dava a solução para a equação cúbica do tipo $x^3 + px + q = 0$. Tal fórmula era dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

conhecida hoje como **fórmula de Cardano - Tartágia**¹.

Nota-se que essa fórmula só se aplicava quando

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0,$$

¹A fórmula ficou assim conhecida devido ao fato que Tartágia revela a fórmula para Cardano que o promete de não publica-lá, pois o próprio Tartágia queria publicar em momento oportuno. Cardano não cumpre a promessa e, em 1545, publica a fórmula de Tartágia no seu livro *Ars Magna*.

para garantir a existência da raiz evitando assim a mesma situação das equações do 2º grau com raízes quadradas de números negativos.

Nesse contexto, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1573) fez um estudo sobre a resolução de equações de grau inferior a quatro e resolvendo a equação $x^3 - 15x = 4$, verificou por inspeção que $x = 4$ era solução da equação, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, mas, ao usar a fórmula de Cardano - Tartáglia para verificar se encontrava a mesma solução, ele obteve:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{16}{4}\right) - \left(\frac{3375}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{16}{4}\right) - \left(\frac{3375}{27}\right)}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \end{aligned}$$

Assim Bombelli chegou a um grande impasse, por um lado sabia-se que $\sqrt{-121}$ não existia. Logo, a equação não teria solução. Por outro lado, $x = 4$ era uma solução da equação, pois satisfazia a igualdade.

Para tratar essa questão, Bombelli passou a trabalhar com raízes quadradas de números negativos como se fosse números. Ele assume que o número $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ poderia ser representado da forma $a + \sqrt{-b}$, como $a, b \in \mathbb{R}$. Isto é, existem números reais a e b tais que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}.$$

Com isso, obteve que $a = 2$ e $b = 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4. \end{aligned}$$

Assim encontrando a solução desejada. A fórmula com essa solução foi encontrada era considerada duvidosa. Mas o método funcionava, embora ninguém ainda podia explicar.

Durante muito tempo trabalhou-se com essas raízes quadradas de números negativos, sempre com a sombra de dúvida da existência de tais números. Eles eram usados de forma envergonhada, e acompanhados de nomes ofensivos, que permaneceram até hoje na nossa nomenclatura - como por exemplo “números imaginário” - só que, ainda assim, eram cada vez mais utilizados.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) propôs, em 1777, a utilização do símbolo i para representar $\sqrt{-1}$ e avançou nos estudos de Bombelli. Euler também identificou as raízes da equação $z^n = 1$ como sendo os vértices de um polígono regular de n lados e definiu a função exponencial no conjunto dos números complexos pela fórmula: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduziu a denominação número complexo e utilizou a representação geométrica deles por meio de pontos de um plano. Com essa representação Gauss usa os complexos para obter resultados sobre Geometria plana, sobre os números

reais e até sobre os números inteiros. Foi utilizando o plano complexo que Gauss deu sua demonstração geométrica de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois (o que equivale ao Teorema Fundamental da Álgebra).

Jean Robert Argand (1786-1822) e Caspar Wessel (1745-1818), utilizaram a representação dos números complexos como segmentos orientados conquistando maior aceitação no meio matemático. Tanto Wessel quanto Argand, perceberam que os números complexos podem ser operados algebricamente, como no caso de vetores. Além disso, nesta representação dos números complexos por vetores, a multiplicação por i representa uma rotação de 90° . Desse modo, Wessel (1798) e Argand (1806) imprime no conjunto dos números complexos a interpretação geométrica, em termos atuais, que a soma deles faz translações no plano, e que a multiplicação deles faz rotações e dilatações.

Em 1800, com Argand e Gauss usando um sistema de coordenadas retangulares (conventionando que eixo horizontal representaria os números reais, o eixo vertical representaria os números imaginários) e fazendo relacionar um complexo com um par ordenado; isto é, $a + bi$ corresponderia ao par $(a; b)$, tem-se uma maior aceitação dos matemáticos da "existência" desses números. Com essas conversões um complexo $a + bi$ representaria geometricamente um ponto (ou um vetor), nesse plano bidimensional que hoje é denominado de **plano de Argand-Gauss**.

Para finalizar, ressaltamos: a procura por um modo sistemático para obtenção das raízes cúbicas de uma equação de terceiro grau foi o principal motivo do surgimento dos números complexos e não a resolução de uma equação de segundo grau.

Capítulo 1

Números complexos e algumas propriedades

1.1 Números complexos

Nesta seção faremos um breve resumo do conjunto dos número complexos e citaremos algumas propriedades que usaremos nos Capítulos 2 e 3 para resolver problemas de geometria com as notações dos números complexos.

Usaremos o símbolo i , e chamaremos de **unidade imaginária**, para representar a expressão $\sqrt{-1}$ e definimos a propriedade $i^2 = -1$. Assim, podemos falar de um número complexo da seguinte forma:

Definição 1.1 (Número complexo) *Um número complexo é um número da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária.*

Definição 1.2 *Dada um número complexo $z = a + bi$, chamamos a de **parte real** e b de **parte imaginária**.*

Usaremos as notações:

$\operatorname{Re}(z) = a$ e $\operatorname{Im}(z) = b$ para dizer que a é **parte real** e b é a **parte imaginária** de z . Se um número complexo é da forma $z = a + bi$, $a = 0, b \in \mathbb{R}^*$, dizemos que z é um número **imaginário puro**¹. A seguir definimos as condições para que dois números complexos sejam iguais.

Definição 1.3 *Dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$ são iguais, $z_1 = z_2$, quando $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.*

Em outras palavras, temos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ e $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$.

¹Usaremos também a notação $z \in i\mathbb{R}$, para dizer que z é uma imaginário puro.

O conjunto de todos os números complexos é usualmente representado pelo símbolo \mathbb{C} . Devemos notar que os números da forma $z = a + 0i$, só tem a parte real. Esse fato nos diz que o conjunto dos números reais \mathbb{R} é um subconjunto de \mathbb{C} .

Operações dos números complexos

Vamos relembrar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão² de dois números complexos.

Considerando dois números complexos, $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, definimos as seguintes operações:

Adição: $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Subtração: $z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2)$

Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \text{ com } a_2 \neq 0 \text{ ou } b_2 \neq 0.$$

Observe que a adição de dois números complexos é um número complexo cuja parte real (a parte imaginária) é a adição das partes reais (imaginárias) dos números dados:

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2);$$

e

$$\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2).$$

Com relação à subtração, temos:

$$\text{Re}(z_1 - z_2) = \text{Re}(z_1) - \text{Re}(z_2);$$

e

$$\text{Im}(z_1 - z_2) = \text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2),$$

e para a multiplicação,

$$\text{Re}(z_1z_2) = \text{Re}(z_1).\text{Re}(z_2) - \text{Im}(z_1).\text{Im}(z_2)$$

²Em rigor, só temos definidas duas operações que são adição e multiplicação. A subtração e divisão são consequência das propriedades dos números complexos e as definições daquelas operações.

e

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2) \cdot \operatorname{Re}(z_1).$$

O conceito de divisão ficará mais claro na seção 1.1.1 e sua interpretação geométrica será vista no próximo capítulo.

Devemos observar ainda que a adição e a multiplicação tem as propriedades associativa, comutativa e a distributividade da multiplicação com relação à adição, isto é,

$$\text{Comutatividade: } \begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$

$$\text{Associatividade: } \begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \end{cases}$$

$$\text{Distributividade: } \{ z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

O elemento neutro da adição é representado por $0 = 0 + 0i$ e é chamado de **zero**. Por sua vez, o **elemento neutro** da multiplicação é representado por $1 = 1 + 0i$ e é chamado de **unidade**. De outra forma, se $z = a + ib$, temos que $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$, pois:

$$z + 0 = (a + ib) + (0 + 0i) = a + 0 + i(b + 0) = a + ib = z.$$

e

$$z \cdot 1 = z \cdot (1 + 0i) = z.$$

Potência do número i

Vejamos a seguir quais as potências inteiras do número complexo i .

Tomando, $z = i$, temos:

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1; & i^4 = i^3 \cdot i = 1; \\ i^1 = i; & i^5 = i^4 \cdot i = i; \\ i^2 = -1; & i^6 = i^5 \cdot i = -1; \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i; & i^7 = i^6 \cdot i = -i. \end{array}$$

Pode-se provar por indução que, para qualquer inteiro positivo n ,

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Daí, $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$ para todos os inteiros $n \geq 0$. Se n é um número inteiro negativo, temos:

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}.$$

1.1.1 Conjugado de um número complexo

Para $z = x + yi$ o número complexo $\bar{z} = x - yi$ é chamado **conjugado** de z .

Algumas propriedades do conjugado de um número complexos segue na proposição a seguir:

Proposição 1.1 *As seguintes propriedades são satisfeitas em \mathbb{C} .*

1. A igualdade $z = \bar{z}$ é vale se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$.
2. Para qualquer número complexo z , a igualdade $z = \overline{\bar{z}}$ é válida.
3. Para qualquer número complexo z , o número $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ é um número real não negativo.
4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (o conjugado de uma soma é a soma dos conjugados).
5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (o conjugado de um produto é o produto dos conjugados).
6. Para qualquer número complexo diferente de zero z a igualdade $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ é válida.
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$ (o conjugado de um quociente é o quociente entre os conjugados).
8. Dado $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

A demonstração se encontra no anexo A na proposição A.1 página 71.

Com a definição de conjugado de um número complexo, podemos fazer a divisão de dois números complexos como segue: se $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$, com $z_2 \neq 0$. Então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

1.1.2 Módulo de um número complexo

Segue agora a definição de **módulo** de um número complexo.

Definição 1.4 *O número $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado o **módulo** do número complexo $z = x + yi$.*

Exemplo 1.1 *Os números complexos $z_1 = 4 + 3i, z_2 = -3i, z_3 = 2$ têm os módulos:*

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, |z_2| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \quad e \quad |z_3| = \sqrt{2^2} = 2.$$

A seguir enumeramos algumas propriedades do módulo dos números complexos. As demonstrações delas se encontram no anexo A página 72.

Proposição 1.2 *As seguintes propriedades de módulo de um número complexo são sempre satisfeitas:*

1. $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ e $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
2. $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso, $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$.
3. $|z| = |-z| = |z|$.
4. $z\bar{z} = |z|^2$.
5. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (o módulo de um produto é o produto dos módulos).
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
7. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$.
8. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$ (o módulo de um quociente é o quociente entre os módulos).
9. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Exercício 1.1 *Provar que a identidade*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

vale para todos os números complexos z_1 e z_2 .

Solução: Usando a propriedade 4 na proposição acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

1.2 Imagem geométrica de um número complexo

Dado um número complexo $z = x + yi$ definimos o par ordenado de números reais $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como imagem geométrica de z . Por isso, é natural que um número complexo $z = x + yi$ corresponda a um ponto $M = (x, y)$ no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Para uma introdução formal da relação entre um número complexo e um ponto do plano, vamos considerar $M = (x, y)$ sendo um ponto de um plano Π e suas coordenadas dadas num sistema coordenado xOy . Tomando a função bijetiva,

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C} &\longrightarrow \Pi \\ z &\longmapsto \phi(z) = M. \end{aligned}$$

Definição 1.5 O ponto $M = (x, y)$ é chamada a **imagem geométrica** do número complexo $z = x + yi$.

O número complexo $z = x + yi$ é chamado de **coordenada complexa** do ponto $M = (x, y)$. Usaremos a notação $M(z)$ para indicar que M é o ponto com coordenada complexa z .

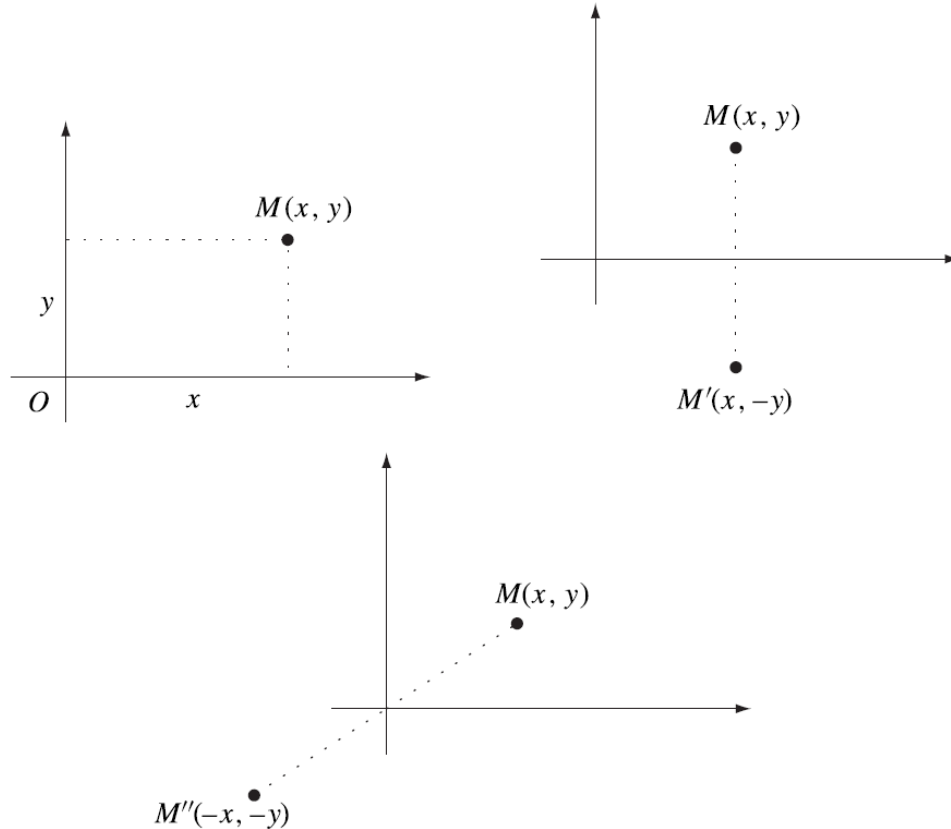


Figura 1.1: Imagem de $M(z), M'(\bar{z})$ e $M''(-z)$

A imagem geométrica do conjugado \bar{z} de um número complexo $z = x + yi$ é o ponto $M' = (x, -y)$ obtido pela reflexão em relação ao eixo x do ponto $M = (x, y)$ (ver figura 1.1).

A imagem geométrica do inverso aditivo $-z$ de um número complexo $z = x + yi$ é o ponto $M'' = (-x, -y)$ obtido pela reflexão em relação à origem do ponto $M = (x, y)$ (ver figura 1.1).

A função bijetiva ϕ encontra todos os pontos do conjunto \mathbb{R} quando aplicada aos números complexos da forma $x + 0i$, que recaem sobre o eixo x , o que é denominado o **eixo real**. Por outro lado, os números complexos imaginário puros correspondem ao eixo y , que é quando a função ϕ é aplicada aos números complexos da forma $0 + yi$. Esse eixo é chamado de **eixo imaginário**. O plano Π , cujos pontos são identificados com números complexos, é chamado o **plano complexo** (ou **plano de Argand-Gauss** em homenagem a esses matemáticos).

Por outro lado, também podemos identificar um número complexo $z = x + yi$ com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, em que $M = (x, y)$ é a imagem geométrica do número complexo z .

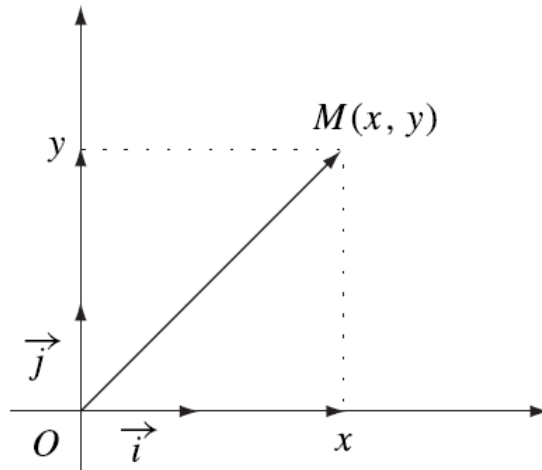


Figura 1.2: Vetor associado a z ($\overrightarrow{OM}(z)$).

Seja V_0 o conjunto de vetores cujos pontos inicial é a origem O . Então, podemos definir a função bijetiva

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C} &\longrightarrow V_0, \\ z &\mapsto \psi(z) = x\vec{i} + y\vec{j}, \end{aligned}$$

onde \vec{i} e \vec{j} são os vetores do eixo x e eixo y , respectivamente.

1.2.1 Interpretação geométrica do módulo

Vamos considerar um número complexo $z = x + yi$, com $M = (x, y)$ sendo a imagem geométrica no plano complexo. A distância Euclidiana \overline{OM} é dada pela fórmula

$$\overline{OM} = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2},$$

de modo que $\overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{v}|$. Em outras palavras, o módulo $|z|$ de um número complexo $z = x + yi$ é o comprimento do segmento OM ou a magnitude do vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Observação: 1.1 Para um número real r positivo, o conjunto dos números complexos com módulos r corresponde, no plano complexo, a um círculo C de centro O e raio r , que representamos por $C(O, r)$.

Observação: 1.2 Os números complexos z , com $|z| < r$, correspondem aos pontos do interior do círculo C ; por outro lado, os números complexos z , com $|z| > r$, correspondem aos pontos do plano exterior do círculo C .

Exemplo 1.2 Os números $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, estão representados no plano complexo por quatro pontos no círculo unitário centrado na origem (ver Figura 1.3), pois

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1.$$

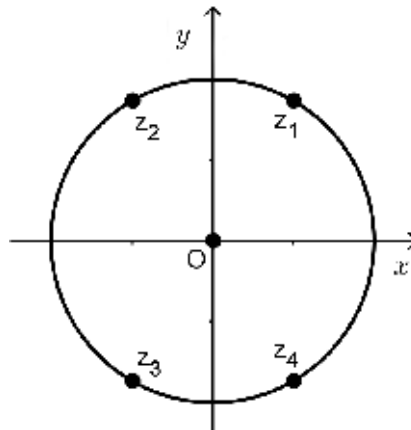


Figura 1.3: Círculo de raio 1 e centro na origem.

1.2.2 Interpretação geométrica das operações algébricas

Adição e subtração.

Considere os números complexos $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ e os vetores correspondentes $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.

Observa-se que a soma dos números complexos é $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, e a soma dos vetores é $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$.

Portanto, a soma $z_1 + z_2$ corresponde à soma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

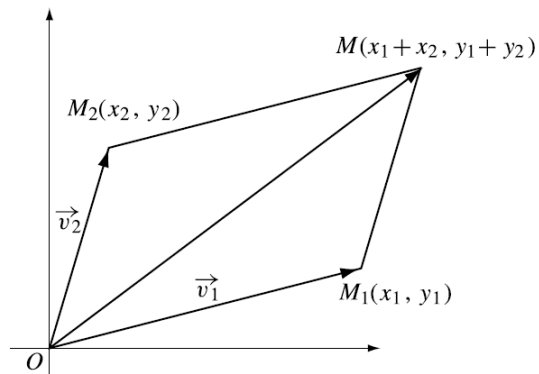


Figura 1.4: Vetores $\vec{OM}_1(z_1) + \vec{OM}_2(z_2)$.

Exemplo 1.3 Temos $(3 + 5i) + (6 + i) = 9 + 6i$, daí a imagem geométrica da soma é dado na figura (1.5).

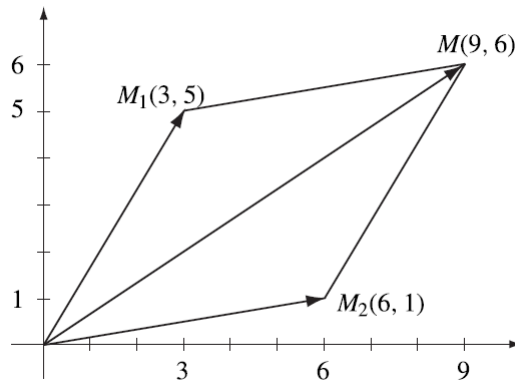


Figura 1.5: Vetor \vec{OM} ($9 + 6i$).

Exemplo 1.4 Observe que $(6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i$. Portanto, a imagem geométrica da soma destes dois números complexos é o ponto $M = (4, 3)$ (ver a figura 1.6).

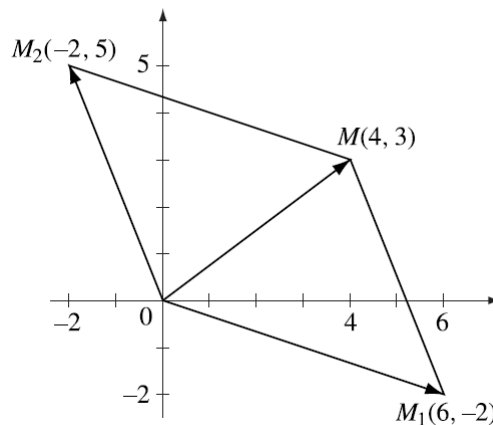


Figura 1.6: Vetor \vec{OM} ($4 + 3i$).

Por outro lado, a diferença entre os números complexos z_1 e z_2 é

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i,$$

e a diferença dos vetores v_1 e v_2 é

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}.$$

Assim, a diferença $z_1 - z_2$ corresponde à diferença $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

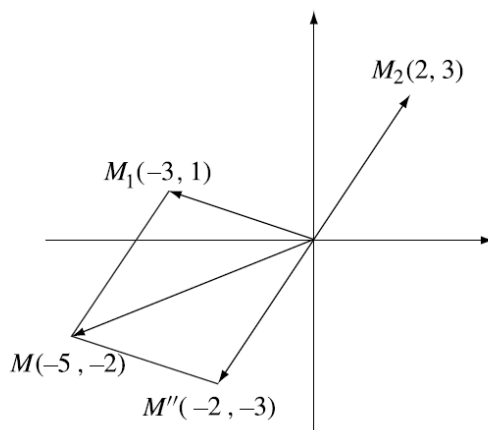


Figura 1.7: Vetor \vec{OM} ($-5 - 2i$).

Exemplo 1.5 Temos $(-3 + i) - (2 + 3i) = (-3 + i) + (-2 - 3i) = -5 - 2i$, daí a imagem geométrica da diferença destes dois números complexos é o ponto $M = (-5, -2)$ dada na figura (1.7).

Exemplo 1.6 Nota-se que $(3 - 2i) - (-2 - 4i) = (3 - 2i) + (2 + 4i) = 5 + 2i$, logo o ponto $M = (5, 2)$ é a imagem geométrica da diferença destes dois complexos números (ver Figura 1.8).

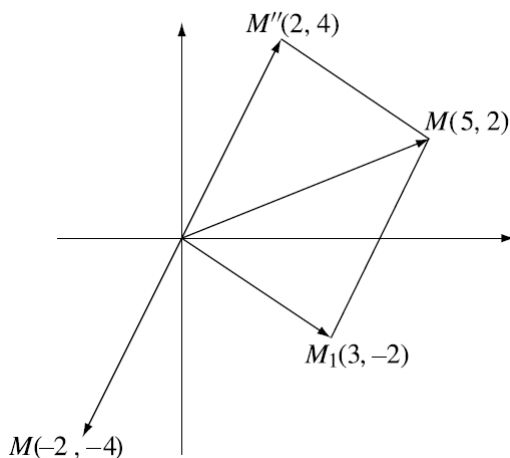


Figura 1.8: Vetor \vec{OM} ($5 + 2i$).

Observação: 1.3 A distância de $M_1 = (x_1, y_1)$ a $M_2 = (x_2, y_2)$ é igual ao do módulo do número complexo $z_1 - z_2$ ou igual ao comprimento do vetor $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Com efeito,

$$|M_1 - M_2| = |z_1 - z_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Múltiplos real de um número complexo.

Considere um número complexo $z = x + iy$ e o vetor correspondente $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Se λ é um número real, então o múltiplo real $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$ corresponde ao vetor $\lambda \vec{v} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$. Nota-se que se $\lambda > 0$, então os vetores $\lambda \vec{v}$ e \vec{v} têm a mesma orientação e

$$|\lambda \vec{v}| = \lambda |\vec{v}|.$$

Quando $\lambda < 0$, o vetor $\lambda \vec{v}$ tem orientação oposta a \vec{v} e $|\lambda \vec{v}| = -\lambda |\vec{v}|$. Claro que, se $\lambda = 0$, então $\lambda \vec{v} = \vec{0}$.

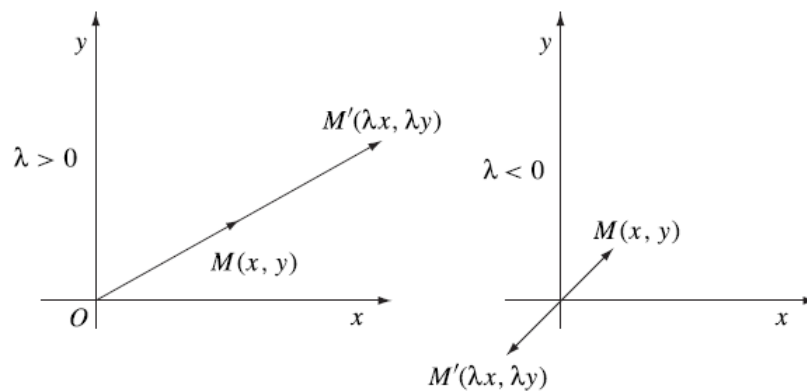


Figura 1.9: Múltiplo positivo e negativo do vetor associado a z .

Exemplo 1.7 Temos $3(1 + 2i) = 3 + 6i$, portanto $M' = (3, 6)$ é a imagem geométrica do produto de 3 por $z = 1 + 2i$.

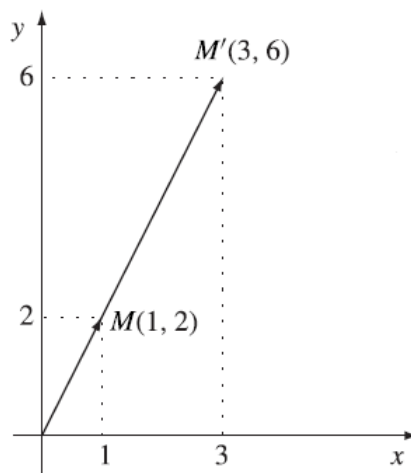


Figura 1.10: Vetor $\vec{OM'} (3 + 6i)$.

Exemplo 1.8 Observe que $-2(-3 + 2i) = 6 - 4i$, e obtemos o ponto $M' = (6, -4)$ como a imagem geométrica do produto de -2 por $z = -3 + 2i$.

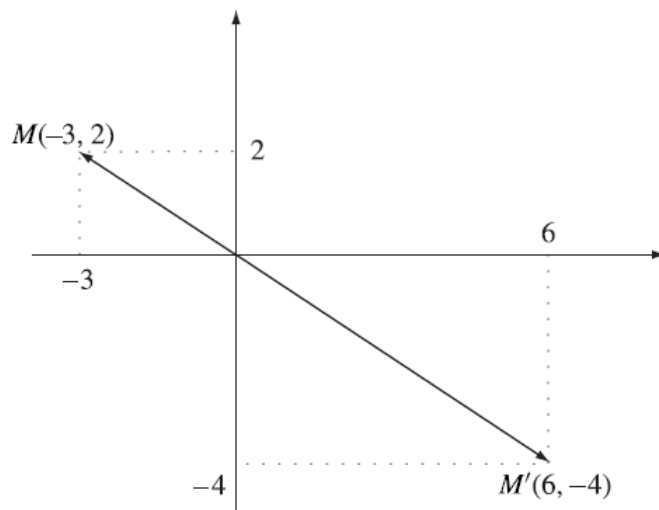


Figura 1.11: Vetor $\vec{OM'}$ ($6 - 4i$).

Capítulo 2

Representação trigonométrica dos números complexos

2.1 As coordenadas polares no plano

Vamos considerar um plano cartesiano e um ponto $M = (x, y)$ que não é a origem. O número real $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado o **raio polar** do ponto M . O ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, no sentido anti-horário, entre o vetor \overrightarrow{OM} e o semi-eixo x positivo é chamado o **argumento polar** do ponto M . O par (r, θ) é chamado as **coordenadas polares** do ponto M .

Vamos escrever $M = (r, \theta)$. Nota-se que a função $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, com $h(x, y) = (r, \theta)$, é bijetiva.

A origem O é o único ponto de tal modo que $r = 0$, o argumento θ da origem não é definido. Para qualquer ponto M no plano, existe um único ponto de cruzamento P do raio (OM) com o círculo unitário centrado na origem. O ponto P tem o mesmo argumento polar θ (ver Figura 2.1).

Utilizando a definição das funções seno e cosseno, concluímos que:

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta.$$

Portanto, é fácil de obter as coordenadas cartesianas de um ponto se as suas coordenadas polares forem dadas.

Por outro lado, vamos considerar um ponto $M = (x, y)$. O raio polar é $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Para determinar o argumento polar estudamos os seguintes casos:

a) Se $x \neq 0$, do fato de $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, deduzimos que

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) + k\pi,$$

onde

$$k = \begin{cases} 0, & \text{para } x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 1, & \text{para } x < 0 \text{ e } y \text{ é qualquer valor} \\ 2, & \text{para } x > 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

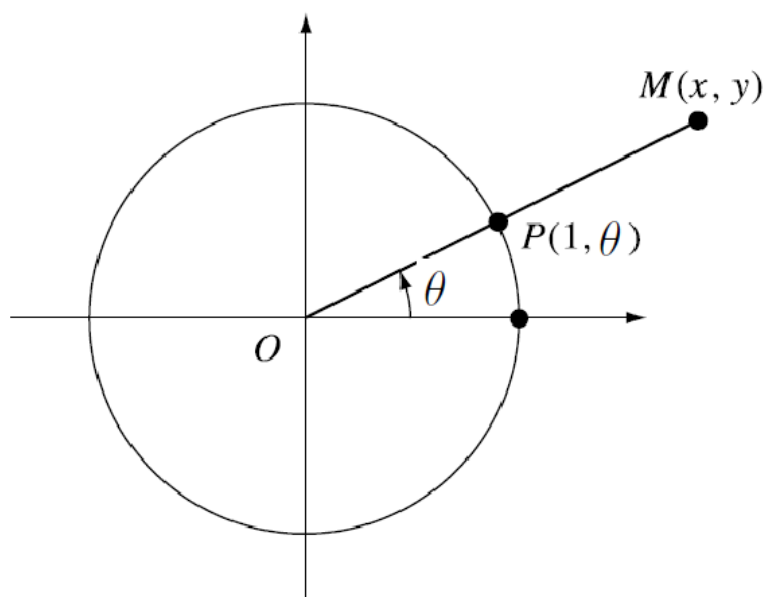


Figura 2.1: Coordenadas polares.

b) Se $x = 0$ e $y \neq 0$, então

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{para } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{para } y < 0. \end{cases}$$

Exercício 2.1 Determinar as coordenadas polares dos pontos

$M_1 = (2, -2)$, $M_2 = (-1, 0)$, $M_3 = (-2\sqrt{3}, -2)$, $M_4 = (\sqrt{3}, 1)$, $M_5 = (3, 0)$ e $M_6 = (-2, 2)$.

Solução: Neste caso, temos $r_1 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; $\theta_1 = \arctg(-1) + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$, de modo que $M_1 = \left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Para M_2 Temos $r_2 = 1$; $\theta_2 = \arctg(0) + \pi = \pi$, então $M_2 = (1, \pi)$.

Para M_3 Temos $r_3 = 4$; $\theta_3 = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$, de modo que $M_3 = \left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$.

Para M_4 Temos $r_4 = 2$; $\theta_4 = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$, logo $M_4 = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$.

Para M_5 Temos $r_5 = 3$; $\theta_5 = \arctg(0) + 0 = 0$, de modo que $M_5 = (3, 0)$.

Para M_6 Temos $r_6 = 2$; $\theta_6 = \arctg(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, então $M_6 = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Exercício 2.2 Vamos encontrar as coordenadas cartesianas dos pontos

$$M_1 = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right), M_2 = \left(3, \frac{7\pi}{4}\right) \text{ e } M_3 = (1, 1).$$

Solução: Temos

$$x_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad y_1 = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

de modo que $M_1 = (-1, \sqrt{3})$.

Nota-se que

$$x_2 = 3 \cos\frac{7\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = 3 \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -3\frac{\sqrt{2}}{2},$$

de modo que $M_2 = \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}, -3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Temos $x_3 = \cos 1, y_3 = \operatorname{sen} 1$, portanto, $M_3 = (\cos 1, \operatorname{sen} 1)$.

2.1.1 A representação polar de um número complexo

Para um número complexo $z = x + yi$, podemos escrever a representação polar

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

onde $r \in [0, \infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ são as coordenadas polares da imagem geométrica de z .

Definição 2.1 O argumento polar θ da imagem geométrica de z é chamado de **argumento** de z , denotado por $\operatorname{Arg} z$.

Definição 2.2 O módulo de z é igual o **raio** r polar da imagem geométrica de z , para $z \neq 0$.

O módulo e o argumento de z estão unicamente determinados¹.

Considere $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e tomando $\phi = \theta + 2k\pi$ para um inteiro k , temos

$$z_k = r[\cos(\theta - 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta - 2k\pi)] = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = z,$$

isto é, qualquer número complexo z_k pode ser representada como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, em que $r \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3 O conjunto $\operatorname{Arg}(z) = \{\phi : \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ é chamado de **argumento prolongado** do número z .

¹A menos de congruência, quando $\theta \in \mathbb{R}$.

Portanto, os dois números complexos $z_1, z_2 \neq 0$ representados como $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ são iguais se, e somente se, $r_1 = r_2$ e $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, para algum número inteiro k .

Exercício 2.3 *Faça a representação polar do número $z = -1 - i$, e determine o seu argumento prolongado.*

Solução: Tal como na figura a seguir, a imagem geométrica $P_1 = (-1, -1)$ encontra-se no terceiro quadrante. Então $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e $\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg} 1 + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Portanto,

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right)$$

e

$$\operatorname{Arg} z_1 = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

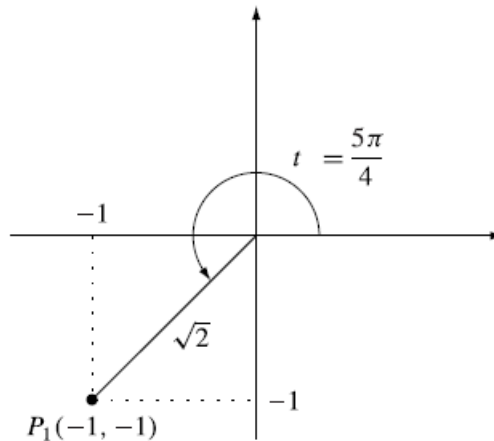


Figura 2.2: Representação polar de z .

Observação: 2.1 *Podemos observar que a representação polar dos números complexos $1, i, -1, -i$ são:*

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0; & i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}; \\ -1 &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi; & -i &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

2.1.2 Operações com números complexos na representação polar

A seguir, mostraremos como multiplicar números complexos na forma polar e posteriormente veremos que essa operação é muito vantajosa para o cálculo de potência inteiras de um complexo qualquer.

Proposição 2.1 (Multiplicação na forma polar) Se $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \quad (2.1)$$

Demonstração: Nota-se que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

■

Observação 2.2 a) Podemos notar que $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

b) Temos que $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 - 2k\pi$, onde

$$k = \begin{cases} 0, & \text{para } \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 < 2\pi, \\ 1, & \text{para } \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \geq 2\pi. \end{cases}$$

c) Também podemos escrever $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

d) A fórmula (2.1) pode ser estendida para qualquer número complexo, com $n \geq 2$. Isto é, se $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k)$, $k = 1, \dots, n$, então

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)).$$

A prova é por indução matemática e é imediata. Essa expressão pode ser escrita da seguinte forma

$$\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n r_k \left(\cos \sum_{k=1}^n \theta_k + i \operatorname{sen} \sum_{k=1}^n \theta_k \right).$$

Exemplo 2.1 Dados $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = \sqrt{3} + i$. Então

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right), z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$$

e

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{23\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{23\pi}{12} \right) \right) \end{aligned}$$

A potência de um número complexo

A **Fórmula de Moivre**² a seguir nos mostra como encontrar um número complexo elevado a uma potência natural.

Proposição 2.2 (Fórmula de Moivre) Se $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \quad (2.2)$$

Demonstração: Aplicando a fórmula (2.1) para $z = z_1 = z_2 = \dots = z_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} z_n &= \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n \text{ VEZES}} (\cos(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ VEZES}}) + i \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}_{n \text{ VEZES}})) \\ &= r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \end{aligned}$$

■

Exercício 2.4 Calcular o número complexo $(1 + i)^{1000}$.

Solução: A forma polar do número $1 + i$ é

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right).$$

Aplicando a Fórmula de Moivre, obtemos

$$\begin{aligned} (1 + i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000} \left(\cos 1000 \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} 1000 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2^{500} (\cos 250\pi + i \operatorname{sen} 250\pi) \\ &= 2^{500} (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2^{500}. \end{aligned}$$

A proposição a seguir mostra como podemos efetuar a divisão de dois números complexos na forma polar. Uma boa consequência dela é a expansão da Fórmula de Moivre para números inteiros negativos com veremos em seguida.

Proposição 2.3 (Divisão na forma polar) Se $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \neq 0$, então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \quad (2.3)$$

²Abraham de Moivre (1667-1754)

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

■

Observação: 2.3 a) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

b) $\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \{\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

c) Para $z_1 = 1$ e $z_2 = z$,

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta));$$

d) A Fórmula de Moivre também é válida para números inteiros negativos, isto é,

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Exercício 2.5 Dados os números complexos $z_1 = \sqrt{3} + i$ e $z_2 = 1 - i$, determine $\frac{z_2}{z_1}$.

Solução: A forma polar de z_1 e z_2 são

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \text{ e } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right).$$

Aplicado a fórmula (2.3), temos que

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{-2\pi}{12} \right) \right). \end{aligned}$$

2.1.3 Interpretação geométrica da multiplicação

Considerando os números complexos

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

e os seus pontos correspondentes no plano $M_1 = (r_1, \theta_1)$, $M_2 = (r_2, \theta_2)$ (ver Figura 2.3). Considerando os pontos P_1, P_2 que são os pontos de intersecções entre o círculo $C(O; 1)$ com as semirretas $\overrightarrow{OM_1}$ e $\overrightarrow{OM_2}$. Agora, construímos o ponto $P_3 \in C(O; 1)$ que tenha o argumento polar $\theta_1 + \theta_2$ e marquemos o ponto $M_3 \in \overrightarrow{OP_3}$ tal que $\overline{OM_3} = \overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2}$. Seja z_3 o número complexo que tem as coordenadas do ponto M_3 . Assim, o ponto $M_3 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$ é a imagem geométrica do produto $z_1 \cdot z_2$.

Considerando o ponto A e a imagem geométrica do número complexo 1 , temos que

$$\frac{\overline{OM_3}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{1}$$

isto é,

$$\frac{\overline{OM_3}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OA}}$$

e $M_2 \widehat{O} M_3 = A \widehat{O} M_1$, (ver Figura 2.3) mostrando que os triângulos OAM_1 e OM_2M_3 são semelhantes.

Essa construção representa a imagem do quociente, note que a imagem de $\frac{z_3}{z_2}$ é M_1 .

Então, geometricamente, o ponto M_3 é obtido por uma rotação, no sentido positivo (anti-horário), de M_1 (ou M_2) de uma ângulo igual ao de z_2 (ou z_1).

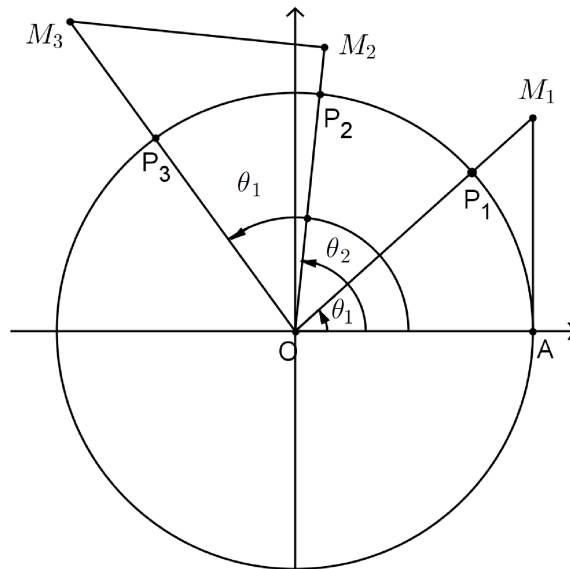


Figura 2.3: Imagem de $M_3(z_1 \cdot z_2)$.

2.2 As n raízes de um número complexo

A seguir vamos encontrar uma fórmula para determinar as n raízes de um número complexo. Em seguida será discutida uma interpretação geométrica para essas raízes.

2.2.1 Definição das n raízes de um número complexo

Daremos a seguir a definição de raiz n -ésima de um número complexo não nulo.

Definição 2.4 Considere um número inteiro positivo $n \geq 2$ e um número complexo $z_0 \neq 0$. As n -ésimas raízes de um número complexo z_0 são os números complexos w que satisfazem a equação

$$w^n = z_0 \quad (2.4)$$

Teorema 2.1 Seja $z_0 = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ um número complexo com $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Então o número z_0 tem n raízes distintas, dada pela fórmula

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demonstração: Considerando w e z_0 com suas representações trigonométricas

$$w = \rho(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \quad \text{e} \quad z_0 = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Da equação (2.4) temos que $w^n = z_0$, ou equivalentemente

$$\rho^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Obtemos que $\rho^n = r$ e $n\phi = \theta + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$; logo,

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{e} \quad \phi_k = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}.$$

Então as raízes da equação (2.4) são

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos \phi_k + i \operatorname{sen} \phi_k), \quad \text{para } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{onde } \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Agora, observamos que $0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n-1} < 2\pi$, logo os números

$$\phi_k, \quad \text{com } k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

são argumentos reduzidos, isto é, $\phi_k \in [0, 2\pi)$.

Podemos notar que as n raízes distintas de z_0 são w_0, w_1, \dots, w_{n-1} .

Considere os inteiros k e $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \geq 2$, tal que $k = nq + j$ para $q \in \mathbb{Z}$, ou seja, j é o resto da divisão de k por n . Segue que

$$\phi_k = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + (nq + j) \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2q\pi + j \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + j \frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \phi_j + 2q\pi.$$

Isto é, $w_k = w_j$, de modo que

$$\{w_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}.$$

Em outras palavras, temos exatamente n raízes distintas de z_0 , como queríamos provar. ■

As imagens geométricas das n raízes de um número complexo são vértices de um polígono regular de n lados inscrito num círculo com centro na origem e raio igual a $\sqrt[n]{r}$.

Para vermos isto, basta notar que M_0, M_1, \dots, M_{n-1} são pontos com coordenadas complexas w_0, w_1, \dots, w_{n-1} . Logo, temos $\overline{OM_k} = |w_k| = \sqrt[n]{r}$ para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, de modo que o ponto $M_k \in C(O; \sqrt[n]{r})$. Por outro lado o arco $\widehat{M_k M_{k+1}}$ é igual a

$$\text{Arg } w_{k+1} - \text{Arg } w_k = \frac{\theta + 2(k+1)\pi - (\theta + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ e o arco $\widehat{M_{n-1} M_0}$ é

$$\frac{2\pi}{n} = 2\pi - \frac{(n-1)2\pi}{n}.$$

Então, todos os arcos $\widehat{M_0 M_1}, \widehat{M_1 M_2}, \dots, \widehat{M_{n-1} M_0}$ são iguais. Assim, o polígono $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ é regular.

Exercício 2.6 *Encontre as três raízes cúbicas do número $z = 1 + i$ e represente no plano complexo.*

Solução: A representação polar de $z = 1 + i$ é

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sen \frac{\pi}{4} \right).$$

Assim, as raízes cúbicas do número z são

$$w_k = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \left(\sen \frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

para $k = 0, 1, 2$, ou de forma explícita,

$$w_0 = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \left(\sen \frac{\pi}{12} \right) \right],$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \left(\sen \frac{3\pi}{4} \right) \right],$$

e

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \left(\operatorname{sen} \frac{17\pi}{12} \right) \right].$$

Usando as coordenadas polares, as imagens geométricas dos números w_0, w_1, w_2 são

$$M_0 = \left(\sqrt[6]{2}, \frac{\pi}{12} \right), \quad M_1 = \left(\sqrt[6]{2}, \frac{3\pi}{4} \right), \quad M_2 = \left(\sqrt[6]{2}, \frac{17\pi}{12} \right).$$

A figura (2.4) apresenta um triângulo equilátero determinado pelos pontos M_0, M_1 e M_2 .

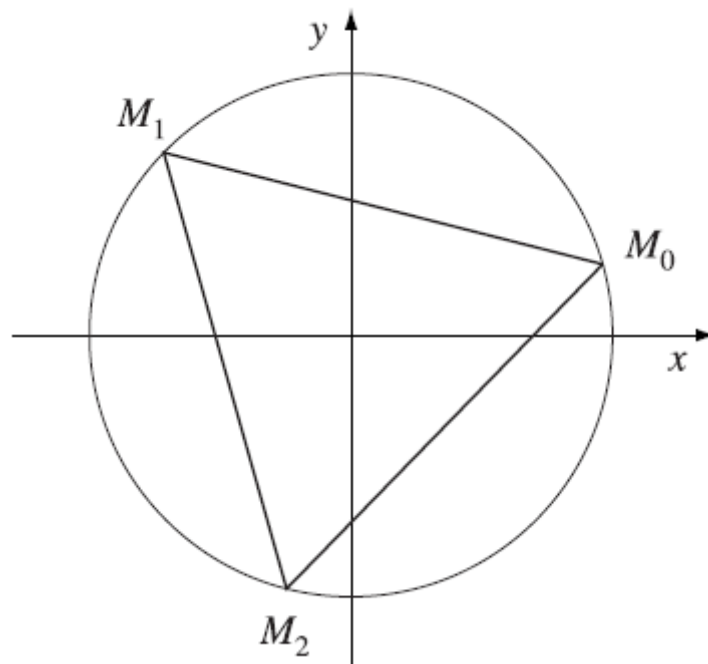


Figura 2.4: Triângulo equilátero $M_0M_1M_2$.

Capítulo 3

Aplicações dos Números Complexos à Geometria

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos dos números complexos para resolver problemas geométricos. A estrutura dos números complexos nos possibilita certas vantagens em resolver esses problemas. Mas antes, devemos ver algumas noções geo-métricas simples e propriedades, assim como suas relações com os números complexos no plano.

3.1 Algumas noções geométricas simples e propriedades

A seguir definiremos alguns conceitos e faremo as devidas demonstrações de alguns resultados que será utilizado nas resoluções dos problemas geométricos. Vamos usar a notação dos números complexos, e a rica interpretação geométrica que esses têm, para solucionar tais questões.

3.1.1 Distância entre dois números complexos

Definição 3.1 *Dado dois números complexos z_1 e z_2 que têm os pontos M_1 e M_2 como suas imagens geométricas, definimos a **distância** entres eles como sendo o comprimento $\overline{M_1M_2}$, que pode se calculado por*

$$\overline{M_1M_2} = |z_1 - z_2|.$$

Estaremos representando a distância entre dois números complexos por $d(z_1, z_2)$. Assim, definimos a função d como segue:

Definição 3.2 *A função*

$$\begin{aligned} d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\mapsto d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

definem a distância entre os números complexos z_1 e z_2 .

A função d é chamada **função distância** e tem as seguintes propriedades:

a) (Positiva e não degenerada)

$$d(z_1, z_2) \geq 0, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

$$d(z_1, z_2) = 0 \text{ se, e somente se, } z_1 = z_2.$$

b) (simétrica)

$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

c) (Desigualdade triangular)

$$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Vamos justificar essas propriedades.

Os itens a) e b) se verificam pela definição de módulo de um número complexo.

Para provar o item c) precisamos apenas notar que

$$|z_1 - z_3| = |z_1 - z_2 + z_2 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|,$$

e aplicar as propriedades de módulo.

A igualdade será válida se, e somente se, existir um número real positivo k , tal que

$$z_2 - z_1 = k(z_3 - z_2).$$

Para verificar isso basta ver a observação (A.1) na página 73.

3.1.2 Segmentos e retas

A seguir daremos uma definição para avaliar quando as coordenadas complexas de um ponto está entre um segmento.

Definição 3.3 *Dados dois pontos A e B , com coordenadas complexas a e b , dizemos que um ponto M , com coordenada complexa z , ($z \neq a, z \neq b$), está entre A e B se conseguimos verificar a relação*

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|.$$

Usamos a notação $A - M - B$, para representar que o ponto M está entre A e B .

Definição 3.4 (Segmento aberto e segmento fechado)

1. O conjunto

$$(AB) = \{M; A - M - B\}$$

será chamado de **segmento aberto** determinado pelos pontos A e B , mas que não os contém.

2. O conjunto

$$[AB] = \{M; A - M - B\} \cup \{A, B\}$$

será chamado de **segmento fechado** determinado pelos pontos A e B , contendo esses dois pontos inclusive.

Teorema 3.1 *Supondo que $A(a)$ e $B(b)$ são dois pontos relacionados aos números complexos a e b . As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $M(z) \in (AB)$;
2. Existe um número real positivo k tal que $z - a = k(b - z)$;
3. Existe um número real $t \in (0, 1)$ tal que $z = (1 - t)a + tb$, onde z é coordenada complexa de M .

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que (1) e (2) são equivalentes. Para isso, temos que $|a - z| + |z - b| = |a - b|$, isto é o mesmo que $d(a, z) + d(z, b) = d(a, b)$. O que é equivalente a dizer que existe um número real positivo k , tal que $z - a = k(b - z)$ (ver observação (c) da definição 3.2) na página 30).

Para mostrar que (2) e (3) são equivalentes temos que tomar $t = \frac{k}{k+1} \in (0, 1)$. (assim $k = \frac{t}{1-t} > 0$). Então, temos que $z - a = k(b - z)$ é equivalente a $z = \left(\frac{1}{k+1}\right)a + \frac{k}{k+1}b$. Portanto, $z = (1 - t)a + tb$, como queríamos mostrar. ■

Exercício 3.1 *Verificar se o ponto $M(z)$, com $z = \frac{7}{5} + \frac{21}{5}i$, pertence ao conjunto (AB) , onde $A(1 + 3i)$ e $B(2 + 6i)$.*

Solução: Sejam $a = 1 + 3i$ e $b = 2 + 6i$, temos que

$$z - a = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i \quad \text{e} \quad b - z = \frac{3}{5} + \frac{9}{5}i.$$

Assim, temos que $z - a = \frac{2}{3}(b - z)$, então, o Teorema (3.1) garante que $M(z) \in (AB)$.

Definição 3.5 (Semirreta) *O conjunto*

$$(AB = \{M; A - M - B \text{ ou } A - B - M\}$$

*será chamado de **semirreta** com origem em A e contendo B .*

Teorema 3.2 *Suponha que $A(a)$ e $B(b)$ são dois pontos distintos relacionados aos números complexos a e b . As relações a seguir são equivalentes:*

1. $M \in (AB)$;
2. Existe um número real positivo t , tal que $z = (1-t)a + tb$, em que z é o número complexo cuja sua imagem geométrica é o ponto M ;
3. $\text{Arg}(z-a) = \text{Arg}(b-a)$;
4. $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: 1) \implies 2). Tomando $M \in (AB)$, temos $A-M-B$ ou $A-B-M$. Pelo Teorema (3.1), existem números $t, l \in (0, 1)$ de tal forma que

$$z = (1-t)a + tb \quad \text{ou} \quad b = (1-l)a + lz.$$

Faremos para o primeiro caso; pois para o segundo caso basta tomar $t = \frac{1}{l}$, assim

$$z = tb - (t-1)a = (1-t)a + tb.$$

Como queríamos mostrar.

2) \implies 3). De $z = (1-t)a + tb$, $t > 0$, obtemos

$$z - a = t(b - a), \quad t > 0.$$

Portanto,

$$\text{Arg}(z-a) = \text{Arg}(b-a).$$

3) \implies 4). A relação

$$\text{Arg}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) = \text{Arg}(z-a) - \text{Arg}(b-a) + 2k\pi$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, implica

$$\text{Arg}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tomando, $\text{Arg}\left(\frac{z-a}{b-a}\right) \in [0, 2\pi)$, segue que $k = 0$ e $\text{Arg}\frac{z-a}{b-a} = 0$. Assim, $\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^+$, como desejado.

4) \implies 1). Considerando $t = \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$z = a + t(b-a) = (1-t)a + tb, \quad t > 0.$$

Se $t \in (0, 1)$, então $M \in (AB) \subset (AB)$.

Se $t = 1$, então $z = b$ e $M = B \in (AB)$.

Finalmente, se $t > 1$, então, tomando $l = \frac{1}{t} \in (0, 1)$, temos

$$b = lz + (1 - l)a.$$

Segue que $A - B - M$ e $M \in (AB)$. O que completa a demonstração. ■

Teorema 3.3 *Suponha que $A(a)$ e $B(b)$ são dois pontos distintos relacionados aos números complexos a e b . As relações a seguir são equivalentes¹:*

1. $M(z) \in \overleftrightarrow{AB}$.
2. $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$.
3. Existe um número real t , tal que $z = (1 - t)a + tb$.
4. $\det \begin{bmatrix} z - a & \bar{z} - \bar{a} \\ b - a & \bar{b} - \bar{a} \end{bmatrix} = 0$.
5. $\det \begin{bmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Demonstração: Para obter as equivalências $1) \iff 2) \iff 3)$ observa-se que, para um ponto C tal que $C - A - B$ (isto é, A está entre B e C), a reta \overleftrightarrow{AB} é a união $(AB \cup \{A\}) \cup (AC)$. Em seguida, aplicamos o Teorema (3.2).

Agora, mostraremos as equivalências $2) \iff 4) \iff 5)$.

Temos, $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\frac{z - a}{b - a} = \overline{\left(\frac{z - a}{b - a}\right)}$. Logo, usando as propriedades de conjugado, obtemos

$$\frac{z - a}{b - a} = \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}},$$

ou de forma equivalente,

$$\det \begin{bmatrix} z - a & \bar{z} - \bar{a} \\ b - a & \bar{b} - \bar{a} \end{bmatrix} = 0,$$

então obtemos que 2) é equivalente a 4). Por outro lado, temos

$$\det \begin{bmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{bmatrix} = 0$$

¹Usaremos a notação $\det A$ para representar o determinante de uma matriz A .

se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} z-a & \bar{z}-\bar{a} & 0 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

A última relação é equivalente a $\det \begin{bmatrix} z-a & \bar{z}-\bar{a} \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} \end{bmatrix} = 0$; assim obtemos que 4) é equivalente a 5), completando a demonstração. ■

Exercício 3.2 Considere os números complexos z_1, z_2 e z_3 , tais que tenhamos $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$. Mostre que o módulo do número $w = az_2 + (1-a)z_3 - z_1$, $a \in \mathbb{R}$, será o menor possível se for igual a $\frac{1}{2R}|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$.

Solução: Temos que mostrar que

$$\min_{a \in \mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2R}|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|.$$

Sabemos que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$. Assim, os números complexos z_1, z_2 e z_3 representados pelos pontos A_1, A_2 e A_3 sobre um plano complexo estão sobre uma circunferência de raio R e centro na origem desse plano. Para auxiliar, consideremos o número complexo $z = az_2 + (1-a)z_3$, $a \in \mathbb{R}$, que é representado pelo ponto A na Figura (3.1), logo

$$\min_{a \in \mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \min_{a \in \mathbb{R}} |z - z_1|.$$

Notemos que o ponto A é colinear como os pontos A_2 e A_3 , pois $z = az_2 + (1-a)z_3$ (ver Teorema (3.3)). Dessa forma devemos mostrar qual ponto A , sobre a reta determinada pelos pontos A_2 e A_3 , fará a menor distância com o ponto A_1 . Sabemos que essa distância tem que ser a altura do triângulo $A_1A_2A_3$, relativa ao vértice A_1 . Segue que, sendo A_1A a altura do triângulo², então:

$$\begin{aligned} \min_{a \in \mathbb{R}} |z - z_1| = d(A_1, A) &= \frac{2 \cdot \text{área}(A_1A_2A_3)}{d(A_2, A_3)} \\ &= \frac{2 \frac{d(A_1, A_2)d(A_1, A_3)d(A_2, A_3)}{4R}}{d(A_2, A_3)} \\ &= \frac{1}{2R}|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

²Um triângulo circunscrito num círculo de raio R e com as medidas dos lado sendo a, b , e c tem área igual a $\frac{abc}{4R}$.

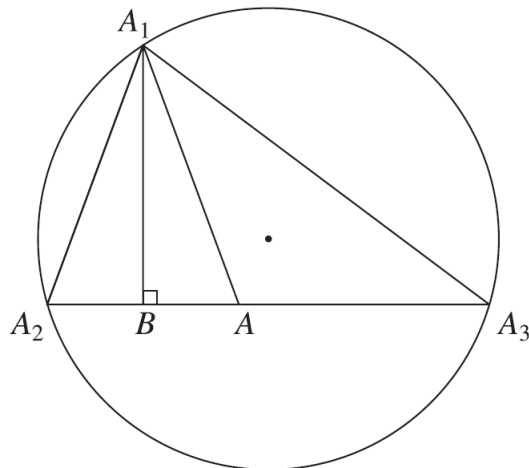


Figura 3.1: Circunferência de raio R circunscrita ao triângulo $A_1A_2A_3$

3.1.3 Dividir um segmento dada a razão

Considerando dois pontos distintos $A(a)$ e $B(b)$ associados aos números complexos a e b . Um ponto $M(z)$, sobre AB , divide o segmento AB na **razão** $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se for verificada a seguinte relação vetorial:

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Em termos de números complexos esta relação pode ser escrita como

$$a - z = k(b - z) \text{ ou } (1 - k)z = a - kb.$$

Assim, obtemos:

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}.$$

Observação: 3.1 Vejamos que para $k < 0$, o ponto M está sobre o segmento de reta que une os pontos A e B . Se $k \in (0, 1)$, então $M \in (AB \setminus [AB])$. Finalmente, se $k > 1$, então $M \in (BA \setminus [AB])$ (ver figura 3.2).

Como consequência, note que para $k = -1$, obtemos que a coordenada do ponto médio do segmento $[AB]$ que é dada por $z_M = \frac{a + b}{2}$.

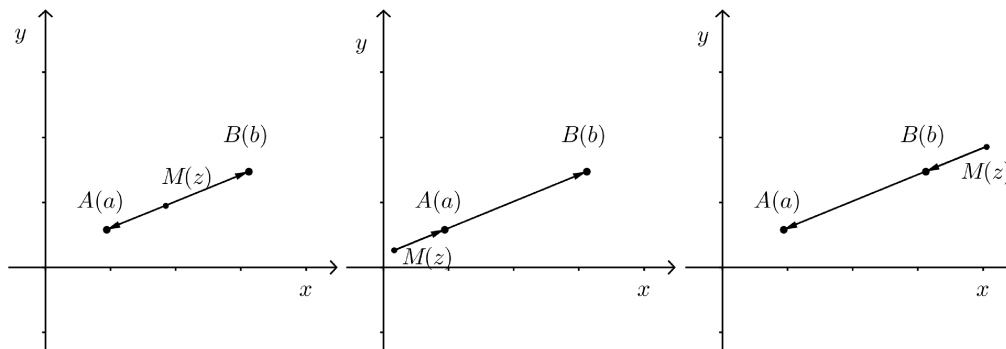


Figura 3.2: Para $k < 0$, $k \in (0, 1)$ e $k > 1$.

Exemplo 3.1 Sejam $A(a), B(b)$ e $C(c)$ pontos não colineares no plano complexo. Temos que o ponto médio M do segmento $[AB]$ tem coordenadas complexa $z_M = \frac{a+b}{2}$. O baricentro G do triângulo ABC divide a mediana $[CM]$ na razão de $2 : 1$, logo as suas coordenadas complexas são dadas quando $k = -2$, isto é, $z_G = \frac{c + 2z_M}{1 + 2} = \frac{a + b + c}{3}$.

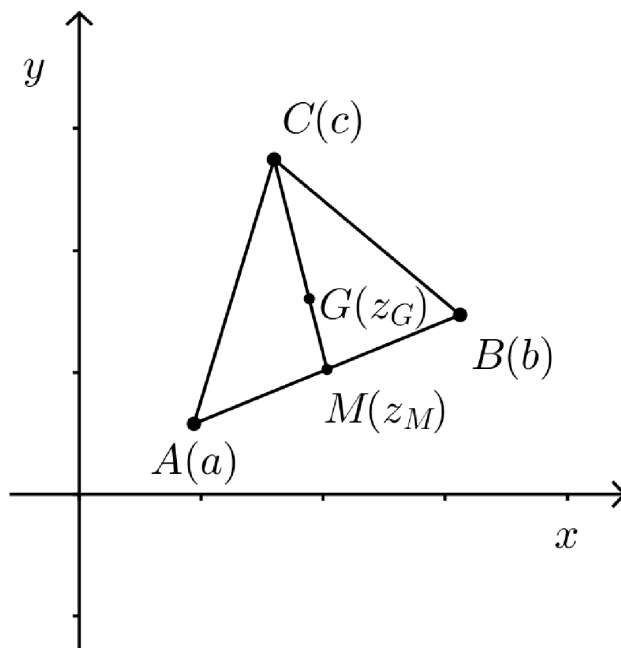


Figura 3.3: Ponto $G(z_G)$.

3.1.4 Medida de um ângulo

Dizemos que um triângulo é **orientado** se dermos uma ordem para seus vértices. Se os seus vértices são orientados no sentido anti-horário, dizemos que o triângulo está **orientado positivamente**³, caso contrário, dizemos que o triângulo está **orientado negativamente**.

³ou diretamente orientado.

Considere dois pontos distintos $M_1(z_1)$ e $M_2(z_2)$, e a origem de um plano complexo, também definimos que:

Definição 3.6 O ângulo $M_1\widehat{O}M_2$ é *diretamente orientado* se o pontos M_1 e M_2 são ordenados no sentido anti-horário (Figura 3.4).

Proposição 3.1 A medida do ângulo diretamente orientado $M_1\widehat{O}M_2$ é igual a $\text{Arg} \frac{z_2}{z_1}$.

Demonstração: Consideramos dois casos a seguir.

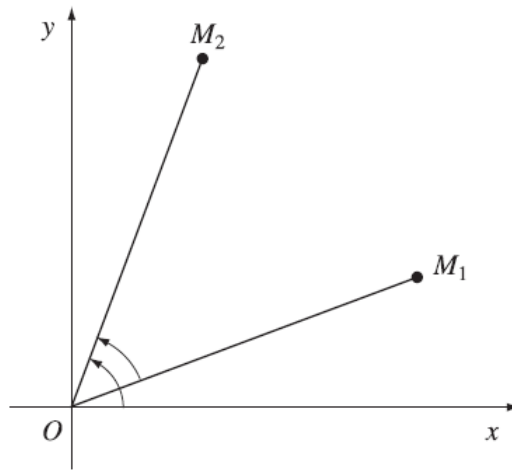


Figura 3.4: Triângulo M_1OM_2 orientado negativamente.

a) Se o triângulo M_1OM_2 é orientado negativamente (Figura 3.4), então

$$M_1\widehat{O}M_2 = x\widehat{O}M_2 - x\widehat{O}M_1 = \text{Arg } z_2 - \text{Arg } z_1 = \text{Arg} \frac{z_2}{z_1}.$$

b) Se o triângulo M_1OM_2 é orientado positivamente (Figura 3.5), então

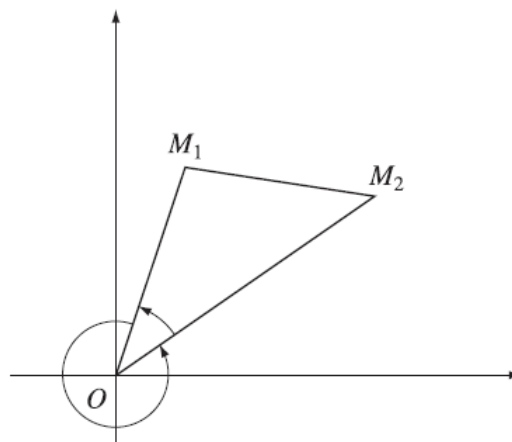


Figura 3.5: Triângulo M_1OM_2 orientado positivamente.

$$M_1 \widehat{O} M_2 = 2\pi - M_2 \widehat{O} M_1 = 2\pi - \text{Arg} \frac{z_1}{z_2},$$

uma vez que o ângulo $M_2 \widehat{O} M_1$ é diretamente orientado, temos

$$M_1 \widehat{O} M_2 = 2\pi - \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = 2\pi - \left(2\pi - \text{Arg} \frac{z_2}{z_1} \right) = \text{Arg} \frac{z_2}{z_1},$$

como queríamos mostrar. ■

Observação: 3.2 O resultado também é válido se os pontos O , M_1 e M_2 são colineares.

Exemplo 3.2 Considere que $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 + i$. Então, (ver figura 3.6).

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-1 + i}{1 + i} = \frac{(-1 + i)(1 - i)}{2} = i,$$

de modo que,

$$M_1 \widehat{O} M_2 = \text{Arg} i = \frac{\pi}{2} \quad e \quad M_2 \widehat{O} M_1 = \text{Arg} (-i) = \frac{3\pi}{2}.$$

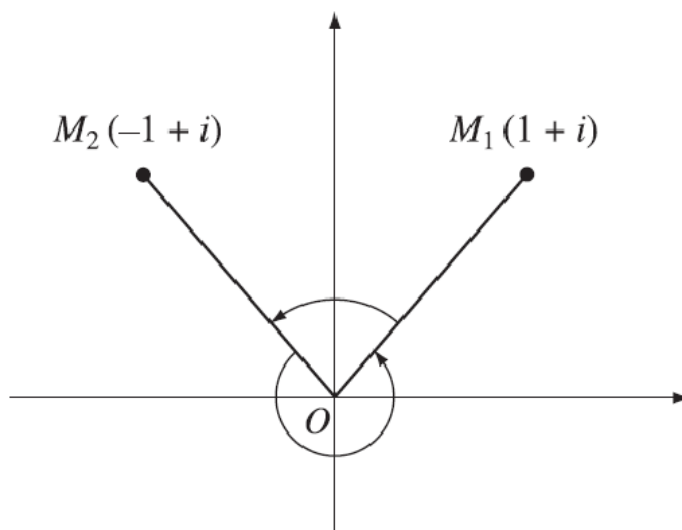


Figura 3.6: Ângulo $M_1 \widehat{O} M_2$.

Exemplo 3.3 Sejam $z_1 = i$ e $z_2 = 1$. Logo, $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{i} = -i$, então (ver figura 3.7)

$$M_1 \widehat{O} M_2 = \text{Arg} (-i) = \frac{3\pi}{2} \quad e \quad M_2 \widehat{O} M_1 = \text{Arg} (i) = \frac{\pi}{2}.$$

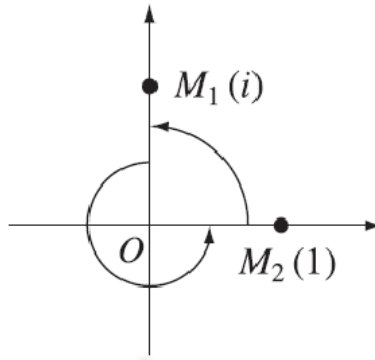


Figura 3.7: Ângulo reto $M_1\widehat{O}M_2$.

Teorema 3.4 Considere três pontos distintos $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ e $M_3(z_3)$. A medida do ângulo $M_2\widehat{M}_1M_3$ diretamente orientado é $\text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Demonstração: A translação com o vetor $-z_1$ dos pontos M_1 , M_2 e M_3 para os pontos O, M'_2, M'_3 , nos dá as coordenadas complexas $0, z_2 - z_1, z_3 - z_1$. Por outro lado

$$M_2\widehat{M}_1M_3 = M'_2\widehat{O}M'_3.$$

Pelo resultado anterior, obtemos

$$M'_2\widehat{O}M'_3 = \text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1},$$

como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 3.4 Considerando $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 4 + 7i$ e $z_3 = 8 + 7i$. Temos

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{4i}{4 + 4i} = \frac{i(1 - i)}{2} = \frac{1 + i}{2},$$

assim

$$M_3\widehat{M}_1M_2 = \text{Arg} \frac{1 + i}{2} = \frac{\pi}{4}$$

e

$$M_2\widehat{M}_1M_3 = \text{Arg} \frac{2}{1 + i} = \text{Arg} (1 - i) = \frac{7\pi}{4}.$$

3.1.5 Ângulo entre duas retas

Vamos considerar agora ângulos formados por duas retas determinadas por quatro pontos distintos e não colineares do plano complexo. Sabemos que duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, mas, da geometria euclidiana, sabemos que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Por isso nos deteremos em encontrar os dois ângulos que não são opostos pelo vértice. Assim segue a proposição:

Proposição 3.2 Considere quatro pontos distintos $M_i(z_i), i \in \{1, 2, 3, 4\}$. A **medida do ângulo determinado pelas retas $\overleftrightarrow{M_1M_3}$ e $\overleftrightarrow{M_2M_4}$** é igual a $\alpha = \text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$ ou $\beta = \text{Arg} \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$.

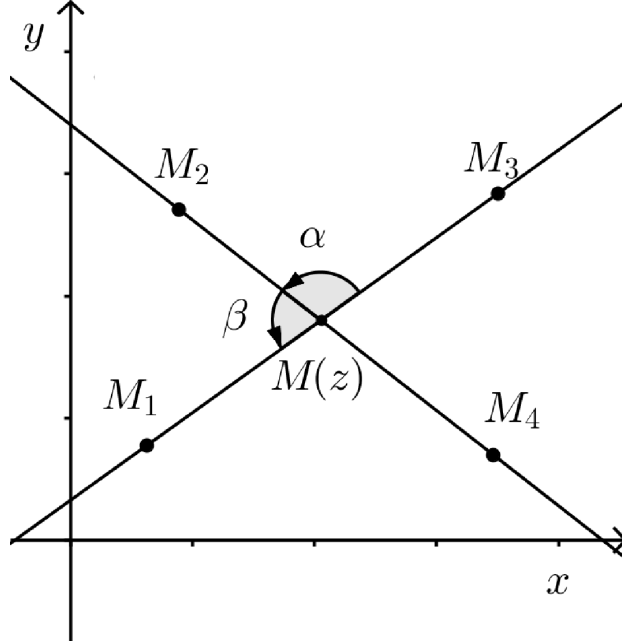


Figura 3.8: Ângulos entre retas.

Demonstração: Sendo $M(z)$ o ponto de intersecção das retas $\overleftrightarrow{M_1M_3}$ e $\overleftrightarrow{M_2M_4}$ com coordenada complexa z , temos

$$z = (1-t)z_1 + tz_3$$

e

$$z = (1-l)z_2 + lz_4,$$

com $t, l \in \mathbb{R}^+$.

Como,

$$\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = \frac{z_2 - z_2(1-l) - lz_4}{z_1 - z_1(1-t) - tz_3} = \frac{-l}{-t} \left(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1} \right),$$

segue que a medida do ângulo determinado pelas retas $\overleftrightarrow{M_1M_3}$ e $\overleftrightarrow{M_2M_4}$ é

$$M_1 \widehat{M} M_2 = \text{Arg} \frac{z_2 - z}{z_1 - z} = \text{Arg} \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1},$$

ou, então:

$$\frac{z_3 - z}{z_2 - z} = \frac{z_3 - z_1(1-t) - tz_3}{z_2 - z_2(1-l) - lz_4} = \frac{1+t}{l} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} \right),$$

o que implica em

$$M_2 \widehat{M} M_3 = \text{Arg} \frac{z_3 - z}{z_2 - z} = \text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

■

Exercício 3.3 Determine os ângulos entre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} , onde as coordenadas complexas dos pontos A, B, C e D são $a = 2, b = 2 + 2i, c = -2$ e $d = 2i$, respectivamente.

Solução: Pela discussão anterior o ângulo procurado é $\text{Arg} \frac{b-a}{d-c}$ ou $\text{Arg} \frac{d-c}{b-a}$. Logo, temos o ângulo entre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} , é

$$\text{Arg} \frac{2+2i-4}{2i+2} = \text{Arg} \frac{-1+i}{1+i} = \text{Arg}(-i) \text{ ou } \text{Arg} \frac{2i+2}{2+2i-4} = \text{Arg} \frac{1+i}{-1+i} = \text{Arg}(i).$$

Portanto, os ângulos entre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} são de 90° .

3.1.6 Rotação de um ponto

Considere um ângulo α e o número complexo determinado por

$$\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Seja $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ um número complexo e M sua imagem geométrica. O produto

$$z\varepsilon = r(\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha))$$

é tal que $|z\varepsilon| = r$ e $\text{Arg}(z\varepsilon) = \text{Arg}(z) + \alpha$.

Sendo M' a imagem geométrica de $z\varepsilon$, tem que M' é a rotação de M em relação a origem pelo ângulo α .

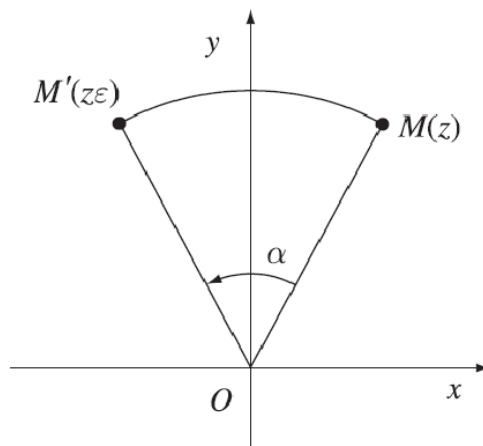


Figura 3.9: Rotação do ponto M .

Ficaremos agora com o resultado que nos dá uma **fórmula de rotação**.

Proposição 3.3 *Suponha que o ponto C é a rotação de B em relação a A pelo o ângulo α . Se a, b, c são as coordenadas complexas dos pontos A, B, C , respectivamente, então:*

$$c = a + (b - a)\varepsilon, \text{ onde } \varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Demonstração: Fazendo uma translação⁴ dos pontos A, B, C para os pontos O, A', B' , com coordenadas complexas $0, b - a, c - a$, respectivamente (ver Figura 3.10).

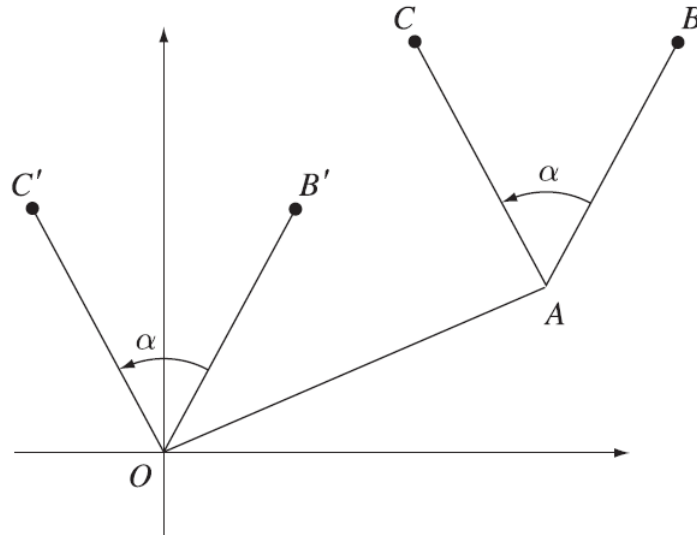


Figura 3.10: Rotação de B em relação A por um ângulo α .

O ponto C' é a imagem da rotação de B' em torno da origem de um ângulo α , de modo que

$$c - a = (b - a)\varepsilon, \text{ ou } c = a + (b - a)\varepsilon,$$

como desejávamos demonstrar. ■

Exercício 3.4 *Determine as coordenadas do ponto B sabendo que ele é a rotação de $A(z_1)$ em relação a $C(z_2)$ do ângulo $\frac{\pi}{3}$, onde $z_1 = 6 + 2i$ e $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.*

Solução: Seja z a coordenada complexa de B . Assim, pela Proposição (3.3), temos:

$$\begin{aligned} z &= z_2 + (z_1 - z_2)\varepsilon \\ &= 1 + \sqrt{3}i + (6 + 2i - 1 - \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 1 + \sqrt{3}i + (5 + (2 - \sqrt{3})i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= (5 - \sqrt{3}) + (3\sqrt{3} + 2)i. \end{aligned}$$

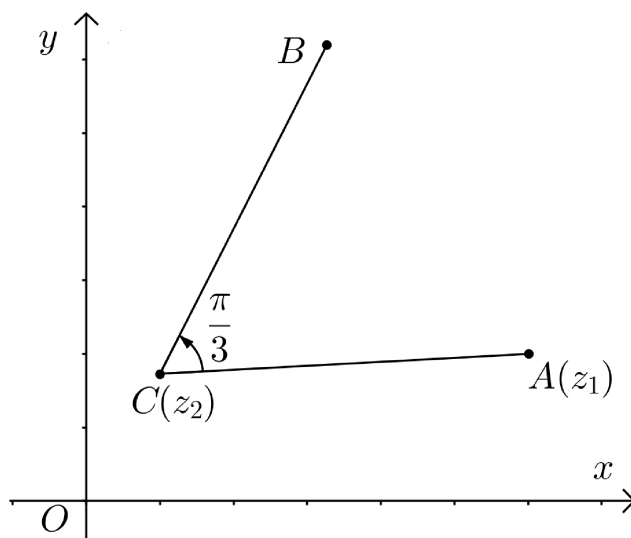


Figura 3.11: Ponto B do Exercício 3.4

Exercício 3.5 *Sejam $ABCD$ e $BNMK$ dois quadrados que não se sobrepõem e seja E o ponto médio do segmento AN . Se o ponto F é o pé da perpendicular de B para a reta determinada pelos pontos C e K , provar que os pontos E, F, B são colineares.*

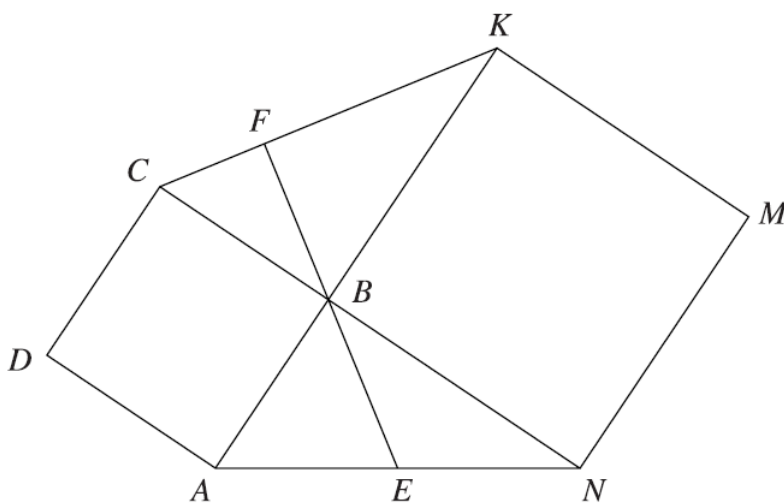


Figura 3.12: Quadriláteros $ABCD$ e $BNMK$.

Solução: Considere o plano complexo com origem em F e eixos em \overleftrightarrow{CK} e \overleftrightarrow{FB} , onde \overleftrightarrow{FB} é o eixo imaginário. Sejam c, k, bi as coordenadas complexas dos pontos C, K, B com $c, k, b \in \mathbb{R}$. O ponto C é a rotação de A em relação a B por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, então A tem as coordenadas

⁴Uma translação transfere objetos geométricos de uma posição para outra sem alterar suas propriedades.

complexas $a = b(1 + i) - ci$, pela Proposição (3.3). De fato,

$$\begin{aligned} c - bi &= (a - bi)\varepsilon \\ &= (a - bi)\left(\cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}i\right) \\ &= ai + b \\ \implies a &= b(1 + i) - ci. \end{aligned}$$

Da mesma forma, o ponto N é a rotação de K em relação a B por um ângulo $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ e a sua coordenada complexa é

$$n = b(1 - i) - ki.$$

O ponto médio E do segmento AN tem coordenada complexa

$$e = \frac{a+n}{2} = \left(b - \frac{c+k}{2}\right)i,$$

por isso está contido na reta determinada pelos pontos F e B , como desejado (lembramos que \overleftrightarrow{FB} coincide com o eixo imaginário).

Exercício 3.6 Nos lados AB, BC, CD, DA de um quadrilátero $ABCD$, e exterior a ele, construimos quadrados de centros O_1, O_2, O_3, O_4 , respectivamente. Provar que

$$O_1O_3 \perp O_2O_4 \quad e \quad \overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}.$$

Solução: Sejam $ABMM', BCNN', CDPP'$ e $DAQQ'$ os quadrados construídos com os centros O_1, O_2, O_3, O_4 , respectivamente.

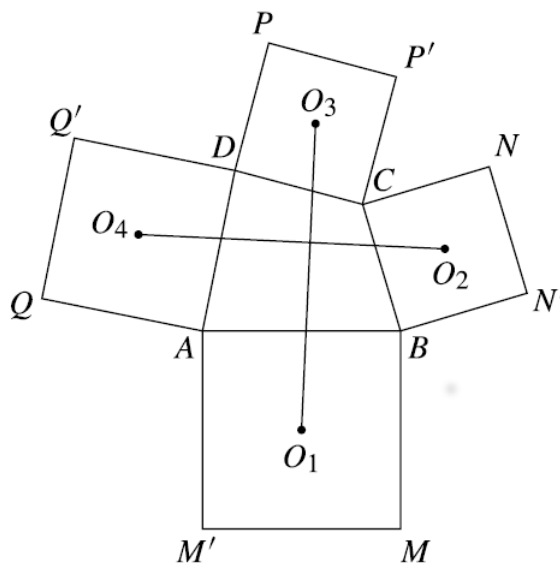


Figura 3.13: Quadriláteros do Exercício 3.6.

Denotemos por uma letra minúscula as coordenadas de cada um dos pontos indicados por um letra maiúscula, ou seja, o_1 é a coordenada de O_1 , etc.

O ponto M é obtido com a rotação de A em relação a B por um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$; portanto, $m = b + (a - b)i$. Da mesma forma,

$$n = c + (b - c)i, p = d + (c - d)i \text{ e } q = a + (d - a)i.$$

Sabemos que os pontos O_1, O_2, O_3 e O_4 são os pontos médios das diagonais AM, BN, CP e DQ , respectivamente. Logo, temos

$$o_1 = \frac{a + m}{2} = \frac{a + b + (a - b)i}{2}, \quad o_2 = \frac{b + c + (b - c)i}{2},$$

$$o_3 = \frac{c + d + (c - d)i}{2} \text{ e } o_4 = \frac{d + a + (d - a)i}{2}.$$

Donde segue que

$$\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} = \frac{c + d - a - b + i(c - d - a + b)}{a + d - b - c + i(d - a - b + c)} = -i \in i\mathbb{R}^*$$

(ou seja, $\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2}$ é um número complexo puro.)

Assim, $O_1O_3 \perp O_2O_4$. Além disso,

$$\left| \frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} \right| = |-i| = 1;$$

portanto, $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$, como queríamos mostrar.

Exercício 3.7 No exterior do triângulo ABC construímos triângulos ABR, BCP e CAQ tais que

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ,$$

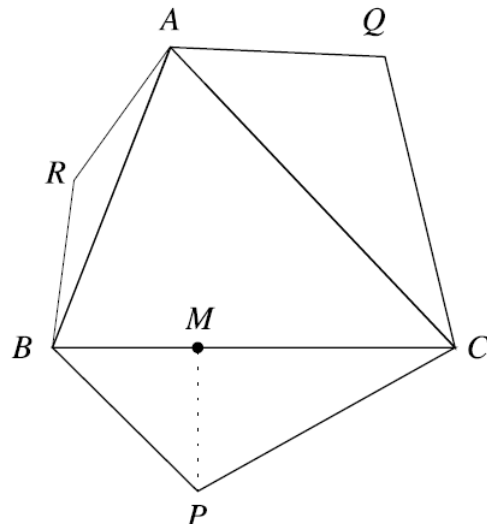
$$\widehat{BCP} = \widehat{ACQ} = 30^\circ,$$

e

$$\widehat{ABR} = \widehat{RAB} = 15^\circ.$$

Provar que

$$\widehat{QRP} = 90^\circ \text{ e } \overline{RQ} = \overline{RP}.$$



Solução: Considere o plano complexo, com origem no ponto R e seja M o pé da perpendicular de P sobre a reta determinada pelos pontos B e C .

Denotaremos com uma letra minúscula a coordenada de um ponto denotado por uma letra maiúscula. De $\overline{MP} = \overline{MB}$ e $\frac{\overline{MC}}{\overline{MP}} = \sqrt{3}$ segue que

$$\frac{p-m}{b-m} = i \quad \text{e} \quad \frac{c-m}{p-m} = i\sqrt{3};$$

segue que

$$p = \frac{c + \sqrt{3}b}{1 + \sqrt{3}} + \left(\frac{b-c}{1 + \sqrt{3}} \right) i.$$

Da mesma forma,

$$q = \frac{c + \sqrt{3}a}{1 + \sqrt{3}} + \left(\frac{a-c}{1 + \sqrt{3}} \right) i.$$

O ponto B é obtido com a rotação de um ângulo $\theta = 150^\circ$ do ponto A em torno de R , pois a soma dos ângulos internos do triângulo ABR somam 180° e como $\widehat{ABR} = \widehat{RAB} = 15^\circ$, logo $\widehat{ARB} = 150^\circ$. Assim,

$$b = a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

Com algumas manipulações algébricas encontramos que $\frac{p}{q} = i \in i\mathbb{R}^*$, com isso, temos que $QR \perp PR$. Além disso, $|p| = |iq| = |q|$, então $\overline{RP} = \overline{RQ}$. Concluindo o resultado desejado.

3.1.7 Condições para colinearidade, ortogonalidade e conciclicidade

Nesta seção, vamos considerar quatro pontos distintos $M_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e reunir condições para discutir a colinearidade de três destes pontos, a ortogonalidade das retas quando tomamos quatro pontos distintos e não colineares, e identificar quando os pontos são concíclicos.

Definição 3.7 Um conjunto de pontos é dito **concíclico** se eles estão sobre um círculo comum.

Proposição 3.4 Os pontos M_1, M_2, M_3 são colineares se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

Demonstração: A colinearidade dos pontos M_1, M_2, M_3 é equivalente a $\widehat{M_2M_1M_3} \in \{0, \pi\}$. Segue que o $\text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\}$ ou, equivalentemente, $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$, como queríamos demonstrar. ■

Exercício 3.8 *Mostrar que os pontos A, B, C , com coordenadas complexas $a = 1 + 8i, b = -1 - 2i$ e $c = -2 - 7i$, são colineares.*

Solução: Vejamos que

$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2+10i}{-1+5i} = 2 \in \mathbb{R}^*.$$

Portanto, pela Proposição (3.4), A, B, C , são colineares.

Proposição 3.5 *As retas $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ e $\overleftrightarrow{M_3M_4}$ são ortogonais se, e somente se,*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

Demonstração: Temos que $M_1M_2 \perp M_3M_4$ se, e somente se, o ângulo entre as retas $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ e $\overleftrightarrow{M_3M_4}$ pertencer ao conjunto $\left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$. Isso é equivalente a $\text{Arg} \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Assim, obtemos

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

■

Observação: 3.3 *Supondo que $M_2 = M_4$. Então, $M_1M_2 \perp M_3M_2$ se, e somente se, $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \in i\mathbb{R}^*$.*

Exemplo 3.5 *Considere os pontos $M_1(2 - i), M_2(-1 + 2i), M_3(-2 - i), M_4(1 + 2i)$. Assim, segue*

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{2 - i + 1 - 2i}{-2 - i - 1 - 2i} = \frac{1 - i}{-1 - i} = i,$$

e portanto $M_1M_2 \perp M_3M_4$.

Exercício 3.9 *Sejam z_1, z_2, z_3 as coordenadas dos vértices A, B, C de um triângulo. Se $w_1 = z_1 - z_2$ e $w_2 = z_3 - z_1$, provar que o ângulo no vértice A é de 90° se, e somente se, $\text{Re}(w_1 \cdot \overline{w_2}) = 0$.*

Solução: Temos $\hat{A} = 90^\circ$ ⁵ se, e somente se, $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in i\mathbb{R}$, o que é equivalente a $\frac{w_1}{-w_2} \in i\mathbb{R}$, ou seja, $\text{Re} \left(\frac{w_1}{-w_2} \right) = 0$. A última relação é equivalente a $\text{Re} \left(\frac{w_1 \cdot \overline{w_2}}{-w_2} \right) = 0$, isto é, $\text{Re}(w_1 \cdot \overline{w_2}) = 0$, como desejávamos mostrar.

Observação: 3.4 *Notar que o exemplo acima fornece uma fórmula para verificarmos quando um triângulo ABC é retângulo.*

⁵Usaremos a notação \hat{A} para representar o ângulo no vértice A .

Proposição 3.6 Os pontos distintos $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ são concíclicos ou colineares se, e somente se,

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

Demonstração: Suponha que os pontos são colineares. A Proposição (3.4) garante que $k \in \mathbb{R}^*$. Casos eles não sejam colineares, podemos arranjar os pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 em um círculo de $(4 - 1)! = 3! = 6$ maneiras diferentes. Consideremos o caso em que M_1, M_2, M_3, M_4 são dadas nessa ordem. Neste caso,⁶(ver Figura 3.14) M_1, M_2, M_3 e M_4 são concíclicos se, e somente se ⁷,

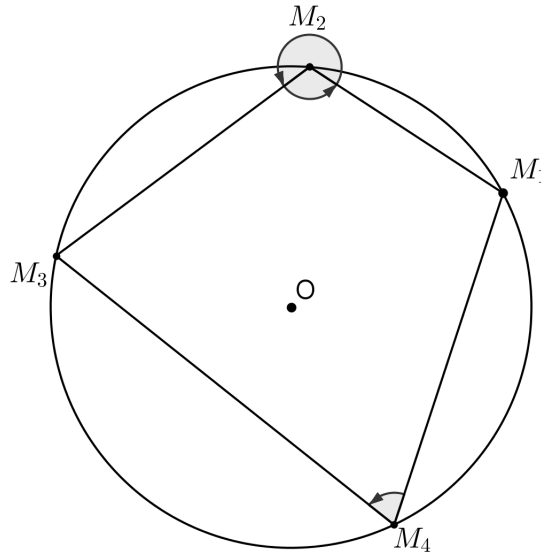


Figura 3.14: Pontos concíclicos M_1, M_2, M_3 e M_4 .

$$\widehat{M_1 M_2 M_3} + \widehat{M_1 M_4 M_3} \in \{3\pi, \pi\}.$$

Isto é,

$$\text{Arg} \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \text{Arg} \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \{3\pi, \pi\}.$$

Segue que

$$\text{Arg} \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right) - \text{Arg} \left(\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \in \{3\pi, \pi\},$$

$$\text{Arg} \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \right) \in \{3\pi, \pi\},$$

⁶Em outros casos, os ângulos envolvidos terão o mesmo valor ou somarão juntos 2π , conforme sua orientação. Isso devido ao fato do quadrilátero ser inscritível.

⁷Da geometria euclidiana, sabemos que um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, a soma dos ângulos opostos somam π .

Assim, $k = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \right)$ está à esquerda sobre o eixo real do plano complexo. Logo, $k < 0$. Para quaisquer outros arranjos dos quatro pontos a prova é semelhante.

Notar que $k > 0$ em três casos e $k < 0$ em outros três.

Para mostrar que, se

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*,$$

então os pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 são colineares, temos que a Proposição (3.3) diz que; se $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^*$, então, M_1, M_2, M_3 são colineares. De modo análogo, se $\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}^*$, então M_1, M_3, M_4 também são colineares. Portanto, M_1, M_2, M_3 e M_4 são colineares.

Como queríamos mostrar. ■

O número k é chamada a **razão transversal** de quatro pontos $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ e $M_4(z_4)$.

Devemos notar que

Observação: 3.5 Na demonstração acima podemos notar as relações:

i) Os pontos M_1, M_2, M_3, M_4 são colineares se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^* \text{ e } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

ii) Os pontos M_1, M_2, M_3, M_4 são concíclicos se, e somente se,

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \div \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*, \text{ mas } \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R} \text{ e } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \notin \mathbb{R}.$$

Exercício 3.10 As imagens geométricas dos números complexos $1, i, -1, -i$ são concíclicas.

Solução: Com efeito, temos a relação transversal $k = \left(\frac{-1-i}{1-i} \right) \div \left(\frac{-1+i}{1+i} \right) = -1 \in \mathbb{R}^*$ e claramente $\frac{-1-i}{1-i} = -i \notin \mathbb{R}$ e $\frac{-1+i}{1+i} = i \notin \mathbb{R}$. Logo, pela observação (3.5) item ii), os pontos $1, i, -1, -i$ são concíclicos.

Exercício 3.11 Os pontos $M_1(2-i), M_2(3-2i), M_3(-12i)$ e $M_4(-2+3i)$ são colineares.

Solução: Com efeito, $k = \left(\frac{-4+4i}{-1+i} \right) \div \left(\frac{1-i}{4-4i} \right) = 1 \in \mathbb{R}^*, \frac{-4+4i}{-1+i} = 4 \in \mathbb{R}^*$ e $\frac{1-i}{4-4i} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^*$. Logo, pela observação (3.5) item i), segue que os pontos M_1, M_2, M_3 e M_4 são colineares.

Exercício 3.12 Encontre todos os números complexos z tal que os pontos de coordenadas complexas z, z^2, z^3, z^4 - nesta ordem - são os vértices de um quadrilátero cíclico⁸.

⁸Um quadrilátero é **cíclico** quando está inscrito num círculo.

Solução: Se os pontos de coordenadas complexas z, z^2, z^3, z^4 -nesta ordem - são o vértices de um quadrilátero cíclico, então

$$\left(\frac{z^3 - z^2}{z - z^2}\right) \div \left(\frac{z^3 - z^4}{z - z^4}\right) \in \mathbb{R}^*.$$

O que resulta em

$$-\frac{1+z+z^2}{z} \in \mathbb{R}^*, \text{ isto é, } -1 - \left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}^*.$$

Obtemos que $z + \frac{1}{z}$ é um número real, isto é, $z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$. Logo, $(z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$, assim $z - \bar{z} = 0$ ou $|z|^2 - 1 = 0$. Portanto, $z \in \mathbb{R}$ ou $|z| = 1$.

Se $z \in \mathbb{R}$, os pontos de coordenadas complexo z, z^2, z^3, z^4 são colineares, portanto, é deixado de considerar o caso $|z| = 1$.

Seja $|z| = 1$ e $\theta = \text{Arg } z \in [0, 2\pi)$. Provaremos que os pontos de coordenadas complexas z, z^2, z^3, z^4 , pertencem ao círculo unitário em ordem (determinando um quadrilátero convexo) se, e somente se, $\theta \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$.

Com efeito,

a) Se $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, então, $0 < \theta < 2\theta < 3\theta < 4\theta < 2\pi$ ou

$$0 < \text{Arg } z < \text{Arg } z^2 < \text{Arg } z^3 < \text{Arg } z^4 < 2\pi.$$

b) Se $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, então, $0 \leq 4\theta - 2\pi < \theta < 2\theta < 3\theta < 2\pi$ ou

$$0 \leq \text{Arg } z^4 < \text{Arg } z < \text{Arg } z^2 < \text{Arg } z^3 < 2\pi.$$

c) Se $\theta \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, então, $0 \leq 3\theta - 2\pi < \theta \leq 4\theta - 2\pi < 2\theta < 2\pi$ ou

$$0 \leq \text{Arg } z^3 < \text{Arg } z \leq \text{Arg } z^4 < \text{Arg } z^2 < 2\pi.$$

E, neste último caso, observamos que os pontos com coordenadas complexas z, z^2, z^3 e z^4 não estão nesta ordem.

Assim, os pontos com coordenadas complexas z, z^2, z^3 e z^4 estão, nesta ordem, num círculo quando $\theta \in (0, 2\pi/3)$.

Da mesma maneira, podemos analisar o caso $\theta \in [\pi, 2\pi)$, e concluir que os pontos com coordenadas complexas z, z^2, z^3 e z^4 estão, nesta ordem, num círculo quando $\theta \in (4\pi/3, 2\pi)$.

Para concluir, os números complexos que satisfazem a propriedade desejada são

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \text{ com } \theta \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right).$$

3.1.8 Triângulos semelhantes

Considere seis pontos $A_1(a_1)$, $A_2(a_2)$, $A_3(a_3)$, $B_1(b_1)$, $B_2(b_2)$ e $B_3(b_3)$ no plano complexo.

Definição 3.8 Dizemos que os triângulos $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ são *semelhantes* se o ângulo em A_k é igual ao ângulo em B_k , $k \in \{1, 2, 3\}$.

Proposição 3.7 Os triângulos $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ são semelhantes, com a mesma orientação, se, e somente se,

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}. \quad (3.1)$$

Demonstração: Temos que $A_1A_2A_3 \sim B_1B_2B_3$ se, e somente se,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{A_1A_3} = \frac{\overline{B_1B_2}}{B_1B_3} \quad \text{e} \quad \widehat{A_3A_1A_2} \equiv \widehat{B_3B_1B_2}.$$

Isto é equivalente a $\frac{|a_2 - a_1|}{|a_3 - a_1|} = \frac{|b_2 - b_1|}{|b_3 - b_1|}$ e $\text{Arg} \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \text{Arg} \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$. Obtemos

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

■

Observação: 3.6 A condição (3.1) é equivalente a

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Exemplo 3.6 Os triângulos $A_1(0)A_2(1)A_3(2i)$ e $B_1(0)B_2(-i)B_3(-2)$ são semelhantes, mas tem orientações oposta. Neste caso, a condição (3.1) não está satisfeita.

De fato, pois

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{1 - 0}{2i - 0} = \frac{1}{2i} \neq \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} = \frac{-i - 0}{-2 - 0} = \frac{i}{2}.$$

Proposição 3.8 Os triângulos $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ são semelhantes, com orientações opostas, se, e somente se,

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b_2 - b_1}}{\overline{b_3 - b_1}}.$$

Demonstração: Uma reflexão em relação ao eixo x reflete os pontos B_1, B_2, B_3 nos pontos $M_1(\overline{b_1}), M_2(\overline{b_2}), M_3(\overline{b_3})$. Os triângulos $B_1B_2B_3$ e $M_1M_2M_3$ são semelhantes e têm orientação oposta, assim os triângulos $A_1A_2A_3$ e $M_1M_2M_3$ são semelhantes com a mesma orientação. A conclusão decorre da proposição anterior. ■

Exercício 3.13 Sobre os lados AB, BC, CA de um triângulo ABC construímos triângulos semelhantes ADB, BEC, CFA , tendo a mesma orientação. Provar que os triângulos ABC e DEF tem o mesmo baricentro.

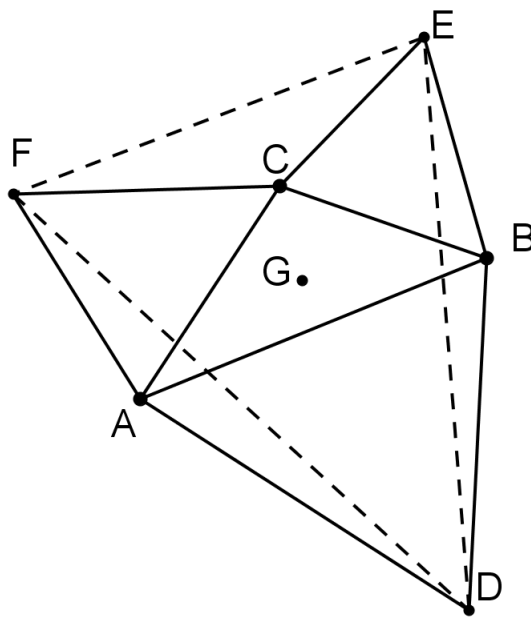


Figura 3.15: Triângulos ABC e DEF com mesmo baricentro G .

Solução: Denotaremos por uma letra minúscula a coordenada de um ponto denotado por uma letra maiúscula. Triângulos ADB, BEC, CFA são semelhantes com a mesma orientação, de modo que

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = z,$$

e conseqüentemente

$$d = a + (b-a)z, \quad e = b + (c-b)z, \quad f = c + (a-c)z.$$

Assim,

$$\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3},$$

assim, os triângulos ABC e DEF têm o mesmo baricentro.

3.1.9 Triângulos equiláteros

Nessa seção vamos reunir alguns resultados de triângulos equiláteros e resolver alguns problemas por meio delas.

Proposição 3.9 *Suponha que z_1, z_2, z_3 são as coordenadas dos vértices do triângulo $A_1A_2A_3$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

a) $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero;

b) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;

c) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$;

d) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$;

e) $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0$, onde $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$;

f) $(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 \varepsilon^2 + z_2 + \varepsilon z_3) = 0$, onde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$;

g) $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{bmatrix} = 0$.

Demonstração: O triângulo $A_1A_2A_3$ é equilátero se, e somente se, $A_1A_2A_3$ é semelhante a $A_2A_3A_1$, com mesma orientação. Pela observação 3.6, segue

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{bmatrix} = 0,$$

Logo, a) \iff g).

Calculando o determinante, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{bmatrix} \\ &= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ &= -(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3), \end{aligned}$$

onde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$, portanto, desse fato obtemos g) \iff c) \iff f).

Uma manipulação algébrica mostra que d) \iff c).

A implicação a) \iff b) é de fácil constatação, pois $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero se, e somente se, seus lados $|z_1 - z_2|$, $|z_2 - z_3|$ e $|z_3 - z_1|$ são todos iguais.

Uma manipulação algébrica mostra que a) \iff e). Vejamos: Seja

$$\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} = 0,$$

onde $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, que é equivalente a

$$(z-z_2)(z-z_3) + (z-z_1)(z-z_3) + (z-z_1)(z-z_2) = 0.$$

Temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} 3z^2 - 2z(z_1 + z_2 + z_3) + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0 &\iff -4z^2 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0 \\ &\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3 = 0 \\ &\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3. \end{aligned}$$

A última linha é a mesma que o item c). Portanto, $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} = 0$, onde $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, é equivalente a $A_1A_2A_3$ ser um triângulo equilátero. Como desejávamos demonstrar. \blacksquare

Exercício 3.14 *Sejam $A(0)$, $B(1+i)$ e $C(z)$ tais que ABC é um triângulo equilátero. Determine z .*

Solução: Pela Proposição (3.9), temos que

$$0 + (1+i)^2 + z^2 = 0 \cdot (1+i) + (1+i)z + z \cdot 0.$$

Assim, $z^2 - (1+i)z + 2i = 0$. Logo, segue

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i) \pm \sqrt{-6i}}{2} \\ z &= \frac{(1+i) \pm \sqrt{6} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{2} \\ z &= \frac{(1+i) \pm \sqrt{3}(-1+i)}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } z = \frac{(1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{(1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})}{2}.$$

O próximo resultado traz um refinamento para esta questão.

Proposição 3.10 *Sejam z_1, z_2, z_3 as coordenadas dos vértices A_1, A_2, A_3 com uma orientação positiva do triângulo. As afirmações a seguir são equivalentes.*

- a) $A_1A_2A_3$ é um triângulo equilátero;
- b) $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$, onde $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$;
- c) $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$, onde $\varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}$;
- d) $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, onde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$.

Demonstração: O triângulo $A_1A_2A_3$ é equilátero e orientado positivamente se, e somente se, A_3 é obtido de A_2 por uma rotação em torno de A_1 através de um ângulo de $\frac{\pi}{3}$. Isto é,

$$z_3 = z_1 + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) (z_2 - z_1),$$

logo a) \iff b).

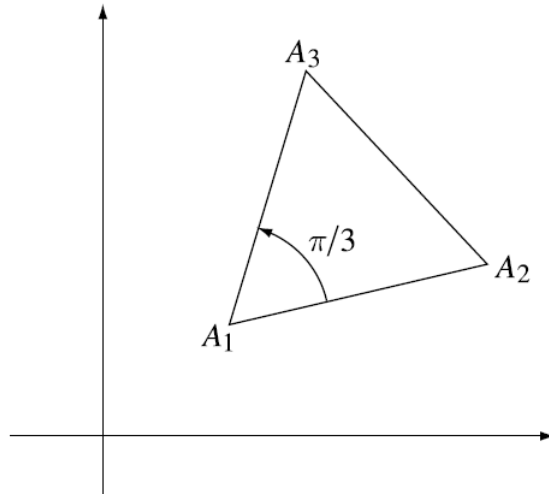


Figura 3.16: Triângulo equilátero $A_1A_2A_3$.

Uma rotação sobre A_1 através de um ângulo de $\frac{5\pi}{3}$ leva A_3 em A_2 . Considerações semelhantes mostram que a) \iff c).

Para provar que b) \iff d), observe que b) é equivalente a

$$b') \quad z_3 = z_1 + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z_2 - z_1) = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z_1 + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z_2$$

Por isso,

$$\begin{aligned}
z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 &= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_3 \\
&= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_2 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_1 + i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_2 \right] \\
&= z_1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_2 - z_1 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_2 = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, b) \iff d). ■

Exercício 3.15 Usar a Proposição (3.10) para resolver o exercício 3.14.

Solução: Se ABC é a orientação positiva do triângulo, então

$$\begin{aligned}
z &= 0 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) (1 + i) \\
z &= \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{2}.
\end{aligned}$$

Se BAC é a orientação positiva do triângulo, então

$$\begin{aligned}
z &= (1 + i) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) (0 - 1 - i) \\
z &= \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})}{2}.
\end{aligned}$$

Exercício 3.16 Considere z_1, z_2, z_3 como sendo as coordenadas complexas diferentes de zero dos vértices do triângulo ABC . Se $z_1^2 = z_2 z_3$ e $z_2^2 = z_1 z_3$, mostre que o triângulo ABC é equilátero.

Solução: Multiplicando as relações $z_1^2 = z_2 z_3$ e $z_2^2 = z_1 z_3$, temos $z_1^2 z_2^2 = z_1 z_2 z_3^2$, e, consequentemente, $z_1 z_2 = z_3^2$. Segue

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1,$$

assim, pela Proposição (3.9), resulta que ABC é um triângulo equilátero.

Exemplo 3.7 Considere z_1, z_2, z_3 como sendo as coordenadas complexas diferentes de zero dos vértices do triângulo ABC . Se $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, provar que o triângulo ABC é equilátero.

Solução: A identidade a seguir vale para quaisquer números complexos z_1 e z_2 (ver exercício 1.1 na página 11) :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \quad (3.2)$$

Como $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ segue que $z_1 + z_2 = -z_3$, então $|z_1 + z_2| = |z_3|$. Utilizando as relações $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ e a equação (3.2) obtemos $|z_1 - z_2|^2 = 3|z_1|^2$. De modo análogo, encontra-se as relações $|z_2 - z_3|^2 = 3|z_1|^2$ e $|z_3 - z_1|^2 = 3|z_1|^2$. Portanto, $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, ou seja, o triângulo ABC é equilátero.

Exemplo 3.8 No exterior do triângulo ABC são construídos três triângulos equiláteros $AC'B$, $BA'C$ e $CB'A$ orientados positivamente. Provar que os baricentro destes triângulos são os vértices de um triângulo equilátero.

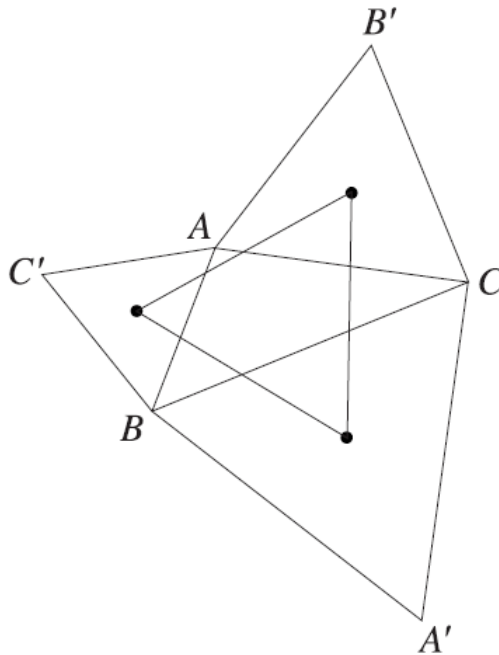


Figura 3.17: Triângulo equilátero determinado pelos baricentro dos triângulos $AC'B$, $BA'C$ e $CB'A$.

Solução: Sejam a, b, c as coordenadas dos vértices A, B, C , respectivamente. Usando a Proposição (3.10), temos

$$a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0, \quad b + d'\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \quad c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0, \quad (3.3)$$

em que a', b', c' são as coordenadas dos pontos A', B' e C' , respectivamente.

Os baricentros dos triângulos $A'BC, AB'C, ABC'$ têm as coordenadas

$$a'' = \frac{1}{3}(a' + b + c), \quad b'' = \frac{1}{3}(a + b' + c), \quad c'' = \frac{1}{3}(a + b + c')$$

respectivamente. Temos de verificar se $c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2 = 0$. Para tanto, nota-se que, para todo número complexo z , $z \cdot \varepsilon^3 = z$. Assim,

$$\begin{aligned}
 3(c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2) &= (a + b + c') + (a' + b + c)\varepsilon + (a + b' + c)\varepsilon^2 \\
 &= (a + b + c') + (a'\varepsilon + b\varepsilon + c\varepsilon) + (a\varepsilon^2 + b'\varepsilon^2 + c\varepsilon^2) \\
 &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (c\varepsilon + b'\varepsilon^2 + a) + (a\varepsilon^2 + c' + b\varepsilon) \\
 &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (c\varepsilon + b'\varepsilon^2 + a\varepsilon^3) + (a\varepsilon^2 + c'\varepsilon^3 + b\varepsilon^4) \\
 &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2)\varepsilon + (a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2)\varepsilon^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Logo, $c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2 = 0$. Portanto, pela Proposição (3.10), o resultado segue.

3.2 Alguns conceitos de geometria analítica no plano complexo

Nesta seção estudaremos alguns conceitos elementares da geometria analítica no plano. Porém, estaremos usando as notações de números complexos para desenvolver as fórmulas das equações da reta, do círculo, área de um triângulo, etc. Alguns exemplos serão apresentados a fim de aplicar os resultados citados.

3.2.1 Equação de uma reta

Iniciamos essa seção com uma proposição que explicita a equação da reta em termos de coordenadas complexas.

Proposição 3.11 *A equação de uma reta no plano complexo é*

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0,$$

onde $\alpha, z \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $z = x + iy$.

Demonstração: A equação de uma reta no plano cartesiano é dada pela equação

$$Ax + By + C = 0,$$

em que $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 \neq 0$. Se tomarmos o complexo $z = x + iy$, então $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Assim,

$$A \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) - Bi \left(\frac{z - \bar{z}}{2} \right) + C = 0,$$

ou equivalentemente

$$\bar{z} \left(\frac{A+Bi}{2} \right) + z \left(\frac{A-Bi}{2} \right) + C = 0.$$

Sejam os números $\alpha = \frac{A-Bi}{2} \in \mathbb{C}^*$ e $\beta = C \in \mathbb{R}$. Então,

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0,$$

como desejávamos demonstrar. ■

Observação: 3.7 Se $\alpha = \bar{\alpha}$, então $B = 0$ e temos uma **reta vertical**. Se $\alpha \neq \bar{\alpha}$, então definiremos o coeficiente angular da reta por

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{i}} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} i.$$

Com esse conceito da equação da reta no plano complexo podemos juntar condições para verificar quando duas retas são paralelas ou perpendiculares, além de determinar a reta que passa por dois pontos que são imagens de um números complexos.

Proposição 3.12 Considere as retas r_1 e r_2 com equações

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{z} + \alpha_1 \cdot z + \beta_1 = 0,$$

e

$$\bar{\alpha}_2 \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \beta_2 = 0,$$

respectivamente.

As retas r_1 e r_2 são:

1. paralelas⁹ se, e somente se, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$;
2. perpendiculares¹⁰ se, e somente se, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$;
3. concorrentes se, e somente se, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$.

Demonstração: 1) Temos $r_1 \parallel r_2$ se, e somente se, $m_1 = m_2$. Então,

$$\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1} i = \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2} i,$$

assim $\alpha_2 \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \bar{\alpha}_2$ e temos $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$.

⁹Usaremos a notação $r \parallel s$ para dizer que as retas r e s são paralelas.

¹⁰Usaremos a notação $r \perp s$ para dizer que as retas r e s são perpendiculares.

- 2) Temos $r_1 \perp r_2$ se, e somente se, $m_1 m_2 = -1$. Isto é, $\alpha_2 \overline{\alpha_1} + \alpha_1 \overline{\alpha_2} = 0$, ou $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2} = 0$.
- 3) As retas r_1 e r_2 são concorrentes se, e somente se, $m_1 \neq m_2$. Essa condição nos dá $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} \neq \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$.

Os resultados encontrados correspondem às propriedades de coeficiente angular de inclinação da reta. ■

A razão $m_r = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}$ é chamado de **coeficiente angular complexo** da reta r de equação $\overline{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$.

3.2.2 A equação de uma reta determinada por dois pontos

A proposição a seguir nos ensina como encontrar a equação da reta, usando determinante de matrizes, quando se conhece dois pontos da reta.

Proposição 3.13 *A equação da reta determinada pelo pontos $P_1(z_1)$ e $P_2(z_2)$ é dada por:*

$$\det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Demonstração: Sabemos que a equação de uma reta determinada por dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, no o plano cartesiano satisfaz as seguinte equação:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Usando números complexos, temos:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z - \bar{z}}{2} & \frac{z + \bar{z}}{2i} & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

ou, equivalentemente

$$\frac{1}{4i} \det \begin{bmatrix} z_1 - \bar{z}_1 & z_1 + \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 - \bar{z}_2 & z_2 + \bar{z}_2 & 1 \\ z - \bar{z} & z + \bar{z} & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

e pelas propriedades de determinantes, obtemos

$$\det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Observação: 3.8 Os pontos $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, e $M_3(z_3)$ são colineares se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Observação: 3.9 O coeficiente angular complexo de uma reta determinada pelos pontos com coordenadas z_1 e z_2 é

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Com efeito, a equação da reta é

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{bmatrix} = 0 &\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z} + z\bar{z}_1 - z\bar{z}_2 - z_1\bar{z} - z_2\bar{z}_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{z}(z_2 - z_1) - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0. \end{aligned}$$

Utilizando a definição do coeficiente angular complexo, obtemos

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Exercício 3.17 Determine se os pontos $M_1(1 + 2i)$, $M_2(2 + i)$ e $M_3(5 + 5i)$ são colineares. Em caso positivo, determine o coeficiente angular complexo da reta que os contém. Em caso negativo, determine se as retas M_1M_2 e M_3M_4 são perpendiculares, onde M_4 é o ponto médio de M_1M_2 .

Solução: Considerando $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$ e $z_3 = 5 + 5i$, segue

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i & 1 \\ 2 + i & 2 - i & 1 \\ 5 + 5i & 5 - 5i & 1 \end{bmatrix} &= (1 + 2i)(2 - i) + (2 + i)(5 - 5i) + (5 + 5i)(1 - 2i) - \\ &\quad - (5 + 5i)(2 - i) - (1 + 2i)(5 - 5i) - (2 + i)(1 - 2i) = \\ &= (2 + 2 + 10 + 5 + 5 + 10 - 10 - 5 - 5 - 10 - 2 - 2) + \\ &\quad + (3 - 5 - 5 - 5 - 5 + 3)i = \\ &= 0 - 14i \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, os pontos não são colineares.

Seja z_4 as coordenadas complexas do ponto M_4 , segue que

$$z_4 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

As retas $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ e $\overleftrightarrow{M_3M_4}$ têm equações dadas por

$$\bar{z}(1-i) - z(1+i) + 8 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{z}\left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i\right) - z\left(-\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i\right) = 0,$$

respectivamente, e coeficientes angulares complexos

$$m_{1,2} = \frac{(1-i)}{(1+i)} = \frac{2+2i}{2} \quad \text{e} \quad m_{3,4} = \frac{7+7i}{-7+7i} = -\frac{2+2i}{2},$$

respectivamente. Como, $m_{1,2} + m_{3,4} = 0$, temos, pela Proposição (3.12), que $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ e $\overleftrightarrow{M_3M_4}$ são perpendiculares.

3.2.3 A área de um triângulo

Apresentamos agora o teorema que nos mostra como calcular a área de um triângulo conhecendo as coordenadas complexas dos vértices.

Teorema 3.5 *A área do triângulo $A_1A_2A_3$ cujos vértices têm coordenadas z_1, z_2, z_3 é igual ao valor absoluto do número*

$$\frac{i}{4} \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Demonstração: Utilizando as coordenadas cartesianas, a área de um triângulo com vértices $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$ é

$$\text{Área}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

Dado um número complexo $z_k = x_k + y_k i$, temos $x_k = \frac{z_k + \bar{z}_k}{2}$ e $y_k = \frac{z_k - \bar{z}_k}{2i}$, com $k \in \{1, 2, 3\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Área}(A_1A_2A_3) &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z_3 + \bar{z}_3}{2} & \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i} & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \frac{i}{4} \det \begin{bmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \frac{i}{8} \det \begin{bmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \frac{i}{8} 2 \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \frac{i}{4} \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} \right|,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 3.1 *Se A_1, A_2 e A_3 , com coordenadas complexas z_1, z_2, z_3 , são vértice de um triângulo $A_1A_2A_3$ que está orientado positivamente, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\frac{i}{4} \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} > 0. \tag{3.5}$$

Demonstração: De fato, pois pela Proposição (3.4) (pontos colineares), temos que, A_1, A_2 , e A_3 são vértices de um triângulo se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \notin \mathbb{R}.$$

Como o triângulo $A_1A_2A_3$ está diretamente orientado, segue que o ângulo $\widehat{A_2A_1A_3}$ é orientado positivamente. Assim, pelo Teorema (3.4), sabemos que

$$\text{Arg} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in (0, \pi),$$

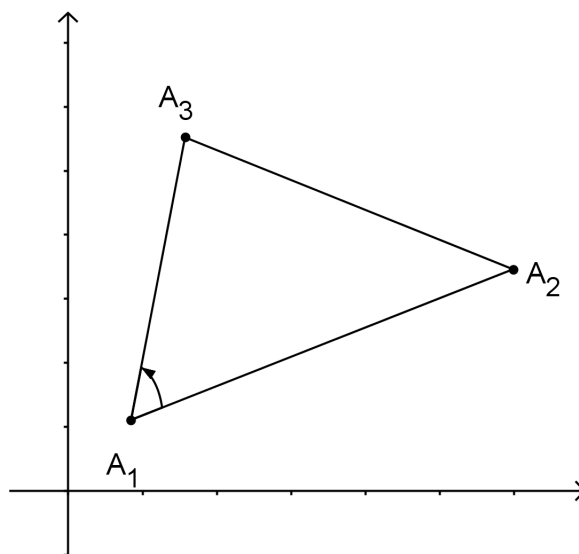


Figura 3.18: $A_1A_2A_3$ diretamente orientado.

pois, $\widehat{A_2A_1A_3}$ é um ângulo interno do triângulo $A_1A_2A_3$ e $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \notin \mathbb{R}$. Logo, segue que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) > 0.$$

Vejamos que, se $z \in \mathbb{C}$, então $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) = -2i\operatorname{Im}(\bar{z})$.¹¹

Então,

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} &= \frac{i}{4} (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_1) \\ &= \frac{i}{4} (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_1 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_1) \\ &= \frac{i}{4} [(z_3 - z_1)\bar{z}_1 - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z_1 + (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z_2 + (z_1 - z_3)\bar{z}_2] \\ &= \frac{i}{4} [(z_3 - z_1)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)] \end{aligned}$$

¹¹Tomando, $z = x + yi$, temos que $z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi = 2i\operatorname{Im}(z) = -2i\operatorname{Im}(\bar{z})$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{4} \left[-\frac{(z_3 - z_1)}{(z_2 - z_1)} + \frac{(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)} \right] (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\
&= \frac{i}{4} \left[2i \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \right) \right] (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\
&= \frac{i}{4} \left[-2i \operatorname{Im} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right] (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\
&= \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right] (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) > 0,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Corolário 3.1 *A área de um triângulo $A_1A_2A_3$, com coordenadas complexas z_1, z_2, z_3 , orientado positivamente é*

$$\text{área } [A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1). \quad (3.6)$$

Demonstração: A equação (3.4) do Teorema acima, juntamente com a equação (3.5) do comentário logo a seguir ao mesmo, nos dá

$$\begin{aligned}
\text{Área } [A_1A_2A_3] &= \left| \frac{i}{4} \det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= \frac{i}{4} (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 z_3 - z_1 \bar{z}_3 - z_2 \bar{z}_1) \\
&= \frac{1}{4} [(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) - \overline{(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1)}] \\
&= \frac{1}{4} [2i \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1)] \\
&= \frac{1}{4} [-2i \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1)] \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1);
\end{aligned}$$

encontrando a fórmula desejada. ■

Exercício 3.18 Considere o triângulo $A_1A_2A_3$ e os pontos M_1, M_2, M_3 situados nas retas $\overleftrightarrow{A_2A_3}, \overleftrightarrow{A_1A_3}$ e $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, respectivamente. Suponha que os pontos M_1, M_2, M_3 dividem os segmentos $[A_2A_3], [A_3A_1], [A_1A_2]$ nas razões $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente. Então,

$$\frac{\text{área}[M_1M_2M_3]}{\text{área}[A_1A_2A_3]} = \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)}.$$

Solução: As coordenadas complexas dos pontos M_1, M_2, M_3 são dadas por:

$$m_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_3}{1 - \lambda_1}; m_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1 - \lambda_2}; m_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}.$$

Como

$$\begin{aligned} \text{área}[M_1M_2M_3] &= \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{m_1}m_2 + \overline{m_2}m_3 + \overline{m_3}m_1) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{(\overline{a_2} - \lambda_1 \overline{a_3})(a_3 - \lambda_2 a_1)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} + \frac{(\overline{a_3} - \lambda_2 \overline{a_1})(a_1 - \lambda_3 a_2)}{(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\overline{a_1} - \lambda_3 \overline{a_2})(a_2 - \lambda_1 a_3)}{(1 - \lambda_3)(1 - \lambda_1)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} (\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_1) \right] \\ &= \left(\frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \right) \frac{1}{2} \text{Im}[(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_1)] \\ &= \left(\frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \right) \text{área}[A_1A_2A_3]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\text{área}[M_1M_2M_3]}{\text{área}[A_1A_2A_3]} = \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)}.$$

3.2.4 Equação do círculo

O conjunto de pontos do plano que estão a uma distância, não nula, de um ponto chamamos de **círculo**. Nessa seção vamos mostrar como encontrar a equação do círculo com coordenadas complexas.

Proposição 3.14 A equação do círculo em coordenadas complexa é

$$z.\bar{z} + \alpha.z + \bar{\alpha}.\bar{z} + \beta = 0,$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstração: A equação de um círculo, no plano cartesiano, são todos o pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

onde $m, n, p \in \mathbb{R}$, e $p < \frac{m^2 + n^2}{4}$.

Temos que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, donde segue

$$|z|^2 + m \frac{z + \bar{z}}{2} + n \frac{z - \bar{z}}{2i} + p = 0$$

ou

$$z \cdot \bar{z} + z \frac{m - ni}{2} + \bar{z} \frac{m + ni}{2} + p = 0.$$

Tomando $\alpha = \frac{m - ni}{2} \in \mathbb{C}$ e $\beta = p \in \mathbb{R}$ na equação acima encontramos a equação que desejávamos. ■

Note que o raio do círculo é igual a

$$r = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 4p}{4}} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} - \beta},$$

e, em seguida, a equação encontrada é equivalente a

$$(\bar{z} + \alpha)(z + \bar{\alpha}) = r^2.$$

Fazendo $\gamma = -\bar{\alpha} = \frac{-m - ni}{2}$ a equação do círculo, com centro em γ e raio r é dada por

$$(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2.$$

Exercício 3.19 Encontre, em coordenadas complexas, o centro, o raio e a equação do círculo que contém os pontos $A_1 = (z_1 = 2 + 0i)$, $A_2 = (z_2 = -2 + 0i)$ e $A_3 = (z_3 = 0 + 2i)$.

Solução: Seja $\gamma = a + bi \in \mathbb{C}$ o centro e r o raio do círculo, temos que

$$(\bar{z}_1 - \bar{\gamma})(z_1 - \gamma) = r^2,$$

$$(\bar{z}_2 - \bar{\gamma})(z_2 - \gamma) = r^2,$$

$$(\bar{z}_3 - \bar{\gamma})(z_3 - \gamma) = r^2.$$

ou seja,

$$(2 - a + bi)(2 - a - bi) = r^2$$

$$(-2 - a + bi)(-2 - a - bi) = r^2$$

$$(-2i - a + bi)(2i - a - bi) = r^2.$$

Assim, $(4 - 4a + a^2 + b^2) = (4 + 4a + a^2 + b^2) = (4 - 4b + a^2 + b^2)$.

Logo, $a = 0$ e $b = 0$. De modo que $r^2 = 2 \cdot 2 = 4$. Portanto, o centro do círculo é $\gamma = 0 + 0i$, o raio é $r = 2$ e a equação do círculo é dada por

$$\bar{z} \cdot z = 4.$$

Referências Bibliográficas

- [1] ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. *Complex numbers from A to ... Z*. Romania, Birkhäuser Boston: 2006.
- [2] ANTAR NETO [et. al.]. *Números complexos, polinômios e equações algébricas*. São Paulo, Moderna: 1982.
- [3] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis complexas e aplicações*. 3^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria, Números complexos*. 3^a ed. Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro, SBM: 2005.
- [5] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [6] LIMA, Elon Lages [et. al.]. *A matemática do ensino médio*. volume 3.6^a ed. Coleção do professor de matemática. Rio de Janeiro, SBM: 2006.
- [7] PINHEIRO, Robert Batista. *Números Complexos: Alguns aspectos algébricos e geométricos*. 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão: São Luís - MA, 2013.
- [8] REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. *Geometria analítica*. 2^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- [9] ZILL, Dennis G.; SHANAHAN, Patrick D. *A first course in complex analysis with applications*. Canada: Jones and Bartlett Publishers, 2003.
- [11] ALMEIDA, Salomão Pereira de. *Números Complexos Para o Ensino Médio: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações*. 60f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande - PB, 2013.

- [12] GOMES, Reinaldo. *Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra*. 84f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, 2013.
- [13] FONCECA, Júlio César Marinho da. *Números perplexos: uma abordagem para o ensino médio*. 64f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus - AM, 2013.

Anexo A

Módulo e Conjugado de um Número Complexo

Nesse anexo seguem alguns resultados que não foram apresentados no corpo do trabalho por fazer parte de uma revisão que se faz necessária para o desenvolvimento do capítulo principal que aborda a geometria com coordenadas complexas.

Proposição A.1 *As seguintes propriedades são satisfeitas em \mathbb{C} .*

1. *A igualdade $z = \bar{z}$ é vale se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$.*
2. *Para qualquer número complexo z , a igualdade $z = \overline{\bar{z}}$ é válida.*
3. *Para qualquer número complexo z , o número $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ é um número real não negativo.*
4. *$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (o conjugado de uma soma é a soma dos conjugados).*
5. *$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (o conjugado de um produto é o produto dos conjugados).*
6. *Para qualquer número complexo diferente de zero z a igualdade $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ é válida.*
7. *$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$ (o conjugado de um quociente é o quociente entre os conjugados).*
8. *Dado $z \in \mathbb{C}$*

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Demonstração:

1. Se $z = x + yi$, então, a relação $z = \bar{z}$ é equivalente a $x + yi = x - yi$. Assim, $2yi = 0$, então $y = 0$ e, finalmente $z = x \in \mathbb{R}$.
2. Temos $\bar{z} = x - yi$ e $\overline{\bar{z}} = x - (-y)i = x + yi = z$.
3. Observe que $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \geq 0$.

4. Temos

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

5. Para essa propriedade segue

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + y_1 x_2)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_2 y_1 + y_1 x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

6. Sabemos que $z \cdot 1/z = 1$, daí $\overline{(z \cdot 1/z)} = \overline{1} = 1$, e, do item anterior segue, $\overline{z} \left(\frac{1}{z} \right) = 1$, obtendo-se $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}$.

7. Observe que $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \overline{\left(z_1 \frac{1}{z_2} \right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2} \right)} = \overline{z_1} \cdot \left(\frac{1}{\overline{z_2}} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

8. A partir das relações

$$z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \text{ e } z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2iy$$

segue-se que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

■

Proposição A.2 *As seguintes propriedades de módulo de um número complexo são sempre satisfeitas:*

1. $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ e $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
2. $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso, $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$.
3. $|z| = |-z| = |z|$.
4. $z\overline{z} = |z|^2$.
5. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (o módulo de um produto é o produto dos módulos).
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

7. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$.
8. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$ (o módulo de um quociente é o quociente entre os módulos).
9. $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demonstração: Pode-se facilmente verificar que (1) - (4) são verdadeiras.

5) Temos $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot \overline{z_1})(z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ e, por conseguinte, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, já que $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

6) Observe que

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + |z_2|^2.$$

Sabemos que $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, segue que

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| = 2|z_1| \cdot |z_2|,$$

daí

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2,$$

e, conseqüentemente, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. A fim de obter a desigualdade no lado esquerdo notemos que

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

o que implica $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$.

7) Nota-se que a relação $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ implica $|z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1$, ou $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$. Logo, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

8) Temos

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \right| = |z_1 \cdot \overline{z_2}^{-1}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2|^{-1} = |z_1| \frac{1}{|z_2|}.$$

9) Podemos escrever $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$, então $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Por outro lado, $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$.

■

Observação: A.1 A desigualdade $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ torna-se uma igualdade se, e somente se, $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1| |z_2|$. Isto é equivalente a $z_1 = tz_2$, em que t é um número real não negativo.

De fato, pois se $z_1 = tz_2$, com $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |tz_2 + z_2| \\ &= (t+1)|z_2| \\ &= t|z_2| + |z_2| \\ &= |tz_2| + |z_2| \\ &= |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, temos dois casos a considerar

i) Sendo $z_1 = 0$ (ou $z_2 = 0$), então $z_1 = tz_2$, com $t = 0$ (ou $z_2 = tz_1$, com $t = 0$.)

ii) Sendo $z_2 \neq 0$, então existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, ambos não nulos, e $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, tais que

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2).$$

Como, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, resulta

$$|r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + ir_1 \operatorname{sen} \theta_1 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2| = |r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)| + |r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)|.$$

Portanto, obtemos as equivalências

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)} = r_1 + r_2$$

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2[\cos(\theta_1 - \theta_2)]} = r_1 + r_2$$

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = (r_1 + r_2)^2$$

$$2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 2(r_1r_2)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$$

Logo, $\theta_1 - \theta_2 = 0$. Isto é, $\theta_1 = \theta_2$. Daí, segue

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Portanto, $z_1 = tz_2$, com $t = \frac{r_1}{r_2} \geq 0$.

Anexo B

Questionário

Neste anexo é apresentado um questionário para ser aplicado em algumas escolas, com professores que trabalhe com o conteúdo dos números complexos, para levantar informações sobre o ensino dos números complexos nas escolas de ensino médio é deixado a sugestão da aplicação desse material em sala de aula.

1. Qual escola você trabalha?
2. Qual o grau de escolaridade?
3. Há quanto tempo você trabalha na escola?
4. Qual sua opinião sobre a apresentação dos números complexos no ensino médio?
5. Quando apresentado, qual o tempo médio dedicado à apresentação dos números complexos?
6. Que motivações são apresentadas aos alunos para a apresentação dos números complexos?
7. Na sua opinião, os alunos acham interessante o conteúdos dos números complexos? O que normalmente eles falam sobre estes?
8. Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos números complexos?
9. Problemas geométricos são abordados nesses conteúdos em suas aulas?
10. Na sua opinião, há alguma vantagem na abordagem geométrica dos números complexos?
11. Você aceita usar esse material¹ em alguma de suas turmas com a seguinte proposta:

¹Trabalho de conclusão de curso sobre números complexos e geometria

- Apresentação dos conceitos dos números complexos - (usando 04 aula de 50 minutos)
- Apresentação dos números complexos na forma trigonométrica - (usando 04 aula de 50 minutos)
- Apresentação de problemas geométricos com resoluções sendo abordadas como a noção de números complexos - (usando 06 aula de 50 minutos)