Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada

Anderson Carvalho dos Santos

O USO DE DEMONSTRAÇÕES NO AMBIENTE ESCOLAR A PARTIR DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro
Março de 2013

Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada

Anderson Carvalho dos Santos

O USO DE DEMONSTRAÇÕES NO AMBIENTE ESCOLAR A PARTIR DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Trabalho de Conclusão de Curso

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – no Instituto de matemática pura e aplicada.

Orientador: Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro
Março de 2013

Instituto Nacional de Matemática
Pura e Aplicada

Anderson Carvalho dos Santos

O USO DE DEMONSTRAÇÕES NO AMBIENTE ESCOLAR A PARTIR DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – no Instituto de matemática pura e aplicada.

Banca Examinadora:

____
Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira- IMPA

____
Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho – IMPA

____
Prof. Dr. Adán José *Corcho Fernández* - UFRJ

Rio de Janeiro, ____ de ________________de _______.

Ficha Catalográfica

SANTOS, Anderson Carvalho

A introdução do Princípio da Indução Finita nos Ensinos Fundamental e Médio / Anderson Carvalho dos Santos; orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira – Rio de Janeiro: IMPA, PROFMAT, 2013.

A aqueles que acreditaram em mim em todos
os momentos, até quando nem eu
acreditava.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus a quem nada disso seria possível.

Agradeço a minha família, que acreditou em mim e me apoiou, em especial minha esposa, Cristiane, pois sempre esteve me dando força, bem como compreendendo nos momentos de dificuldade.

A minha Mãe, Dona Enedina, e minha tia, Dona Marta, pois mais do que me incentivar, me empurraram para eu conseguir chegar até aqui.

Aos meus amigos de caminhada, que juntos nos demos forças nessa caminhada.

Aos professores do IMPA que dedicaram empenho para a realização desse programa, em especial ao professor Roberto Imbuzeiro, que aceitou a árdua tarefa de me orientar nesse trabalho.

Aos funcionários do Ensino que participaram dessa caminhada junto com a gente.

A SBM e a CAPES pela iniciativa, por acreditar nesse projeto e principalmente, por acreditar em nós.

As meus eternos diretores Jacqueline, Soraya, Gisele e Rogério, que em todo momento apoiou esse trabalho.

Aos meus alunos que fazem parte da minha história.

Resumo

Este trabalho trata da necessidade do uso de demonstrações no ambiente escolar, sugerindo o Princípio de Indução Finita como um conceito de fácil entendimento e fundamental importância para a compreensão de diversas fórmulas que são apresentadas sem demonstração. Para tal, Percorremos um caminho que vai desde a definição do Princípio de Indução Finita, passando por sua história e alguns casos clássicos, e por uma análise da formação do professor de matemática, concluindo no uso de práticas que incentivem o aluno a conjecturar, a partir do estudo de sequências numéricas, preparando-o para assimilar o princípio de Indução finita durante os ensinos fundamental e Médio.

Palavras chaves: Indução, demonstração, Conjecturar, sequências, fórmulas.

Abstract

This project addresses the need of using demonstrations in schools, suggesting the Principle of Finite Induction as a concept easy to understand and fundamental importance for the understanding of several formulas that has no proof. To this end, it will come a way since the definition of the Principle of Finite Induction, through its history and some classic cases, through an analysis of teacher of mathematics, concluding to use practices that encourage students to guess the from the study of numerical sequences, ready to assimilate the principle of finite induction during primary and East.

Keywords: Induction, demonstration, conjecture, sequences, formulas.

Sumário

Lista de Tabelas e Figuras

"Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista".

Abramo Hefez

1. Introdução

Quando se fala em matemática na escola, muitos enxergam apenas uma ferramenta para resolver contas**;** outros, nem isso. O ensino de matemática atualmente é voltado para resultados, onde tudo o que se procura aprender são fórmulas e métodos de resolução. No entanto, enxergamos a necessidade de um ensino menos preocupado com resultados e mais voltado para o processo onde se trabalha tanto a capacidade de abstração do aluno quanto o pensamento analítico. Ao se trabalhar o processo, o aluno desenvolve a capacidade de criar sequências lógicas, e assim, analisar situações e tirar conclusões, podendo essas situações ser matemáticas ou não. A matemática tem um papel fundamental na formação de opinião e também na argumentação, onde o aluno busca construir uma sequência de argumentos que validem sua crença. Em conjunto com as outras disciplinas, a matemática desperta um cidadão atuante, que compreende o mundo e é agente nele.

A proposta deste trabalho é preparar alunos e professores para a inserção do Princípio de Indução Finita no currículo do 1º ano do ensino médio, permitindo que demonstrações baseadas neste princípio sejam absorvidas nesta etapa da formação. Para isto vemos como necessária uma reformulação na cultura de ensino no período compreendido do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, inserindo, assim como sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS), um ensino mais voltado para a descoberta, o uso de demonstrações e o incentivo do aluno em buscar mais que respostas, mas entender o raciocínio utilizado para resolver problemas. Além disto, é importante reconcebermos a formação do professor na direção de dar a ele mais segurança e competência para apresentar conceitos e demonstrações em aula. Abordamos estes assuntos em um trabalho teórico, onde buscamos autores de referência e outros trabalhos já produzidos na área, associando-os à experiência de anos de trabalho no ensino fundamental.

A pergunta que permeia nossa pesquisa é: Como a matemática está contribuindo para a formação do cidadão brasileiro? A partir dessa pergunta surgem outras três: No que o ensino do Princípio de Indução Finita contribui para a formação do estudante? Como os professores de matemática são preparados para trabalhar provas e demonstrações em sala de aula, mais precisamente o Princípio de Indução Finita? Como deve ser o trabalho em torno de provas e demonstrações quando o aluno ainda não possui maturidade para construir uma prova ou demonstração? Capacidades como seriação, classificação e comparação são habilidades matemáticas, que são desenvolvidas quando se trabalha provas e demonstrações. Vemos no princípio de indução um princípio simples, de fácil entendimento, no entanto de uma profundidade e significado imensos. O uso de indução é um entre os diversos métodos de demonstração matemáticos existentes. No entanto, o linguajar utilizado nesse princípio é um linguajar simples, ao contrário da maioria dos métodos de demonstração, o que mostra ser ideal para o Ensino Médio, e o fato de ele associar com os números naturais, associações feitas no ensino fundamental.

Porém, para ser trabalhado com o aluno, primeiro tem de ser trabalhado com o professor, que ingressa na universidade com essa cultura de resultado, e observando a diferença de pensamento do aluno de licenciatura para o aluno do bacharelado. O futuro professor é apresentado de uma forma equivocada ao mundo das provas e demonstrações, o que causa uma impressão de que demonstração é algo complicado, e se é complicado para o professor, é complicado para o aluno, o que leva aos professores terem receios de levar demonstrações aos alunos. Uma vez que as provas e demonstrações forem apresentadas aos futuros professores de educação básica, bem como mostrada a necessidade e o bem que o uso de demonstrações faz na formação dos alunos, e uma vez que os alunos do ensino fundamental não possuem maturidade para construir demonstrações precisas, deve-se preparar o caminho para tal, sempre levando o aluno a conjecturar, a tirar suas próprias conclusões, a analisar os percursos para se chegar o resultado. No caso do Princípio de Indução Finita, um forte aliado é a formação de sequencias, conteúdo trabalhado no 6º ano, sendo assim, criamos relações entre os números naturais, fazendo comparações, e conseguimos tirar conclusões em diversos conteúdos do ensino fundamental. Esse tratar que chamamos de pré-indução, que é a capacidade de criar uma relação entre os números naturais e outra grandeza é o que se pode trabalhar no ensino fundamental, e assim, o aluno tirar suas conclusões.

O objetivo desse trabalho é possibilitar ao estudante do ensino básico mais que um contato, um relacionamento com as provas e demonstrações. Instigar no aluno a necessidade de buscar, investigar, e se perguntar o porquê dos resultados matemáticos encontrados. Isto muda a visão dos alunos com relação à matemática. Com esta abordagem, acreditamos estar preparando o terreno para a apresentação do Princípio de Indução Finita no primeiro ano, visto que nessa época ele já possui maturidade e formação suficientes para tal. Também almejamos modificações na formação do profissional que atua na educação básica, mudando sua concepção de prova e demonstração, bem como a visão sobre o Princípio de Indução Finita.

Como professores de educação básica, percebemos as dificuldades dos alunos em compreender certos conteúdos, que chegam sem nenhuma justificativa na cabeça dos alunos. Quando se tem a oportunidade de caminhar com o aluno durante todo o ensino fundamental e médio, pode-se fazer um trabalho decente com os alunos, porém, sabemos que a realidade não é essa, que na atual conjuntura, devido à remuneração dos professores, professores têm que se desdobrar em várias escolas, e as escolas tem que dar conta da vida movimentada dos professores, o que faz a escola ter mais de um professor. Em paralelo a formação das universidades que, ou enfocam para seus alunos seguirem carreira acadêmica (que possui uma visão diferente da formação de professor), ou enfocam a formação de professores, mas se esquecem da importância da demonstração e do domínio do conteúdo, tratando de como ensinar, mas se esquecendo de que o professor tem que dominar o que ensina.

Reforçamos que nossa pesquisa se dá no campo teórico, em diálogo com autores renomados no campo da matemática, como Abramo Heféz, Simmons, Polya, Elon Lages Lima, Augusto Cezar Morgado e José Morgado. Ao mesmo tempo, trabalhamos com autores de referência em Educação Matemática, como Garrica, Geronimo e Franco, Fiorentini e Miguel, Lakatos e Almouloud. Outras referências vêm de Eduardo Silva e Savioli, Resende, Deus, Lopes, e a dissertação de mestrado em Educação Matemática de Eduardo Lopes, além dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e orientações curriculares dos ensinos fundamental e médio.

Esse trabalho de conclusão de curso está dividido em três partes. A primeira parte trata da definição do Princípio de Indução Finita, bem como o contexto histórico, visando um aprofundamento do professor no conteúdo, no mesmo capítulo, apresentamos algumas conjecturas falsas, o que nos leva a perceber erros tolos que deixamos passar por uma compreensão errônea do princípio, bem como não compreender a importância das duas proposições que compõe o princípio, e como essas duas proposições estão interligadas. A segunda parte trata-se de uma análise da formação dos professores em matemática, como eles enxergam as provas e demonstrações, como eles enxergam o Princípio de Indução Finita, sugestões para resolver esse impasse. E na terceira parte, que é o objetivo desse trabalho, começamos fazendo uma analise no ensino de álgebra, inserindo o uso de demonstrações no meio do caminho, e fazendo constantemente alusão ao aluno buscar conjecturar, e a partir dos números naturais, comparar resultados, generalizar, até chegar ao nono ano, onde consegue conjecturar e provar aquilo que conjectura.

2. Princípio da Indução Finita: Aspectos históricos.

A indução Finita, ou comumente chamada indução matemática compreende uma fase de dedução, que claramente a distingue da indução utilizada em outras ciências.

Assim, PÓLYA (1995 p. 91) diz:

> *"É de lamentar que estes nomes ["indução" e "indução matemática"] estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos os dois conjuntamente".*

Bem antes de aparecer com o axioma dos números naturais, a Indução Finita foi muito utilizada na antiguidade (implicitamente) em outras demonstrações. Seu primeiro uso de forma explicita é atribuído a Francesco Maurolicus (1494-1575) para provar que $1+2+3+...+(2n-1)=n^2$.

Mas o método tornou-se popular só em 1665, quando em sua obra *Traité du triangle aritmétique* (tratado do triângulo Aritmético), Blaise Pascal (1623-1662) utilizou-se da Indução em uma das demonstrações das propriedades de seu triângulo.

O método de demonstração por indução é, na verdade uma criação com contribuições de muitos matemáticos, segundo MORGADO (1990): o termo "indução matemática" é considerado mais recente e atribuído a Augustus Morgan, em 1838 além de ter sido citado por outros matemáticos renomados como vemos a seguir.

George Peacock, em 1830, no seu "Treatise on Álgebra" dá o nome de "indução demonstrativa" ao argumento da passagem de n a n+1.

Isaac Todhunter, em 1866, no seu livro de Álgebra, usou as duas designações indução demonstrativa e indução matemática.

William Stanley, em 1882, no livro “Elementary lessons in Logic” e Joseph Fickling, em 1874 em “Complete Algebra”, usaram também as duas designações.

Richard Dedekind, em 1888, em “Was sind und was sollen die Zahlen?” não usou nenhuma das duas designações – usou o termo “indução completa”.

Ainda no final do século XIX, outros livros de texto tais como a Álgebra de Hall e Knight (1898) e “Textbook of Álgebra” de W. S. Aldin (1887) usaram somente o termo “indução matemática” pois o termo indução demonstrativa caiu em desuso.

LIMA (1998) considera que

> *“O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais”.*

Assim, depois de citar Jacob Bernoulli, Blaise Pascal e Pierre de Fermat , sabe-se que podem ser encontrados traços de indução matemática em escrito Hindus e Gregos, inclusive, na demonstração de Euclides[1] de que a quantidade de números primos é infinita.

2.1. Axiomas de Peano e Alguns Casos clássicos

Em meados do século XX, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) deu uma forma mais precisa para os números naturais, por meio da enumeração dos quatro axiomas que ficaram conhecidos como os Axiomas de Peano, conceituando assim, todas as definições e propriedades dos números naturais.

[1] Tal demonstração pode ser encontrada na obra *Os Elementos.*

O Princípio de Indução Finita aparece como o quinto axioma de Peano, proposto em 1899 em sua obra “*Arithmetic principia novo methodo exposita*” - Novo Método de exposição dos princípios da Aritmética.

O conjunto dos números naturais, segundo Peano, é caracterizado pelas seguintes propriedades:

1. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é chamado de número um e é representado pelo símbolo 1.
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1, e, além disso, contém o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto coincide com N.

Este último axioma é conhecido como o Princípio de Indução Matemática, ou mais precisamente segundo HEFEZ (2009 p.3):

> ***Definição [Princípio de Indução Matemática]****: Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais N, tal que 1 pertence a S e sempre que um número n pertence a S, o número n + 1 também pertence a S, tem-se que S = N.*

Para SIMMONS (1997), existe um enorme abismo entre “provavelmente verdadeira” e “absolutamente certa”, sendo necessário um forte argumento lógico para garantir que uma propriedade envolvendo os números naturais, seja verdadeira qualquer que seja o valor de *n*. A indução fornece precisamente este tipo de argumento.

Durante toda a história nos deparamos com o método da indução sendo utilizado por vários matemáticos na demonstração de várias conjecturas. Portanto, uma afirmação só deve ser aceita sobre os números naturais se houver sido demonstrada que é válida para todos os números naturais.

A seguir, vamos ver dois dos casos mais conhecidos da história.

2.1.1. Soma dos n primeiros números ímpares.

O exemplo a seguir trata-se de um dos primeiros casos a ser demonstrado utilizando o princípio da indução, abordado por Maurolicus como já citado anteriormente.

Mostrar que $\forall n \in N^*$, a soma dos n primeiros ímpares é dado por n².

Ou seja, queremos mostrar que $\forall n \in N^*$, teremos $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ é sempre verdade.

Para n=1, temos 1=1², que é verdadeiro.

Admitindo que seja sempre verdadeiro $P(n)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, devemos mostrar que $P(n+1)=1+3+5+...+(2n-1)+...+(2n+1)=(n+1)^2$ também é verdadeiro. Pela hipótese de indução, podemos escrever que $P(n+1)=n^2+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

Logo, pelo princípio da indução finita temos que $P(n)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$, $\forall n \in N^*$ é sempre verdadeira.

2.1.2. Os coelhos de Fibonacci

Um casal de coelhos recém-nascidos é colocado num certo lugar fechado. Supondo que, a cada mês, cada casal de coelhos produz um outro casal e que um novo casal só começa a procriar dois meses após seu nascimento, quantos casais de coelhos existirão após um ano?

Segundo HEFEZ (2009 p.40), o problema citado acima foi proposto e resolvido por Leonardo Fibonacci (1170-1250), matemático italiano também conhecido Leonardo de Pisa, em seu livro *Liber Abaci* publicado no ano de 1202.

FIONACCI apresenta a seguinte solução:

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 1: Total de coelhos em função do número de meses decorridos.

Observando a tabela, tem-se que o número de casais de coelhos num determinado mês qualquer, é sempre igual a soma do número de casais dos dois meses anteriores.

Seja a_{n+1} o número de casais de coelhos de um determinado mês, então, teremos que

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ \ a_1 = a_2 = 1.$$

2.2. Generalizações apressadas

Existem casos em que algumas afirmações acerca dos números naturais nos leva a questionar: A afirmação é sempre verdadeira? Será que, valendo para alguns casos particulares, irá valer para qualquer número natural? Nestes casos, substituir valores para testar a veracidade de uma conjectura, além de ser muito trabalhoso, pode não ser o suficiente.

Por mais que os resultados sejam verdadeiros para alguns valores de n, não se pode garantir que para um número natural não testado, o resultado também seja válido. A seguir, serão abordados alguns casos de generalizações apressadas sobre os naturais que, segundo MORGADO (1990 p.23-27) levaram a alguma afirmação equivocada.

2.2.1.O trinômio de Euler.

$f(x) = x^2 + x + 41$, só nos fornece números primos, quando x é substituído por cada um dos oitenta inteiros consecutivos:

$$-40,\ldots -39,\ldots -1,0,1,2,\ldots,39$$

No entanto, seria errado concluir, após estas oitenta observações, que o trinômio de Euler só fornece números primos, quando x é um inteiro. Tomando $x = 40$, tem-se que:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681$$

Como $f(40) = 41^2$, tem-se que, $f(40)$ não é um primo.

Semelhante ao caso que acabamos de comentar, LIMA (1998 p.38-39) cita a expressão $q(n) = n^2 - 79n + 1601$ que fornece primos para n = 1, 2,

…, 79. Porém para $q = 80$, temos que $q(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681$ não é primo, pois também é um múltiplo de 41.

2.2.2.Os números de Fermat.

Pierre de Fermat, em meados do século XVII, chegou a convencer-se de que todos os inteiros da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ eram primos, para n inteiro e não negativo.

Numa carta escrita a Bernard Frénicle de Bessy, em 1640, Fermat disse estar “quase persuadido” de que todos os inteiros daquela forma eram primos. E assim como acontece com:

$$2^{2^1} + 1 = 5$$
$$2^{2^2} + 1 = 17$$
$$2^{2^3} + 1 = 257$$
$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

Fermat incluiu ainda os números $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ e $2^{2^6} + 1 = 18.446.744.073.709.551.617$ Que julgava serem primos, mas que não o são.

Nessa carta, Fermat afirmava que ainda não tinha conseguido a uma demonstração exata, mas já tinha excluído tantos divisores, por demonstrações consideradas infalíveis que tinha dificuldade em aceitar que tivesse de dizer o contrário.

Mais tarde, em uma nova carta escrita a Frénicle, com respeito ao mesmo problema, Fermat, segundo MORGADO (1990 p.25) escreveu:

> *Mas confesso-lhe com toda clareza que não consegui ainda demonstrar a exclusão de todos os divisores possíveis, nesta bela proposição que lhe enviei e que o senhor me confirmou, relativamente aos números*
>
> 3, 5, 17, 257, 65.537 etc.

..."não pude ainda demonstrar a verdade necessária, da qual, entretanto, como já antes também não duvidava".

Mesmo afirmada por mais de duas décadas, a conjectura de Fermat, de que todos os inteiros da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ são primos, tal proposição não é verdadeira.

Em 1743, Euler provou que, se a e b são primos entre si, então todo o divisor do número $a^{2^n} + b^{2^n}$ é 2 ou é da forma $2^{n+1}k + 1$.

Ou seja, qualquer divisor do número $F_5 = 2^{2^5} + 1$ é necessariamente da forma $2^6 \cdot k + 1$. De fato, para k=10, o número $2^6 \cdot 10 + 1 = 641$ é divisor de $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6.700.417$.

2.2.3.Leibniz e a quase conjectura falsa.

A partir do pequeno teorema de Fermat, tem-se que se p é um primo (positivo) e n é inteiro não divisível por p, então $n^{p-1} - 1$, é divisível por p; ou se p é primo (positivo), então $n^p - n$ é divisível por p para todo o inteiro positivo n.

Leibniz constatou que, para todo inteiro positivo n, n^3-n é divisível por 3, n^5-n é divisível por 5 e n^7-n é divisível por 7.

A partir destas observações, Leibniz esteve perto de fazer a conjectura de que "para todo inteiro ímpar (positivo) s, $n^p - n$ era divisível por p, qualquer que fosse o inteiro positivo p".

Constatou à tempo que para n=2 e p=9 temos $2^9 - 2 = 510$ não é divisível por 9, evitando assim, que a notícia se espalhasse.

2.2.4. Uma conjectura falsa.

O matemático soviético Dmitri Aleksandrovitch Grave, conhecido por seus trabalhos sobre funções de variável complexa, equações diferenciais, geometria diferencial, teoria dos números, história da matemática e educação matemática não teve a mesma sorte.

O problema atribuído ao matemático norueguês Abel em 1828, consistia em saber se existiria algum primo p tal que $a^{p-1}-1$ seja divisível por p^m, para algum $m \geq 2$.

Sabe-se que pelo pequeno teorema de Fermat, para a não divisível pelo primo p, $a^{p-1}-1$ é divisível por p.

O problema proposto por Abel, consistia em saber se existe algum primo p tal que o inteiro $a^{p-1}-1$ seja divisível por p² para a não divisível por p.

O matemático alemão Jacobi notou que 11^2 divide $3^{10}-1$, 5^2 divide 7^4-1, 7² divide 31^6-1, 7^3 divide 19^6-1.

Grave, depois de verificar que não há nenhum primo p, menor que 1000, para o qual $2^{p-1}-1$ seja divisível por p^2, fez a conjectura de que $2^{p-1}-1$ não é divisível por p^2, qualquer que seja o primo (positivo p).

Melssner, em 1913, verificou que para o primo p=1093, o número $2^{1092}-1$ é divisível por 1093² e, portanto, a conjectura de Grave não é verdadeira.

Os exemplos comentados neste capítulo foram abordados com a intenção de trazer alguns casos conhecidos e mostrar que com algumas observações feitas, podemos apenas chegar a uma conjectura, mas, para afirmar que tal conjectura é totalmente verdadeira é necessário provar sua validade para todos os números naturais.

.

3. A Formação do Professor de Matemática e o Estudo do Princípio de Indução Finita

3.1.Problemas Gerais Encontrados no Ambiente Acadêmico

Para uma boa formação do aluno, faz-se necessária uma boa formação do professor. Uma das primeiras coisas com que se depara o estudante de licenciatura é a necessidade de se provar tudo aquilo que afirma. Este é um dos maiores problemas encontrados no decorrer do curso, e uma das principais razões da evasão nos cursos de licenciatura em Matemática. Por outro lado, os PCNs (1998 p.49) alertam que:

> *Entre os maiores desafios para a atualização pretendida no aprendizado de Ciência e Tecnologia, no Ensino Médio, está a formação adequada de professores, a elaboração de materiais instrucionais apropriados e até mesmo a modificação do posicionamento e da estrutura da própria escola, relativamente ao aprendizado individual e coletivo e a sua avaliação.*

Devido a grande evasão, algumas universidades vêem a necessidade de se fazer um curso mais voltado para a área de educação, e se esquecem de trabalhar a base de Matemática dos licenciandos, que em sua grande maioria chegam defasados no Ensino Superior. Não que o aluno de Licenciatura tenha que estudar apenas matemática e se esquecer das disciplinas que tratam de como se relacionar com o aluno, mas o que se procura deixar claro é a importância dos dois aspectos, tanto o domínio do conteúdo, quanto o domínio da técnica para se transmitir. É isto que afirma RESENDE (2007 p.4) quando diz que “no processo de formação de professores o pedagógico não pode se separar do conteúdo, assim como teoria não deve se dissociar da prática, em especial da prática docente na escola básica.” Para tal, enxerga-se a necessidade de uma preparação adequada. Com relação a preparação do conteúdo e o uso de demonstração, GARNICA (2002 p.73) defende:

> *Minha trama de investigação, pautada numa vertente qualitativa de pesquisa plasmada na fenomenologia, mostrou uma nítida convergência nos discursos de professores que, embora vindos de áreas de pesquisa diferentes, efetivamente atuavam em cursos licenciatura em Matemática: a prova rigorosa é tida como elemento fundamentalmente importante para a formação de professores (...)não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica aos modos de produção e manutenção da "ideologia da certeza" para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais.*

Faz–se importante deixar clara a importância que tem uso de demonstrações tanto no curso do bacharel quanto no curso do licenciado ainda que com papéis distintos. Enquanto para o bacharel visa a produção científica, o licenciado visa a formação do pensamento crítico, tanto quanto a própria visão da Matemática. De fato, se o matemático pesquisador vê na matemática um fim em si mesma, o professor de matemática idealiza como um meio ou instrumento de formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos SILVA (2010 p.13). Um dos desafios do professor de matemática é demonstrar os teoremas de forma a priorizar o entendimento dos estudantes e não uma convenção formal produzida no quadro. No entanto, a prova é abandonada por maioria dos professores por enxergar como um impedimento para a compreensão, em vez de ser um meio, segundo RESENDE (2007)

3.2. Problemas Encontrados na Formação do Professor com Relação ao Princípio de Indução Finita e Possíveis soluções para o trabalho de indução com os professores.

O Princípio de Indução finita é um dos primeiros métodos de demonstração com que o estudante de matemática se depara na sua carreira acadêmica, as vezes na disciplina de Teoria dos Números ou Álgebra I, Esse conceito é apresentado, e passa a fazer parte de toda a caminhada do estudante durante a universidade. No entanto, um problema que aparece quando os estudantes vêem o princípio da Indução finita é encará-lo como um processo mecânico e se restringe a encontrar padrões a serem seguidos, tornando o processo monótono.

Um outro problema, também comum e ainda mais fundamental, é a confusão entre indução empírica e indução matemática. Assim, PÓLYA (1975 p.91) diz:

> *"É de lamentar que estes nomes ["indução" e "indução matemática"] estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos os dois conjuntamente".*

Entretanto, SILVA (2010) deixa claro a diferença entre Indução Finita e Indução Empírica:

> *Indução finita é um método dedutivo enquanto indução empírica é uma generalização não dedutiva, ou seja, na demonstração por indução empírica não ocorre dedução no sentido matemático, pois a generalização é realizada por meio de observações.*

Com relação a ciências empíricas, SILVA (2010) cita a seguinte observação de Fonseca:

> *a demonstração é baseada principalmente na indução empírica e na analogia, a partir das quais se conclui que, o que é verdade para alguns indivíduos de um determinado grupo. Nesse contexto, a validade das proposições aumenta proporcionalmente com o número de fatos que a suporta, sendo invalidada por um contra-exemplo.*

Já com relação ao Princípio da Indução Finita, LIMA (1998 p.27) afirma que o "axioma da indução é uma forma sagaz e operacional de dizer que qualquer número natural n pode ser alcançado se partirmos de 1 e repetirmos suficientemente a operação de tomar o sucessor de um número".

SILVA e SAVIOLI (2012 p.127-148) através de experimentos concluíram que alguns alunos de licenciatura em matemática não compreendem a diferença entre indução empírica e indução finita. Os alunos não enxergam a indução finita como prova formal, tomando afirmações, e uma vez verificada para certo número de termos, validando para todos os naturais.

Ao se deparar com o processo de construção da prova, além de não refletir sobre o que está provando, a forma mecânica os leva a enxergar as duas partes da demonstração (base e passo indutivo) como partes independentes, não estabelecendo a relação que existe entre elas

Um terceiro problema é a não-compreensão da primeira proposição do Princípio da Indução Finita. SILVA afirma ainda que os alunos não conseguem compreender a importância desta, que se apresenta como função de base para toda a demonstração. É a partir da primeira proposição, e só a partir dela, que se pode afirmar que é valido para um valor n.

Uma vez apresentado problemas na formação dos professores, deve-se repensar o trabalho que tem sido feito dentro das Universidades. Uma vez que existe uma diferença de objetivo entre o matemático e o professor de matemática, também deve existir uma diferença na sua formação, pois os próprios enxergam a matemática com olhares diferentes.

Quando se pensa em tais dificuldades RESENDE (2013 p.5) afirma sobre o ensino de Teoria dos Números em turmas de licenciatura em Matemática dentro das Universidades

> *Deste modo, o ensino tende a ser expositivo, livresco, centrado no professor, sendo a aprendizagem resultante da repetição de inúmeros exercícios, no caso demonstrações de proposições que, já se sabe, são verdadeiras. A significação histórico-cultural, a investigação matemática, o conjecturar ficam relegados a segundo plano ou não aparecem.*

Ou seja, mesmo se tratando em turmas de formação de professores, a universidade não tem preocupação com a formação do professor. Cabe a ela estimular a reflexão do estudante de Licenciatura em Matemática, o mesmo que ele deve buscar de seus alunos, que aquilo que ele trabalha não seja apenas uma operação motora, mas que seja objeto de reflexão.

Diante disso, é necessário levar o aluno a refletir, por exemplo, através de exemplos lúdicos sobre o que é o princípio da indução finita, baseado no rigor matemático, o que significa cada uma de suas duas proposições, bem como o fato de as duas proposições estarem relacionadas para que a prova seja válida.

Faz-se necessário também entender a força desse princípio, que a partir de uma analise finita, prova uma conjectura para valores infinitos. Um exemplo interessante é o apresentado por GERONIMO E FRANCO (2006) onde ele cita o trinômio de Euler, no capítulo II.

Por fim, um programa que procura sanar as deficiências nessa área é o PAPMEM[2], um programa realizado pelo IMPA[3] que oferece treinamento gratuito para professores de matemática de ensino médio de todo o estado do Rio de Janeiro e transmitido em forma de videoconferência para diversas universidades no Brasil. O programa conta como o apoio da CAPES e é realizados desde 1990, sob diversas formas, abordando assuntos relativos às três séries do ensino médio. Deste programa resultou uma série de livros especialmente voltados para melhorar a formação dos professores do ensino médio, publicados pela SBM[4] com o título Coleção do Professor de Matemática.

[2] Programa de aperfeiçoamento para professores de matemática de ensino médio
[3] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
[4] Sociedade Brasileira de Matemática

4. O Currículo Escolar Nas Séries Finais Do Ensino Fundamental, E O Uso Informal De Indução Em Fórmulas Sem Demonstrações

O Princípio de Indução Finita serve para demonstrar resultados de funções onde o domínio é o conjunto dos números naturais. Sendo assim podemos dizer que esse conteúdo engloba três áreas: a álgebra, as demonstrações, e problemas onde o ambiente de trabalho envolve os números naturais.

Neste capítulo buscamos pontos do programa do ensino fundamental em que se pode começar a preparar o aluno para a compreensão do conceito de indução. O uso de fórmulas já aparece no 6º ano, justamente com as fórmulas básicas de geometria e trabalhadas de modo intuitivo, sejam elas, calculo de área do quadrado e do retângulo, e cálculo do perímetro. Ao se trabalhar tais conceitos, o ensino da pré-indução se faz presente. No 7º ano, o aluno começa a trabalhar com uma álgebra elementar, bem básica, mas é no 8º ano que a álgebra ganha corpo e o aluno começa a reconhecer de fato, o que significa uma incógnita, e a generalidade dela. No 8º ano também, com o surgimento formal da álgebra na vida do aluno, bem como a manipulação algébrica, surgem as fórmulas mais elaboradas, bem como as primeiras demonstrações formais, que se dá nos casos de congruência de triângulos.

FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL (1993 p. 89) defendem que o pensamento algébrico deve fazer parte na formação do estudante desde as séries iniciais onde:

Nas séries iniciais do 1º grau, o objetivo fundamental a que se deve visar é o desenvolvimento da capacidade de perceber regularidades e de captar e expressar retoricamente, ou de forma semiconcisa, a estrutura subjacente às situações-problemas, através do processo de generalização.

Sem tirar a importância do pensamento algébrico formal, introduzido no tempo correto.

Não devemos esquecer, porém, que esse pensamento se potencializa a medida que, gradativamente, o estudante desenvolve uma linguagem mais apropriada a ele. Nesse sentido, se a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica-abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da álgebra, o menosprezo ao modo de expressão simbólico formal constitui-se também em impedimento para seu pleno desenvolvimento.

Ou seja, no 8º ano o aluno adquire o conceito formal da álgebra e da necessidade de demonstrações. Porém, alguns resultados são simplesmente apresentados sem nenhuma explicação, simplesmente aceitos.

ALMOLOUD (2007 p.2) afirma que alunos do 9º ano possuem capacidade de conjecturar e construir provas para suas conjecturas desde que:

1 – durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;
2 – durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (“argumentos”) produzidas

durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica.

A partir daí, observa-se que no desenvolvimento do aluno, a capacidade de abstração, a formulação precisa de enunciados algébricos e a capacidade de generalização só vem no 8º ano. Mesmo começando com explicações lógicas no 6º e 7º ano, no 8º ano é que aparecem as fórmulas mais bem estruturadas, é nesse espaço que se espera introduzir as demonstrações mais simples, mas lúdicas, observando-se estruturas que se associem aos números naturais, e assim, poder levar aos alunos a conjecturar, e a se perguntar o porquê das afirmações que eles conjecturam.

HEFEZ (2009 p.3) afirma que, se tem um assunto que todo estudante do ensino médio deveria saber, em sua lista, constaria indução, pois lhe dá o primeiro contato com o infinito. De fato, na mudança do ensino fundamental para o ensino médio, o aluno logo no primeiro mês passa a trabalhar com o infinito. Portanto, em todos os conteúdos contemplados pela matemática discreta no ensino médio, o aluno já possui maturidade para pensar em indução.

Sendo assim, o objetivo desse capítulo é justamente tratar sobre a pré-indução nas séries finais do ensino fundamental, ou seja, possibilidades de demonstrações rudimentares de indução, nesses conceitos que são tratados como verdades sem ser dada nenhuma justificativa plausível.

DEUS e ANDRADE (2011 pp. 3 – 4) se apoiando em A. LAKATOS (1978) e em LOPES (1999) defendem a criação de um ambiente propício ao processo de conjecturar, bem como, que estimule provas e refutações. Ambiente esse que privilegie a produção coletiva em paralelo com a individual, buscando um desenvolvimento lógico-dedutivo, a partir de situações em que o aluno possa explorar, compreender e enfrentar. Dentro desse ambiente, a prova surge naturalmente, como parte da busca do aluno.

Segundo eles nesse ambiente, a rotina algorítmica é superada e uma atividade pode não ser concluída em uma só resposta.

4.1. Conteúdos e objetivos do 6º e 7º ano

Desde que a criança vem ao mundo, seu cognitivo já trabalha matematicamente. Ao fazer associações, comparações e seriações, e assim tirando suas conclusões a criança produz matemática, e cabe aos seus professores desenvolver essas habilidades. Porém, até o 5º ano, o conhecimento matemático trabalhado se dá de uma forma concreta, e apenas no 6º e 7º ano que há de se trabalhar a capacidade do aluno abstrair, ou seja, sair do campo concreto, e enxergar a matemática, ao mesmo tempo em que necessária para resolver os problemas, independente dos problemas para existir.

Com relação ao ensino de matemática no 6º e 7º ano, os PCNs falam:

> *É fundamental que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, busquem relações existentes entre eles, aprimorem a capacidade de análise e de tomada de decisões, que começam a se manifestar. Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas. Com isso criam-se condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.*[5]

É interessante observar que, segundo os PCNs, o aluno nessa fase passa a utilizar representações algébricas e generalizar resultados e

[5] BRASIL (1998 p 63)

operações observadas em algumas sequências, bem como, uma vez criada uma generalização para tal situação, consegue atribuir valores diferentes e achar resultados distintos, bem como investigar e persistir na busca de resultados, usando estratégias de verificação para confirmar seus resultados, ou até mesmo, alterar a estratégia quando o resultado não for satisfatório.

Dentro do conteúdo abordado nesse período, observa-se que o aluno já trabalha com sequências desde o 6º ano, e no 7º ano, já aprende a expressar essas sequências a partir de uma lei, que determina os elementos da sequência. Uma vez que o aluno já possui essa capacidade de identificar, criar e generalizar sequências, e a capacidade de abstrair e justificar suas respostas, mesmo sendo, na maioria das vezes de forma argumentativa, o aluno já trabalha intuitivamente conceitos com relação estreita com a indução.

Em paralelo, o aluno entra em contato com fórmulas, principalmente no tocante a geometria. No 6º ano as fórmulas de áreas e volumes são trabalhadas de forma intuitivas, e quando se trata o conceito de quadrado trabalhado em potência, com a área do quadrado, se faz uma associação entre os números naturais e a área correspondente ao quadrado de lado citado. Como os PCNs citam: “Compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado” [6].

Se permitindo, dessa forma, fazer uma associação entre tais grandezas justamente no 6º ano, onde sem o aluno perceber, estará utilizando a ideia de indução.

Já no 7º ano, o conhecimento algébrico é mais bem aguçado, e as associações mais bem elaboradas. É no 7º ano onde se deve trabalhar a

[6]BRASIL (1998 p. 72)

capacidade de generalizar resultados a partir de observações. Isso se dá com a construção de sequencias que façam analogias entre os números naturais e a sequência trabalhada, observando que cada valor da sequência, se associa com um número natural.

Quando se trata do 6º e 7º ano, não existe um conteúdo, de fato, onde necessite o trabalho de indução, mas a ideia de indução está presente em todo momento, tanto no sexto ano, com o trabalho de potenciação e radiciação, quanto no 7º ano com a álgebra básica apresentada e a introdução ao trabalho de equações. Toda essa preocupação com relação à capacidade de generalização de resultados e investigação dos mesmos faz com que a capacidade de abstração se desenvolva, bem como o interesse pelo entendimento dos resultados, não se preocupando apenas com a resposta, mas o porquê dessa resposta. A possibilidade de o aluno construir o caminho, generalizá-lo, e se questionar quais caminhos são possíveis e o porquê, é o que permite ao aluno construir uma base sólida para os dois anos que vêm a seguir.

4.1.1. Exemplos relacionados ao 6º Ano

É uma preocupação atualmente no ensino de matemática do ensino fundamental, o trabalho de álgebra e aritmética em paralelo com geometria. Isso se dá pelo fato de que antes se trabalhava toda a álgebra e aritmética compassadamente enquanto o ensino de geometria ficava abandonado, ou sufocado no final do ano letivo. Além disso, enxergou-se na Geometria, uma aplicação no ensino da álgebra e aritmética, bem como uso da geometria para exemplificar as propriedades algébricas.

Nessa linha de pensamento, o aluno tem contato com sequências numéricas, ao estudar números naturais, e assim, conseguir identificar os termos subsequentes da sequência. E as operações fundamentais, sendo elas, adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; logo após, ele já estuda área e perímetro. Ao se trabalhar área, tem-se a forma lúdica de dividir a figura de quadrados de lado 1 para em seguida contar os quadrados, todo esse procedimento é feito antes de se trabalhar a área do quadrado como lado elevado a segunda potência. Logo após, sugere-se unir os conteúdos e mostrar a relação entre o lado do quadrado e a área do mesmo. Ao se montar uma sequencia, com os números naturais, nas lacunas vazias, o aluno consegue identificar que existe uma relação entre os números naturais e seus quadrados, ou entre o lado do quadrado e suas respectivas áreas. Porém, a ideia apresentada no 6º ano é uma ideia bem intuitiva, onde o objetivo do professor é fazer o aluno entender o que está por traz das operações trabalhadas, bem como incentivar a capacidade de fazer associações entre grandezas.

Um dos conteúdos complicados de se trabalhar no 6º ano é o referente à raiz quadrada. É muito complexo para os alunos compreender que a raiz quadrada é a operação inversa da 2ª potência, porém, quando o professor tem o cuidado de preparar os alunos com antecedência, trabalhando com sequências, e assim, estimulando a relação entre o lado e a área do quadrado, fica mais simples para o aluno associar a noção de raiz quadrada com o lado do quadrado que ele conhece a área.

Mesmo as medidas podendo assumir valores não naturais, o conceito de sequencia apresentado ao aluno no 6º ano é uma forte ferramenta para se fazer relações e assim deduzir formulas, que é o que o professor espera dos alunos, que eles entendam o processo e assim possam generalizá-los.

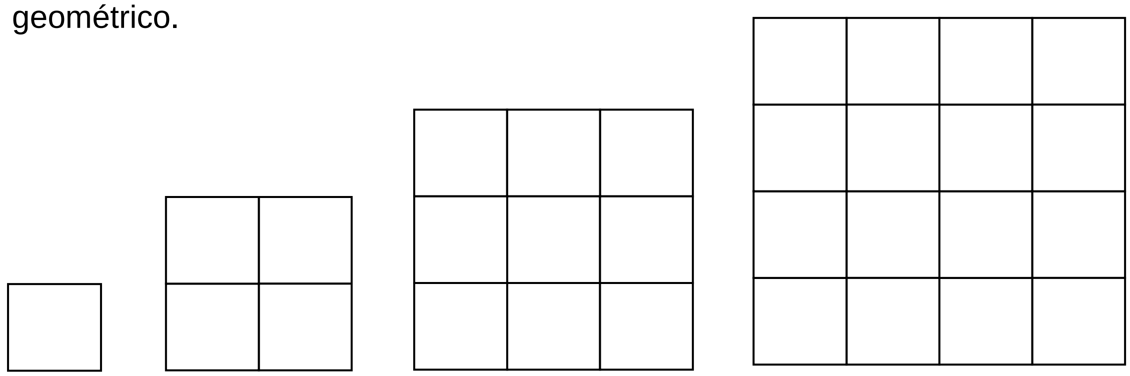
Ex. Completar os espaços nas sequências abaixo:

1	2	3		5	6			9	10
1	4	9	16		36	49	64		

Figura 2: Tabela para completar sequências proposta para 6º ano

Cabe perguntar a turma, como ela preencheu as lacunas da primeira sequência? E as da segunda?

A partir daí, introduzindo o mesmo exemplo no contexto geométrico.



Lado__1 Área ___ | Lado____ Área ____ | Lado____ Área ____ | Lado____ Área ____

Figura 3: Exercício relacionando a área e o lado do quadrado

Da mesma forma que o exemplo anterior, cabe perguntar: Como fez para calcular os lados e respectivas áreas? Podemos criar uma relação entre o lado do quadrado e sua área, ou em outras palavras, tem alguma forma de saber a área do quadrado sabendo o lado?

4.1.2. Exemplos referente ao 7º Ano

No 7º Ano o aluno começa a ser apresentado à álgebra de uma maneira mais formal. O uso de letras para representar grandezas desconhecidas mostra um grande avanço, bem como a capacidade de ler um texto e a partir dele, transformá-lo em uma equação.

Em paralelo com o estudo da álgebra o aluno conhece o volume do cubo, Mais uma vez apelando para o conhecimento de sequências trabalhado no 6º ano, é recomendável que se faça uma relação entre volume do cubo e medida da aresta, e assim, introduzir a noção de raiz cúbica.

No campo algébrico, o estudo de grandezas diretamente proporcionais está relacionado com o conhecimento de sequências, sendo assim, quando se compara duas grandezas, e que se fala que aumentam ou diminuem proporcionalmente, estamos falando de duas sequencias, e daí, podemos manipulá-las. Bem mais interessante do que aprender técnicas de como resolver uma regra de três, é entender como essas grandezas funcionam. Basta construir uma tabela, com as duas grandezas, tem-se que se uma grandeza dobra, a outra dobra, caso elas sejam diretamente proporcionais, se forem inversamente proporcionais, se uma dobra a outra é reduzida a metade. A construção de tabelas para descrever as sequências e o uso delas na resolução de regra de três faz com que o aluno compreenda como funciona os crescimentos de grandeza. Não é intenção desprezar o uso de técnicas, elas têm sua importância, porém, o que é esquecido pelo professor, e que este trabalho tenta resgatar é a necessidade de investigação por parte do aluno que constrói o seu caminho para resolução de problemas, bem como, a valorização do processo.

Tomemos os exemplos abaixo:

1 - Um produtor rural tem uma produção anual de frangos de cerca de 18 toneladas. Em um bimestre este produtor irá produzir quantas toneladas de frango?

Como é fácil perceber, o problema se trata de uma regrade três simples e direta, sendo assim podemos trabalhar com as sequencias.

Frango	Meses
18 toneladas	12 meses
9 toneladas	6 meses
4,5 toneladas	3 meses
???????	2 meses
1,5 toneladas	1 mês

Tabela 4: Relação entre quantidade de frangos produzidos e a quantidade de meses produzidos proposto no exemplo

É fácil perceber que a resposta é 3 toneladas, e é claro que o aluno não precisa percorrer o percurso todo descrito na resolução acima para concluir que a resposta é 3 toneladas. Porém, é de fundamental importância que o professor investigue qual o processo que o aluno tomou para concluir sua resposta.

2 - Uma torneira enche um tanque em 6 horas. Se forem utilizadas 3 torneiras, qual o tempo necessário para enche-lo?

O problema trata-se de uma regra de três simples inversa, que colocando na tabela temos:

Torneira	Tanque
1 torneira	6
2 torneiras	3
3 torneiras	?????
4 torneiras	1 hora e 30 min
6 torneiras	1 hora

Tabela 5: Relação entre quantidade de torneiras para encher um tanque e o tempo para enchê-lo proposto no exemplo.

Basta observar que se multiplicar por 3 de um lado, do outro lado divide por três, logo a resposta é 2 horas.

4.2. Conteúdos e objetivos do 8º e 9º ano

O conceito do infinito trabalhado de forma indireta primeiramente no 8º ano.

Nesse ponto, o caráter especulativo da Matemática para além de seu aspecto técnico, e que também reside no âmbito dos limites das indagações do intelecto humano, pode despertar interesse nos alunos, como as considerações e investigações sobre a infinitude dos conjuntos numéricos, a infinitude de racionais entre dois naturais e a infinitude dos irracionais ou o impacto causado por uma representação de p com um bilhão de casas decimais sem o surgimento de um período.

Nessa fase, alguns aspectos do desenvolvimento cognitivo dos alunos muito favorecem a aprendizagem, pois a capacidade de observação, e de notar os detalhes, bem como a capacidade de pensar de forma mais abstrata e de argumentar com maior clareza são ampliadas.

Com relação ao pensamento algébrico, um ponto interessante é que se espera que os alunos sejam capazes de observar regularidades bem como estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Sendo assim, os PCNs falam.

> *O trabalho com a Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a pré-álgebra. desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos,*

> *generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações[7].*

Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas).

No 8º ano surje a necessidade mais clara da ideia de indução, pois nessa fase começa-se ao mesmo tempo a Álgebra de uma forma mais independente, e ao mesmo tempo, necessária para outras áreas da Matemática. Ao se procurar trabalhar uma linguagem matemática mais clara, com conceitos mais bem definidos, tem-se a possibilidade de aprofundar mais na ideia de indução, partindo para um manuseio algébrico. Sobre o cálculo das diagonais de um polígono, tema que traz esse princípio de indução em seu cerne, mas não é trabalhado nas escolas, os PCNs falam que:

> *...o trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas[8].*

[7] BRASIL (1998 p. 84)
[8] IBID

Em paralelo com isso, nesta fase o aluno tem seu primeiro passo com demonstrações formais, mesmo sendo de forma rudimentar, mas esse primeiro contato é necessário, a busca pela argumentação plausível é um ponto chave nessa época, Os PCNs falam que o refinamento das argumentações produzidas ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações.

4.2.1. Exemplos referente ao 8º ano

Como no 8º ano, o aluno já possui uma manipulação algébrica, o aluno tem plena capacidade de entender uma demonstração por indução. Entendê-la por completo, com todas as suas formalidades pode não conseguir compreender, mas a manipulação algébrica na segunda propriedade da indução finita, em alguns casos básicos, como é os casos estudados nessa fase ele já possui.

Para tal considere dois casos clássicos:

4.2.1.1.Soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Para verificar a soma dos ângulos internos, os livros didáticos, bem como os professores do ensino fundamental, tendem a dividir o polígono em triângulos, e assim, multiplicam a quantidade de triângulos (que é a mesma quantidade de lado dos polígonos), e subtrai por 360, que são a soma dos ângulos localizados no centro do polígono, chegando na fórmula :

$$S_n = 180.(n - 2).$$

Começa-se trabalhando com o quadrado, dividindo em 2 triângulos, prosseguindo para o pentágono, dividindo em 1 quadrado e 1 triângulos, o hexágono em 1 pentágono e 1 triângulos, podendo parar aí ou até prosseguir por mais um ou dois casos. A partir daí já dá para se tirar uma conclusão com relação à fórmula, mas cabe trabalhar para o caso generalizado de n.

Lados	S_n
3	180
4	360 = 180.2
5	540 = 180.3
6	720 = 180.4
7	900 = 180.5
8	1080= 180.6
N	180.(n – 2)

+180
+180
+180
+180
+180

Tabela 6: Relação entre número de lados de um polígono e a soma de seus ângulos internos

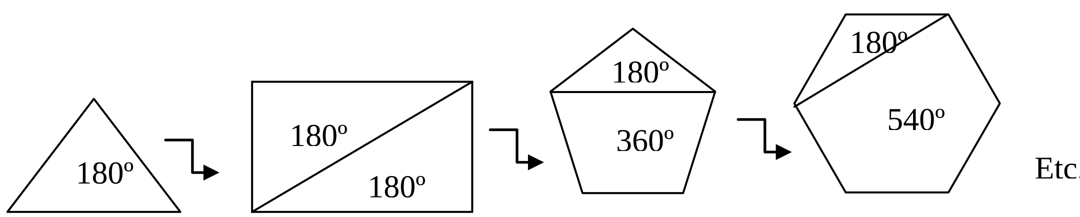


Figura 7: Diagrama demonstrando a relação entre número de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos

Como a soma aumenta de 180 em 180 a partir dos triângulos, e se soubermos a soma de um polígono de n lados, para sabermos a soma de um polígono de n + 1 lados basta somar 180º, logo pode-se concluir que S_n

= 180.(n - 2) é válido para qualquer número de lados, ou seja, para todos os naturais.

4.2.1.2. Soma das diagonais de um polígono

Quando se trata da soma das diagonais, o processo é um pouco mais complicado, o processo para construção da fórmula das diagonais de um polígono regular é um pouco complicado. Porém, sempre se deve fazer relação aos números naturais. Observe a tabela:

Lados	Diagonais
4	2
5	5
6	9
7	14
8	20
N	????

Tabela 8: relação entre número de lados de um polígono e o número de diagonais.

Não é tão simples enxergar a relação que envolve as duas grandezas, no entanto, não impede que algum aluno consiga conjecturar a fórmula, porém, pode-se observar que o número de diagonais que saem do vértice é sempre três a menos que o número de vértices (que é o mesmo número de lados), e como uma diagonal une dois vértices não consecutivos, ao multiplicar o número de diagonais que saem de cada vértice pelo número de vértice, s encontra o dobro do número de diagonais, logo para achar o número de diagonais, basta dividir o resultado por dois, logo, podemos conjecturar que em um polígono de n lados o número de diagonais pode ser calculado por:

$$D_n = \frac{n.(n-3)}{2}$$

4.2.2. Exemplos referentes ao 9º ano

No 9º ano, o aluno estuda de fato uma parte da matemática chamada de relação e função, que justamente cria essa ponte de relacionar conjuntos, nessa parte da matéria o aluno já consegue conjecturar fórmulas a partir de exemplos citados, analisando o comportamento do problema proposto e relacionar grandezas, mesmo que em todo o 9º ano não haja a necessidade de nenhuma das formulas citadas sejam provadas via um método intuitivo de indução, todas elas devem ser provadas. É importante que o aluno esteja familiarizado com o ambiente da demonstração, e na parte referente a relações e funções, ser levado situações onde ele conjecture fórmulas, teste-as, e assim verifiquem suas validades.

4.3. Considerações Finais

Observa-se que a álgebra está presente na vida do aluno desde as séries iniciais, mesmo que de uma forma intuitiva, quase imperceptível, porem, o aluno vem desenvolvendo esse conhecimento. No decorrer do 6º e do 7º anos, a capacidade de abstração vem à tona, e eles começam a abstrair, generalizar, e o conceito de indução começa aparecer. Já no 8º ano surge o a noção do infinito bem como sua capacidade de abstração se torna mais aguçada. O ferramental algébrico que ao mesmo tempo é tão perigoso, pois faz o aluno pensar na álgebra como apenas uma ferramenta para as demais áreas, como importante, para suas generalizações bem como o expressar matemático, lhe dão todo arsenal necessário para criar demonstrações mais elaboradas, numa linguagem mais rebuscada.

Porém, o desenvolvimento do aluno é um processo. Puladas etapas, ele acaba não assimilando as demais como deveria. O interesse pela demonstração, o costume por buscar o porquê das respostas é algo que deve ser trabalhado desde as séries iniciais, e uma vez que chegou no 6º ano, a capacidade de abstração tem que ser aguçada. Ao aluno buscar respostas além do óbvio é sempre se perguntar o porquê dessas respostas. A matemática vai muito além dos resultados. Ela busca entender o porquê desses resultados e ao se utilizar o pensamento da indução finita, mesmo que de forma bem intuitiva, e ir se aprofundando cada vez mais à medida que o aluno vai se desenvolvendo. Isso o deixa preparado a compreender as relações trabalhadas não só no 8º e 9º ano, que são apresentadas muitas vezes sem respostas, bem como as trabalhadas em todo o ensino médio.

5. Conclusão

O Princípio de Indução Finita é um tema fascinante, pois ao mesmo tempo em que é um princípio tão simples, embutido na construção dos números naturais, possui uma profundidade enorme, pois permite analisar de uma forma finita, situações com amplitude infinita. Afinal, é a noção do infinito e o poder de afirmar que uma proposição é valida para todos os números naturais. Em contrapartida, a educação básica necessita de um ensino de matemática menos voltado para resultados e mais voltados para o caminho percorrido para se alcançar. O Princípio de Indução Finita permite um contato de uma forma simples ao cerne da matemática, que não busca resultados, busca caminhos, e possibilidades de se alcançar esse resultado.

Porém, sabemos que para conseguir que seja trabalhado demonstrações e provas, bem como a possibilidade de o aluno conjecturar, é necessário que se tenha professores preparados, e para isso, precisa-se de uma reformulação, inclusive no ambiente universitário no que diz respeito à formação de professores.

Para realizar esse trabalho fizemos uma pesquisa dentro do campo educacional e apresentamos dois capítulos onde se permite o professor entender o Princípio de Indução Finita, bem como enxergar as dificuldades dentro de sua formação, bem como na formação da maioria dos professores, dando uma possibilidade de mudança, que são os capítulos 2 e 3. Já o capítulo 4 apresenta uma proposta específica junto ao ensino fundamental, onde se trata da capacidade de desenvolvimento dos alunos, e dentro de suas limitações, permitir que eles conjecturem, analisem soluções, criem caminhos, e assim, prepará-los para que no ensino médio construam demonstrações formais.

Dentro da pesquisa, a principal dificuldade foi a falta de material didático que explore indução de fato, encontra-se material que incentiva o uso de indução em curso de formação de professores, mas quando se trata de indução de fato, o material se torna escasso pois os livros só trazem as duas proposições e vários exercícios, que se repetem nos livros.

Quando construímos esse trabalho tínhamos em mente a necessidade de preparar o aluno para aprender o Princípio de Indução Finita no 1º ano de ensino médio, no entanto, nos deparamos com vários problemas que são apresentados no ensino fundamental. São objetivos traçados pelos PCNs e orientações curriculares nacionais que são ignorados. Ao se deparar com os PCNs, eles tratam da necessidade de criar conjecturas, provar conjecturas existentes, incentivar a capacidade investigativa do aluno. Ou seja, os PCNs já visavam um trabalho mais voltado para a investigação, no entanto, o que se passa nas escolas é o contrário. O que predomina é que na matemática o que interessa é o resultado, e se procura decorar fórmulas e métodos para se chegar a isso, criando meros operadores em vez de cidadãos pensantes.

Pensando nesse ensino começamos a preparar um capítulo onde o professor, ao ler venha ter consciência de que o Princípio de Indução Finita não é simplesmente um processo mecânico, mas possui uma razão de ser, e ao nos deparar com algumas conjecturas falsas, nos deparamos com erros que nós cometemos, que nos passa despercebidos, por que estamos preocupados com o mecanismo e nos esquecemos do significado da prova.

Dentro dessas dificuldades encontradas também em nós, construímos um capítulo voltado para a formação do professor, onde se apresenta problemas na formação, bem como algumas soluções.

Construído aquilo que era de fato nosso objetivo, fizemos uma análise de sua aplicabilidade no Ensino fundamental, onde o aluno não possui maturidade para construir demonstrações formais, porém, tem como conjecturar, criar, e assim, a partir de um conceito de pré-indução, permitir que os alunos criem suas respostas em vez de se guiar por fórmulas prontas.

Foi verificada a viabilidade do trabalho de pré-indução no ensino fundamental, uma vez que os PCNs valorizam a capacidade do aluno nesses ciclos de criar e conjecturar, e sendo a base do conceito de pré-indução trabalhada no 6º ano, que é o estudo de sequências, observamos que as conjecturas criadas pelos alunos são feitas quando se comparam diversas grandezas com a sequência dos números naturais. Ao se trabalhar a capacidade de conjecturar desde o 6º ano, e analisar o comportamento com os números naturais. A postura do aluno com relação à matemática muda, o que o permite um melhor entendimento do Princípio de Indução Finita no 1º ano do ensino médio.

Ao concluir esse trabalho somos desafiados a repensar em como temos trabalhado, pois muitas vezes nos colocamos nos casos citados acima, quando subestimamos nossos alunos, achando que uma prova só ira complicar o entendimento deles, quando na verdade é uma insegurança nossa. Somos chamados a mudar a nossa prática de ensino, voltando-a para a investigação. Que esse trabalho não fique só no papel, mas seus resultados sejam aplicados em sala de aula.

Para trabalhos futuros podemos fazer uma análise prática, creio que se tendo oportunidade, de caminhar com uma turma no período do 6º ao 9º ano, poderia comprovar a diferença de um ensino mais voltado para o investigativo. Recomendamos a todos que compartilhem desse pensamento a procurar aplicar os resultados apontados nesse trabalho, e assim, tirem suas próprias conclusões sobre o estudo investigativo e o trabalho com aquilo que chamamos de pré-indução.

6. Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Prova e Demonstração em Matemática: Problemática de seus Processos de Ensino e Aprendizagem*, GT: Educação Matemática / n.19, PUC – SP, 2007.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio*, V. 2, Brasília, 2006.

BRASIL. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática, 3º e 4º ciclos*. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

DEUS, Angelica Karina de, ANDRADE, José Antônio Araújo, *Demonstrações: Uma Proposta Para o Ensino-Aprendizagem de Algebra*, Artigo - XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Recife, Pernambuco. Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2151/935, acessado em 16 de janeiro de 2013 às 22:49 hs.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., MIGUEL, A. *Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar.* Pro-Posições, v. 4, n.1, pp. 89, março, 1993.

GARNICA, A. V. M. *As Demonstrações em Educação Matemática: em ensaio*. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 15, nº. 18, 2002, p. 73 a 81.

GERÔNIMO, J. R., Franco, V.S. (2006). *Fundamentos de Matemática: uma introdução à Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções*.Eduem, Maringá-PR.

HEFEZ, Abramo. *Indução Matemática.* Programa de Iniciação Científica da OBMEP Vol. 4, 2009. em http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654 acessado em 10 de janeiro de 2013 às 23:21.

LAKATOS, I. *A Lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LIMA, Elon L. et. al., *A Matemática do Ensino Médio*. Vol 1, SBM, Rio de Janeiro, RJ.

LIMA, Elon L*. O Princípio da Indução. Eureka,* nº 3, 1998.

LOPES, A. J. *Gestão de Interações e Produção de Conhecimento Matemático em um Ambiente de Inspiração Lakatosiana*. Educação Matemática em Revista. 7(6), 1999, p. 19-26.

MORGADO, José. *Indução e Indução Matemática*, Boletim da SPM – nº 17, junho de 1990. – Centro de Matemática – Faculdade de Ciências do Porto.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RESENDE, M. R, *Re-Significando A Disciplina Teoria Dos Números Na Formação Do Professor De Matemática Na Licenciatura* em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/significando.pdf, acessado às 16:33 hs de 22 de janeiro de 2013.

RUSSEL, B. *Os problemas da filosofia*. Trad. Jaimir Conte. Florianópolis: 2005, cap. 6. Disponível em http://www.cfh.ufsc.br/~conte/russell.html>. Acessado em 22 de janeiro de 2013.

SILVA, E. M. Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução matemática. 2010. Dissertação (Mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná.

SILVA, E. M., SAVIOLI, Angela M. P das D. *O Conceito de Indução Finita na Compreensão de Estudantes de Um Curso de Matemática*, Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, ISSN 1982-5153, v.5, n.3, p.127-148, novembro 2012.

SIMMONS. G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1. São Paulo: Editora Makron Books do Brasil, 1997.

SMOLE, Kátia et al. *Cadernos do Mathema*: Jogos de Matemática de 1º ao 5º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007

VARELLA, Marcia, *Prova e demonstração na Geometria Analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos",* Dissertação de Mestrado, 2010, PUC – SP.

VELOSO, A.J.B, *Acerca da Indução*, 2004 - Disponível em <cfcul.fc.ul.pt/equipa/2_cfcul_nao.../acercadainducao.doc>. Acessado em 22 de janeiro de 2013.