INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

RODRIGO RODRIGUES FRAGA

O ESTUDO DAS LOTERIAS

Uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio

Rio de Janeiro - RJ

2013

RODRIGO RODRIGUES FRAGA

O ESTUDO DAS LOTERIAS

Uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA

Rio de Janeiro - RJ

2013

RODRIGO RODRIGUES FRAGA

O ESTUDO DAS LOTERIAS

Uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em _______________ de 2013

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA - IMPA

____

Prof. Dr. AUGUSTO QUADROS TEIXEIRA - IMPA

____

Prof. Dr. RALPH COSTA TEIXEIRA - UFF

Rio de Janeiro - RJ

2013

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, aos meus pais, a minha esposa e a minha filha, razão de todo este esforço.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que com sua infinita bondade, permitiu que esta vitória fosse alcançada.

A todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial ao Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro, orientador deste trabalho.

À minha esposa Micheli, pelo companheirismo em todos esses anos e pelo apoio à realização do curso.

À minha filha Gabriela, que apesar de sua pouca idade, me ensina muito com seus pequenos atos.

À minha mãe Ariete, pela educação e dedicação a todos os filhos.

Ao meu pai Sebastião, in memorian, pelo exemplo de luta e sacrifício em prol da educação e provimento da família.

À minha avó Ivette, pelo carinho e preocupação.

Aos meus sogros, Joel e Ana, sempre disponíveis para ajudar quando há necessidade.

Aos amigos Paulo Pereira e Iury Kersnowsky, companheiros em todos os momentos.

As funcionárias Ana Cristina, Isabel Cherques, Kenia Rosa, Andrea Pereira e Josenildo Pedro, do departamento de Ensino, pela excelência no atendimento aos alunos.

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso discute os aspectos básicos do cálculo de probabilidades, em espaços amostrais equiprováveis, aplicados aos jogos de loterias no Brasil. É proposta a construção de uma metodologia de ensino na qual estão inseridas situações de jogo, visando à resolução de problemas como alternativa à maneira como tradicionalmente os professores costumam desenvolver o tema. Neste contexto, a referida pesquisa sugere que esta abordagem temática venha propiciar a motivação necessária a um bom entendimento deste conceito. As atividades em questão têm como público alvo alunos do ensino médio e professores que lecionam na educação básica.

Palavras chave: Probabilidade, jogos, loterias e ensino médio.

Abstract

This course conclusion work discusses the basics of probability calculus in equiprobable sample spaces, applied to lottery games in Brazil. It is proposed to construct a teaching method in which they are embedded game situations in order to solve problems as an alternative to the traditional way teachers usually develop the theme. In this context, the research suggests that this thematic approach will provide the motivation necessary for a good understanding of this concept. The activities in question have as target high school students and teachers who teach in basic education.

Keywords: Probability, games, lotteries and high school level.

Sumário

Introdução

Tópico importante no campo da matemática, com vastas aplicações em diversas áreas, a teoria das probabilidades não é um assunto simpático a grande parte dos alunos do ensino médio. O fascínio por esta teoria, muitas das vezes, não é sequer estimulado, seja por consequência da maneira abstrata como é apresentada, seja pela aplicação da teoria como um processo mecânico na resolução de exercícios. Lacunas de conhecimento por parte de professores também contribuem claramente para a resistência dos alunos à matemática, em particular pela teoria das probabilidades. Este conjunto de fatores pode influenciar diretamente a formação de profissionais em áreas como genética, fundos de previdência, companhias seguradoras, dentre outras.

Com base no exposto acima, esta pesquisa tem como objetivo propor uma abordagem não usual por parte dos professores em relação ao estudo de probabilidade, visando aproximar os discentes do tema por meio do estudo dos jogos de loteria, a partir de atividades em grupo e de forma individual. É importante ressaltar que a palavra “jogo” aqui utilizada faz referência a um processo pedagógico do ensino da matemática. As noções de acaso, certeza e incerteza, extremamente úteis na construção do conhecimento a acerca do referido tema, podem ser explorados através destas propostas de jogos de loterias, tendo em vista que esta prática atrai o aluno e desperta o desafio.

Este trabalho foi dividido em capítulos, em que, inicialmente são abordados os aspectos históricos referentes às loterias no Brasil e no mundo e sobre matemáticos que se dedicaram aos jogos. Em seguida, foi escrito o referencial teórico, fazendo um desenvolvimento do tema probabilidade, em nível de ensino médio. Buscou-se seguir uma ordem lógica de apresentação de conceitos e propriedades, de forma a propiciar ao leitor um encadeamento de ideias. Cabe ressaltar que o estudo de probabilidades requer conhecimentos prévios de análise combinatória e teoria dos conjuntos, os quais não foram abordados diretamente no texto, pois entende-se que o objetivo do trabalho é propor uma opção pedagógica para facilitar a aprendizagem da teoria de probabilidades e não um tratamento teórico extenso. No terceiro capítulo é feito um levantamento de jogos de loterias que são oferecidos pela Caixa Econômica Federal, descrevendo suas regras, possibilidades de apostas e prêmios diferenciados. Posteriormente entramos no cálculo, propriamente dito, de probabilidades, mais precisamente, do jogo Mega Sena. Foi feito um levantamento minucioso a respeito de chances e ganhos de prêmios, esclarecendo matematicamente a probabilidade de acertos. No capítulo 5, considerado a base deste do trabalho, são propostas quatro atividades a serem desenvolvidas pelos professores em sala de aula. Essas atividades visam abordar o conceito de probabilidade a partir de uma série crescente de desafios, onde em cada questão tratamos de aspectos relacionados à probabilidade, como independência de eventos, lema de Kaplansky e cálculo de probabilidades utilizando o evento complementar. No capítulo 6 é feita uma coletânea de questões de vestibulares no Brasil onde o tema probabilidade, associado a jogos de loteria, foi cobrado. Abaixo de cada questão foi elaborado seu respectivo gabarito comentado. Por fim, a conclusão do trabalho relata o que se espera a respeito desta e de outras práticas pedagógicas visando o desenvolvimento da matemática em sala de aula. O apêndice pode ser considerado uma extensão do capítulo 4, onde todos os jogos relatados no terceiro capítulo têm seus prêmios e probabilidades analisados.

É valioso salientar que a presente pesquisa não se trata de um “Manual para ganhar nas loterias”, mesmo porque para tal assunto, como cada concurso não influencia no outro, a independência de eventos não me permite escrever.

Capítulo 1: Aspectos históricos

O ser humano, desde os primórdios, tem certa atração por jogos e premiações. Ganhar bens materiais, recompensas ou lucros monetários sempre fizeram parte do perfil do homem. Tanto que as primeiras apostam que se têm registro, ocorreram em forma de sorteio, há milhares de anos pelos egípcios e mais tarde por romanos e pelos gregos, reconhecidos apreciadores de esportes.

Para os matemáticos, jogos eram vistos como desafios e por isso despertavam bastante interesse. Girolamo Cardano, Tartaglia, Blaise Pascal, Fermat e Meré foram alguns dos que se dedicaram ao assunto. Dentre algumas questões, uma questão em especial despertou a atenção da comunidade matemática por volta de 1494, na publicação do livro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, onde o famoso "problema dos pontos" foi proposto:[1]

"Dois jogadores, A e B, de igual habilidade estão empenhados em um jogo de balla. Eles concordam em continuar até que um deles vença 6 rodadas. O jogo é encerrado quando A vencia 5 e B vencia 3 rodadas. Como devem ser divididas as apostas?"

As inúmeras propostas de resolução deste problema serviram como base de desenvolvimento da teoria das probabilidades. Questões envolvendo dados, cartas e loterias também atraía o interesse dos seguidores da teoria.

As loterias surgiram no século XV na Alemanha, ainda de forma bem elementar, mas que incentivou a promoção de concursos em outros países da Europa, como Inglaterra, Itália (alguns historiadores defendem que a Basílica de São Pedro, em Roma, foi construída com auxílio de dividendos de loterias) e principalmente a França, que via nessas apostas uma maneira de benefício aos cofres públicos. Já nos Estados Unidos, pesquisam apontam para a construção de 50 universidades, dentre elas Harvard e Princeton, e 200 escolas com recursos provenientes de loterias. No Brasil, a primeira loteria surgiu em 1784, em Vila Rica (atual Ouro Preto), então capital de Minas Gerais, com o objetivo de arrecadar fundos para construção de prédios públicos, como a Câmara

[1] http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/584/93

dos Vereadores. Com o intuito de evitar o uso indevido das loterias, o governo federal decidiu em 1962, na gestão do presidente João Goulart, que esse serviço deveria ser explorado pelo poder público. Então surgiu a loteria federal do Brasil, que fazia dois sorteios por semana. Em 1970 foi criada a loteria esportiva, que consistia num conjunto de 13 jogos de futebol e era(m) considerado(s) ganhador(es) quem acertasse os palpites dos 13 jogos (coluna 1, coluna do meio e coluna 2). Em 1979 foi autorizada pelo Ministério da Fazenda a criação da Loto, que possuía os mesmos moldes da atual Quina. A partir de então, vários jogos de loterias foram criados no Brasil, alguns com sucesso, outros nem tanto, como por exemplo, a Trinca, que iniciou suas apostas em 1997 e deixou de existir três anos depois.[2]

LOTERIA ESPORTIVA
VOLANTE – CONCURSO TESTE N.º 1
PREÇO DE CADA APOSTA NCR$ 1,00

Nome:

Endereço:

CLUBE 1	EMPATE X	CLUBE 2
1 Flamengo	x	1 Fluminense
2 Bangu	x	2 Bonsucesso
3 Vasco	x	3 América
4 Botafogo	x	4 Fluminense
5 Santos	x	5 Corintians
6 São Paulo	x	6 Portuguêsa
7 Guarani	x	7 Ponte Preta
8 Ferroviária	x	8 Botafogo
9 Esportivo	x	9 Grêmio
10 Tupi	x	10 Tupinambás
11 Ferroviária	x	11 Londrina
12 Benfica	x	12 Varzim
13 Leixões	x	13 Sporting

NÚMERO DE APOSTAS

PREÇO A PAGAR NCR$

O JOGO Nº 1

Réplica do volante do primeiro jogo da loteria esportiva

(http://lotovisao.blogspot.com.br/2011/10)

[2] http://www.efecade.com.br/1784-historia-da-loteria-no-brasil/

Capítulo 2: Fundamentação teórica

Neste capítulo faremos uma abordagem teórica a respeito do tema "probabilidades", como forma de propiciar ao leitor o entendimento dos assuntos tratados a diante. É importante salientar que nosso principal interesse é estudar fenômenos em que o acaso é relevante.

Experimentos aleatórios

Denomina-se experimento aleatório (não determinístico) todo fenômeno cujo resultado não é previsível. É importante ressaltar que, apesar dos experimentos aleatórios não produzirem o mesmo resultado, eles mantém um comportamento regular, no que tange à estatística, tendo em vista que ao considerar um grande número de realizações, cada resultado ocorre em um número "esperado" de vezes. Como forma de facilitação do entendimento a respeito do conceito de fenômenos aleatórios, citaremos abaixo alguns exemplos:

- Experimento 1: Jogar um dado e observar a face voltada para cima
- Experimento 2: Retirar uma carta de um baralho e observar o seu naipe.
- Experimento 3: De uma urna que só contém bolas azuis, brancas e pretas, retirar uma bola e observar sua cor.
- Experimento 4: Escolher, ao acaso, uma pessoa num grupo e determinar seu tipo sanguíneo.

Os experimentos que não são aleatórios são chamados de experimentos determinísticos, ou seja, são aqueles em que os resultados podem ser determinados. Por exemplo, percorrer 200 km, a uma velocidade constante de 80 km/h e determinar o tempo gasto neste percurso.

Espaço Amostral

Para modelar experimentos aleatórios, um primeiro passo é definir o conjunto de possíveis resultados do referido experimento. Este conjunto é chamado de espaço amostral do experimento. Representaremos o espaço amostral de um experimento pela letra *S*.

Exemplos:

a) Consideremos o experimento de lançar uma moeda e observar a face voltada para cima. Neste caso, os resultados possíveis são Cara ou Coroa. Logo, S = {Cara, Coroa}

b) Para o experimento de lançar duas moedas e observar o par de faces voltadas para cima e considerando Cara = C e Coroa = K, temos que S = {(C;C); (C;K); (K;C); (K;K)}

c) Em uma urna que contém 10 bolas numeradas de 1 a 10, retirar uma bola e observar seu número. S = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

Devemos observar a importância de descrever o espaço amostral em relação ao experimento a que estamos nos referindo, para que possamos ter uma ideia clara do que estamos mensurando. Isto fica bem evidenciado quando considerarmos um experimento composto por mais de uma ação, como por exemplo, lançar um dado e em seguida lançar uma moeda e observar o par obtido. Vamos descrever o espaço amostral S associado a este experimento:

S = {(1;C); (1;K); (2;C); (2;K); (3;C); (3;K); (4;C); (4;K); (5;C); (5;K); (6;C); (6;K)}

Muitas das vezes, não estaremos preocupados em descrever todos os elementos do espaço amostral associados a um experimento e sim determinar o número de elementos do conjunto, isto é, sua cardinalidade (n(S)). Para isso, o conceito de Princípio Multiplicativo, estudado em análise combinatória, será extremamente importante. No exemplo anterior, n(S) poderia ser calculado fazendo 2 x 6 = 12, onde 2 representa o número de possibilidades de ocorrência na primeira ação (lançar uma moeda) e 6 o número de possibilidades de ocorrência na segunda ação (lançar um dado).

Eventos

Outra noção fundamental é o conceito de evento. Definimos um evento associado a um experimento como sendo qualquer subconjunto do espaço amostral. Abaixo, alguns exemplos para facilitar o entendimento:

- Experimento 1: Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.

S = {Cara, Coroa}

a) Evento A: sair a face “Cara”

A = {cara}

n(A) = 1

b) Evento B: sair a face “Coroa”

B = {coroa}

n(B) = 1

- Experimento 2: Lançar um dado e anotar o resultado obtido.

S = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

a) Evento A: sair um número par

A = {2; 4; 6}

n(A) = 3

b) Evento B: sair um número maior que 4

B = {5; 6}

n(B) = 2

c) Evento C: sair um número inteiro

C = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

n(C) = 6

Este evento é denominado evento certo, pois o conjunto C é exatamente igual ao espaço amostral.

d) Evento D: sair um número maior que 10

D = Ø

n(D) = 0

Este evento é denominado evento impossível, pois o conjunto D é vazio.

Combinação de eventos

I) União de eventos:

Seja e_1, e_2, e_3, ..., e_n uma sequência de eventos. Então, a união desses eventos é denotada por:

$$\bigcup_{i=1}^{n} e_i = e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup \ldots \cup e_n$$

II) Intersecção de eventos:

Seja e_1, e_2, e_3, ..., e_n uma sequência de eventos. Então a intersecção desses eventos é denotada por:

$$\bigcap_{i=1}^{n} e_i = e_1 \cap e_2 \cap e_3 \cap \ldots \cap e_n$$

Em particular, se a intersecção dos eventos acima for vazia, então os eventos são denominados mutuamente exclusivos ou mutuamente excludentes.

III) Complementar de um evento:

Seja E um evento. Então E^C também é um evento e ocorrerá se, e somente se, o evento E não ocorrer. O evento E^C é chamado de evento complementar do evento E.

Exemplo:

Um dado é lançado e observa-se a face voltada para cima. É imediato que S = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Vamos determinar os seguintes eventos:

- Evento A: Sair um número ímpar

A = {1; 3; 5}

- Evento B: Sair um número menor que 4

B = {1; 2; 3}

- Evento A ∪ B: Sair um número ímpar **ou** menor que 4.

A ∪ B = {1; 2; 3; 5}

- Evento A ∩ B: Sair um número ímpar **e** menor que 4

A ∩ B = {1; 3}

- Evento B^C: Sair um número maior **ou** igual a 4

B^C = {4; 5; 6}

<u>O conceito de probabilidade</u>

Nosso objetivo nesta seção é conseguir atribuir a cada evento de um experimento aleatório um número associado a sua chance de ocorrência. Para isso, faremos a definição formal do conceito de probabilidade.

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral finito $S = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$. A cada evento simples e_i associaremos um número real representado por $P(e_i)$, denominado probabilidade de e_i, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

I) $0 \leq P(e_i) \leq 1$, onde i = 1, 2, 3, ..., n

II) P(S) = 1

III) Se $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ forem eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i\right) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + \ldots + P(a_n)$$

Diante das condições acima, podemos enunciar e demonstrar algumas propriedades:

Propriedade 1: P (Ø) = 0, onde Ø é o conjunto vazio.

Demonstração: Para qualquer evento "e", sabemos que "e" ∪ Ø = e. Isto implica que P(e ∪ Ø) = P(e). Por outro lado "e" e Ø são eventos mutuamente exclusivos. Logo, P(e ∪ Ø) = P(e) + P(Ø). Portanto:

$$P(e) = P(e) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

Propriedade 2: P(e) = 1 – P(e^c)

Demonstração: Sabemos que e ∪ e^C = S. Logo, P(e ∪ e^C) = P(S). Então, como "e" e e^C são eventos mutuamente exclusivos, temos que:

$$P(e \cup e^C) = P(e) + P(e^C) \Rightarrow P(S) = P(e) + P(e^C) \Rightarrow 1 = P(e) + P(e^C) \Rightarrow P(E) = 1 - P(e^c)$$

Apesar de termos feito algumas definições, não sabemos ainda, calcular a probabilidade de ocorrência de um evento. Diante disso, vamos considerar S = {e_1, e_2, e_3, ..., e_n} o espaço amostral de um experimento aleatório. Nesta dissertação iremos sempre supor que os elementos de S são EQUIPROVÁVEIS, ou seja, todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, então P(e_i) = $\frac{1}{n}$, onde i = 1, 2, 3, ..., n. Agora, seja A $\subset$ S, um evento com "k" elementos. Então:

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

Esta definição pode ser sintetizada entendendo que os elementos de A referem-se aos casos favoráveis ao evento A, tendo em vista que se caso algum "ocorra", E também ocorrerá. Logo, a definição acima pode ser resumida da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{número\ de\ elementos\ de\ A}{número\ de\ elementos\ do\ espaço\ amostral\ do\ experimento}$$

Obs: Novamente, cabe ressaltar que tal processo refere-se ao caso em que os elementos do espaço amostral são equiprováveis.

Exemplos:

I) No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair um número maior que 4?

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

n(S) = 6

Evento E: sair um número maior que 4

E = {5, 6}

n(E) = 2

P(E) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

II) Ao sortear um número inteiro de 1 a 30, qual é a probabilidade de ser sorteado um número menor que 8?

S = {1, 2, 3, 4, ..., 30}

n(S) = 30

Evento E = ser sorteado um número menor que 8

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

n(E) = 7

P(E) = $\frac{7}{30}$

III) Uma urna contém 8 bolas pretas, 3 bolas brancas e 5 bolas verdes. Uma bola é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade da bola sorteada não ser verde?

n(S) = 16

Evento E: sortear uma bola que não seja verde

n(E) = 11

P(E) = $\frac{11}{16}$

IV) Uma moeda é lançada 6 vezes. Qual é a probabilidade de sair cara exatamente 4 vezes?

Inicialmente devemos perceber que o espaço amostral é composto por 64 elementos (2^6). Em seguida, observemos que para saírem exatamente 4 caras, devemos ter 4 caras e 2 coroas. Permutando esses elementos, com repetição evidentemente, temos $P_6^{4\,;2} = \frac{6!}{4!2!}$ = 15. Portanto a probabilidade pedida é $\frac{15}{64}$**.**

<u>Propriedade</u>: Sejam "A" e "B" eventos associados ao espaço amostral S de um experimento aleatório. Então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

<u>Demonstração</u>: Vamos escrever os conjuntos $A \cup B$ e B como uniões de conjuntos disjuntos: $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$ e $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$. Então:

$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Esta propriedade é conhecida como Regra da Adição.

Exemplo: Em uma classe há 18 homens e 21 mulheres, sendo que 13 homens são casados e 9 mulheres são solteiras. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, qual é a probabilidade de que seja um homem ou seja uma pessoa solteira ?

	Homens	Mulheres
Casados	13	12
Solteiros	5	9

n(S) = 18 + 21 = 39

Evento A: escolher um homem

n(A) = 18

Evento B: escolher uma pessoa solteira

n(B) = 14

Evento (A ∪ B): escolher um homem **ou** uma pessoa solteira

Logo:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{18}{39} + \frac{14}{39} - \frac{5}{39} = \frac{27}{39}$

<u>Probabilidade condicional</u>

Considere a seguinte situação:

Uma urna contém 20 bolas brancas e 30 bolas pretas. Retira-se duas bolas, uma após a outra, e verificam-se suas cores. Qual é a probabilidade da segunda bola ser da cor preta, sabendo que a primeira bola também foi da cor preta ?

Inicialmente, esta situação nos leva a uma dupla interpretação do problema. Será que, após a retirada da primeira bola, a mesma foi reposta na urna ? A resposta desta pergunta é crucial na determinação da probabilidade pedida. Vamos analisar os dois casos possíveis:

<u>Caso 1</u>: A retirada foi com reposição

Neste caso, a cor da primeira bola que foi retirada não tem relevância alguma no cálculo da probabilidade da segunda bola ser preta, tendo em vista que o espaço amostral não se alterou.

Evento A: a primeira bola é preta
Evento B: a segunda bola é preta

P(A) = $\frac{30}{50}$ = $\frac{3}{5}$

P(B) = $\frac{30}{50}$ = $\frac{3}{5}$

Repare que a ocorrência, ou não, do evento A em nada influencia a ocorrência do evento B.

Caso 2: A retirada foi sem reposição.

Agora, a probabilidade de ocorrência do evento B é totalmente dependente do que aconteceu na primeira retirada, haja vista que o espaço amostral, na segunda retirada, está reduzido em relação ao original. Vejamos:

Evento A: a primeira bola é preta
Evento B: a segunda bola é preta

P(A) = $\frac{30}{50}$ = $\frac{3}{5}$

A partir do momento que a primeira bola foi retirada e não foi reposta na urna, na segunda retirada teremos “apenas” 20 bolas brancas e 29 bolas pretas. Com isso, a probabilidade de ocorrência do evento B, nessas condições, é dada da seguinte maneira:

$$P(B) = \frac{29}{49}$$

O fato da ocorrência, ou não, de um evento alterar a probabilidade de ocorrência de outro de outro evento caracteriza o que chamamos de *probabilidade condicional*.

Definição: Sejam A e B dois eventos associados a um experimento aleatório. Representamos a probabilidade de ocorrência de B, dado que A ocorreu pela notação P (B I A), que significa *probabilidade de ocorrência do evento B dado que o evento A ocorreu*.

É importante perceber que, quando calculamos P(B) estamos calculando a probabilidade de B ocorrer no espaço amostral S. Porém, quando calculamos P(B I A) estamos calculando a probabilidade de B ocorrer no espaço amostral A, pois sabemos que A ocorreu.

Logo, P(B I A) = $\frac{número\ de\ elementos\ de\ B \cap A}{número\ de\ elementos\ de\ A}$

Adotando o número de elementos de um conjunto (cardinalidade) pelo símbolo #, temos:

P(B I A) = $\frac{\#\ (B \cap A)}{\#\ A}$

Dividindo o numerador e o denominador por # S, temos:

P(B I A) = $\frac{\frac{\#\ (B \cap A)}{\#\ S}}{\frac{\#\ A}{\#\ S}} = \frac{P\ (B \cap A)}{P(A)}$, com P(A) > 0.

Exemplos:

I) Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é observado. Qual é a probabilidade desse número ser maior ou igual a 5, sabendo que ele é par ?

Evento A: sair um número par

A = {2, 4, 6}

n(A) = 3

Evento B: sair um número maior ou igual a 5

B = {5, 6}

n(B) = 2

Evento (A ∩ B): sair um número par maior ou igual a 5

A ∩ B = {6}

n (A ∩ B) = 1

Queremos calcular a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo que o evento A já ocorreu, ou seja P(B I A). Logo:

P(B I A) = $\frac{P\ (B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{3}$

II) Uma pesquisa feita em uma cidade verificou que o número de homens é igual ao número de mulheres, 30% dos homens têm curso superior e 18% das mulheres têm curso superior. Uma pessoa é selecionada ao acaso e verifica-se que ela possui curso superior. Qual é a probabilidade dessa pessoa ser uma mulher ?

Evento A: selecionar uma pessoa com curso superior

n (A) = 24% = 30% . 50% + 18% . 50%

Evento B: selecionar uma mulher

n(B) = 50% (número de homens igual ao número de mulheres)

Evento A ∩ B: selecionar uma mulher com curso superior

n(A ∩ B) = $\frac{50}{100} . \frac{18}{100} = \frac{9}{100}$ = 9%

Queremos calcular P(B I A).

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{24}{100}} = \frac{9}{24} = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

Observe que temos duas maneiras de resolver problemas envolvendo probabilidade condicional:

I) Diretamente, considerando o espaço amostral reduzido.
II) Usando a fórmula, em função de $P(B \cap A)$ e P(A).

A definição de probabilidade condicional nos permite obter como, consequência, um teorema muito importante denominado Teorema da Multiplicação de Probabilidades:

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A)$ ou **$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A \mid B)$**

Eventos independentes

Dois eventos de um mesmo experimento são ditos independentes se a ocorrência de um em nada influencia a probabilidade de ocorrência do outro. A independência de B em relação ao evento A estabelece que $P(B \mid A) = P(B)$, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento B dado que o evento A ocorreu é simplesmente igual a probabilidade do evento B ocorrer. Usando o teorema da multiplicação de probabilidades temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B \mid A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

Exemplos:

I) Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de sair cara nos 4 lançamentos ?

Evento A_i: sair cara no i-ésimo lançamento

É razoável supor que a ocorrência da face “cara” no evento A_k, $1 \leq K \leq 4$, em nada afeta os demais. Portanto os eventos são independentes. Logo:

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \,.\, P(A_2) \,.\, P(A_3) \,.\, P(A_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

II) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Uma pessoa escolhe 3 números ao acaso e em seguida são sorteadas três bolas. Qual é a probabilidade dessa pessoa acertar os três números sorteados?

O espaço amostral deste experimento será dado pela combinação dos 20 números tomados 3 a 3. Logo, $n(S) = C_{20;3} = \frac{20!}{3!.17!} = \frac{20\,.\,19\,.\,18}{6} = 1140$

De todas essas combinações, uma pessoa que escolhe três números “concorre” com apenas uma delas. Portanto:

Evento A: sair os três números escolhidos

$n(A) = 1$

Então, a probabilidade pedida é dada por $\frac{1}{1140} \cong 0{,}0009 \cong 0{,}09\ \%$

III) Se A e B são eventos independentes de um experimento aleatório com $P(A) = 0{,}2$ e $P(B) = 0{,}4$, calcular:

a) $P(A \cap B)$

Como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = 0{,}2 \,.\, 0{,}4 = 0{,}08$

b) $P(A \cup B)$

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Logo:

$P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}52$

<u>Lemas de Kaplansky</u>

Faremos referência a dois lemas, conhecidos como lemas de Kaplansky, que serão extremamente úteis em resoluções de problemas que iremos propor adiante.

<u>1º lema de Kaplansky</u>

Considere o conjunto {1, 2, 3, ..., n}. O número de subconjuntos de “p” elementos, $p < n$, dos quais não existem dois números consecutivos é dado por C_{n-p+1}^{p}

<u>Demonstração</u>:

Vamos proceder da seguinte forma: ao formar um subconjunto com “p” elementos representaremos pelo símbolo “+” os elementos que farão parte do subconjunto e pelo símbolo “-” os elementos que não farão parte do subconjunto. Então, teremos p símbolos “+” e n – p símbolos “-”. Cabe ressaltar que não é permitido que dois símbolos “+” estejam juntos, tendo em vista que não pode haver dois números consecutivos. Desse jeito, teremos (n – p + 1) lugares para escolher os (p) símbolos + e o número de maneiras de arranjar estes símbolos é C_{n-p+1}^{p}

<u>Exemplo de aplicação</u>:

De quantos modos podemos formar um subconjunto de 4 elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} de modo que não haja números consecutivos?

$$C_{10-4+1}^{4} = C_{7}^{4} = 35$$

<u>2º lema de Kaplansky</u>

Considere o conjunto {1, 2, 3, ..., n}. O número de subconjuntos de "p" elementos, $p < n$, dos quais não existem dois números consecutivos e tomando 1 e n como consecutivos é dado por $\frac{n}{n-p} \,.\, C_{n-p}^{p}$

<u>Demonstração</u>:

Vamos separar essa demonstração em dois casos:

I) O elemento 1 pertence ao subconjunto com p elementos:

Neste caso, devemos calcular de quantas maneiras podemos escolher os p – 1 elementos restantes dentre os elementos do conjunto {3, 4, 5, ..., n – 1}, já que 2 e n não podem figurar. Como não pode haver elementos consecutivos, o número de modos que isso pode ser feito é C_{n-p-1}^{p-1}.

II) O elemento 1 não pertence ao subconjunto com p elementos:

Neste caso, devemos calcular de maneiras podemos escolher os p elementos do conjunto {2, 3, 4, ..., n}, não podendo haver elementos consecutivos. Isso pode ser feito de C_{n-p}^{p} maneiras.

De I) e II) temos: $C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^{p} = \frac{n}{n-p} \,.\, C_{n-p}^{p}$

Exemplo de aplicação:

Rodrigo pratica natação três vezes por semana. De quantas maneiras diferentes pode-se escolher os dias de aula, se ele não deseja nadar em dias consecutivos?

- n = 7 e p = 3 ⇒ $\frac{7}{7-3} \,.\, C_{7-3}^{3} = \frac{7}{4} \,.4 = 7$

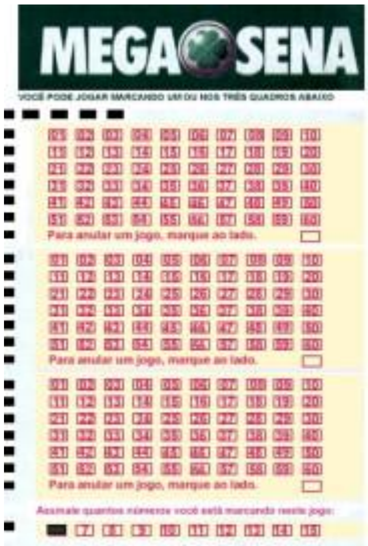
Capítulo 3: Loterias: Jogos e regras

Atualmente, a Caixa Econômica Federal é a responsável pela administração e gestão das loterias no Brasil. Hoje em dia existem 8 tipos diferentes de jogos: Mega Sena, Quina, Lotofácil, Lotomania, Dupla Sena, Loteca, Lotogol e Timemania. A partir de setembro de 2012, foi regulamentado pela Caixa Econômica a aposta na modalidade “Bolão”, em que podem ser feitas apostas em grupos, onde um determinado indivíduo adquire uma cota do jogo.

- Mega Sena

É a loteria que atrai a maioria dos apostadores, já que paga o maior prêmio. Isto deve-se ao fato de ser o jogo com a menor probabilidade de acerto do prêmio máximo com uma aposta simples. Para ganhar o prêmio máximo é necessário acertar os seis números sorteados em um conjunto universo de 60 (1 a 60). Também são pagos prêmios a quem acerta 4 números (quadra) e 5 números (quina). É permitida a marcação de 6 à 15 números em um mesmo cartão (com valores diferenciados, evidentemente).

A mega sena possui sorteios especiais, ou seja, aqueles sorteios de final 0 ou 5 e ainda a famosa mega sena da virada, que ocorre no dia 31 de dezembro, que paga prêmios bem altos aos ganhadores e não acumula, isto é, necessariamente haverá, pelo menos, um ganhador, pois caso ninguém acerte as seis dezenas, será considerado ganhador quem acertar cinco, e assim sucessivamente.

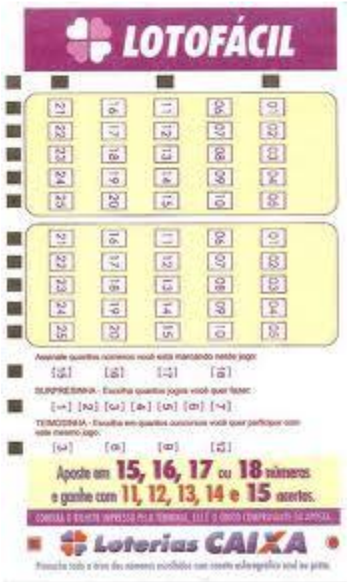


➢ <u>Quina</u>

Também muito popular, no jogo da Quina ganha o prêmio máximo o apostador que acertar os 5 números sorteados dentro os 80 possíveis (1 a 80). Além disso, é pago prêmio a quem acerta 3 números (terno) ou 4 números (quadra). É permitida a marcação de 5, 6 ou 7 números em um mesmo cartão (com valores diferenciados, evidentemente).

➢ <u>Lotofácil</u>

É o segundo jogo que atrai mais apostadores, atrás apenas da mega sena. É considerado ganhador do prêmio máximo quem acerta os 15 números sorteados dentre os 25 possíveis (1 a 25). Também é pago prêmio a quem acerta 11, 12, 13 ou 14 números e é permitida a marcação de 15, 16, 17 ou 18 números em um mesmo volante (com valores diferenciados, evidentemente).



➢ <u>Lotomania</u>

Na lotomania escolhe-se 50 números dentre os 100 possíveis (00 a 99). É considerado o vencedor do prêmio máximo quem acerta 20 números. É também pago prêmios a quem acerta 16, 17, 18 ou 19 números ou nenhum acerto. A aposta na lotomania disponibiliza um sistema chamado “aposta espelho”, que consiste em uma nova aposta com os 50 números não escolhidos na aposta original.

- <u>Dupla Sena</u>

Na dupla sena escolhe-se de 6 a 15 números dentre os 50 disponíveis no volante (1 a 50) e com isso é dado o direito de participar de 2 sorteios por concurso. O prêmio máximo é pago a quem acerta 6 dezenas. Também são pagos prêmios a quem acerta 4 números (quadra) ou 5 números (quina).

- <u>Loteca</u>

Este jogo retrata, com algumas mudanças (nome e número de jogos), a antiga loteria esportiva. Consiste em um conjunto de 14 partidas de futebol, em que o apostador escolhe a vitória do time 1 (coluna 1), o empate (coluna do meio) ou a vitória do time 2 (coluna 2). Ganha o prêmio máximo quem acertar os 14 palpites. É também pago prêmio a quem acerta 13 palpites. Na loteca é possível apostar em dois resultados em uma partida (duplo) ou três resultados por partida (triplo). Evidentemente, a marcação de um triplo garante o acerto da referida partida. Em uma aposta simples deve-se marcar um duplo e na aposta máxima deve-se marcar 3 triplos e 5 duplos.

Se alguma partida não for realizada por motivo de força maior (antecipação, adiamento ou cancelamento), o resultado da partida (para fins do concurso) será definido por sorteio.

➢ Lotogol

Neste jogo são relacionados 5 partidas de futebol e cada apostador marca o número de gols de cada equipe na partida. Pode-se assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (opção representada pelo símbolo “+”). O vencedor do prêmio máximo é aquele que acerta os 5 placares. Também é pago prêmio para o acerto de 3 placares e 4 placares.

➢ Timemania

É o jogo mais recente da loteria. Foi criado com o objetivo de auxiliar clubes de futebol no abatimento de dívidas fiscais com o governo federal. Lançado em 2007, ainda não atrai o interesse da maioria dos apostadores. Neste jogo aposta-se 10 números em um universo de 80 (1 a 80) e escolhe-se um time de futebol dentre 80 possíveis. Ganha-se o prêmio máximo o apostador que acertar os 7 números sorteados. Também é pago prêmios para acertos de 3, 4, 5 ou 6 números, assim como o acerto do time de futebol.

Obs: Por questões que fogem ao objetivo do trabalho, não levaremos em consideração a Loteria Instantânea, conhecida popularmente como raspadinha.

Capítulo 4: Mega Sena: Calculando probabilidades

Neste capítulo faremos um levantamento sobre as probabilidades de acerto em algum prêmio no jogo da Mega Sena, levando em consideração as possibilidades de apostas com diferentes quantidades de números. Para verificação sobre os demais jogos, consulte o Apêndice, ao final do trabalho.

- Mega Sena

Probabilidade de acertar a sena (acertar os 6 números):

- Aposta com 6 números (aposta simples):

O número de combinações possíveis de se formar com os 60 números é dado por $C_{60;6}$. Cabe ressaltar que este valor refere-se ao espaço amostral do experimento. Com uma aposta de seis números concorre-se com uma única combinação possível, ou seja, $C_{6;6.}$ Logo, a probabilidade de acerto nestas condições é dada por:

$$\frac{C_{6;6}}{C_{60;6}} = \frac{1}{50.063.860} \cong 0{,}000002\%$$

- Aposta com 7 números:

Neste caso, podemos formar 7 combinações possíveis para aposta ($C_{7;6}$). O espaço amostral é o mesmo. Logo, temos:

$$\frac{C_{7;6}}{C_{60;6}} = \frac{7}{50.063.860} \cong 0{,}000014\%$$

- Aposta com 8 números:

Com 8 números, o número de combinações possíveis para aposta é dado por $C_{8;6}$. Como o espaço amostral é $C_{60;6}$, temos:

$$\frac{C_{8;6}}{C_{60;6}} = \frac{28}{50.063.860} \cong 0,000056\%$$

- Aposta com 9 números:

Seguindo a mesma linha de raciocínio e como o espaço amostral é o mesmo, temos:

$$\frac{C_{9;6}}{C_{60;6}} = \frac{84}{50.063.860} \cong 0,00017\%$$

- Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10;6}}{C_{60;6}} = \frac{210}{50.063.860} \cong 0,00042\%$$

- Aposta com 11 números:

$$\frac{C_{11;6}}{C_{60;6}} = \frac{462}{50.063.860} \cong 0,00092\%$$

- Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12;6}}{C_{60;6}} = \frac{924}{50.063.860} \cong 0,0018\%$$

- Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13;6}}{C_{60;6}} = \frac{1716}{50.063.860} \cong 0,0034\%$$

- Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14;6}}{C_{60;6}} = \frac{3003}{50.063.860} \cong 0{,}006\%$$

- Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15;6}}{C_{60;6}} = \frac{5005}{50.063.860} \cong 0{,}01\%$$

<u>Probabilidade de acertar a quina (acertar exatamente 5 números)</u>:

- Aposta com 6 números (aposta simples):

Deve-se ter um pouco de cuidado nesta avaliação. Em uma aposta simples, ou seja, com 6 números, podemos formar 6 “quinas”, que são os 6 elementos tomados 6 a 6 ($C_{6;5}$). Formando a quina, a sexta bola poderá ser qualquer uma das 54 bolas restantes ($C_{54;1}$). O espaço amostral é o mesmo, ou seja, $C_{60;6}$. Diante disso, temos:

$$\frac{C_{6;5} \,.\, C_{54;1}}{C_{60;6}} = \frac{6 \,.\, 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} \cong 0{,}00071\%$$

- Aposta com 7 números:

Neste caso, temos 21 quinas ($C_{7;5}$) possíveis de se formar. Formando a quina, a sexta bola poderá ser qualquer uma das 53 bolas restantes ($C_{53;1}$). Diante do mesmo espaço amostral, temos:

$$\frac{C_{7;5} \,.\, C_{53;1}}{C_{60;6}} = \frac{21 \,.\, 53}{50.063.860} = \frac{1113}{50.063.860} \cong 0{,}0022\%$$

- Aposta com 8 números:

Temos 8 números tomados 5 a 5, que resulta em 56 combinações ($C_{8;5}$). Dispondo da quina, a sexta bola poderá ser qualquer uma das 52 bolas restantes. Como o espaço amostral é o mesmo, temos:

$$\frac{C_{8;5} \, . \, C_{52;1}}{C_{60;6}} = \frac{56 \, . \, 52}{50.063.860} = \frac{2912}{50.063.860} \cong 0{,}0058\%$$

- Aposta com 9 números:

A partir de agora, seguiremos o mesmo procedimento adotado até o momento.

$$\frac{C_{9;5} \, . \, C_{51;1}}{C_{60;6}} = \frac{126 \, . \, 51}{50.063.860} = \frac{6426}{50.063.860} \cong 0{,}0013\%$$

- Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10;5} \, . \, C_{50;1}}{C_{60;6}} = \frac{252 \, . \, 50}{50.063.860} = \frac{12600}{50.063.860} \cong 0{,}0025\%$$

- Aposta com 11 números:

$$\frac{C_{11;5} \, . \, C_{49;1}}{C_{60;6}} = \frac{462 \, . \, 49}{50.063.860} = \frac{22638}{50.063.860} \cong 0{,}0045\%$$

- Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12;5} \, . \, C_{48;1}}{C_{60;6}} = \frac{792 \, . \, 48}{50.063.860} = \frac{38016}{50.063.860} \cong 0{,}076\%$$

- Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13;5}\,.\,C_{47;1}}{C_{60;6}} = \frac{1287\,.\,47}{50.063.860} = \frac{60489}{50.063.860} \cong 0{,}12\%$$

- Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14;5}\,.\,C_{46;1}}{C_{60;6}} = \frac{2002\,.\,46}{50.063.860} = \frac{92092}{50.063.860} \cong 0{,}18\%$$

- Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15;5}\,.\,C_{45;1}}{C_{60;6}} = \frac{3003\,.\,45}{50.063.860} = \frac{135135}{50.063.860} \cong 0{,}27\%$$

<u>Probabilidade de acertar a quadra (acertar exatamente 4 números)</u>:

- Aposta com 6 números (aposta simples):

Neste caso, existem 15 combinações diferentes para formar-se a quadra ($C_{6;4}$). Isolando a quadra, as outras duas bolas podem ser escolhidas dentre qualquer uma das 54 bolas restantes, que dá um total de 1431 combinações ($C_{54;2}$). Como o espaço amostral é o mesmo já trabalhado até o momento, temos:

$$\frac{C_{6;4}\,.\,C_{54;2}}{C_{60;6}} = \frac{15\,.\,1431}{50.063.860} = \frac{21465}{50.063.860} \cong 0{,}043\%$$

- Aposta com 7 números:

Com 7 números tomados 4 a 4 temos um total de 35 combinações ($C_{7;4}$). Tendo a quadra formada, passamos para escolha das duas bolas restantes, que poderão ser escolhidas dentre as 53 restantes ($C_{53;2}$). Isto gera um total de 1378 combinações. Mantendo o mesmo espaço amostral, conclui-se que:

$$\frac{C_{7;4}\,.\,C_{53;2}}{C_{60;6}} = \frac{35\,.\;1378}{50.063.860} = \frac{48230}{50.063.860} \cong 0{,}096\%$$

- Aposta com 8 números:

Neste caso, tomamos os 8 números combinados 4 a 4, que resulta em 70 agrupamentos. Para escolher as duas bolas restantes, tomamos as 52 bolas restantes combinadas 2 a 2, que gera 1326 agrupamentos. Com o mesmo espaço amostral, temos que:

$$\frac{C_{8;4}\,.\,C_{52;2}}{C_{60;6}} = \frac{70\,.\;1326}{50.063.860} = \frac{92820}{50.063.860} \cong 0,19\%$$

- Aposta com 9 números:

Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, temos:

$$\frac{C_{9;4}\,.\,C_{51;2}}{C_{60;6}} = \frac{126\,.\;1275}{50.063.860} = \frac{160650}{50.063.860} \cong 0{,}32\%$$

- Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10;4}\,.\,C_{50;2}}{C_{60;6}} = \frac{210\,.\;1225}{50.063.860} = \frac{257250}{50.063.860} \cong 0{,}51\%$$

- Apostas com 11 números:

$$\frac{C_{11;4}\,.\,C_{49;2}}{C_{60;6}} = \frac{330\,.\;1176}{50.063.860} = \frac{388080}{50.063.860} \cong 0{,}78\%$$

- Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12;4} \, . \, C_{48;2}}{C_{60;6}} = \frac{495 \, . \, 1128}{50.063.860} = \frac{558360}{50.063.860} \cong 1{,}12\%$$

- Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13;4} \, . \, C_{47;2}}{C_{60;6}} = \frac{715 \, . \, 1081}{50.063.860} = \frac{772915}{50.063.860} \cong 1{,}54\%$$

- Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14;4} \, . \, C_{46;2}}{C_{60;6}} = \frac{1001 \, . \, 1035}{50.063.860} = \frac{1036035}{50.063.860} \cong 2{,}07\%$$

- Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15;4} \, . \, C_{45;2}}{C_{60;6}} = \frac{1365 \, . \, 990}{50.063.860} = \frac{1351350}{50.063.860} \cong 2{,}7\%$$

Capítulo 5: Propostas pedagógicas

Este capítulo propõe algumas atividades a serem realizadas em sala de aula, utilizando loterias como base de estudo.

Atividade 1 (individual): Cria-se uma loteria em que o vencedor será quem acertar os 3 (três) números sorteados dentre 10 possíveis. Podem ser feitas apostas assinalando até 8 números em um mesmo cartão, com valores diferenciados, evidentemente. A tabela abaixo indica os valores das apostas de acordo com a quantidade de números assinalados:

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (R$)
3	1,00
4	5,00
5	15,00
6	25,00
7	40,00
8	60,00

Pergunta-se:

a) Sob o ponto de vista probabilístico, os valores da tabela acima são razoáveis? Por quê?

b) Em caso negativo e tomando a aposta simples (3 números) como base, quais deveriam ser os valores da tabela acima ?

Esta proposta tem como objetivo fazer os alunos compararem o valor de cada aposta com a probabilidade de ganhar em cada caso e com isso perceber que os valores deveriam ser proporcionais ao número de combinações apostadas, o que, propositalmente, não ocorre.

Atividade 2: Agora, dividimos a turma em 6 grupos e passamos a considerar uma loteria com 20 números. O vencedor será quem acertar os 3 (três) números sorteados dentre os 20 possíveis. Podem ser feitas apostas assinalando até 8 números em um mesmo cartão, com valores diferenciados, evidentemente. São distribuídos cartões semelhantes ao mostrado abaixo:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Cada grupo irá assinalar as dezenas de sua preferência, seguindo os seguintes procedimentos:

Grupo 1: apostará 6 cartões, todos com 3 números marcados.

Grupo 2: apostará 5 cartões, todos com 4 números marcados.

Grupo 3: apostará 4 cartões, todos com 5 números marcados.

Grupo 4: apostará 3 cartões, todos com 6 números marcados.

Grupo 5: apostará 2 cartões, ambos com 7 números marcados.

Grupo 6: apostará apenas 1 cartão com 8 números marcados.

Além disso, cada número só poderá ser assinalado em apenas um cartão. Por exemplo, se o grupo 2 assinalou o número 12 em um cartão, este não poderá ser assinalado em outro cartão desse mesmo grupo.

Fazemos o sorteio e verificamos qual grupo foi o vencedor.

Em seguida, propõe-se as seguintes perguntas:

a) Todos os grupos tinham a mesma chance de vencer o sorteio?

b) Em caso negativo, qual dos grupos possuía a maior chance de ser o vencedor?

c) Se você fosse apostar em uma das sequências abaixo, qual seria a escolhida?

(1; 2; 3) ou (3; 7; 9)

Atividade 3 (individual): Consideramos uma loteria semelhante à proposta na atividade 1, ou seja, com 10 números possíveis, dos quais três são sorteados.

Propõem-se os seguintes questionamentos, visando um debate:

a) No sorteio de três números nesta loteria, qual é a probabilidade de que haja um par de números consecutivos, por exemplo, (1,2, 7)?

b) E no sorteio da Mega Sena, qual é a probabilidade de que haja um par de números consecutivos sorteados?

Esta atividade leva os alunos a um impasse. No item a), fazendo pelo método de contagem, consegue-se determinar quantos ternos existem com números consecutivos. Entretanto, no item b), este procedimento já não é vantajoso, pela quantidade de casos favoráveis. Neste momento, devemos enunciar à turma os dois lemas de Kaplansky, que serão necessários para resolução deste tipo de questão.

Atividade 4 (individual): Para esta atividade devemos propor a utilização de uma calculadora científica ou a realização desta questão em um laboratório de informática, caso seja possível.

Uma certa loteria possui 100 números. Para apostar, cada pessoa deve comprar um bilhete que tem um número. Ganha quem possuir o bilhete com o número sorteado.

Pergunta-se:

a) Roberto compra 10 bilhetes para um único sorteio, enquanto Rodrigo compra 1 bilhete para cada sorteio, em um total de 10 sorteios.

Quem tem a maior chance de ganhar algum prêmio: Roberto ou Rodrigo?

b) Generalizando, em uma loteria com N números, é melhor comprar “p” bilhetes para um único sorteio ou 1 bilhetes por sorteio, durante “p” sorteios?

O objetivo desta atividade é mostrar aos alunos que, em determinadas questões, o cálculo da probabilidade da ocorrência do complementar do evento é mais fácil do que o próprio evento. Neste caso, devemos relembrar com os alunos a negação de proposições lógicas, que será importante neste tipo de exercício.

Capítulo 6: A loteria nos vestibulares

Coletânea de questões de vestibulares que abordaram o tema probabilidade com enfoque nos jogos de loteria.

1) (PUC-RJ – 2008) No jogo de Lipa sorteia-se um número entre 1 e 600 (cada número possui a mesma probabilidade). A regra do jogo é: se o número sorteado for um múltiplo de 6 então o jogador ganha uma bola branca e se o número sorteado for um múltiplo de 10 o jogador ganha uma bola preta. Qual é a probabilidade do jogador não ganhar nenhuma bola?

Resolução:

Inicialmente, devemos perceber que M.M.C (6 ; 10) = 30. Em seguida, de 1 a 600 temos 100 múltiplos de 6, 60 múltiplos de 10 e 20 múltiplos de 30. Logo, o jogador ganhará alguma bola se um destes 140 (100 + 60 – 20) números forem sorteados. Com isso, a probabilidade pedida é 1 - $\frac{140}{600}$ = $\frac{460}{600} = \frac{23}{30}$.

2) (UFPA – 2008) No jogo da Mega Sena são sorteados 6 números de 1 a 60. Por exemplo, o concurso 924 teve como números sorteados 02, 20, 21, 27, 51 e 60, ou seja, houve um par de números consecutivos, 20 e 21. A probabilidade de que no jogo da Mega Sena haja um par de números consecutivos sorteados é:

a) $\frac{54!}{60!}$

b) $\frac{53!}{59!}$

c) $1 - \frac{56!\,.\,55!}{49!\,.\,60!}$

d) $1 - \frac{54!\,.\,53!}{48!\,.\,60!}$

e) $1 - \frac{55!\,.\,54!}{49!\,.\,60!}$

<u>Resolução</u>:

Utilizando o primeiro lema de Kaplansky, determinamos o número de sequências de 6 elementos que podem ser formadas entre 1 e 60 em que não haja números consecutivos:

$$C_{60-6+1}^{6} = C_{55}^{6} = \frac{55!}{6!\,.\,49!}$$

O número de elementos do espaço amostral deste experimento é C_{60}^{6}. Logo, a probabilidade de que haja um par de números consecutivos é:

$$1 - \frac{\frac{55!}{6!\,.\,49!}}{\frac{60!}{6!\,.\,54!}} = 1 - \frac{55!\,.\,54!}{49!\,.\,60!}$$

Alternativa E

3) (UFSCar – 2005) No jogo da loteca, para cada um dos 14 jogos de futebol indicados, o apostador deverá marcar o seu palpite, que pode ser coluna 1, coluna do meio ou coluna 2 (vitória do time 1, empate ou vitória do time 2, respectivamente). Quando o jogador assinala apenas uma das três colunas em um jogo, dizemos que ele assinalou palpite simples nesse jogo. Dependendo do valor disponível para a aposta e de limites de apostas por volante, o jogador também poderá marcar alguns duplos e/ou triplos. Em um palpite duplo, por exemplo, coluna 1 e coluna do meio, o apostador só errará o jogo se o resultado final for coluna 2. Em um palpite triplo, coluna 1, empate e coluna 2, o apostador sempre acertará o jogo. Em relação a um jogo da loteca com um palpite duplo em um dos jogos e palpites simples nos demais jogos, preenchido aleatoriamente, e supondo que as três colunas são igualmente possíveis em todos os jogos, pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade desse cartão ser contemplado com o prêmio máximo, que corresponde ao acerto dos 14 jogos?

Resolução:

A probabilidade de acerto de uma partida com uma única marcação é igual a $\frac{1}{3}$, enquanto a probabilidade de acerto de uma partida com duas marcações é igual a $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade da aposta é dada por:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{13} . \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3^{14}} = \frac{2}{4.782.969}$$

b) Qual é a probabilidade desse cartão ser contemplado com algum prêmio, que corresponde ao acerto de, pelo menos, 13 jogos?

Resolução:

Para acertar pelo menos 13 jogos, deve-se acertar 13 ou 14 jogos. Diante disso, separaremos nossa resolução nos seguintes casos:

I) Acertar 13 jogos, acertando um duplo e errando um jogo simples, entre os 13 restantes:

$$\frac{2}{3} . \left(\frac{1}{3}\right)^{12} . \frac{2}{3} . 13 = \frac{52}{3^{14}}$$

II) Acertar 13 jogos, errando um duplo e acertando todos os 13 jogos simples:

$$\frac{1}{3} . \left(\frac{1}{3}\right)^{13} = \frac{1}{3^{14}}$$

III) Acertar os 14 jogos:

Conforme resolução da letra a), $\frac{2}{3^{14}}$

Logo, a probabilidade de acerto em, pelo menos, 13 jogos é:

$$\frac{52}{3^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{2}{3^{14}} = \frac{55}{4.782.969}$$

4) (UFRGS – 2004) Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídas ao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos. A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo é:

a) 14%
b) 16%
c) 20%
d) 25%
e) 33%

<u>Resolução</u>:

Questão semelhante ao problema 2. Pelo primeiro lema de Kaplansky, o número de sequências de 2 elementos que podem ser formadas de 1 a 10, sem que hajam números consecutivos é:

$$C_{10-2+1}^{2} = C_9^2 = \frac{9!}{2!\,.\,7!} = 36$$

O número de elementos do espaço amostral em questão é C_{10}^2 = 45.

Portanto, a probabilidade pedida é 1 - $\frac{36}{45}$ = 0,2 = 20%

Alternativa C.

5) (Unifesp - 2002) Uma pessoa comprou um número (de dois algarismos) de uma rifa, constante de números de 0 a 99. O sorteio será feito de uma das duas maneiras descritas a seguir:

A) Em uma urna são colocadas 100 bolas, numeradas de 00 a 99, de onde será retirada uma única bola.

B) Em uma urna são colocadas 20 bolas, numeradas de 0 a 9, sendo duas com o número 0, duas com o número 1, ..., até duas numeradas com o número 9. Uma bola é retirada, formando o algarismo das dezenas e depois, sem reposição da primeira bola, outra bola é retirada formando o algarismo das unidades.

Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade dessa pessoa ganhar no sorteio descrito em A?

<u>Resolução</u>:

$$P(A) = \frac{1}{100}$$

b) Qual e a probabilidade dessa pessoa ganhar no sorteio descrito em B?

<u>Resolução</u>:

Neste caso, a questão terá duas respostas, dependendo da hipótese considerada.

I) O número comprado tem algarismos distintos:

$$P(B_1) = \frac{2}{20} \cdot \frac{2}{19} = \frac{1}{95}$$

II) O número comprado tem dois algarismos iguais:

$$P(B_2) = \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{190}$$

O texto abaixo se refere às questões 6 e 7.

(ENEM - 2000) Um apostador tem três opções para participar de um certo jogo de loteria, que consiste no sorteio aleatório de um número entre dez.

<u>1ª opção</u>: comprar três números para um único sorteio.
<u>2ª opção</u>: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.
<u>3ª opção</u>: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

6) Se X, Y e Z representam as probabilidades de o apostador GANHAR ALGUM PRÊMIO, escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou 3ª opções, é correto afirmar que:

a) X < Y < Z
b) X = Y = Z
c) X > Y = Z
d) X = Y > Z
e) X > Y > Z

Resolução:

Primeiramente, devemos observar que "GANHAR ALGUM PRÊMIO" e "NÃO GANHAR NENHUM PRÊMIO" representam eventos complementares. Logo:

$$X = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$Y = 1 - \left(\frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10}\right) = 0,28$$

$$Z = 1 - \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}\right) = 0,271$$

Portanto, X > Y > Z.

Alternativa E.

7) Escolhendo a 2ª opção, a probabilidade do apostador NÃO GANHAR em qualquer dos sorteios é igual a:

a) 90%
b) 81%
c) 72%
d) 70%
e) 65%

<u>Resolução</u>:

A probabilidade de não ganhar em qualquer dos sorteios equivale a probabilidade de perder no primeiro sorteio e perder no segundo sorteio. Logo:

P(não ganhar em qualquer sorteio) = $\frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10}$ = 72%

Alternativa C

8) (UFRGS – 2000) No jogo da Mega Sena são sorteados seis números distintos dentre 60 possíveis (01 a 60). Considere P a probabilidade de que nenhum número sorteado em um concurso seja sorteado no concurso seguinte. Dentre as alternativas abaixo, a melhor aproximação para P é:

a) 90%
b) 80%
c) 70%
d) 60%
e) 50%

<u>Resolução</u>:

Como nenhum número sorteado no primeiro concurso poderá ser sorteado no concurso seguinte, no segundo concurso poderá sair qualquer uma das combinações de 6 elementos dentre os 54 números possíveis. Logo, a probabilidade pedida será dada por:

$$\frac{C_{54}^{6}}{C_{60}^{6}} = \frac{\frac{54!}{6!\,.\,48!}}{\frac{60!}{6!\,.\,54!}} = \frac{54!}{6!\,.\,48!} \cdot \frac{6!\,.\,54!}{60!} = \frac{(54!)^2}{48!\,.\,60!} = \frac{54\,.\,53\,.\,52\,.\,51\,.\,50\,.\,49}{60\,.\,59\,.\,58\,.\,57\,.\,56\,.\,55} \cong 0{,}5158$$

Portanto, a melhor aproximação para P, dentre as alternativas acima, é 50%.

Alternativa E.

9) (FGV – 1999) Uma loteria consiste no sorteio, sem reposição, de duas bolinhas de uma urna, contendo 20 bolinhas numeradas de 1 a 20; a ordem dos números não é levada em consideração. Ganha um prêmio de R$ 3.800,00 quem tiver o bilhete com os números sorteados.

a) Qual deverá ser o preço de cada bilhete, de modo que o total arrecadado na venda dos bilhetes seja igual ao prêmio?

Resolução:

Como são sorteadas duas bolinhas dentre 20 possíveis, o número de combinações (bilhetes) é dado por $C_{20}^{2} = 190$. Logo, o valor do bilhete para que o total arrecadado seja igual ao prêmio deve ser $\frac{3800}{190}$ = 20 reais.

b) Qual é a probabilidade de que ambos os números sejam inferiores a 5?

Resolução:

Para que ambos os números sejam inferiores a 5, o primeiro número sorteado deverá seja inferior a 5 e o segundo número sorteado também deverá ser inferior a 5. Logo:

$$\text{P(ambos inferiores a 5)} = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{3}{95}$$

10) (FGV – 1997) Cada dia que uma pessoa jogue em uma loteria, ela tem uma probabilidade de ganhar igual a $\frac{1}{1000}$, independente dos resultados anteriores.

a) Se ela jogar 30 dias, qual é a probabilidade de ela ganhar ao menos uma vez?

Resolução:

O evento “ganhar ao menos uma vez” é complementar ao evento “perder todas as vezes”. A probabilidade de perder em todos os sorteios é igual a $\left(\frac{999}{1000}\right)^{30}$. Com isso, a probabilidade de ganhar ao menos uma vez é 1 - $\left(\frac{999}{1000}\right)^{30}$.

b) Qual é o número mínimo de dias que ela deverá jogar para a probabilidade de que ela ganhe ao menos uma vez seja maior que 0,3?

Obs: Não é necessário efetuar os cálculos. Basta deixá-los indicados.

<u>Resolução</u>:

Queremos encontrar “n” tal que 1 - $\left(\frac{999}{1000}\right)^n > 0{,}3$. Isto resulta que n > $\log_{\frac{999}{1000}} 0{,}7$

Capítulo 7: Conclusão

O presente trabalho visa propiciar, tanto aos alunos quanto aos professores de matemática do ensino médio, uma abordagem facilitadora à assimilação de conceitos relativos à teoria de probabilidades e não somente a aplicação mecânica de fórmulas. A utilização dos jogos de loteria, como prática pedagógica, permite que o aluno vivencie uma aplicação cotidiana do tema e ao mesmo tempo exige que o discente siga um processo sequencial extremamente importante na construção do conhecimento, que se inicia com o tratamento das informações, passa pela organização dos dados e culmina com o cálculo de probabilidades.

É importante perceber que neste tipo de abordagem, dúvidas e questionamentos são comuns, tendo em vista que em muitos momentos o resultado que se encontra não era o esperado, o que não ocorre quando apenas impomos fórmulas e resolvemos exercícios. Julgamos que a dúvida e o erro fazem parte do processo de desenvolvimento e amadurecimento do cidadão enquanto aluno. A aula prática, facilitada por uma dinâmica interativa, fornece ao aluno uma “representação da realidade”, que é um das finalidades propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). A realização deste tipo de atividade exerce uma mudança de paradigmas em sala de aula, onde objetiva-se proporcionar uma visão crítica aos alunos, com poder de análise de dados e com raciocínio combinatório e probabilístico.

Essa opção de prática pedagógica a partir de projetos em nada substitui o conceito teórico praticado pelos professores até então. Evidentemente não seria possível a realização de nenhum tipo de atividade com jogos de loteria caso a teoria não tivesse sido previamente apresentada. Muito pelo contrário. As aulas teóricas são extremamente importantes no sucesso dos projetos. Entretanto, acredita-se que a valorização do ensino do tema sendo voltada para a realidade à qual estamos inseridos, aliado a exemplos concretos podem atuar como facilitadores do processo de ensino-aprendizagem.

A constante atualização dos docentes está diretamente ligada ao sucesso destas propostas. A partir do momento em que o professor abandona o papel de transmissor de conteúdos e transforma-se em um pesquisador, no âmbito pedagógico, a tendência é que os objetivos estabelecidos sejam alcançados. Obviamente, sabemos que não transformaremos todos em “matemáticos de excelência”, que fatores alheios interferem nas aulas, como comportamento, cronograma, realidade da turma no que tange ao domínio de conceitos básicos, etc. Cabe a cada professor, em sua realidade de trabalho, saber onde pode chegar. Mas o que se busca é a potencializar a descoberta de competências e domínios que poderiam não ser estimulados. Para isso, deve-se traçar um objetivo e trabalhar para que as metas sejam cumpridas.

“Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática”

(PCN, MEC/SEF, 2000, p. 42)

Referências Bibliográficas

Aparecida, Regiane. História das loterias no Brasil. Disponível em <www.infoescola.com/historia/historia-das-loterias-no-brasil/>. Acesso em 17/01/2012

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília : Ministério da Educação, 1999.

Dannemann, Fernando Kitzinger. 1784 – A história das loterias no Brasil. Disponível em http://www.efecade.com.br/1784-historia-da-loteria-no-brasil/. Acesso em 20/01/2013

EVES, Howard : Introdução à História da Matemática. Editora UNICAMP. 2004.

Hazzan, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 5. Editora Atual, 7ª Edição, 8ª Reimpressão.

Hurtado, N. & Costa, J. A probabilidade no Ensino Médio: a importância dos jogos como ferramenta didática. Disponível em http://www.inf.ufsc.br/cee/pasta3/art3p3.html. Acesso em 24/01/2013

James, Barry R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. IMPA. 2ª Edição, 2ª Impressão.

Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Volume 2. SBM. 6ª Edição.

Melo, Thiago Brañas; Reis, José Cláudio. Relações Históricas entre os Jogos de Azar e a Probabilidade. Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/584/93. Acesso em 19/01/2013

Meyer, Paul L.. Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC, 2ª Edição

Spiegel, M.R., Schhiller, J.,Srinivasan, (2004). R. A. Probabilidade e estatística. Bookman. 2ª Edição.

Teixeira, Ralph Costa; Morgado, Augusto César. II Colóquio de Matemática do Centro Oeste. Disponível em <www.sbm.org.br/docs/coloquios/CO-2.01.pdf. Acesso em 26/01/2013>

Apêndice

Levantamento sobre as probabilidades de acerto em algum prêmio nos jogos da loteria,com exceção da Mega Sena.

- ✓ Quina

Probabilidade de acertar a quina (acertar os 5 números):

- Aposta com 5 números (aposta simples):

O número total de combinações de 5 números que podem ser formadas com os 80 possíveis é dado por $C_{80;5}$, ou seja, 24.040.016. Com uma aposta única de 5 números, isto é, uma aposta simples, concorre-se aposta com uma combinação. Logo:

$$\frac{C_{5;5}}{C_{80;5}} = \frac{1}{24.040.016} \cong 0{,}0000042\%$$

- Aposta com 6 números:

O números de combinações que podemos formar apostando 6 números é calculado por $C_{6;5}$, que resulta em 6 combinações. O espaço amostral é o mesmo calculado anteriormente. Com isso:

$$\frac{C_{6;5}}{C_{80;5}} = \frac{6}{24.040.016} \cong 0{,}000025\%$$

- Aposta com 7 números:

O espaço amostral é o mesmo e neste caso concorre-se com 21 combinações ($C_{7;5}$). Portanto:

$$\frac{C_{7;5}}{C_{80;5}} = \frac{21}{24.040.016} \cong 0{,}000087\%$$

Probabilidade de acertar a quadra (acertar exatamente 4 números):

- Aposta com 5 números (aposta simples):

Utilizaremos o mesmo raciocínio empregado na Mega Sena. Formamos a quadra ($C_{5;4}$) e em seguida podemos utilizar qualquer uma das 75 bolas restantes ($C_{75;1}$). O espaço amostral é o mesmo utilizado para calcular a quina. Logo:

$$\frac{C_{5;4}\ .\ C_{75;1}}{C_{80;5}} = \frac{5\ .\ 75}{24.040.016} = \frac{375}{24.040.016} \cong 0{,}0016\%$$

- Aposta com 6 números:

Para formar a quadra, combinamos os 6 números tomados 4 a 4 ($C_{6;4}$). Em seguida, escolhemos qualquer uma das 74 bolas restantes e combinamos 1 a 1 ($C_{74;1}$). O espaço amostral é o mesmo já definido. Com isso:

$$\frac{C_{6;4}\ .\ C_{74;1}}{C_{80;5}} = \frac{15\ .\ 74}{24.040.016} = \frac{1110}{24.040.016} \cong 0{,}0046\%$$

- Aposta com 7 números:

Combinamos os 7 números escolhidos tomados 4 a 4 ($C_{7;4}$). Formada a quadra, basta escolher uma bola dentre as 73 restantes ($C_{73;1}$). Logo:

$$\frac{C_{7;4}\ .\ C_{73;1}}{C_{80;5}} = \frac{35\ .\ 73}{24.040.016} = \frac{2555}{24.040.016} \cong 0{,}011\%$$

Probabilidade de acertar terno (acertar exatamente 3 números):

- Aposta com 5 números (aposta simples):

Primeiramente devemos formar os possíveis ternos. Isto é feito combinando os 5 números tomados 3 a 3. Em seguida, combinamos os 75 números restantes tomados 2 a 2. Como o espaço amostral é dado por $C_{80;5}$, temos que:

$$\frac{C_{5;3}\ .\ C_{75;2}}{C_{80;5}} = \frac{10\ .\ 2775}{24.040.016} = \frac{27750}{24.040.016} \cong 0{,}12\%$$

- Aposta com 6 números:

Para formar os ternos, combinamos os 6 números tomados 3 a 3 ($C_{6;3}$). Em seguida, escolhemos qualquer uma das 74 bolas restantes e combinamos 2 a 2 ($C_{74;2}$). O espaço amostral é o mesmo já definido. Com isso:

$$\frac{C_{6;3}\ .\ C_{74;2}}{C_{80;5}} = \frac{20\ .\ 2701}{24.040.016} = \frac{54020}{24.040.016} \cong 0{,}22\%$$

- Aposta com 7 números:

Combinamos os 7 números escolhidos tomados 3 a 3 ($C_{7;3}$). Formado o terno, basta escolher duas bolas dentre as 73 restantes ($C_{73;2}$). Logo:

$$\frac{C_{7;3}\ .\ C_{73;2}}{C_{80;5}} = \frac{35\ .\ 2628}{24.040.016} = \frac{91980}{24.040.016} \cong 0{,}38\%$$

Obs: Para análise dos jogos seguintes, explicitaremos apenas os cálculos referentes à premiação da faixa principal (premiação máxima), tendo em vista que o procedimento das outras faixas é análogo aos adotados anteriormente.

- <u>Lotofácil</u>

<u>Probabilidade de acertar os 15 números</u>:

- Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15;15}}{C_{25;15}} = \frac{1}{3.268.760} \cong 0{,}000031\%$$

- Aposta com 16 números:

$$\frac{C_{16;15}}{C_{25;15}} = \frac{16}{3.268.760} \cong 0{,}00049\%$$

- Aposta com 17 números:

$$\frac{C_{17;15}}{C_{25;15}} = \frac{136}{3.268.760} \cong 0{,}0042\%$$

- Aposta com 18 números:

$$\frac{C_{18;15}}{C_{25;15}} = \frac{816}{3.268.760} \cong 0{,}025\%$$

- <u>Lotomania</u>

<u>Probabilidade de acertar os 20 números</u>:

- Aposta com 50 números (única possibilidade neste jogo):

$$\frac{C_{50;20}}{C_{100;20}} \cong 0{,}0000088\%$$

- Dupla Sena

Probabilidade de acertar a sena (acertar os 6 números):

- Aposta com 6 números:

$$\frac{C_{6;6}}{C_{50;6}} = \frac{1}{15.890.700} \cong 0{,}0000063\%$$

- Aposta com 7 números:

$$\frac{C_{7;6}}{C_{50;6}} = \frac{7}{15.890.700} \cong 0{,}000044\%$$

- Aposta com 8 números:

$$\frac{C_{8;6}}{C_{50;6}} = \frac{28}{15.890.700} \cong 0{,}00018\%$$

- Aposta com 9 números:

$$\frac{C_{9;6}}{C_{50;6}} = \frac{84}{15.890.700} \cong 0{,}00053\%$$

- Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10;6}}{C_{50;6}} = \frac{210}{15.890.700} \cong 0{,}0013\%$$

- Aposta com 11 números:

$$\frac{C_{11;6}}{C_{50;6}} = \frac{462}{15.890.700} \cong 0{,}0029\%$$

- Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12;6}}{C_{50;6}} = \frac{924}{15.890.700} \cong 0{,}0058\%$$

- Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13;6}}{C_{50;6}} = \frac{1716}{15.890.700} \cong 0{,}011\%$$

- Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14;6}}{C_{50;6}} = \frac{3003}{15.890.700} \cong 0{,}019\%$$

- Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15;6}}{C_{50;6}} = \frac{5005}{15.890.700} \cong 0{,}031\%$$

- <u>Loteca</u>

<u>Probabilidade de acertar as 14 partidas</u>

- Aposta simples (1 duplo)

Neste caso, em 13 partidas serão marcadas apenas uma coluna (coluna 1, coluna do meio ou coluna 2) e em 1 jogo serão marcadas duas colunas (duplo). Logo, a probabilidade de acerto de uma partida com uma única marcação é igual a $\frac{1}{3}$, enquanto a probabilidade de acerto de uma partida com duas marcações é igual a $\frac{2}{3}$. Logo, a probabilidade da aposta é dada por:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{13}.\left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3^{14}} = \frac{2}{4.782.969} \cong 0{,}000042\%$$

- Aposta máxima (5 duplos e 3 triplos):

Inicialmente devemos perceber que 3 partidas já têm o acerto garantido, pois serão apostados 3 triplos. Das 11 partidas restantes, 6 terão marcação única e 5 terão marcação de duas colunas (duplo). Com isso, temos que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{6}.\left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{32}{3^{11}} = \frac{32}{177.147} \cong 0{,}018\%$$

Obs: É importante ressaltar que neste tipo de jogo, assim como na Lotogol, a ocorrência de um determinado evento não é aleatória como nos outros jogos, pois como são partidas de futebol, existem diferenças de níveis técnicos entre equipes. Assim, podemos classificar este tipo de probabilidade em “probabilidade subjetiva”.

- <u>Lotogol</u>

Devido ao exposto acima e com o “agravante” desse jogo considerar o número de gols marcados pelas equipes, não achamos razoável que seja feito um cálculo probabilístico acerca de um resultado. O site da Caixa Econômica Federal (www.caixa.gov.br) fornece um arquivo com todos os resultados dos concursos ocorridos até hoje.

- <u>Timemania</u>

Probabilidade de acertar os 7 números:

$$\frac{C_{10;7}}{C_{80;7}} = \frac{120}{3.176.716.400} \cong 0{,}0000038\%$$

Probabilidade de acertar o time de futebol sorteado:

$$\frac{1}{80} = 0{,}0125 = 1{,}25\%$$