UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Anderson Flávio dos Santos

Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais

São José do Rio Preto

2014

ANDERSON FLÁVIO DOS SANTOS

Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Profº Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto

2014

ANDERSON FLÁVIO DOS SANTOS

Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof.Dr. Marcus Augusto Bronzi
UFU – Uberlândia

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

26 de Setembro de 2014

Dedico primeiramente aos meus pais pela minha formação pessoal e profissional. A todos que me ajudaram de alguma forma até a conclusão deste. Em especial a minha família e, todas as forças divinas que iluminaram este caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente à ideologia do PROFMAT, explanada pelo professor Vanderlei Minori Horita no primeiro dia de aula, baseada na melhoraria da estrutura do ensino de matemática de nosso pais e, por consequência à vida de muitas pessoas.

Aos meus pais João e Solange, pela minha formação, apoio nas conquistas alcançadas e por permitir realizar tantos sonhos, sendo este mais um e importante. Suas palavras nos momentos certos significam paz, tranquilidade e a abertura da estrada do sucesso. Obrigado por ser a referência dos atos corretos da vida.

À minha irmã Andressa, por compartilhar profissão e formação similar neste instante da vida além de ter me ajudado durante o curso, com dicas acadêmicas e palavras de motivação.

Agradecimento especial se faz à minha família que se formou no meio deste desafio. Tais minha linda esposa, que a cada intervalo de amamentação se preocupava com o desenvolvimento deste e apoio incomparável. Giovana, minha querida filha, que entre choros e sorrisos se faz presente no sentimento de ternura que tem implícito neste trabalho. Ao meu filho Olavo, todo amor e respeito.

Agradecimento especial se faz necessário para com Deus, por iluminar meu caminho e permitir concluir mais essa jornada da vida.

Aos meus amigos, que me proporcionaram motivação e incentivo durante a realização deste trabalho.

Ao meu coordenador, professor, orientador deste Trabalho de Conclusão de Curso, Vanderlei Horita, pela paciência, informações precisas e compreensão durante o longo caminho desde o início até chegar neste momento.

"Enquanto o homem contar por dezenas, seus dedos vão lembrar-lhe a origem humana dessa fase muito importante de sua vida mental. Assim possa o sistema decimal permanecer como o monumento à proposição: o homem é a medida de todas as coisas".

(**Tobias Dantzig**)

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

RESUMO

A necessidade do uso dos números é um processo histórico e indispensável à organização da vida humana, apesar de ser um conceito abstrato. Desde a idade antiga, quando os humanos ainda moravam em cavernas, a necessidade da contagem sempre esteve presente, pois contavam peixes, rebanhos, plantações. Até mesmo nos dias de hoje, as mais variadas e desenvolvidas práticas tecnológicas utilizam-se dos números, citando, como exemplo, o sistema binário computacional. O objetivo deste trabalho é explicar como os sistemas de numerações são utilizados ao longo da história, suas necessidades, cálculos e aplicações. Além disso, serão apresentadas comparações entre os sistemas mais utilizados, fazendo distinção entre sistemas numéricos posicionais e não posicionais. Pretende-se, também, propor uma reflexão sobre as vantagens e desvantagens desses modelos de sistemas. Ainda serão apresentados resultados de atividades práticas aplicadas com crianças que estão cursando o 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. Objetiva-se mostrar como as crianças compreendem o posicionamento dos números dentro do sistema numérico decimal, de modo a evidenciar que o hábito da memorização é predominante para a realização das operações básicas desse sistema em decorrência do seu não entendimento. Tal fato faz com que os alunos das escolas brasileiras não tenham conhecimentos matemáticos básicos, e, consequentemente, com que o país não apresente resultados desejáveis nas avaliações internacionais. Em síntese, pretende-se que este trabalho seja uma oportunidade de reflexão ao passar pela história da matemática, por demonstrações de conceitos simples desses sistemas de numeração e explicitar que uma pessoa aprende realmente a manipular os números quando faz real entendimento destes.

Palavras chaves: Processo histórico. Contagem. Posicionais e não posicionais. Sistemas de numerações.

ABSTRACT

The necessity of using numbers is a historical process and essencial to the organization of human life, although it is an abstract concept. Since Early Middle Ages, when human beings still lived in caves, the need for counting had always existed because fishes, herds, plantations had to be counted. Even nowadays the most diverse and developed technologies use numbers like the computacional binary numeral system. The aim of this paper is to explain how numeral systems have been used throughout history, their necessity, calculation and aplication. Besides this, comparisons between the most used systems will be presented, distinguishing positional and non positional numeral systems. It is also intended to suggest reflection about this systems models advantages and disadvantages. Also pratical activities applied to children in fourth and fifth grades of primary and secondary school results will be present. The purpose is showing how children understand numbers positioning of decimal number system in order to highlight that the memorizing habit prevails performing basic operations of this system due to the fact people do not understand it. This fact makes the students of Brazilian schools do not have basic math skills, and, consequently, the country does not present desirable results on international assessments. In summary, the main purpose of this paper is being an opportunity for reflection presenting math history, demonstrating numbering systems simple concepts and showing that someone really learns to manipulates numbers when they are really understood.

Key-words: Historical process. Counting. Positional and non positional. Numbering systems.

1 INTRODUÇÃO

Através de pesquisas científicas, sabemos que o homem habita a Terra há aproximadamente cem mil anos. Durante todo esse período, o homem se transformou, mudou seus hábitos, costumes e crenças, deixando heranças culturais para as futuras gerações. A forma mais eficaz de registrar heranças culturais ocorre através da escrita, servindo esta para registrar e transmitir informações. Podemos ressaltar algumas formas de escrita, entre elas, os hieróglifos (espécie de símbolos), utilizados até hoje no Japão e na China, até o alfabeto latino atual. O alfabeto atual se desenvolveu inicialmente na Grécia e, posteriormente em Roma, localizada na Itália.

Quando o assunto é quantidade, a necessidade fez o homem desenvolver várias formas de contagem, sempre relacionadas às relações biunívocas. Utilizou-se de pedras, traços e desenhos, muitas vezes esbarrando-se nas limitações estruturais implantadas no seu ato de contar. Todavia, com muita dedicação para desenvolver métodos precisos, vários sistemas de numeração escritos foram emergindo, entre eles a mais de 3000 a.C. na Mesopotâmia, com os sumérios e os egípcios. O sistema que deu origem a nossa forma atual de contagem foi chamado de sistema de numeração indo-arábico. De acordo com a Wikipédia, a maioria dos historiadores coincide em afirmar que teve a sua origem na Índia. Para os árabes, este sistema de numeração é chamado de "Números Indianos” e expandiu-se pelo mundo islâmico e em seguida, pelo resto da Europa. Esse sistema deixou heranças para o sistema de numeração mais usado no mundo, chamado de sistema de numeração decimal.

É fato que todo sistema de numeração possui um conjunto de símbolos, utilizados para representação de quantidades e realizar operações numéricas. De acordo com as regras que definem cada um desses sistemas e formas particulares de representação, podemos classificar esses sistemas em posicionais e não posicionais. Para dar um exemplo desses símbolos, podemos citar o sistema de numeração decimal, o qual é utilizado em grande parte do mundo. Nesse sistema, estabelecemos que a base de contagem seja a base 10, pois o sistema decimal possui um alfabeto de 10 símbolos, chamados de algarismos, são eles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Este é um sistema posicional, pois as operações básicas passam pelo posicionamento da ordem dos números. Dessa forma, encontraremos no primeiro capítulo desse trabalho, abordagens em relação à história da matemática e alguns sistemas de numeração. Faremos elucidação à ordem dos algarismos desses sistemas, classificando-os em posicionais ou não posicionais.

Os povos que criaram seus sistemas de numeração desenvolveram seus pensamentos e formas de cálculos muitas vezes simultaneamente, deixando para gerações futuras as facilidades e dificuldades encontradas. Na matemática desenvolvida nos últimos séculos, foram aplicados algoritmos pensando nos sistemas posicionais, porém, muito do que foi criado foi originado de ideias de cálculos de sistemas não posicionais, como mostraremos também nesse trabalho. Um bom exemplo foi o método desenvolvido pelos egípcios para realizarem multiplicações, contribuindo para o desenvolvimento do método de transformação de números decimais em binários. Mostraremos também, propriedades e cálculos abrangendo as quatro operações básicas do sistema numérico decimal.

Para termos real entendimento de qualquer sistema de numeração, devemos ter implícito em nossa forma de calcular a estrutura de sua base. Infelizmente em nossa realidade escolar, através do sistema decimal isso não ocorre. Avaliações mostram que, muitas crianças completam o Ensino Fundamental I e ingressam no Ensino Fundamental II apresentando problemas básicos e conceituais em relação à escrita de números do sistema decimal e apresentando muitas dificuldades em relação à aplicação das quatro operações básicas. Pelo fato citado acima, é imprescindível que este trabalho tenha também como abordagem, a questão dos erros dos alunos nos algoritmos e nas estratégias utilizadas na resolução de exercícios e problemas. Tal forma de análise será feita em uma pesquisa com alunos das séries finais do ensino fundamental I e, análise de dados apresentada no último capítulo deste trabalho tem por objetivo contribuir para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da matemática.

O termo *aprendizagem significativa* aparecerá constantemente no decorre deste trabalho. Este termo tem como definição, conforme as ideias de Ausubel (2003) ser o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não literal) à estrutura cognitiva do aprendiz. Ressaltando as necessidades cotidianas de contagem, podemos refletir que uma criança em sua essência inicial de vida, não aprenderá inicialmente números maiores que cinco, pois no início do processo de contagem, associam os cinco dedos de sua mão a qualquer forma do mesmo. Dessa forma, os professores que mediam a relação de ensino-aprendizagem das quatro operações básicas, devem desenvolver metodologicamente suas aulas partindo do princípio do conhecimento prévio apresentado pelos alunos, refletir e transformar num saber escolar e por fim, apresentar o conhecimento científico. Somente assim, estaremos preparados para avançar na aprendizagem da matemática e transformar os pré-conceitos que temos em relação a esta disciplina.

2 SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS E NÃO POSICIONAIS

Neste capítulo faremos distinções entre o posicionamento dos algarismos de alguns sistemas numéricos. Algumas reflexões e curiosidades serão mostradas usando como referência a história da matemática.

2.1 ORIGEM DOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Desde a antiguidade, contar sempre fez parte da vida humana, ou seja, a variável quantitativa é de fato necessária aos costumes e sobrevivência da nossa sociedade. Empiricamente e simultaneamente a essas formas de contagem, o ser humano desenvolveu outra forma de contagem, chamada de variável qualitativa. Temos como exemplo dessa variável, quantidade de alimento, luz, ar, etc. Para contar, são usadas palavras escritas e não números, como por exemplo: muito, pouco, quase, suficiente. Esses dois modelos de contagem permanecem até os dias atuais. Em cada processo de criação de alguma forma de contagem, devemos elucidar o tempo utilizado para o desenvolvimento desses processos, capaz de deixar certos povos reconhecidos como precursores de ideias e pensamentos aplicados ao mundo moderno.

Árabes e indianos idealizaram o sistema decimal, defendido pela associação prática de termos dez dedos nas mãos, sendo facilitador da contagem e da realização das quatro operações básicas matemáticas. Os egípcios usavam os desenhos para representar quantidades associando a arte de elaboração de cada símbolo e, seus cálculos não tinham ênfase aos posicionamentos dos números. Cada povo defendia praticidades do sistema numérico implantado, as quais muitas vezes foram combalidas com o passar dos séculos e outras permaneceram como heranças aproveitadas até os dias atuais. Um grande exemplo de herança é o sistema sexagesimal, fazendo-se presente em cada instante que nos localizamos na marcação do tempo.

Contar é um processo que tem e sempre teve a essência da comparação. Desenvolvemos ao longo dos anos, métodos elaborados e sistematizados de quantificação, originários das exigências da ciência e da sua própria curiosidade. A abstração de qualquer processo de contagem é o maior desenvolvimento de qualquer sistema numérico. Cada civilização que temos como referência, em seus processos de contagem, acabou por desenvolver o seu sistema de numeração, chamados de sistemas numéricos. Todos eles objetivaram a ideia da abstração. De acordo com a Wikipédia temos:

Definição: *base de um sistema de numeração é certa quantidade de unidades que deve constituir uma unidade de ordem imediatamente superior.* Um sistema de numeração é um conjunto de princípios constituindo o artifício lógico de classificação em grupos e subgrupos das unidades que formam os números.

Ao longo da história, convém ressaltar que foram desenvolvidos sistemas numéricos posicionais e não posicionais. Nos sistemas numéricos posicionais, todos os sistemas tiveram a escrita de seus números obedecendo a regras de ordem, sendo esta determinada pelo processo de correspondência empregado. A forma de escrever um número principiava em escolher certa base X, e atribuir nomes aos números 1, 2,..., X-1. Para os números maiores do que X, estes são escritos por operações dos números precedentes. Podemos citar como exemplo desse modelo de sistema, o que foi desenvolvido na Babilônia, por volta de 2500 a.C, desenvolveu-se o sistema sexagesimal, com base 60 e o princípio posicional de representação; na Grécia antiga era usado um sistema de representação alfabético; na Índia utilizavam um sistema decimal muito bem desenvolvido, com representações para o zero e outros dígitos. Segundo Eves (2004), dependendo de cada povo, a base era significativa, cada um com sua forma de contagem. Abaixo elucidaremos modelos de sistemas numéricos, curiosidades e aspectos culturais de alguns deles.

2.2 SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS

Sabemos que símbolos arcaicos e o empirismo não são suficientes para o desenvolvimento pleno dos conceitos de contagem que uma pessoa necessita e, para isso faz necessário desenvolver sistemas mais regrados e facilitadores de cálculos. Nos sistemas de numeração posicionais, assim como é o sistema decimal, se estabelece o conceito de ordem, possibilitando a escrita de qualquer número. É a ordem a essência de interpretação de operações básicas, ou seja, qualquer sistema posicional terá como grande característica a posição dos símbolos utilizados na escrita desses números. Podemos tomar o exemplo do sistema de numeração decimal, que é usado em nossas escolas, cuja base de referência é a base 10.

Exemplo: Considere a representação decimal de 742. O algarismo 2 representa a ordem das unidades, por isso tem seu próprio valor, ou seja, 2x1 = 2. Já o algarismo 4 tem valor posicional de 40, já que representa as dezenas, ou seja, 4x10 = 40. O algarismo 7 representa a posição das centenas, ou seja 7 tem valor posicional de 700 = 7x100. Vale ressaltar que o exemplo usado acima foi com a base 10. Essa ideia pode ser estendida a qualquer base. De acordo com a Wikipédia, a notação posicional é um modo de representação numérica na qual o valor de cada algarismo depende da sua posição relativa na composição do número. O valor do número é a soma de cada algarismo que o compõe multiplicado pela potencia da base trabalhada, conforme a posição do algarismo. Um número *X* inteiro, decimal finito ou racional finito pode ser representado num sistema de base $b>0$ conforme a seguinte expressão:

$$X = d_{n-1}b^{n-1} + d_{n-2}b^{n-2} + ... + d_1b^1 + d_0b^0 + d_{-1}b^{-1} + d_{-2}b^{-2} + ... + d_{-m}b^{-m}$$

Temos que n é a quantidade de dígitos inteiros; m a quantidade de dígitos fracionários; d_{n-1} o dígito mais significativo; d_{-m} o menos significativo e d_j são os dígitos ou algarismos que compõem a representação do número X.

Abaixo vamos enunciar e demonstrar o Teorema Geral da Enumeração (TGE) e mostrar que realmente essa escrita posicional é válida para qualquer base, porém vamos nos restringir ao conjunto dos números naturais.

Teorema Geral da Enumeração: *Para qualquer base $b > 0$, um número inteiro $p > 0$ pode ser escrito unicamente da seguinte forma: $p = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1b^1 + a_0$; com $n \geq 0$, $a_n \neq 0$ e cada a_ib^i, para cada índice i $(0 \leq i \leq n)$, tem-se que $0 \leq a_i < b$.*

Demonstração: Vamos provar que p pode ser escrito de acordo com a forma acima, ou seja, pode ser escrito numa base b qualquer. De acordo com a divisão euclidiana, dividindo p por b, temos: $p = bq_0 + a_0$, q_0 é o quociente, a_0 é o resto da divisão, $0 \leq a_0 < b$ e $q_0 < p$.

Agora, dividindo q_0 por b, e aplicando novamente o princípio da divisão euclidiana, obtemos a_1 como quociente e q_1 como resto, além disso, temos que $q_0 = bq_1 + a_1$, com $0 \leq a_1 < b$ e $q_1 < q_0$.

Repetindo endutivamente esse processo, obteremos quocientes cada vez menores. De acordo com a divisão euclidiana, um quociente nunca pode ser negativo, e consequentemente chegará um momento em que ele será nulo. Supondo que quando tivermos o quociente nulo, o resto será a_n, teremos:

$p = bq_0 + a_0$, com $0 \leq a_0 < b$; (1ª expressão)

$q_0 = bq_1 + a_1$, com $0 \leq a_1 < b$; (2ª expressão)

$q_1 = bq_2 + a_2$, com $0 \leq a_2 < b$; (3ª expressão)

.

.

.

$q_{n-2} = bq_{n-1} + a_{n-1}$, com $0 \leq a_{n-1} < b$; (nª expressão)

$q_{n-1} = b.0 + a_n$, com $0 \leq a_n < b$. [(n + 1)ª expressão]

Substituindo o valor de q_0 na 1ª expressão, em seguida o valor de q_1 na 2ª e assim sucessivamente, teremos:

$p = bq_0 + a_0 =$

$= b(bq_1 + a_1) + a_0 = b^2q_1 + ba_1 + a_0 =$

$= b^2(bq_2 + a_2) + ba_1 + a_0 = b^3q_2 + b^2a_2 + ba_1 + a_0 =$

.

.

.

$= b^{n-1}(b_{q_{n-1}} + a_{n-1}) + b^{n-2}a_{n-2} + ... + b^2a_2 + ba_1 + a_0 =$

$= a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1b + a_0.$ $\square$

Unicidade: Supondo duas expressões diferentes para o número p, numa mesma base b, conforme teorema, com $n \leq m$, e a_n e $r_m \neq 0$, temos:

$p = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_1b + a_0 = r_mb^m + ... + r_{m-1}b^{m-1} + ... + r_1b + r_0$; $b \neq 0$, n e $m \in N$.

Temos que a_0 e r_0 são os restos da divisão de p por b.

Além disso, $a_nb^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + ... + a_1$ e $r_mb^{m-1} + r_{m-1}b^{m-2} + ... + r_1$ são os respectivos quocientes.

Como na divisão euclidiana o quociente e o resto são únicos, temos então que $a_0 = r_0$ e $a_nb^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + ... + a_1 = r_mb^{m-1} + r_{m-1}b^{m-2} + ... + r_1$.

Repetindo intuitivamente o processo teremos $a_1 = r_1$, $a_2 = r_2$, ... , $a_n = r_n$ e n = m. Temos dessa forma que a representação de um número numa mesma base b é única. $\square$

Temos boas vantagens em utilizar esse tipo de sistema, entre elas, escrever números com grande quantidade de algarismos de forma sistemática. Veja como escrever o número 374342 na base 10.

Exemplo: $(374342)_{10} = 3x10^{5} + 7 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0$.

Outra vantagem é facilitar os cálculos de operações e propriedades matemáticas, mostradas algumas destas no decorrer deste trabalho.

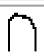
2.3 SISTEMAS NUMÉRICOS NÃO POSICIONAIS

Em sua maioria, podemos dizer que os sistemas de numeração posicionais nasceram em regiões do planeta após ter se desenvolvido sistemas de numerações não posicionais. Nestes, eram escolhidos símbolos básicos, para representar alguns números e, tinham por regra formar os numerais pela repetição dos símbolos básicos escolhidos. As operações utilizadas na construção do número em sua maioria, são a soma e multiplicação. Cada símbolo desses sistemas de numeração representa um valor fixo, independente da posição relativa do número. Podemos citar como exemplos, os sistemas de numeração grego, romano e egípcio. Os egípcios escreviam através da escrita hieroglífica, usando linguagem pictórica, ou seja, cada símbolo representava um objeto, números ou seres. Este processo de escrita predominou desde o terceiro milênio a.C. até aos primeiros séculos da era cristã.

> Os hieróglifos eram desenhos de seres vivos e de objetos diversos, e cada figura significava a palavra correspondente ao objeto representado. Os sons eram representados por hieróglifos que reproduziam nomes de objetos com esse som. (BOYER, 1996, p. 55).

No sistema de numeração hieroglífico egípcio, a base utilizada era a 10, herança adquirida pelo sistema de numeração decimal. Existiam símbolos para os números 1, 10, 100, 1000, 10000 e 1000000. Veja na tabela abaixo tais símbolos:

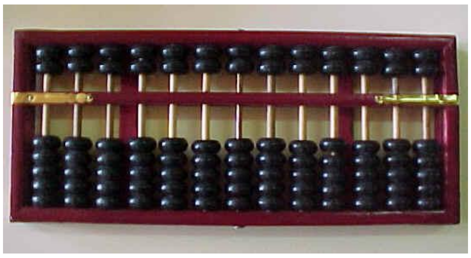
Figura 1 - Símbolos do sistema hieroglífico

Símbolo Egípcio	**Descrição do símbolo**	**O número na nossa notação**
|	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo a apontar	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Fonte: (GULLBERG, 1997, p. 34)

Sobre estes sistemas é importante refletir qual é a herança que alguns destes deixaram para os sistemas posicionais, pois há de convir, que não é um ato instantâneo que faz criar um sistema de numeração, e sim um processo com proveitos de ideias anteriores na questão dos cálculos executados. Faremos uma abordagem mais ampla de alguns sistemas numéricos no capítulo seguinte deste trabalho. Também faremos uma análise de algumas heranças aproveitadas destes sistemas por outros. Vale ressaltar que os sistemas não posicionais são problemáticos em relação à grandeza dos números, e para isso, ao longo da história foram criados objetos que ajudaram a efetuar cálculos dentro dos sistemas posicionais. Segundo a definição do dicionário da Língua Portuguesa- Porto (1999), ábaco é uma espécie de contador mecânico para fazer cálculos; quadro de curvas que permite a determinação de certas grandezas pela intersecção dos traçados.

Figura 2 – Ilustração de um ábaco



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/abaco/. Acesso em 10/11/2013

O ábaco foi o primeiro instrumento inventado para facilitar cálculos. É um objeto que tem origem no Oriente Médio, surgindo por volta do século III a.C, sofrendo algumas transformações no decorrer do tempo. Sua principal função é auxiliar na resolução de cálculos das quatro operações básicas, principalmente em números de grandezas elevadas. Seu princípio de contagem está relacionado ao princípio do sistema decimal.

Na operação de soma têm-se os cálculos efetuados com o princípio de, ao juntar dez peças em uma das hastes, colocava-se uma das peças na segunda haste e tiravam-se todas as peças do primeiro monte. Quando o segundo chegava a dez, colocava-se uma peça numa terceira haste, tirando as peças da segunda haste e assim por diante. A subtração tem princípio idêntico ao da soma. Multiplicação e divisão partem do mesmo princípio do sistema decimal utilizado atualmente, como veremos demonstração no decorrer deste trabalho. A praticidade nessa forma de cálculo, fez com que na Índia fosse criado o sistema de numeração posicional de base 10, como foi citado anteriormente.

Outro objeto de cálculo é a calculadora. A primeira calculadora que temos conhecimento foi inventada pelo filósofo e doutor alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nascido em Leipzig. Sua filosofia para cálculo desse objeto é traduzido por uma de suas frases. "É indigno para o sábio perder horas, como escravos, em trabalhos de cálculo que poderiam, com segurança, ficar a cargo de qualquer pessoa, caso se usassem máquinas".

As ideias que fazem esse instrumento calcular é embasado teoricamente na linguagem binária, um sistema posicional e moderno, usado também na linguagem computacional. A calculadora trabalha com entrada e saída de informações. A entrada é feita pelo teclado, através de números no sistema decimal, sendo estas informações decodificadas para o sistema binário. Processo semelhante ocorre em outros objetos, como os computadores, CDs, DVDs, etc. As funções de programação ficam armazenadas em um processador, cuja essência é uma vasta malha de portas lógicas que formam circuitos como contadores binários, multiplexadores, buffers etc. Após o término das informações processadas, ocorre novamente uma transformação para o sistema decimal e, essa informação é mostrada no visor da calculadora. Os processadores trabalham com armazenamento de informações através das memórias existentes nas máquinas, como as voláteis e não voláteis, processando dados e carregando parâmetros. A comunicação como disse anteriormente, acontece através da linguagem binária, através de uma via de interfaces.

O uso de calculadoras nas aulas de matemática é instrumento de muita discussão, pois os alunos realmente podem ganhar tempo, mas por outro lado, podem não desenvolver a estrutura de ordem do sistema decimal, tão importante para aprender resolver qualquer forma de cálculo. Essa forma de pensar do sistema decimal será tema do último capítulo.

2.4 ALGUNS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Neste tópico, apresentaremos alguns sistemas numéricos, suas simbologias, história e curiosidades. Abordaremos um pouco de história, heranças culturais e cálculos desenvolvidos por esses povos. Vale à pena ressaltar que, serão apresentados sistemas numéricos posicionais e não posicionais. Cálculos matemáticos através desses dois modelos de sistemas deram formas à evolução humana e até mesmo, contribuíram para o avanço tecnológico.

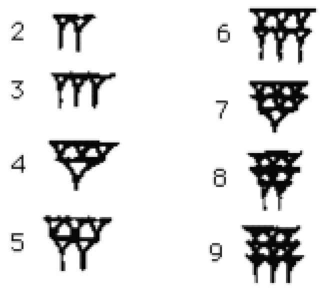
2.4.1 Os sumérios

Essa povo chegou à Mesopotâmia por volta de 3300 a.C, sendo considerada a civilização organizada mais antiga que temos conhecimento. Cerca de 1900 a.C., a Mesopotâmia foi conquistada pelos Amorritas, fazendo com que os sumérios desaparecessem como povo. Vale ressaltar que mesmo assim, parte de sua cultura foi assimilada pelos sucessores semitas e expandida até os dias atuais, como por exemplo, a invenção da escrita cuneiforme, a qual se escreve de forma relacionada ao som emitido pela nossa fala. Também inventaram o transporte sobre rodas, tão necessário à vida moderna. Sobre seu sistema de numeração, damos destaque a origem do sistema sexagesimal, ou seja, construção de números escritos na base 60, usada atualmente na marcação de horas e construção de arcos. Uma possível razão para o aparecimento deste sistema de numeração poderá residir no elevado número de divisores de 60 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60).

No sistema de numeração de base 60, são usados 60 algarismos diferentes, indo de 0 até 59 de forma inteira. Na composição de seus números, os sumérios usavam a base 10 para representar os 60 algarismos, através de hieróglifos. Os símbolos básicos, usados para expressar as quantidades 1 e 10, são os mostrados na primeira linha da figura 3, de 2 até 9 da 2ª até a 5ª linha da figura e, as dezenas de 10 até 50 na última linha. Na figura 4, vemos a evolução dos símbolos sumérios na representação de seus algarismos e números.

Figura 3 – hieróglifos sumérios

Os algarismos 1 e 10

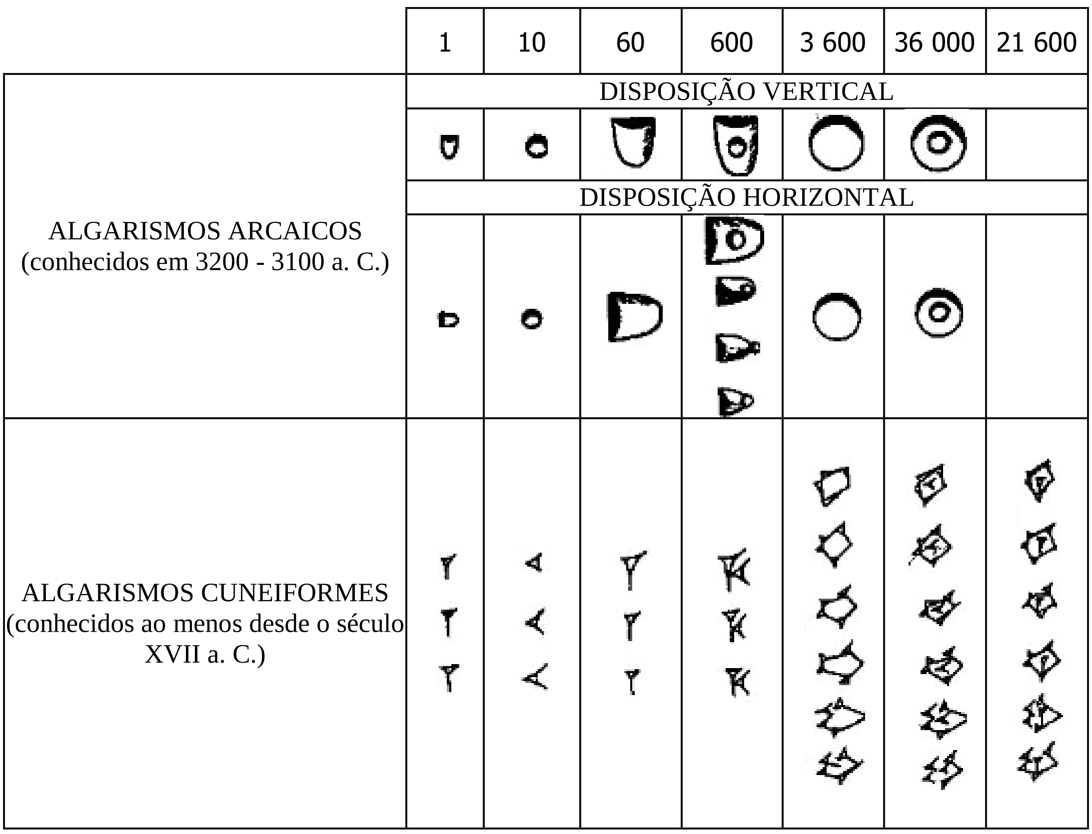


Os algarismos de 2 a 9

As dezenas de 10 a 50

Fonte: http://numaboa.com.br/escolinha/matematica/233-numeros-babilonia. Acesso em 12/07/2014

Figura 4 – Evolução dos hieróglifos sumérios



Fonte: http://numaboa.com.br/escolinha/matematica/233-numeros-babilonia. Acesso em 12/07/2014

A escrita dos outros algarismos era feita usando a adição, por exemplo, o algarismo 13 era simbolizado pelo símbolo do algarismo 10, seguido do símbolo do algarismo 3. O algarismo zero não possuía símbolo para representá-lo, porém a ideia de existência era subentendida no sistema de numeração sumério.

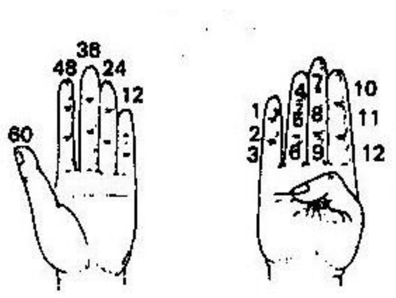
Para entendermos as formas de cálculo do sistema sexagesimal, é importante ressaltar as duas bases que os sumérios trabalhavam, a base 5 e a base 12. Na base 5, utilizavam os dedos de uma das mão para fazer a contagem, servindo a outra como auxílio a contagem dos "cincos" contados anteriormente. Já a base 12, utilizava as três falanges que temos em cada um dos dedos para efetuar a contagem, e o polegar servia como auxiliar de contagem. Através dessas duas bases e do princípio multiplicativo de contagem, desenvolve uma das explicações originárias da base 60 (sexagesimal). Abaixo, veremos maiores detalhes.

Os sumérios faziam contagens sempre utilizando as duas mãos. Inicia-se na mão direita, contando-se de 1 até 12, através das falanges dos dedos, exceto a do polegar. Ao atingir 12 na mão direita, dobra-se o dedo mínimo da mão esquerda. Recomeça a contagem a partir de 13 e, chegando ao 24 na mão direita, dobra-se o dedo anular esquerdo e volta a contar com as falanges da mão direita. Da mesma forma, ao atingir 36 na mão direita, dobra-se o dedo médio esquerdo e repete-se o processo. Ao atingir 48 na mão direita, dobra-se o indicador esquerdo e volta a contar com as falanges da mão direita. Ao atingir 60 na mão direita, todos os dedos da mão esquerda foram dobrados.

Figura 5 - Sistema de contagem sexagesimal

Mão esquerda Mão direita

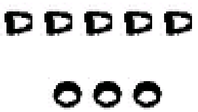
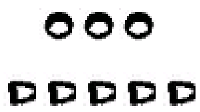
Contagem dos dedos, cada um valendo uma dúzia.



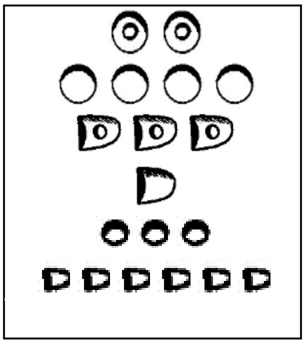
Contagem das falanges pelo polegar oposto, cada.

Fonte: http://numaboa.com.br/escolinha/matematica/233-numeros. Acesso em 12/07/2014

Vale ressaltar que sua escrita tem como ideia um sistema não posicional.

Exemplo: 35 pode ser representado por:  ou 

Exemplo: Vejamos como 88296 é representado:



36 000 reproduzido 2 vezes =	36 000 × 2 =	72 000
3 600 reproduzido 4 vezes =	3 600 × 4 =	14 400
600 reproduzido 3 vezes =	600 × 3 =	1 800
60 reproduzido 1 vez =	60 × 1 =	60
10 reproduzido 3 vezes =	10 × 3 =	30
1 reproduzido 6 vezes =	1 ×6 =	6
		88296

2.4.2 Os egípcios

A civilização egípcia é uma das mais antigas que temos conhecimento, aparecendo cerca de 3000 a.C., localizado na Mesopotâmia, assim como os sumérios. Cada símbolo que os egípcios desenhavam era retratado com muito cuidado e fascínio, tanto é que associavam os hieroglíficos às imagens familiares, tendo muita história cada um desses povos.

Os Egípcios tiveram muitas dificuldades para realizar cálculos extensos e pesquisas mostram que não usavam números maiores que o bilhão. Conforme Boyer (1996) descreve, cerca de 6000 anos atrás, já estava em uso no vale do extenso Rio Nilo, uma forma primitiva de escrita que evoluiu para uma forma linear de símbolos mais simples. Através de muita dedicação em seus cálculos, sabemos que os egípcios deixaram uma rica contribuição para o sistema de numeração decimal, usando a base 10 para desenhar seus números.

O sistema de numeração egípcio é não posicional, baseada no agrupamento, com a base 10 sendo referência de seus cálculos. Os números em de potência de 10 tinham representações especiais, conforme ilustração abaixo e, os algarismos de 2 até 9 eram escritos pelas somas de bastões, como por exemplo, o número 5 era representado pela união de 5 bastões.

Figura 6 – hieróglifos dos números em potencia de 10

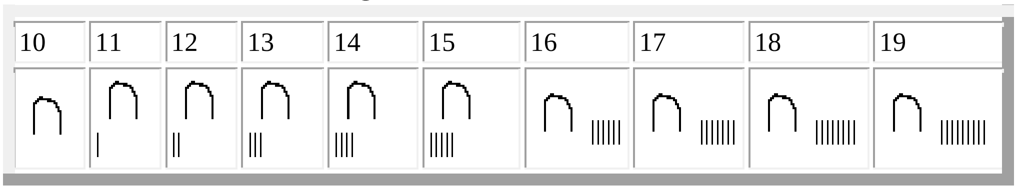
Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000

homem 1000000

Fonte: http://educar.sc.usp.br/matematica/l1t5.htm. Acesso em 17/07/2014

Para os números de dois algarismos, era usada a ideia do agrupamento, trocando as 10 marcas, (||||||||||) por ∩ um calcanhar. Veja tabela abaixo.

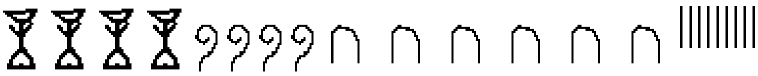
Figura 7 – Números inteiros de 10 à 19



Fonte: http://educar.sc.usp.br/matematica/l1t5.htm. Acesso em 17/07/2014

O raciocínio de trocas completando 10 marcas é estendido para todos os outros números. A grande dificuldade desse sistema é a representação de números de grande ordem, afinal, cada símbolo utilizado era desenhado minuciosamente e corria-se o risco de ter que usar muitos símbolos.

Exemplo: representação egípcia para 5469 é escrita da seguinte forma.



Pela dificuldade em fazer essa representação hieroglífica, os egípcios desenvolveram o calculo mental, pois decorar cada símbolo foi se tornando mais fácil do que desenhar. Todos os problemas eram feitos de acordo com suas necessidades cotidianas. Portanto, os egípcios contribuíram muito para o sistema decimal e, principalmente deixaram a certeza de que matemática deve ser desenvolvida de forma contextualizada.

2.4.3 Os romanos

Civilização que se desenvolveu em Roma, por volta do século IX a.C. Não existem datas fixas para originar a criação do sistema numérico romano. Podemos afirmar que esse sistema é não posicional, além de ser muito utilizadas em nosso dia-a-dia, como os mostradores de alguns relógios, escrita de séculos, em livros, etc. Nesse sistema são utilizados sete símbolos, os quais representam alguns números especiais. Seguem estes abaixo:

Figura 8 – Símbolos romanos

Decimal	Romana
1	I
5	V
10	X
50	L
100	C
500	D
1000	M

Fonte: http://educar.sc.usp.br/matematica/l1t5.htm. Acesso em 29/09/2014

> Pequenas pranchas, carregando uma fina camada de cera, juntamente com um estilo, compuseram o material de escrita dos romanos de cerca de dois milênios atrás. Antes e durante o Império Romano usaram-se frequentemente tabuleiros de areia para cálculos simples e para traçados de figuras geométricas. E, obviamente, muito cedo se usaram pedras e argila para registros escritos. O meio de contornar essas dificuldades intelectuais e materiais foi a invenção do ábaco (do grego abax, “tabuleiro de areia”), que pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânico usado pelo homem. (EVES,2004, p.38-39).

Na construção dos números no sistema romano, usamos os símbolos mostrados acima, podendo repeti-los, uma, duas ou três vezes. (OBS: os símbolos V, L e D não podem ser repetidos).

Exemplos: a) 2 – II b) 200 – CC c) 3000 – MMM.

Usando somente os argumentos acima, não conseguimos formar alguns números, entre eles, 90 ou 110. Para isso, devemos saber que as letras I, X e C, colocam-se à esquerda de outras de maior valor, são usadas para representar a subtração deles. Valem as regras abaixo:

♦ I coloca-se à esquerda de V ou X

♦ X coloca-se à esquerda de L ou C

♦ C coloca-se à esquerda de D ou M

Exemplos: a) 90 - XC b) 89 - LXXXIX

Se invertermos a ordem, ou seja, se usarmos um símbolo de maior valor antes de um símbolo de menor valor, estaremos efetuando uma soma.

Exemplos: a) 11 - XI b) 220 - CCXX

A multiplicação dos romanos era muito utilizada e a forma como faziam era a mais prática possível.

Exemplo: o dobro de 23 (XXIII) = 46 (XXXXIIIIII), mesmo a escrita correta sendo XLVI. Quando multiplicavam um número por mil, usavam um travessão em cima do número.

Exemplo: $\overline{C}$ corresponde ao valor 100.000 (100 x 1.000). Os romanos deixaram o legado de simplificação de seus cálculos para outras gerações.

2.4.4 Os maias

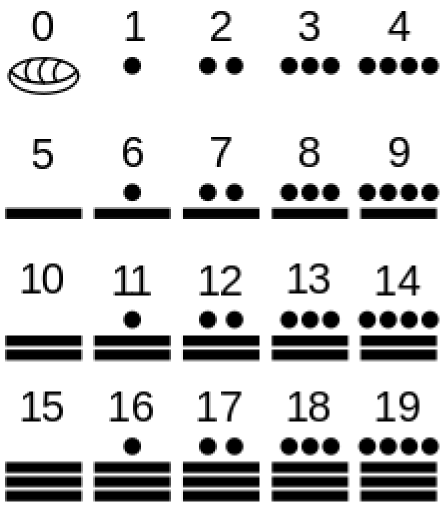
Foram tribos que viveram na América Central e América do Norte, mais precisamente no sul do México, com primeiros registros em 1000 a.C. Ganharam grande destaque na astronomia e na construção da base 20.

> Os maias do Yucatán, em sua representação de intervalos de tempo entre datas do calendário, usavam numeração posicional, em geral com vinte como base primária e com cinco como base auxiliar (correspondendo ao uso babilônico de sessenta e dez respectivamente). Como o sistema se destinava primariamente a contar dias num calendário de 360 dias num ano, a terceira posição usualmente não representava múltiplos de 20. No entanto, para além desse ponto a base vinte novamente prevalecia. Com essa notação posicional os maias indicavam posições vazias por meio de um símbolo, que aparecia em formas variadas, semelhante a um olho meio-aberto. (BOYER,1996, p.146).

Nota-se que os maias realizavam seus cálculos tendo com referência a base 20. Como o desafio primordial era a contagem do tempo, chegaram à conclusão que usar os 10 dedos que possuíam nas mãos era a maneira mais fácil de enumerar os meses com 20 dias cada.

O sistema numérico criado pelos maias era chamado de Glifos, sendo representados por uma concha (representação do zero), pontos ou barras horizontais. Veja a figura abaixo:

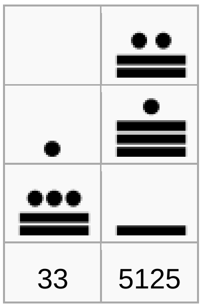
Figura 9 - Numerais maias



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Numera%C3%A7%C3%A_maia. Acesso em 15/07/2014

A forma de escrever números maiores que 19 no sistema de numeração maia, foi feita usando na parte de cima a quantidade de 20 utilizado na decomposição do número na base 20. Vale ressaltar que o ponto era usado até quatro vezes, e a barra era utilizada até três vezes. Veja a escrita de alguns números no sistema de numeração maia.

Figura 10 - Numerais maias maiores que 20



Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=19543. Acesso em 15/07/2014

Exemplo: fazendo a decomposição de 33 em potências de 20 ,temos: $33 = 1.20^1 + 13$ e 5125 da mesma forma: $5125 = 12 \times 20^2 + 16 \times 20^1 + 5 \times 20^0$.

2.4.5 Os indo-árabes

Os números e formas de cálculo utilizado em praticamente todo o nosso planeta têm origem nesse sistema de numeração. Esses dois povos, árabes e indianos desenvolveram toda forma de contagem que existia no planeta. Os primeiros registros de contagem aparecem em 200 a.C, mas a formalização ocorre em aproximadamente 800 d.C. Eles foram os idealizadores do sistema de numeração posicional decimal.

> O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que o inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental. Os mais antigos exemplos de nossos atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. Outros exemplos primitivos na Índia, se corretamente interpretados, encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições de por volta do ano 200 d.C., gravadas nas cavernas de Nasik. Essas primeiras amostras não contêm nenhum zero e não utilizam a notação posicional. Contudo, a idéia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C., pois o matemático persa Al-Khowârizmî descreveu de maneira completa o sistema hindu num livro do ano 825 d.C. (EVES, 2004, p.40).

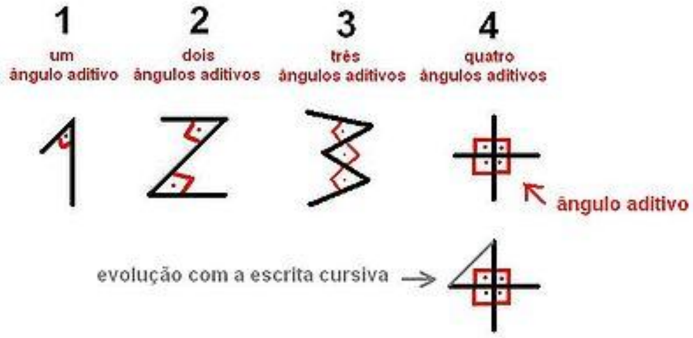
A evolução da escrita dos algarismos indo-arábico ocorreu ao longo da história, como percebemos na figura abaixo:

Figura 11 - Evolução dos Números Indianos Até Chegar aos Dias Atuais

Fonte: http://hebe.matematica3.zip.net/. Acesso em 16/07/2014

Pesquisadores dessas civilizações apontam que as grafias atuais dos algarismos 1, 2, 3, 4 são relacionadas à quantidade de ângulos que se desejava representar. Veja figura abaixo:

Figura 12 - Teoria sobre paleografia dos algarismos 1,2,3 e 4



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Algarismos_indo-ar%C3%A1bcos. Acesso em 17/07/2014

Esse sistema de numeração tão utilizado em nossas escolas será destaque do último capítulo deste trabalho, já que a facilidade propiciada em efetuar cálculos, vem gerando falta de interpretação e não aprendizagem em relação à ordem do sistema de numeração decimal.

3 INFLUÊNCIAS E APLICAÇÕES DOS SISTEMAS NÃO POSICIONAIS

Os sistemas numéricos não posicionais são pouco utilizados atualmente, porém contribuíram significativamente para os sistemas posicionais e também marcaram civilizações. Dessa forma, mostraremos alguns desses modelos de cálculos e faremos analogias em outros sistemas posicionais.

3.1 OPERAÇÕES EM SISTEMAS NÃO POSICIONAIS

Como vimos, os egípcios faziam prática de um sistema não posicional. Vale ressaltar algumas de suas operações e contribuições para os sistemas posicionais.

A Multiplicação Egípcia foi um método bem interessante, onde usavam multiplicações por 2 e em seguida somas, podendo assim realizar qualquer multiplicação. A regra adotada é conhecida como regra do dobro.

Exemplo: Vamos realizar a multiplicação de 21x72. Primeiramente devemos escrever o número 72 ao lado do 1. Vale frisar que o número 1 e um dos fatores devem iniciar o processo, conforme tabela abaixo. Em seguida, devemos efetuar multiplicações por 2 nas duas colunas e colocar os resultados nas linhas abaixo. As multiplicações na coluna iniciada pelo número 1 não devem ultrapassar 21. Marcar na coluna do número 1, os valores que somam 21 (destaque em amarelo), que são 1, 4 e 16 as multiplicações em que a soma seja igual a 21.

1	72
2	144
4	288
8	576
16	1152

Para descobrir o valor de 21 x 72, basta somar os números marcados na 2ª coluna, ou seja, 72 + 288 + 1152 = 1512 = 21x 72.

Exemplo: Vamos fazer a multiplicação dos números 32 e 102. Devemos lembrar que a 1ª coluna não deve ultrapassar 32.

1	102
2	204
4	408
8	816
16	1632
32	3264

Nesse exemplo, 32 é a soma dele mesmo. Nesse caso, o resultado da multiplicação será o número correspondente ao algarismo 32. Então 32 x 102 = 3264.

Exemplo: No Papiro de Rhind, o problema 32 mostra o método utilizado pelos egípcios para calcular 12×12:

1	12
2	24
4	48
8	96

Soma: 48 + 96 = 144. Logo, 12 × 12 = 144.

A Divisão Egípcia se assemelha ao processo de multiplicação, onde na primeira coluna colocamos duplicações a partir do um, e na segunda coluna duplicações a partir do divisor, não podendo exceder o valor do dividendo.

Exemplo: Vamos dividir 115 por 5.

1	5
2	10
4	20
8	40
16	80

Perceba que na primeira coluna, iniciamos com o número 1 sempre, dobrando os valores nas linhas subsequentes. Na segunda coluna fazemos a duplicação a partir do divisor 5 até o 80, pois o próximo número seria 160, que excede 115 e, portanto não é necessário ao processo. Como o dividendo é escrito como a soma de 80 + 20 + 5 (valores localizados na segunda coluna), sabemos que 115 / 5 = 1 + 4 + 16 = 21, que são os valores relacionados na 1ª coluna.

E se a divisão não for exata? O procedimento é praticamente idêntico, com a única diferença que não vamos encontrar soma na segunda coluna que coincida com o dividendo, devendo então se aproximar o máximo possível deste.

Exemplo: Vamos efetuar a divisão de 367 por 9.

1	9
2	18
4	36
8	72
16	144
32	288

Note que é impossível escrever 367 como soma dos valores da segunda coluna. O valor mais próximo que se obtém é 360, com 288 e 72, e faltam 7, que vai ser o resto da divisão. Logo, o resultado da divisão é só somar os correspondentes, assim: 367: 9 = 8 + 32 = 40, com resto 7.

A Multiplicação Russa foi criada pelos camponeses russos. Devemos alinhar os números que queiramos multiplicar. Usamos operações do **dobro** e da **metade.** Calcula-se a metade do primeiro número e o dobro do segundo, escrevendo o resultado na linha abaixo. Se aparecer casas decimais no processo, descartam-se as casas decimais e coloca-se apenas a parte inteira. Encerram-se os cálculos do dobro e da metade quando o resultado das divisões é 1. Em seguida riscam-se todas as linhas de números nas quais a 1ª coluna tem um número ímpar. O resultado é a soma dos números riscados da 2ª coluna.

Exemplo: Vamos efetuar a multiplicação de 28 por 15.

28	15
14	30
7	60
3	120
1	240

Resultado de 28 x 15 = 60 + 120 + 240 = 420.

A Divisão Suméria tem seus cálculos efetuados através da base sexagesimal como vimos na capítulo 1. Usavam objetos diferenciados no tamanho e formato, todos eles representando o número 1, 10 e combinações da base 60.

Figura 13- Objetos utilizados no cálculo

1		pequeno cone
10		bilha
60		grande cone
600		grande cone perfurado
3600		esfera
36000		esfera perfurada

Fonte: http://profraulcuore.blogspot.com.br/2011/04l. Acesso em 16/07/2014

A divisão suméria também fazia trocas nas ordens dos algarismos dos números, assim como no sistema decimal, usando os símbolos acima para representar as trocas.

Exemplo: Dividir 180000 por 4. Temos que 180000 = 5×36000. Como a divisão tem divisor 4, dividiremos 5 esferas perfuradas (representando 36000) por grupos de 4.

1 grupo

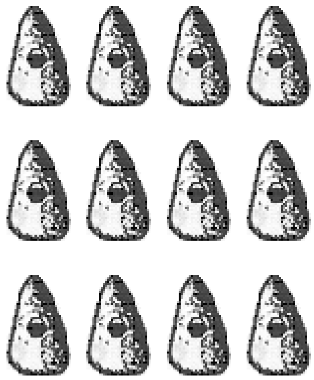
Primeiro resto 

Assim, a primeira representação do quociente tem valor igual a 1 x 36000. Como o resto tem 1 esfera perfurada, devemos imediatamente fazer a troca por unidade inferior, ou seja, converter 36000 em múltiplos de 3600. Fazendo a conversão, temos: 1×36000 = 10×36000. Obtemos assim 10 esferas simples, divididas em 2 grupos de 4 com resto 2. Veja a ilustração abaixo:

2 grupos

Segundo resto 

Como temos 2 grupos de 4 nessa divisão, temos que a segunda parte do quociente é 2×3600 = 7200. Devemos transformar agora as duas esferas simples do resto, em múltiplos de 600, ou seja, 12 x 60 = 7200. Obtemos assim 12 grandes cones perfurados, que dividimos em 3 grupos de 4. Assim, a terceira e última parte do quociente é 3 x 600 = 1800. Termina a divisão pelo resto ter valor igual a 0.



3 grupos

Resto 0

Portanto o quociente final é: 1×36000+2×3600+3×600 = 45000.

3.1.1 Contribuição da multiplicação e divisão egípcia para a transformação binária/decimal

Conforme foi elucidado, o sistema de numeração egípcia e russa não eram sistemas posicionais. Vimos no tópico anterior que a multiplicação e a divisão egípcia já trabalhavam com o conceito do dobro, e provavelmente tenha contribuído para a transformação do sistema binário em decimal ou decimal em binário. Veja que no sistema binário, a base é o número 2 e trabalha com divisões sistemáticas por 2 ou com multiplicações de potências de base 2. Veja tais transformações abaixo.

Decimal em binário – Devemos utilizar o método de divisão sucessivas por 2, ou seja, dividir o dividendo por 2 e analisar os possíveis restos (0 ou 1). Em seguida, divida o quociente por 2 e devemos fazer a mesma análise do resto . Esse procedimento deve ser repetido até que o quociente seja 0. A transformação ocorre fazendo a leitura dos restos que apareceram de baixo para cima. Veja:

Exemplo: Vamos converter o decimal 27 em binário.

27 | 2
1 13 | 2
1 6 | 2
0 3 | 2
1 1 | 2
1 0

Assim, $(27)_{10} = (11011)_{2.}$

Binário em decimal – Para efetuarmos tal transformação, é necessário efetuar a contagem da quantidade dos algarismos do número escrito na linguagem binária, o qual resulta em uma unidade a menos a ser desenvolvida de forma inteira no expoente de potencias decrescentes de 2.

Exemplo: Considere o número binário $(11010)_{2.}$ Convertendo para a base decimal, temos:

Dígito de 16 (ou 2^4)

Dígito de 8 (ou 2^3)

Dígito de 4 (ou 2^2)

Dígito de 2 (ou 2^1)

Dígito de 1 (ou 2^0)

$(11010)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 16 + 8 + 2 = (26)_{10.}$

Se um número tiver parte decimal, deve ser feita a contagem dos algarismos dessa parte, servindo de expoente negativo em ordem decrescente, partindo de -1.

Exemplo: Transformando $(111.1100)_2$ para a base 10, temos:

$(111.1100)_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} =$

$= 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 + 0 + 0 = 7 + 0,75 = (7,75)_{10.}$

Uma grande questão pode ser levantada nesse processo de transformação. Se fixarmos uma quantidade de dígitos, qual o maior número binário que conseguiríamos escrever? Vamos fazer algumas transformações abaixo e, por dedução chegaremos a um algoritmo solução para a pergunta acima.

Decimal	Binário	Decimal	Binário
0	0	9	1001
1	1	10	1010
2	10	11	1011
3	11	12	1100
4	100	13	1101
5	101	14	1110
6	110	15	1111
7	111	16	10000
8	1000	17	10001

número de bits(algarismos binários)	maior decimal
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
.	.
.	.
.	.
n	**$2^n – 1$= Algoritmo.**

3.2 QUATRO OPERAÇÕES NOS SISTEMAS POSICIONAIS

Faremos aqui demonstrações das quatro operações básicas em um sistema posicional, com uma base $b > 0$ e $b \in Z$. Convém ressaltar que cada operação demonstrada abaixo é válida não somente no sistema decimal, mas em qualquer base conforme citada descrições acima.

SOMA: Sejam os números abaixo:

$x = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0$ e $y = r_mb^m + r_{m-1}b^{m-1} + ... + r_nb^n + ... r_2b^2 + r_1b^1 + r_0$,

$a_n \neq 0$, $r_m \neq 0$ e $m \geq n$.

Efetuando x + y, temos:

$(a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0) + (r_mb^m + r_{m-1}b^{m-1} + ... + r_nb^n + ... + r_2b^2 + r_1b^1 + r_0) =$

$= r_mb^m + r_{m-1}b^{m-1} + ... + b^n(a_n + r_n) + b^{n-1}(a_{n-1} + r_{n-1}) + ... + b^2(a_2 + r_2) + b^1(a_1 + r_1) + a_0 + r_0.$

Note que os coeficientes dos termos de base b que possuem o mesmo expoente foram somados. Devemos ficar atento à soma dos coeficientes $a_i+r_i \geq b$, pois se isso acontecer, teremos $a_i+r_i = b+t$ com $0 \leq t < b$, que é o que acontece nas formas numéricas de fazer operação de soma. Veja o exemplo da soma na base 10 e depois na base 2.

Exemplo: Efetuando o cálculo de 79 + 72 = 141, devemos posicionar em ordem os números conforme procedimento abaixo.

$$\begin{array}{r} 7\ 9 \\ +\quad 7\ 2 \\ \hline 1\ 5\ 1 \end{array}$$

No contexto escolar dizemos aos alunos: 9 + 2 = 11, então colocamos por baixo um 1 e dizemos "vai um". Em seguida dizemos 7 + 7 = 14, com mais 1, temos 15, para enfim escrever esse número no resultado. O resultado final é 151.

Em qualquer outra base o raciocínio é análogo, lembrando-se de somar uma unidade a mais na próxima ordem, quando a soma dos algarismos das parcelas não tiver a mesma quantidade de dígitos destas.

Exemplo: $(1111)_2 + (0111)_2 = (10110)_2$.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1 \\ +\ \ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

SUBTRAÇÃO: Sejam os números abaixo:

$x = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0$ *e* $y = r_mb^m + r_{m-1}b^{m-1} + ... + r_nb^n + ... r_2b^2 + r_1b^1 + r_0,$
$a_n \neq 0,\ r_m \neq 0$ *e* $m \geq n.$

Efetuando x - y, temos:

$= (a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0) - (r_mb^m + r_{m-1}b^{m-1} + ... + r_nb^n + .. +.r_2b^2 + r_1b^1 + r_0) =$

$= a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0 - r_mb^m - r_{m-1}b^{m-1} - ... - r_nb^n - ... - r_2b^2 - r_1b^1 - r_0 =$

$= -r_mb^m - r_{m-1}b^{m-1} - ... + b^n(a_n - r_n) + b^{n-1}(a_{n-1} - r_{n-1}) + ... + b^2(a_2 - r_2) + b^1(a_1 - r_1) + a_0 - r_0.$

Perceba que devemos subtrair os coeficientes dos termos de base b que possuam o mesmo expoente.

Se alguns dos coeficientes da base b é positivo, deveremos então fazer uma transformação de unidade. Vamos supor sem perda de generalidade que somente ($a_1 - r_1$) seja positivo.

Assim: $-r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} - ... + b^n(a_n - r_n) + b^{n-1}(a_{n-1} - r_{n-1}) + ... + b^2(a_2 - r_2) + b^1(a_1 - r_1) + a_0 - r_0$ $= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} - ... + b^n(-s_n) + b^{n-1}(-s_{n-1}) + ... + b^2(-s_2) + b^1(a_1 - r_1) + s_0.$

Somamos $1-1 = 0$ em $- s_2$, teremos:

$-r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} - ... + b^n(-s_n) + b^{n-1}(-s_{n-1}) + ... + b^2(-s_2 + 1 - 1) + b^1(a_1 - r_1) + s_0 =$

$= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} - ... - b^n s_n - b^{n-1} s_{n-1} + ... + b^2(-s_2 + 1) - b^2 + b^1(a_1 - r_1) + s_0 =$

$= -r_m b^m - r_{m-1} b^{m-1} - ... + b^n(-s_n) + b^{n-1}(-s_{n-1}) + ... + b^2(-s_2) + b^1(a_1 - r_1 - b) + s_0.$

Como todos os coeficientes da base b, são menores que b, temos que $a_1 - r_1 - b$ será negativo, como queríamos para efetuar a operação de subtração. Da mesma forma ocorre, se todos os coeficientes fossem positivos e algum deles fosse negativo, aplicaríamos o mesmo procedimento de transformação de unidade no coeficiente negativo. Portanto, está mostrado como se faz as operações de soma e subtração em qualquer base adotada.

Exemplo: Vamos efetuar a subtração de $(11011)_2$ por $(1101)_2$.

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1 \\ -\quad 1\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,0 \end{array}$$

MULTIPLICAÇÃO: Sejam os números abaixo:

$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$ *e* $y = r_m b^m + r_{m-1} b^{m-1} + ... + r_n b^n + ... r_2 b^2 + r_1 b^1 + r_0$, $a_n \neq 0$, $r_m \neq 0$ *e* $m \geq n$.

Efetuando x. y, temos expressões do tipo: $a_s r_t . b^{s+t}$

Após efetuarmos a multiplicação entre dois coeficientes, e estes apresentar algarismo maior que a base b, devemos fazer uma transformação de unidades imediatamente superior, conforme feito na soma, ou seja, $a_s r_t = qb + t$, sendo q o quociente da divisão de $a_s r_t$ por b e t é resto, lembrando que todos esses algarismos são inteiros. Vamos supor *que* $a_s r_t > b$, temos: $a_s r_t = qb + t$, e, portanto $a_s r_t\, b^{r+s} = (qb + t) . b^{r+s} = qb^{r+s+1} + tb^{r+s}$, onde q e t são inteiros positivos e menores que b.

Exemplo: Vamos multiplicar 127 por 15. Temos que considerar que 127 multiplicado por 15 pode ser escrito da forma:

$(1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 7) \times (1 \times 10 + 5) =$

$1 \times 10^3 +5 \times 10^2 + 2 \times 10^2 + 10 \times 10 + 7 \times 10 + 35 =$

$1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10 +35.$

DIVISÃO - Para efetuarmos uma divisão, o processo é idêntico em qualquer base. Assim, vamos ficar restrito a base 10, enunciando e demonstrando o Teorema da Divisão Euclidiana.

TEOREMA DA DIVISÃO EUCLIDIANA: Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = a.q + r$, com $r < a$.

Demonstração: Supondo sem perda de generalidade que b > a e tomando números sequenciais da forma R: (b, b – a, b – 2a,..., b – na,...), temos pelo princípio da Boa Ordem, dentro do conjunto R um menor elemento r = b – q.a. Para provar que r < a temos pelo critério de divisibilidade que se $a \mid b$, então r = 0 e termina a demonstração, pois 0 é menor número natural. Mas, se a não divide b, então r $\neq$ a, e temos que mostrar que não encontraremos r > a. De fato, pois se isto acontecesse, encontraríamos um número natural x < r tal que r = x + a. Logo, sendo r = x + a = b – q.a teríamos x = b – (q+1).a $\in$ R, com x < r, o que é absurdo, pois r é o menor elemento de R. Portanto temos que b = a.q + r, com r < a.□

Unicidade: Sendo dois elementos distintos de R, temos que a diferença entre o maior e o menor desses elementos é no mínimo a. Logo, se r = b – qa e r’ = b – q’a, com r < r’< a, teríamos r’ – r $\geq$ a, consequentemente r’ $\geq$ r + a $\geq$ a, absurdo. Portanto r = r’ e q = q’.□

Exemplo: Na divisão de 123 por 10, temos: 123 = 10x12 + 3, onde 123 é o dividendo, 10 é o divisor, 12 é o quociente e 3 é o resto.

3.3 ALGUNS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE NO SISTEMA DECIMAL

De acordo com a definição abaixo sobre divisibilidade, temos:

Definição: *Sejam a e b dois inteiros, com a $\neq$ 0, diz-se que a divide b, se, e somente se, existe um inteiro q tal que b= a . q. Neste caso diz-se também que a é divisor de b e que b é múltiplo de a. Indicaremos por a / b o fato de a dividir b; e se a não dividir b, escrevemos $a \nmid b$.*

Exemplos: a) 3/ 15, pois ∃ 5 ∈ Z, tal que 3.5 =15;

b) 7/56, pois ∃ 8∈ Z, tal que 7.8 = 56;

c) $3\nmid 10$, pois não ∄ x ∈ Z, tal que 3.x = 10.

Existem alguns critérios de divisibilidades, os quais acabam sendo decorados no decorrer dos anos de estudo no ensino fundamental. Abaixo vamos lembrar algum deles, sem fazer alguma demonstração. Em sequência veremos alguns critérios não tradicionais, onde estes terão suas demonstrações elucidadas.

3.3.1 Critérios Tradicionais de Divisibilidade

DIVISIBILIDADE POR 2 - *Um número natural é divisível por 2 quando ele termina em 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8.*

Exemplo: 246 é divisível por 2, já que o algarismo da unidade é 6.

Exemplo: 137 não é divisível por 2, já que o algarismo da unidade é 7.

DIVISIBILIDADE POR 3 - *Um número é divisível por 3 quando a soma de todos seus algarismos for divisível por 3.*

Exemplo: 2031 é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é igual a 2+ 0+ 3+1=6, e como 6 é divisível por 3, então 2031 é divisível por 3.

DIVISIBILIDADE POR 4 - *Um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos for divisível por 4. (exceto o 8), ou quando terminar em dois zeros consecutivos.*

Exemplos: 600 é divisível por 4, pois termina em 0, e 0 é divisível por 4; 116 é divisível por 4, pois 16 é divisível por 4; 27570 não é divisível por 4, pois 70 não é divisível por 4.

DIVISIBILIDADE POR 5 - *Um número natural é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.*

Exemplos: 65 é divisível por 5, pois termina em 5; 1180 é divisível por 5, pois termina em 0; 39 não é divisível por 5, pois não termina em 0 nem em 5.

DIVISIBILIDADE POR 6 - *Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3 simultaneamente.*

Exemplos: 12 é divisível por 6, porque é divisível por 2, pois termina em 2 e, por 3, pois a soma 1+2 = 3 é divisível por 3; 5214 é divisível por 6, porque é divisível por 2, pois termina em 4 e por 3, pois a soma dos algarismos é 12, e 12 é divisível por 3.

DIVISIBILIDADE POR 7- *Nesse critério é necessário fazer algumas operações aritméticas para verificar divisibilidade. Segue as operações: Multiplique por 2 o último algarismo do número. Em seguida subtraia este valor do número inicial sem o último algarismo. Se o resultado for múltiplo de 7, dizemos que o número inicial é divisível por 7.*

Exemplos: 147: 7 = 21, pois 2. 7 = 14 e 14– 14 = 0; 56 : 7 = 8, pois 2. 6 = 12 e 5 – 12 = -7.

DIVISIBILIDADE POR 8 - *Um número é divisível por 8 quando termina com três zeros sequenciais, ou quando o número formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8.*

Exemplo: 7000 é divisível por 8, pois termina em 000; 56112 é divisível por 8, pois 112 é divisível por 8.

DIVISIBILIDADE POR 9 - *Um número é divisível por 9 quando a soma de todos os algarismos for divisível por 9.*

Exemplo: 189 é divisível por 9, pois 1 + 8 + 9 = 18 = 9 x 2.

4 AS OPERAÇÕES BÁSICAS NO SISTEMA DECIMAL

As quatro operações básicas do sistema decimal, soma, subtração, multiplicação divisão, e suas formas de aprendizagens, são temas de extrema importância no que diz respeito à aprendizagem de matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. Afirmamos isso, pois tais operações constam nos PCN de matemática e fazem parte de qualquer currículo educacional brasileiro. As metodologias desenvolvidas e resultados de aprendizagem, em relação a essas operações, também são objetos de preocupação, tanto é que, são mostradas em relatórios do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Os resultados de avaliações externas têm mostrado que os alunos adquirem apenas conhecimentos superficiais e insatisfatórios sobre matemática, apontando dificuldades para as operações aritméticas elementares. Esses modelos de avaliações citadas acima, não mostram de fato que os alunos não aprendem as operações de forma significativa, mas para quem se faz presente em sala de aula, acaba se posicionando nesse sentido, embasado em reportagens na TV, jornais e revistas que apontam tais déficits de aprendizagem. As avaliações do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) são realizadas a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento – Leitura, Matemática e Ciência, foram realizadas pela última vez em 2012, avaliando os conhecimentos da área de Matemática. O número de países participantes foi de 65, e somente sete tiveram desempenho pior do que o Brasil. É importante esclarecer que essa avaliação é aplicada a estudantes de 15 anos, perto de concluírem o ciclo básico de ensino, para analisar até que ponto os alunos aprenderam conceitos e habilidades consideradas "essenciais para a completa participação em sociedades modernas", segundo a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

Dentro do contexto nacional, as operações básicas e suas abordagens pedagógicas não estão atingindo um nível de aprendizagem esperada no final do ensino fundamental I e ensino fundamental II, como deveriam teoricamente ocorrer. De acordo com os PCN (1998), uma das possíveis explicações para este fato deve-se à falta de abordagem pedagógica adequada para gerar aprendizagem, consequentemente, os alunos não aprendem como deveriam. De acordo com Druck (2006), ex-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, a qualidade do ensino da Matemática atingiu, talvez, seu mais baixo nível na história educacional do país. Vários fatores nos levam a refletir porque isto ocorre no nosso sistema educacional, entre eles estão a descontextualização dos conteúdos abordados em matemática, formação deficitária dos professores e falta de formação continuada, desinteresse dos alunos pelo nosso modelo de ensino e, o que mais agrava, são as metodologias utilizadas em sala de aula, sempre prevalecendo o ensino de matemática na forma tradicional, onde a memorização prevalece no processo de ensino-aprendizagem, principalmente nas operações básicas desta disciplina, acarretando um baixo nível de formação profissional neste país.

Os pressupostos anteriores podem ser melhores compreendidos a partir de uma pesquisa elaborada pela Confederação Nacional da Indústria, que apresentou os seguintes dados: a engenharia é uma carreira em expansão e que tem muito mercado no Brasil, mas 60% dos estudantes que iniciam, acabam desistindo do curso e, um dos motivos é a falta de base em matemática. Ainda de acordo com a pesquisa, estudantes de engenharia também têm dificuldades com a matemática. Algumas falas evidenciam tal realidade. “Eu tive um pouco de dificuldade quando entrei no curso com cálculo”. Eu não sabia que era desse jeito e acabei me surpreendendo. Quando eu entrei, quando sai do colegial, eu não esperava que tivesse tanta dificuldade, porque eu tinha notas boas em matemática no colegial. “Eu achei que seria mais fácil e que não teria tantas coisas complexas”. Tal realidade, se refletida a médio e longo prazo pode significar não só um desastre na estrutura do ensino desta disciplina, mas na economia e avanço tecnológico do país.

Segundo Guilherme (1983), a Matemática vem sendo ensinada através de uma série de exercícios artificiais e mecânicos, e o papel atribuído ao professor é o de transmissor de conteúdos, que acredita, de forma errônea, que o aluno seja capaz de desenvolver uma aprendizagem significativa, chegando à abstração em várias situações-problema, contudo sabemos que tal forma metodológica de trabalho é insuficiente para chegar a essa forma de aprendizagem. Mudar esta situação é um desafio, já que de acordo com D’Ambrósio (1986) é muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas da época, de uma realidade, de percepção, necessidade e urgências que nos são estranhas. Podemos estender esse pensamento para as formas como são ensinadas as quatro operações básicas aos alunos, baseadas em repetição de técnicas que não exploram o real sentido de manipulação e interpretação das operações numéricas e, sendo descartada a ordem do sistema decimal. Torna-se mais grave o ensino das operações quando é feita sem o uso de materiais concretos.

Sobre o ensino da aritmética pela compreensão, temos:

> Se a função da sala de aula é ser um lugar onde as crianças trabalham com exemplos em um exercício intensivo, para resolver problemas isolados, os materiais necessários são: papel, lápis e livros. A sala de aula neste caso é um lugar onde as crianças aprendem a fazer as operações mecanicamente, nada mais que isso. Se por outro lado, a sala de aula for um laboratório de aprendizagem onde as crianças vão experimentar descobrir significados e processos para essas experiências ou atividades de aprendizagem, materiais adequados são necessários (GROSSNICKLE E BRUECKNER, 1965, p. 87).

Para entendermos mais precisamente essas reflexões e críticas feitas anteriormente, apresentaremos no decorrer deste capítulo, resultados de uma pesquisa teórica, aplicada a alunos dos 4º e 5º ano tentando abordar se realmente entendem ordem das quatro operações básicas do sistema decimal, e fazem interpretações a situações-problemas que requerem tais operações.

4.1 PESQUISA

Esta pesquisa tem como grande enfoque, diagnosticar os motivos que fazem os alunos do ensino fundamental terem dificuldades em resolver exercícios e, principalmente problemas relacionados com as quatro operações básicas dentro dos números naturais.

Temos por objetivos de pesquisa:

- Verificar se os alunos compreendem a ordem do sistema posicional decimal;
- Analisar se os alunos interpretam as operações básicas associadas às situações problemas;
- Compreender se as metodologias trabalhadas pelos professores, fazem uso de materiais concretos, desenvolvendo naturalmente o processo de composição e decomposição dos números na base 10.

Esta pesquisa tem variável qualitativa, tendo como propósito analisar as metodologias e resultados das atividades propostas, baseada no conhecimento do sistema numérico decimal. Através dos pensamentos de Borba (2004), temos que a pesquisa qualitativa deve ter, por trás, uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos, e interpretações. Dessa forma, foram elaboradas algumas atividades envolvendo as quatro operações básicas, dando ênfase à possibilidade de os alunos demonstrarem que aprenderam a ordem do sistema decimal na resolução de exercícios e problemas que envolvam as quatro operações, utilizando material concreto e até mesmo se conseguem interpretar situações problemas com essa mesma teoria. Vale ressaltar que foram alunos do 4º e 5º do ensino fundamental que responderam as atividades, em dois momentos distintos, sendo que no primeiro responderam as atividades de soma e subtração, para, em outro momento, responderem as atividades relacionadas a multiplicação e divisão. Para os professores, foi apresentado um questionário para demonstrarem como trabalham as operações básicas dentro de uma sala de aula. As atividades seguem em anexo.

Como os alunos de nossas salas de aulas apresentam de uma forma geral, rendimento insatisfatório em relação aos cálculos das quatro operações, a análise de dados foi feita através do entendimento do sistema numérico decimal, possíveis metodologias e materiais concretos trabalhados.

> Analisar os dados qualitativos significa “trabalhar” todo o material obtido durante a pesquisa [...] a tarefa de análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado (LUDKE,1986, p. 45).

A pesquisa ocorreu em duas escolas: Colégio Jesus Adolescente, localizada no município de Catanduva-SP e Escola Municipal José Severino de Almeida, localizada no município de Severínia-SP. Vale ressaltar que a pesquisa ocorreu em uma escola particular e em uma escola pública, contextos que têm suas práticas comparadas frequentemente. Em cada uma das escolas foram selecionados 20 alunos, sendo 10 do 4º e 10 do 5º ano do ensino fundamental, ou seja, tivemos 40 alunos analisados. A escolha desses alunos foi feita de modo aleatório, pois as professoras sortearam os alunos pelo número de chamada. Vale ressaltar que fatores externos que influenciam a aprendizagem, como condições socioeconômicas dos alunos, participação efetiva familiar e desenvolvimento cognitivo, foram desconsiderados nesta pesquisa, mesmo sendo preponderantes para qualquer tipo de análise de rendimento escolar. Vale aqui analisar, as falhas apresentadas no processo de ensino-aprendizagem nas operações matemáticas básicas.

4.1.1 Referencial Teórico

A Lei de nº 9.394 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 20 de dezembro de 1996 (LDB 9.394/96), estabelece a finalidade da educação no Brasil, sua forma de organização, quais são os órgãos administrativos responsáveis, quais são os níveis e modalidades de ensino, entre outros aspectos em que se define e se regulariza o sistema de educação brasileiro com base nos princípios presentes na Constituição. O ensino fundamental é uma das etapas da Educação Básica no Brasil, com duração de nove anos. É obrigatório aos municípios e estados garantir a matrícula a todas as crianças de seis a quatorze anos de idades, e aos pais matricularem seus filhos, respondendo judicialmente caso não o façam.

Atualmente, o Ensino Fundamental está dividido em duas etapas, os anos iniciais, do 1º ao 5º ano, e os anos finais, do 6º ao 9º ano. Em 2014, a rede estadual de São Paulo por uma mudança no sistema de progressão continuada, e essa fase da escolaridade passou a ser dividida em três etapas: do 1ª ao 3º ano, do 4º ao 6º ano e do 7º ao 9º ano, visando melhorar a qualidade do ensino do estado, através de reprovações e recuperações contínuas. Uma das disciplinas obrigatórias destas séries é a matemática.

> A relação aprender e ensinar matemática no ensino fundamental é "um estudo de fenômenos relacionados ao ensino e a aprendizagem da Matemática, que pressupõe a análise de variáveis envolvidas nesse processo de aluno, professor e o saber matemático, assim como das relações entre elas". (PCN, 2000, p. 37).

E ainda,

> Identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; Conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; Ter clareza se suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções. (PCN, 2000, p. 37).

Principalmente na primeira etapa do ensino fundamental, é fato que os alunos necessitam aprender matemática de forma lúdica, concreta e associando qualquer teoria a capacidade de resolver problemas cotidianos, sendo função das escolas e educadores organizar seu trabalho pedagógico voltado às reais necessidades dos alunos. Com respeito ao papel da matemática no ensino fundamental, temos:

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimento em outras áreas curriculares (PCN, 2000, p. 29).

Na aprendizagem das quatro operações matemáticas, associar os números a problemas de comparação e quantificação é essencial, ou seja, a interpretação dos conceitos é primordial. Moreira e Masini (1982) afirmam que o conceito é formado na criança na época da pré-escola, sendo um tipo de aprendizagem por descoberta, já a assimilação de conceitos é característica das crianças mais velhas, assim como os adultos, que adquirem os novos conceitos pela recepção dos atributos criteriais e pela relação destes com as ideias importantes estabelecidas na estrutura cognitiva do aluno. Vale ressaltar ainda no trabalho pedagógico, a importância para a metodologia desenvolvida, pois nesta está implícito conceitos importantes para gerar aprendizagem, entre eles a motivação. Seria egoísmo impor uma forma única de trabalhar, logo devem ser levadas em consideração as reais necessidades dos alunos. Para Huete e Bravo (2006), levando em conta pressupostos piagetianos, o aluno constrói suas noções matemáticas, tornando-as lógicas em situações concretas que se apresentem. Trabalhar com alunos motivados é base para garantir aprendizagem significativa e, estendendo esse pensamento às quatro operações básicas, o importante é que um aluno entenda quais foram os meios e relações utilizadas para chegar à resposta correta, enfim, que entenda a ordem do sistema numérico decimal.

Em relação às quatro operações básicas do sistema decimal, os PCNs, fazem o seguinte comentário em relação aos significados das operações de soma e subtração:

> O desenvolvimento da investigação na área da Didática da Matemática traz novas referências para o tratamento das operações. Entre elas, encontram-se as que apontam os problemas aditivos e subtrativos como aspecto inicial a ser trabalhado na escola, concomitantemente ao trabalho de construção do significado dos números (PCN, 2000, p. 104).

Para a multiplicação, os PCN comentam:

> Uma abordagem freqüente no trabalho da multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição. Nesse caso, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são iguais. Por exemplo: tenho que tomar 4 comprimidos por dia, durante 5 dias. Quantos comprimidos preciso tomar? 5 x 4, onde o 4 é o número que se repete e o 5 como o número que indica a quantidade de repetições, ou seja, 5 x 4 = 4 + 4 + + 4 + 4 (PCN, 2000, p. 108).

Nessas expectativas desenvolveu-se a pesquisa, onde os resultados analisados e observados seguem no próximo tópico.

4.2 RESULTADOS E REFLEXÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Para a realização das atividades propostas, partiu-se do pressuposto de que os alunos tinham aprendido a manipular as quatro operações básicas, porém, suspeitando se aprenderam de forma significativa a ordem do sistema decimal. As atividades propostas ocorreram em 4 horas aulas, sendo de 50 minutos cada, divididas entre 2 aulas para soma e subtração e 2 aulas para multiplicação e divisão. As atividades de pesquisa foram aplicadas de forma individual e tiveram, para os alunos, caráter de atividade extracurricular.

No primeiro encontro, as professoras das turmas selecionaram os alunos, que foram levados para uma sala, para realizarem as atividades propostas sobre soma e subtração. No segundo encontro, o procedimento foi idêntico, sendo as atividades de multiplicação e divisão aplicadas. Todos os alunos relataram oralmente terem aprendido essas duas operações. Conforme anexo A, essas atividades foram divididas em três segmentos idealizadores. São eles: compressão de decomposição dos números no sistema posicional decimal; resolução de exercícios; contextualização das operações de soma e subtração em situações-problemas. Tivemos o material dourado como auxiliador das atividades, o qual foi desconsiderado pela maioria dos alunos no início. Posteriormente, ao realizar as atividades, percebendo possíveis erros, começaram a ter contato com o material, sendo este facilitador da resolução das atividades.

Analisando conforme os três segmentos idealizadores, faz-se ressaltar que as questões número 1 das duas atividades tem caráter de análise de decomposição do sistema decimal. São as questões abaixo que seguem e, logo em seguida análises destas.

QUESTÕES 1)

1) Resolva as seguintes operações abaixo, através de **desenhos**:

a) 17 + 8 = b) 15 + 12 + 13= c) 34 - 16 = d) 13 + 19 – 14 =

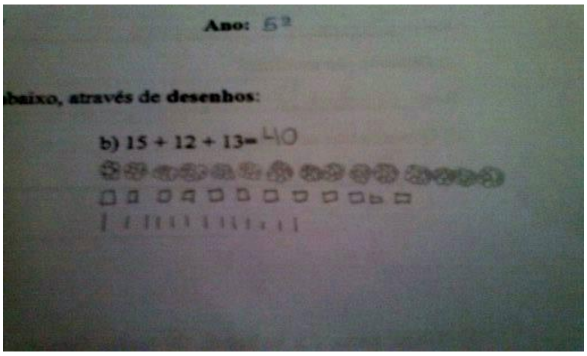
1) Resolva através de **desenhos** cada uma das multiplicações abaixo:

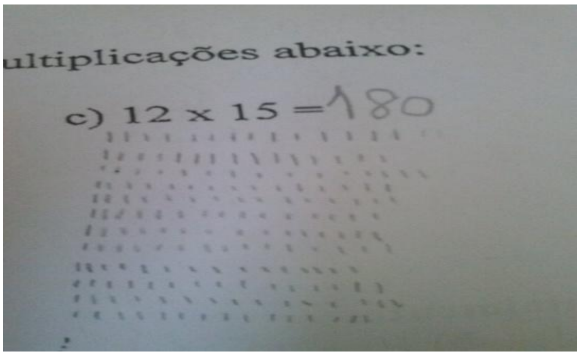
a) 3x4 = b) 5 x 14 = c) 12 x 15 =

1) Calcule as divisões abaixo através de **desenhos**:

a) 12: 4 = b) 17: 3= c) 126 : 6 = d) 180 : 15 =

Esse modelo de atividade mostrou que nenhum aluno, ou seja, 0% dos alunos usou a decomposição do sistema numérico decimal. Todos eles usaram para resolver as somas, subtrações e multiplicações o campo aditivo, herança do sistema numérico egípcio, entre outros da antiguidade. Vale ressaltar que 12 x 15 = 180, tiveram alguns alunos representando com “traços” e, estes contados todas às vezes necessárias. Pelo fato de ser dificultoso tal modo, outros deixaram a ideia de lado, e armaram e efetuaram as operações. Tivemos 90% dos alunos acertaram o resultado, mas como foi dito, não entenderam a decomposição dos números no sistema numérico decimal. Abaixo seguem algumas figuras.

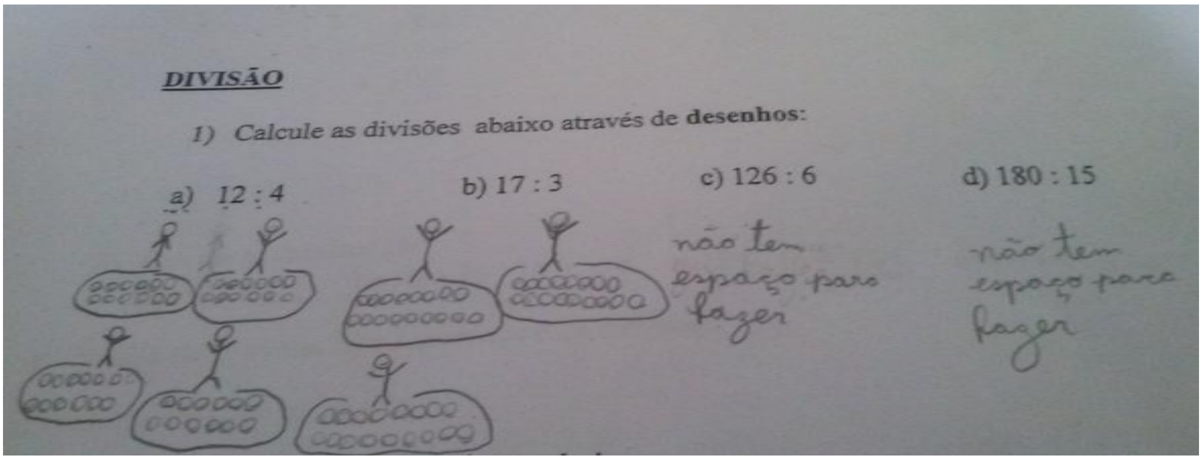




Figuras 14- Fotografias das resoluções de adição e multiplicação por desenho

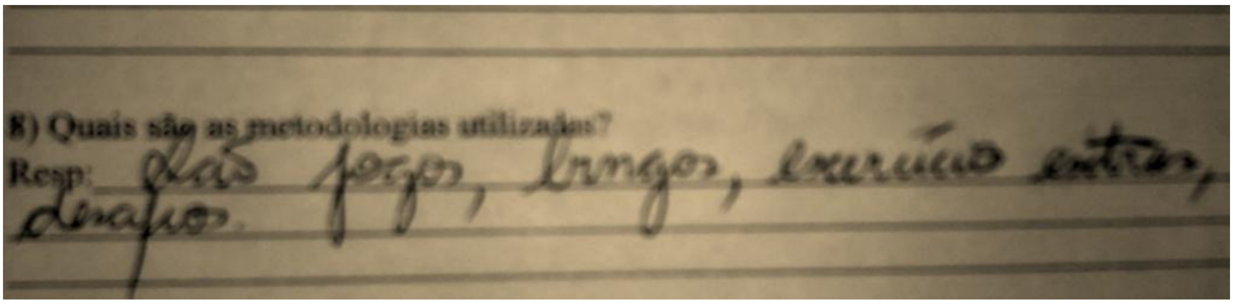
Na atividade da divisão, apenas 10% dos alunos tentaram resolver por desenhos, conseguindo resolver apenas com dividendos “pequenos”. Para divisões com dividendos “grandes”, alegaram não ter espaço ou, em sua maioria armaram e efetuaram as divisões; 80% das divisões desta atividade tiveram resultados certos, porém alguns erros de cálculos foram apresentados. Segue ilustração.

Figura 15 – Fotografia de resoluções de divisão por desenho



Este modelo de questão permitiu concluir, que realmente os alunos não desenvolvem naturalmente a questão da ordem do sistema decimal. Dessa forma, vale questionar os motivos que fazem isso acontecer. De início, devemos pensar no papel do professor, pois é este que elabora a forma metodológica e atividades a serem desenvolvidas. Percebemos que em sua maioria, os professores trabalham com os “decorebas” na arte de desenvolver as quatro operações básicas, mesmo afirmando que exploram a composição e decomposição do sistema decimal e trabalham com materiais concretos no desenvolvimento do mesmo. De acordo com o anexo A, aplicado aos professores, percebemos respostas que contrariam a afirmação de trabalhar a questão da composição e decomposição. Veja abaixo uma resposta, em que a professora não explica a metodologia trabalhada, mas atividades propostas.

Figura 16 – Fotografia que mostra a confusão entre metodologias e atividades



De acordo com D’Ambrósio (2005), é necessário que o professor que ensina matemática, ouça a voz do aluno, de modo que ele, professor, possa construir um modelo da matemática do aluno. Para isso, deve ter em seu trabalho pedagógico algo mais que operacionalização das quatro operações. D’Ambrósio usa uma metáfora para descrever a ação do professor, como sendo o “desempacotador”, no qual parte do princípio de entender o porque os alunos erram algumas atividades e acertam outras, mesmo com raciocínio análogo. O professor deve ter conhecimento profundo necessário para desempacotar a matemática formal e reconstruir, ou enriquecer, seu repertório de soluções, permitindo os alunos aprenderem com seus erros e avançarem na interpretação das atividades propostas.

As questões de número 2 tiveram como objetivo analisar se os alunos sabem resolver exercícios que privilegia a ordem do sistema numérico decimal, sem contextualização. Foram às questões abaixo aplicadas e comentários dos resultados, seguem abaixo.

2) Arme e efetue cada uma das operações abaixo:

a) 23 + 9 = b) 120 + 230 + 150 = c) 62 – 56 = d) 1234 – 39 =

2) Arme e efetue as multiplicações abaixo:

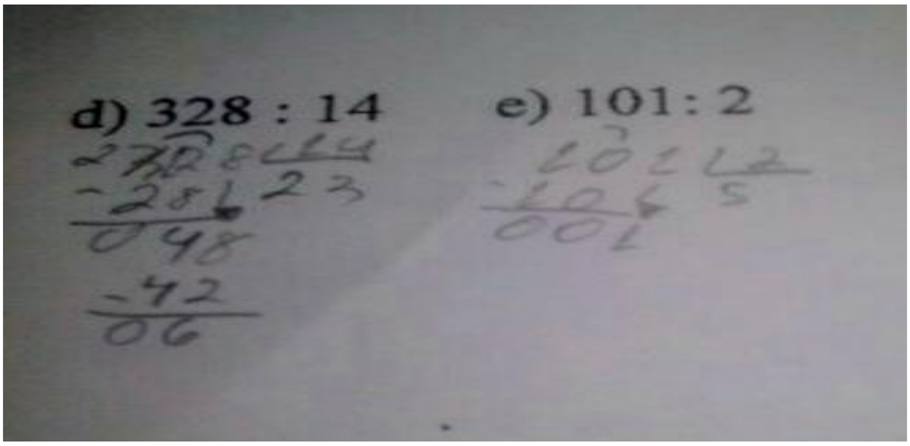
a) 8 x 15 = b) 12 x 38 = c) 15 x 239 =

2) Arme e efetue as divisões abaixo:

a) 32: 5 = b) 120 : 20 = c) 13 : 2 = d) 328 : 14 = e) 101: 2=

A ideia de apresentar esses modelos de atividades é comprovar que nossos alunos estão acostumados a resolver exercícios de forma operacional, metódica, descontextualizados e com “decorebas” de expressões da forma: “pedir emprestado”, “vai um”, “escorrega um”, entre outros. Realmente isso se comprovou nas atividades propostas, onde o índice de acertos desses exercícios é de 85%, com pequenos erros devidos aos decorebas. O que mais chama a atenção é para a divisão, pois de acordo com três professoras, elas relataram que a operação mais difícil é a divisão, pelo próprio método e principalmente pelo fato de crianças dessa idade não saberem partilhar seus objetos. Segundo o doutor em psicologia e professor da USP, Christian Ingo Lenz Dunker compartilhar não é algo natural, mas que precisamos aprender e tomar gosto. Desse modo, o entendimento do conceito de propriedade é uma grande conquista para a criança. Abaixo uma conta apresentada por 80% dos alunos, de forma errada, onde 101 : 2 disseram ser igual 5, com resto 1, em decorrência de acharem que o 1 é resto. Veja:

Figura 17 – Fotografia de erro cometido no algoritmo da divisão



Tirando o egocentrismo das crianças ainda nessa faixa etária, as dificuldades maiores com a divisão começam na estrutura da “conta armada”, que não evidencia duas operações auxiliares, a divisão e a subtração. Além disso, não temos uma análise detalhada dos números envolvidos, deixando um olhar superficial para os algarismos envolvidos em cada etapa do processo. Para diminuir a dificuldade de alunos em dividir é aconselhável trabalhar com o algoritmo da divisão euclidiana e analisar possíveis restos através da ordem do sistema decimal. Veja uma sugestão de atividade similar à apresentada, mostrada pela revista Nova Escola (disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/roteiro-didatico-sistema-numeracao-decimal-1-2-3-anos).

Exemplo: Existe alguma divisão em que o divisor é 4 e o quociente é 10. Tem somente uma situação? Ou mais? Para responder, os alunos precisam levar em conta que o resto só pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3, pois tem de ser menor que o divisor. Levando isso em conta, as possibilidades são cinco (D = 4 x 12 + 0 = 40; D = 4 x 10 + 1 = 41; D = 4 x 10 + 2 = 42; D = 4 x 10 + 3 = 43).

As questões de número 3 aplicadas nas atividades seguem abaixo. Essas questões foram elaboradas com o propósito de verificar se sabem decompor e ordenar os números no sistema decimal.

3) Calcule mentalmente:

a) 33 + 28 =   b) 10 + 70 - 20 =   c) 135 - 46 =   d) 8 – 12=

3) Calcule mentalmente:

a) 11 x 3 =   b) 9 x 21=   c) 14 x 17 =

Essas questões apresentaram divergências em relação a cumprir o que se pedia no enunciado, já que o calculo mental foi feito apenas nas somas/subtrações; nas multiplicações 62% dos alunos deixaram a conta armada para resolução, 20% deixaram em branco e apenas 18% tentaram efetuar, mesmo com 35% de erros. Isto mais uma vez comprova que o campo aditivo desenvolvido em alguns sistemas decimais prevalece na mente humana, permitindo resolver somas/subtrações mentalmente, porém a ordem e decomposição dos números que facilitam os cálculos não é um processo natural na mente de nossos alunos.

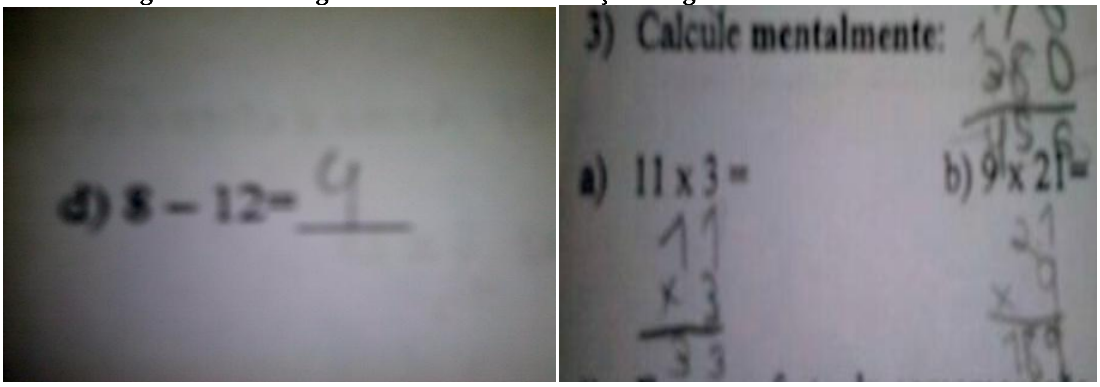
A abordagem do calculo mental, ou na realidade a ausência deste, está relacionada ao fato de termos hoje facilidade de acesso à tecnologia. Praticamente todas as crianças que estão na escola têm acesso ao computador, calculadoras, celulares, programados para facilitar nossa vida, sendo uma destas, o cálculo. Saber tabuadas é essencial para realizar cálculos mentais e, pesquisas mostram que nossas crianças não sabem como deveriam essa forma de calculo. Quando dizemos saber tabuada, é ir além da memorização. Compreender e naturalmente transformar 2 x 3 = 3 + 3 = 2 + 2+ 2 = 6 no campo aditivo é fundamental. A noção de número e a ordem e composição/decomposição do sistema decimal deve ser compreendido. Dessa forma:

> Pesquisas realizadas por Piaget e seus colaboradores levaram-no a afirmar que os conceitos matemáticos não derivam dos materiais em si, mas de uma apreciação do significado das operações realizadas com eles. Para ele os conceitos são formados a partir de manipulação de materiais, mas são independentes do suporte concreto utilizado. Quando a criança realmente compreende o significado matemático de suas ações, passa a poder realizá- las em sua mente através de representações mentais que se referem aos objetos que as motivaram, mas se diferenciam deles, pela sua mobilidade e reversibilidade mentais que caracterizam o verdadeiro ato de pensar (AZEVEDO, 1999 p. 41).

Elaborar estratégias de aprendizagem com material concreto, como tampinhas, jogos, entre outros, é de fato facilitador de entendimento da tabuada. O professor também não deve fornecer resultados prontos e praticamente instantâneos. Baseado nessas ideias, nossos alunos desenvolveriam estratégias de calculo mental de forma mais eficaz e seriam mais motivados a avançar nos níveis de dificuldades dos exercícios. Outra curiosidade é que 100% dos alunos não têm noção de resultados negativos, pois a operação de 8 – 12 = 4 , foi respondida erroneamente por 60% das crianças; as outras deixaram a atividade em branco.

Veja as figuras abaixo que mostram as contas armadas na multiplicação e resposta da operação de 8 – 12 = 4.

Figuras 18 – Fotografias de erro na subtração e algoritmo no calculo mental



As questões das atividades 4) e 5) trabalham com resolução de problemas relacionadas as quatro operações. Talvez seja a metodologia mais interessante para auxiliar na aprendizagem das operações básicas matemáticas, pois permite ao aluno ler, interpretar, relacionar as operações a serem desenvolvidas e calcular. É evidente, que deve ser estruturada tal metodologia, pois caso contrário não vai gerar aprendizagem. Se um professor quer usar essa metodologia adequadamente, deve ficar claro a seguinte ideia abaixo:

> [...] incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporciona-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Quando o professor tenciona desenvolver em seus alunos as operações mentais correspondentes á indagações e sugestões de nossa lista, ele as apresenta tantas vezes quanto puder fazer com naturalidade. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio às mesmas indagações que utiliza para ajudar seus alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquira algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer (POLYA, 1978, p. 3).

No próximo tópico daremos ênfase a aplicação da metodologia de resolução de problemas de acordo com os pensamentos de Polya. Abaixo seguem as atividades apresentadas na pesquisa e comentários.

Problemas de soma/sutração

4) Na sala de Giovana há 17 meninos e 23 meninas.

a) Quantas crianças há na sala?

Resp:____

b) E na sua sala, quantos são meninos?

Resp:____

c) Quantas são meninas?

Resp:____

d) Quantos são ao todo?

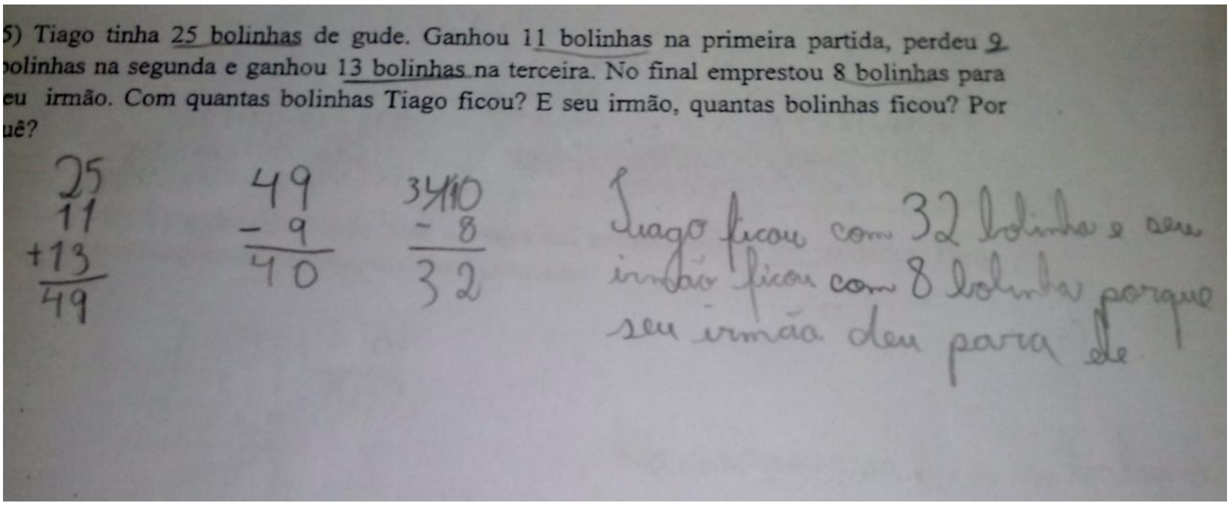
Resp:____

5) Tiago tinha 25 bolinhas de gude. Ganhou 11 bolinhas na primeira partida, perdeu 9 bolinhas na segunda e ganhou 13 bolinhas na terceira. No final emprestou 8 bolinhas para seu irmão. Com quantas bolinhas Tiago ficou? E seu irmão, quantas bolinhas ficou? Por quê?

O primeiro problema explorou principalmente a questão da interpretação, onde os únicos cálculos são as soma de 23 + 17 e soma dos alunos de suas respectivas salas. Apenas 1 aluno, ou seja, 2,5% fez soma errada dizendo que 23 + 17 = 30.

O segundo problema foi curioso, pois 90% dos alunos acertaram a quantidade de figurinhas que Tiago ficou, porém a segunda pergunta, que faz parte de um problemas sem solução, todos concluíram que o irmão de Tiago, chegou a um total de oito figurinhas, pelo fato de ter ganhado essa quantidade do irmão, desprezando o fato de poder ter uma quantidade de figurinhas no início. Isso ocorre pelo costume de um problema ter sempre resposta, de acordo com os problemas trabalhados nas escolas. Os problemas sem solução, de acordo com Smole (2001), rompem com a concepção de que os dados apresentados devem ser usados na sua resolução e de que todo problema tem solução. Além disso, ajudar a desenvolver no aluno a habilidade de aprender a duvidar, a qual faz parte do pensamento crítico. Veja exemplo na figura abaixo:

Figura 19 – Fotografia de problema que envolve soma e subtração



Problemas de multiplicação/divisão

4) Em uma festa de comemoração de copa do mundo, uma professora comprou 3 dúzias de azuis, 2 dezenas de balões amarelo e 2 dúzias de balões verdes e 5 balões brancos. Estavam furados 23 balões. Responda:

a) Quantos são os balões azuis?
Resp: ____

b) Quantos são os balões amarelos?
Resp: ____

c) Quantos são os balões verdes? Quantos balões são brancos?
Resp: ____

d) Quantos balões ficaram vazios?

Resp:____

e) Quantos balões havia no total?

Resp: ____

5) Carlos está alugando a sua casa: “Casa com 3 quartos e demais dependências, o aluguel mensal é de R$720,00”. Sendo assim:

a) Se a duração do contrato de aluguel é de 6 meses, quanto ela receberá de aluguel?

Resp: ____

b) E se for de 12 meses?
Resp: ____

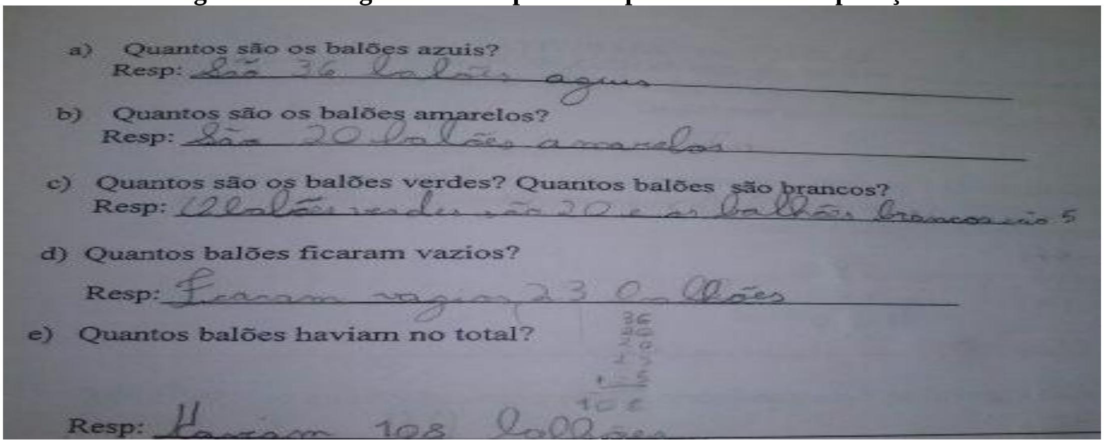
c) Se alugarem por 4 meses, quanto o inquilino pagará por dia?
Resp:____

d) E se alugarem por quatro dias, quanto o inquilino pagará (1mês = 30 dias)?

Resp: ____

No primeiro problema, chama a atenção o fato da falta de interpretação. Alguns erros apareceram, entre eles: 10% dos alunos demonstram não conhecer conceitos de dezena ou dúzia, achando que dezena representa o dobro. Outro erro mais chamativo foi que 75% dos alunos responderam que a soma total dos balões eram de 108, pois somaram todos com os vazios, esquecendo que estes já faziam parte do todo. Outros 22,5% responderam que tinham 62 balões, descontando os vazios de forma errada. Apenas 2,5% responderam de forma correta, ou seja, 1 aluno, que o total de balões é de 85. Vale ressaltar a falta de interpretação neste problema.

Figura 20 – Fotografia das respostas do problema de multiplicação



No segundo problema, apenas 17,5% dos alunos conseguiram acertar todos os itens. Foram duas fontes de erros, interpretação e cálculo. A parte de falta de interpretação se deve ao fato confundirem a unidade de medida de tempo, pois quando os itens eram em meses (a) e (b) tivemos 75% de acertos e, quando os itens eram em dias (c) e (d), tivemos apenas 7,5% de acerto. Outro fator a ser considerado na parte de cálculos, é o fato de os alunos terem muita dificuldade em efetuar o algoritmo da divisão e até mesmo multiplicações quando o número refere-se à variável dinheiro, pois a vírgula atrapalha a estrutura da conta armada.

Figura 21 – Fotografia das respostas do problema de divisão

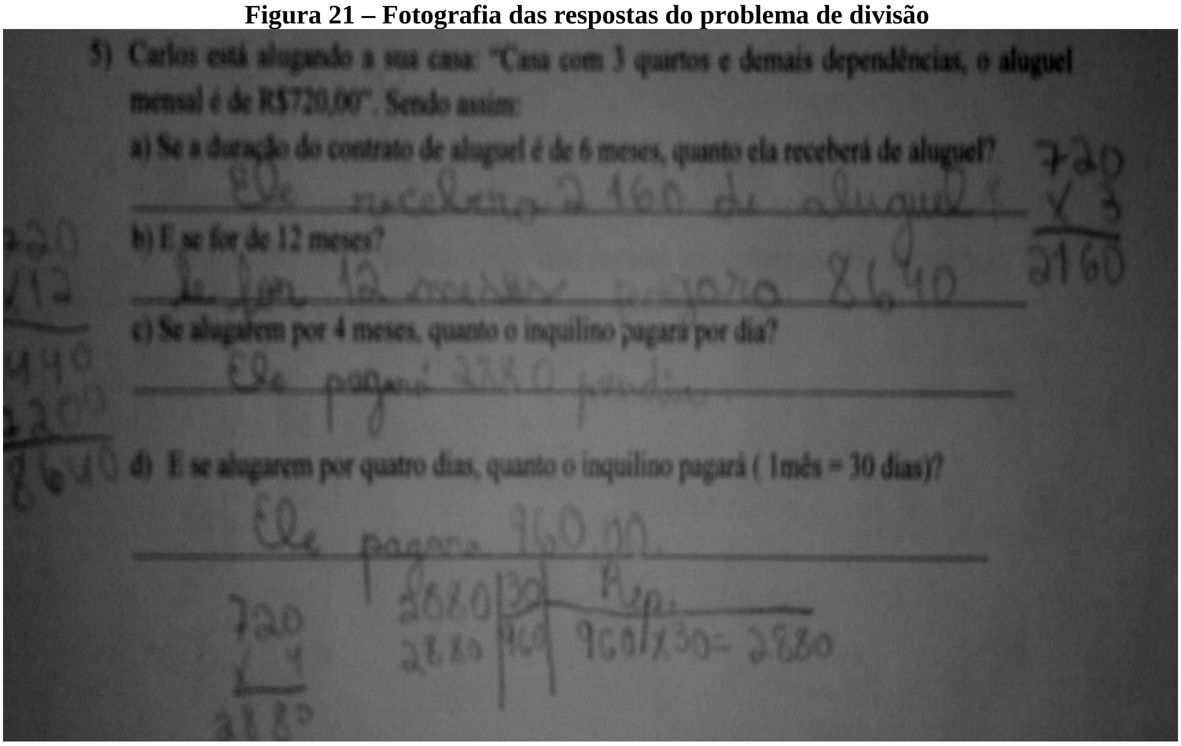
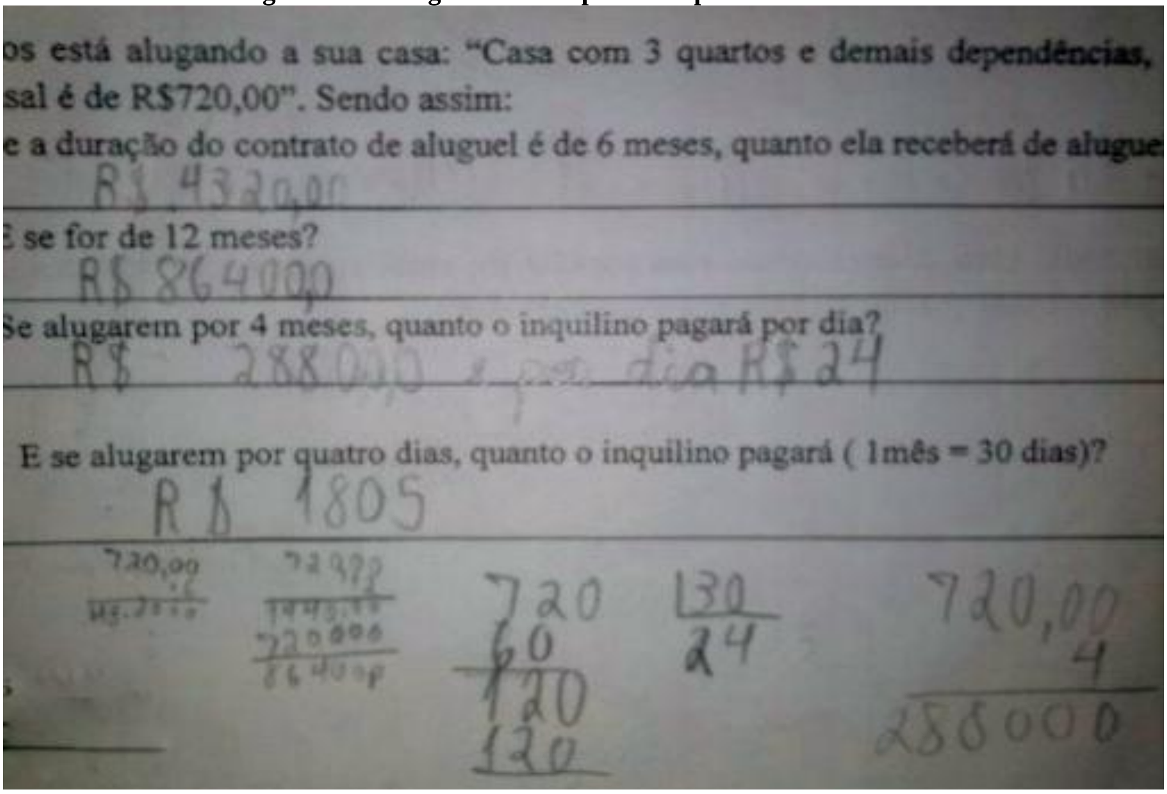


Figura 22 – Fotografia das respostas do problema de divisão



Problemas de multiplicação/divisão

4) Um auditório possui 23 filas com 25 assentos em cada uma delas, e uma fila com 20 assentos. Para um espetáculo nesse auditório já foram vendidos 420 ingressos.

a) Quantos ingressos ainda estão à venda?
Resp:____

b) Quanto custa cada ingresso se, com o auditório lotado a arrecadação foi de R$5.950,00?

Resp:____

5) (SAEB 2001) Uma doceira vende suas cocadas em embalagens de 24 unidades. Para vender 2448 cocadas quantas embalagens são necessárias?

No primeiro problemas, tivemos 50% de alunos que erraram de alguma forma. Os erros mais comuns apresentados foi esquecer-se de acrescentar a fileira com 20 assentos e principalmente, o fato de confundir o posicionamento da vírgula no algoritmo da divisão. Vale ressaltar mais uma vez, a divisão deve ter o conceito de número bem concebido e, contextualizar tal operação para com o problema trabalhado, evitando assim números absurdos nas respostas. Veja as ilustrações para esses dois tipos de erros.

Figura 23 – Fotografia das respostas do problema de multiplicação/divisão

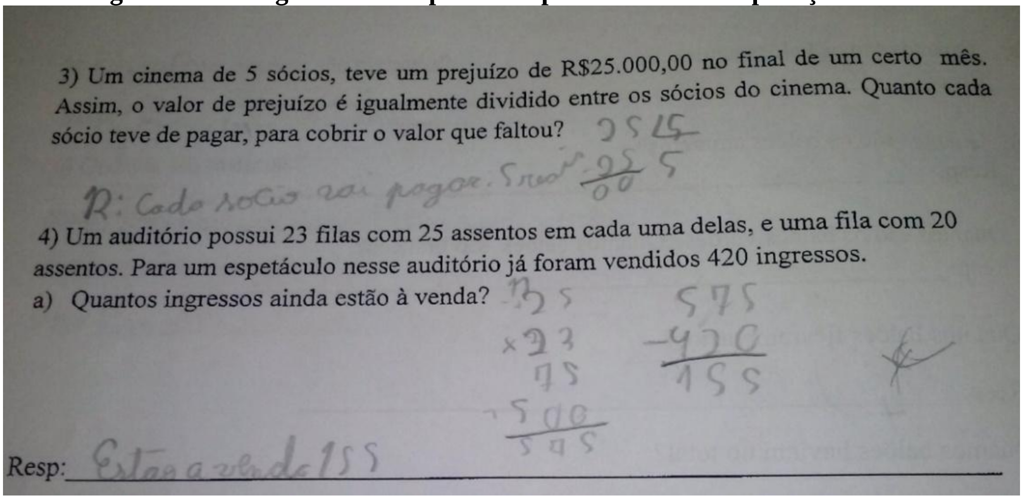
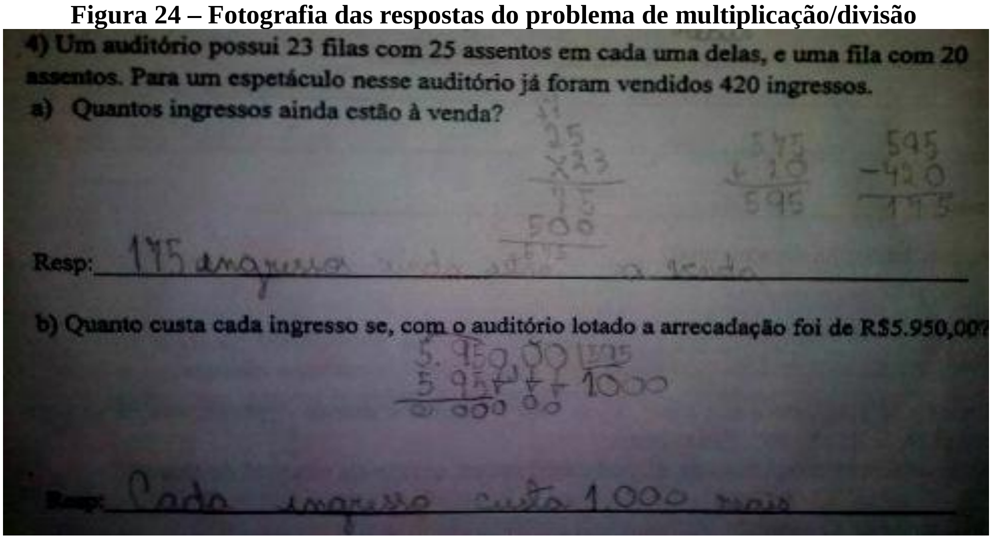
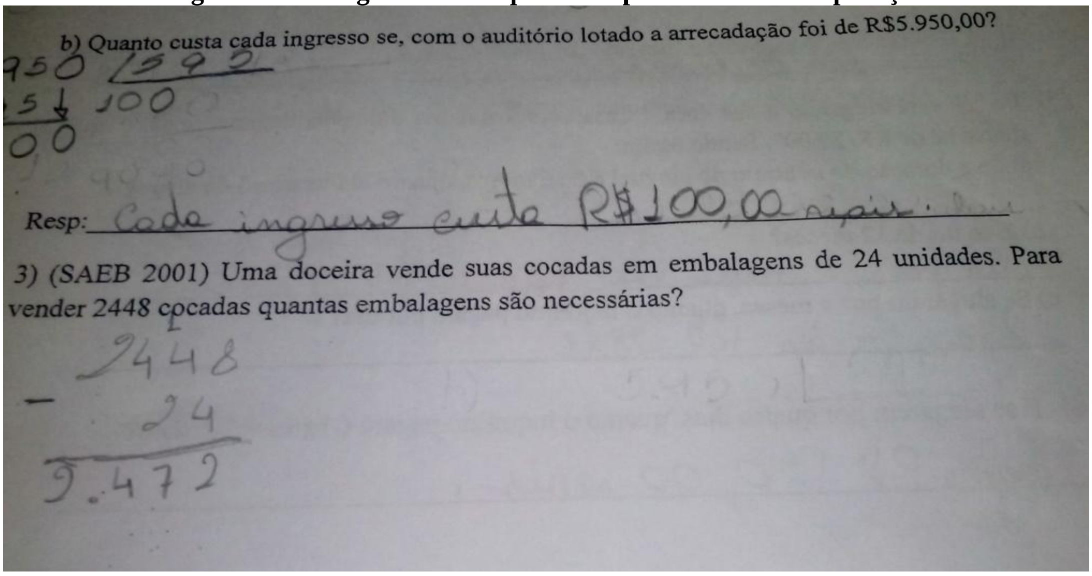


Figura 24 – Fotografia das respostas do problema de multiplicação/divisão



No segundo problema, tivemos 32,5% dos alunos errando um problema de interpretação simples e pouca dificuldade em efetuar o algoritmo da divisão. Essa quantidade de erro ocorreu por apenas um motivo, falta de interpretação. Os alunos não souberam qual operação efetuar, já que verbos rotineiros (ganhar/perder/dividir) em problemas não apareceram, dificultando associação da operação ao problema. Isso reflete mais uma vez que o problema é a interpretação. Veja ilustração:

Figura 25 – Fotografia das respostas do problema de multiplicação/divisão



Na metodologia de resolução de problemas, devemos favorecer a interpretação, trabalhando com problemas contextualizados, bem como quantificar a realidade, diminuindo as “decorebas” na resolução das operações básicas matemáticas, diminuindo os modelos-padrões de situações aditivas e/ou subtrativas e, principalmente no algoritmo da divisão.

Para terminar a análise de dados, é importante listar os principais erros encontrados, quando se desenvolvem as operações básicas. Veja:

Soma: erros de contagem; aplicação incorreta no desenvolvimento do algoritmo; uso de operação inadequada; cálculo mental; falta de resposta em situações problemas.

Subtração: procedimento errado na aplicação do algoritmo; erros de contagem; erro de operação; colocação indevida de ponto e vírgula; cálculo mental reprodução do minuendo ou subtraendo no resultado; ausência de respostas nos problemas propostos.

Multiplicação: erros de tabuada; falta de conhecimento do algoritmo; esquecimento do “vai um”; cálculo mental; falta de respostas aos problemas.

Divisão: reprodução errada da operação proposta; falta de conhecimento do algoritmo; erros de tabuada; desistência; cálculo mental; erro de subtração durante o cálculo; ausência de respostas nos problemas propostos.

Temos comprovado que uma grande quantidade de nossos alunos, não compreendem a ordem do sistema decimal. Muitos erros são cometidos, principalmente pelas metodologias ineficazes que os professores adotam, baseadas em estratégicas mecânicas e descontextualizadas. Falta de leitura e interpretação, também é outro fator agravante. Dessa forma, abaixo segue sugestão de como trabalhar com o sistema decimal de forma correta.

4.3 TRABALHANDO COM NÚMEROS E AS OPERAÇÕES

Sabemos que fazer a compreensão dos números e as operações que o cercam, é fundamental para que os alunos desenvolvam uma aprendizagem significativa sobre as quatro operações matemáticas básicas. Ensinar os números na escola partia do pressuposto de, trabalharmos primeiramente com números pequenos para em sequência ir aumentando sua ordem de grandeza. No fim desse processo, os professores ensinam os alunos a classificar a ordem desses números, como unidade, dezena, centena, unidade de milhar, etc. Nessa ideia é descartado o fato de que esses alunos já presenciam antes mesmo de estar inserido na escola, ou seja, seu conhecimento prévio, como por exemplo, o contato direto com alguns números, como por exemplo, os números do telefone, placas de carros, preço de produtos, entre outras situações. Naturalmente nesse segundo modo de analisar, os alunos constroem o conceito de número. Por esse motivo, vem sendo pensado por alguns educadores que a maneira sequencial de ensinar os números a um aluno não é a forma mais eficaz.

De acordo com as ideias dos PCN as operações não devem a todo instante serem sequenciais, ou seja, não se deve trabalhar a adição, depois a subtração, em seguida a multiplicação e por fim a divisão. As operações devem ser inseridas de acordo com seus campos conceituais, no campo aditivo trabalha-se simultaneamente adição e subtração e no campo multiplicativo, trabalha-se multiplicação e divisão.

> O caso das quatro operações é fundamental. Em primeiro lugar o reconhecimento da função primordial das propriedades estruturais das operações na construção dos algoritmos de cálculo e principalmente no desenvolvimento da habilidade de cálculo mental, que são dois instrumentos necessários para a resolução de problemas. Depois o reconhecimento de que as operações aritméticas não são conceitos isolados, mas estão inter-relacionadas. (RESENDE, 1999, p. 82).

Desenvolver as operações pelos campos conceituais faz o aluno verificar respostas através das operações inversas, as quais devem ser inseridas em atividade propostas pelos professores, principalmente na resolução de problemas. De acordo com os PCN (2000), a construção dos diferentes significados leva tempo e ocorre pela descoberta de diferentes procedimentos de solução. Abaixo, faremos uma abordagem sequencial detalhada, de cada uma das etapas que compõem a aprendizagem das quatro operações básicas dentro do sistema numérico decimal.

4.3.1 Apresentando os números

Inicialmente é importante que as crianças entendam a lógica do sistema decimal, tendo em mente que os números existem para serem aplicados como forma de quantificação, comparação, ordenação, identificação de objetos e realizar operações. De acordo com uma pesquisa feita pela revista Nova Escola (disponível em http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/roteiro-didatico-sistema-numeracao-decimal-1-2-3-anos) sobre o sistema decimal, a especialista em Didática da Matemática, Fernanda Penas revela que considerar as funções dos números, permite que você selecione os tipos de problemas e sequências de atividades e, com eles, crie situações propícias para a intervenção didática". Outras educadores, como Delia Lerner e Patricia Sadovsky, sugerem que inicialmente as crianças devam escrever os números que conhecem, fazendo associação de onde os viram. Pode parecer equivocado fazer essa escrita não convencional, mas garantem que essa é a forma correta de ensinar as características do nosso sistema numérico posicional e de base 10. A forma de escrever os números, implicitamente apresenta originalmente o conceito das operações de soma e multiplicação, naturalmente compreendendo os princípios de ordem do sistema posicional decimal. Resumindo, escrever números que fazem parte do cotidiano das crianças é o princípio da aprendizagem e, o professor fazer a mediação correta inserindo implicitamente a ordem do sistema decimal é o indicador para estarem escrevendo números grandes com o passar do tempo.

4.3.2 Ordenando os números

Sabemos por experiências de sala de aula, que os números eram ou ainda são ensinados de “um em um”. Ordenar os números é fundamental após apresentá-los de forma contextualizada, porém a ordem não sugere escrever todos os números consecutivos. Se um aluno ordenar os números escritos de forma não consecutiva, certamente irá desenvolver o conceito de comparação.

Uma atividade inicial a ser proposta é pedir que os alunos escrevessem os números “redondos”, ou seja, múltiplos de dez, associados à facilidade de associar aos dez dedos das mãos, fato originário do sistema decimal. Em seguida, outra atividade estratégica a ser desenvolvida, é escrever os números de 1 até 100, onde 10 números devem ficar em cada linha. Com essas atividades os alunos começam a entender a decomposição dos números na base 10 e comparação da grandeza entre eles. Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que ao final do 3º ano os alunos devam reconhecer números no contexto diários, que permitam:

- Utilizar números para expressar quantidades de elementos de uma coleção.
- Utilizar números para expressar a ordem dos elementos de uma coleção ou sequência.
- Utilizar números na função de código, para identificar linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade.
- Utilizar diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção: contagem, formação pares, agrupamentos e estimativas.
- Contar em escalas ascendentes e descendentes de um em um, de dois em dois, de cinco em cinco, de dez em dez etc.
- Formular hipóteses sobre a grandeza numérica, pela identificação da quantidade de algarismos que compõem sua escrita e/ou pela identificação da posição ocupada pelos algarismos que compõem sua escrita.
- Comparar e ordenar números (em ordem crescente e decrescente).
- Contar em escalas ascendentes e descendentes a partir de qualquer número dado.

4.3.3 Intervenção através do sistema decimal

Devemos saber que todos os números são escritos baseados nas operações de multiplicação e soma, organizado de forma posicional e decimal. Assim, qualquer número de *XYZ* de três algarismos, pode ser pensado na decomposição:

$$X.100 + Y.10 + Z$$

A compreensão dos algoritmos tradicionais das quatro operações exige o domínio das propriedades do sistema de numeração decimal, compreensão considerada tardia pela literatura (KAMII, 1996). Infere-se, portanto, que muitos erros cometidos pelos alunos podem ser devidos ao descompasso entre o tempo em que esses algoritmos são ensinados na escola e o tempo próprio de cada criança para a compreensão dos mesmos.

Se qualquer criança tiver essa estrutura em sua mente, poderá facilmente efetuar certos cálculos mentais.

Exemplo: 37 + 20, se torna fácil ao pensar 10 + 10 + 10+ 7 + 10 + 10, soma os 10 e em seguida o 7. Dessa forma, está implicitamente usando a decomposição na base 10. Veja:

(10 +10+ 10 + 10 + 10 + 10 = 50) e, finalmente, as de diferente ordem (50 + 7). No sistema posicional decimal, é facilmente resolvida contas de subtração.

Exemplo: A subtração de 42 – 17 pode ser feita com o seguinte raciocínio: ao subtrair 42 - 17, a conta convencional é equivalente a subtração de:
(30 + 12) - (10 + 7).

A mediação do professor nesse tipo de pensamento deve contribuir para que a criança avance na forma de escrever os números e, efetuar cálculos dentro do sistema numérico convencional, para rapidamente estarem escrevendo números grandes e fazendo operações dentro desse sistema. Devemos lembrar que intervenções corretas, parte do princípio da análise de possíveis erros dos alunos na escrita e nos cálculos de operações dentro do sistema numérico decimal.

Baseado no fato de os alunos já estarem escrevendo os números “redondos” (10, 20, 30, ...100, etc) e organizando esses números, é normal escrevem outros números baseados na numeração falada e nas escritas de números já conhecidos. Dessa forma, ao pedir que escrevam 254, as crianças podem registrar assim, 200504. De modo análogo acontece com 2.745, registrado erroneamente por 2000700405. Essa ideia de escrita dos números explica a escrita dos números pelo sistema romano. A intervenção nessa situação deve ser feita de modo que uma criança entenda que, quanto mais algarismos tem um número, maior ele é. Ao perceber que a escrita de 254 tem mais algarismos do que o 200 e o 300, eles percebem que algo está efetivamente errado com a escrita que está sendo feita. Com esses tipos de intervenção a criança aprende as várias regularidades do sistema numérico, entre elas, que existe sempre dez números começando com o mesmo algarismo (no caso de dois dígitos), ou, toda vez que um número termina com 9, o anterior termina com 8, e o posterior, com 0. Veja as sequências abaixo:

8, 9, 10

28, 29, 30

338, 339, 340

1.528, 1.529, 1.530

Enfim, criar maneiras de adequar a facilidade do sistema numérico decimal em relação às suas operações é o objetivo de trabalharmos com esse sistema, cabe ao professor fazer as mediações adequadas e contextualizadas.

4.3.4 Operações numéricas/resolução de problemas

Sabemos que ensinar as operações básicas com o modelo da matemática tradicional não gera aprendizagem significativa. Imitação e repetição não é o melhor caminho, mesmo sendo este parte de um processo longo de aprendizagem nas escolas brasileiras. Cabem então ao professor trabalhar com metodologias e atividades diferenciadas, principalmente aqueles que desenvolvam a questão da ordem do sistema decimal, como o material dourado. O professor deve também deixar a sua sala motivada, através de construção em conjunto com os alunos de seus próprios materiais, como cartolinas de tabelas numéricas, jogos, etc.

Da forma como acontece nas nossas escolas, parece que as operações estão dissociadas das necessidades dos problemas de contagem. Trabalhar a construção do sistema decimal ao longo do ano é fundamental. A metodologia de resolução de problemas é importante para que os alunos façam a associação das operações ao conceito de número, permitindo-os interagirem com os diferentes significados das operações, e discutir várias formas de resolver um problema. Dentre as operações, percebemos a que mais gera dificuldade é a divisão, a qual é impossível de estar dissociada da multiplicação. Vale ressaltar que as operações não devem ser aprendidas separadas, mas relacionadas aos seus campos conceituais. Uma boa dica para trabalhar com divisão/multiplicação (campo multiplicativo) é dada pelo psicólogo francês, Gérard Vergnaud, onde os problemas devem passar por três conceitos: proporcionalidade, organização retangular e a combinatória.

***Proporcionalidade**: Dizemos A/B = C/D = k (constante).* Com essa variação podemos trabalhar com o seguinte modelo de problema.

Problema- Na festa de Giovanna, cada criança leva 2 refrigerantes. Ao todo, 9 crianças compareceram à festa. Quantas refrigerantes foram levadas? Seguindo o pensamento de proporcionalidade, poderíamos questionar os alunos com as seguintes variações: 9 crianças levaram 18 refrigerantes na festa de Giovana.. Se todas as crianças levaram a mesma quantidade de bebida, quantas garrafas levaram cada uma? Numa festa foram levados 18 refrigerantes pelas crianças e cada uma delas levou 2 garrafas. Quantas crianças havia? Quatro crianças levaram 9 refrigerantes à festa. Supondo que todas levaram o mesmo número de garrafas, quantos refrigerantes haveria se 8 crianças fossem à festa?

***Organização retangular**- Baseado no princípio da associação do cálculo a forma de encontrar área de retângulo.*

Problema: Um cinema tem 12 fileiras com 8 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse cinema? Tais problemas poderiam ser criados: Um cinema tem 96 cadeiras, com 8 delas em cada fileira. Quantas fileiras há no total? Um cinema tem 20 cadeiras distribuídas em colunas e fileiras. Como elas podem ser organizadas?

Combinatória*- Facilita o aluno a criar métodos de resolução alternativos.*

Problemas: Um menino tem 2 calças e 4 camisas de cores diferentes. De quantas maneiras ele pode se arrumar combinando as calças e as camisas? Os seguintes problemas poderiam ser acrescentados: Um menino pode combinar suas calças e blusas de 8 formas distintas. Sabendo que ele tem apenas 2 calças, quantas camisas ele tem?
Se a forma de resolver for de "um em um", poderíamos repetir o processo com números maiores, desenvolvendo a operação correta.

Com esses conceitos envolvidos nos problemas propostos, os alunos de fato iriam associar às operações matemáticas (divisão/multiplicação) a resolução destes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Convém considerar que todo esforço ao longo da história humana para registrar quantidades, acabou por acomodar em um sistema prático e facilitador de cálculos, o sistema decimal. Tal feito só foi alcançado graças ao trabalho intelectual de muitos povos, que através de muitas tentativas e acertos acabaram contribuindo para as formas de registro numérico, tão importante para qualquer sociedade. Ao fazer comparações ao longo da história em relação aos sistemas posicionais e não posicionais, é nítido que os sistemas posicionais têm grande vantagem em relação à facilidade de cálculos, tanto é que os romanos (sistema não posicional) tinham que se adaptarem as formas de calcular, para depois representar os números, criando uma dificuldade neste processo, porém não devemos menosprezar muitas contribuições destes sistemas.

As bases de quaisquer sistemas de numeração posicional não fazem diferença nas operações realizadas e propriedades observadas. Pensando na quantidade de múltiplos e divisores de um número qualquer, temos que serão sempre em mesmo número independente da base desenvolvida, logo um número primo será primo independente da base adotada. Assim, na base três o número 10 será primo e o número 11 não. Esse pensamento vale para os números inteiros, já que quando estamos pensando nos números racionais, a escolha da base pode simplificar a escrita de um número. Exemplificando, podemos perceber que o número 1/3 no sistema decimal, em forma de dízima periódica é 0,3333..., enquanto no sistema de base três esse número é representado simplesmente por $(0,1)_3$, porém não quer dizer que a base três seja a melhor para escrever todos os números racionais. Logo, esse também não é o melhor critério para escolher uma base.

Ficar discutindo qual modelo de sistema é o melhor, se é o posicional ou não posicional, ou qual é a melhor base para calcular, seria mascarar o real problema da aprendizagem das operações básicas matemáticas em nossas escolas. A preocupação presente se faz com o desafio de capacitar nossas crianças e adolescentes a fazer uma associação do sistema numérico decimal aos problemas do cotidiano, sendo esse sistema uma forma eficaz de resolver os desafios propostos, já que desde a antiguidade o homem precisou de um algoritmo que facilitasse as formas de contagem. Fundamental nesse desafio é o papel do professor, que tem como grande meta desenvolver seu trabalho pedagógico com metodologias e atividades que possibilite o real entendimento desse sistema numérico. Sendo mediador, é inadmissível que se paute sempre em fatores externos para não ocorrer o entendimento e procedimento correto das quatro operações básicas. Não vale nada observar os erros e nada fazer. Devemos explorá-los, fazendo as intervenções necessárias, principalmente no que diz respeito à ordem desse sistema, contribuindo para os alunos desenvolver habilidades e competências da aprendizagem necessária para as quatro operações.

Adquirindo tais conquistas, estaremos criando oportunidades para os alunos brasileiros se tornarem profissionais qualificados, principalmente em cursos que requer muita matemática. Consequentemente, essas pessoas com naturalidade, vão adquirir critérios para usar o melhor sistema numérico em uma situação desafiadora, ou seja, saberão as vantagens dos outros sistemas de numeração, como a numeração binária tão utilizada em computadores. Diminuir os decorebas e interpretar os fundamentos das quatro operações no sistema decimal é o grande desafio de nossas escolas.

REFERÊNCIAS

ABREU, Ana Paula Magalhães. **Resolução de problemas**: ensinar e aprender as quatro operações com números inteiros no 7º ano do ensino fundamental. 2010. 155f. Dissertação (mestrado profissionalizante), Centro Universitário Franciscano, 2010.

ACORDO ORTOGRÁFICO. Dicionário da Língua Portuguesa, Porto: Porto Editora (8ª edição revista e atualizada), 1999.

AZEVEDO, Maria Verônica Rezende de**. Jogando e construindo matemática**: a influência dos jogos e materiais pedagógicos na construção dos conceitos em matemática. 2. ed., São Paulo: VAP, 1999.

AUSUBEL, David P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. [s.l]: Plátamo, 2003.

BARRADAS, Ignácio. ; SAÉNZ, Corina. Para que servem os sistemas não posicionais. Chile, ano 7, n.1. p. 15 – 23. 2013. Em: http//http://rpmat.cl/ano-7-numero-1/. Acesso em: 18/12/2013.

BORBA, Marcelo de Carvalho. A **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**: Anped, nov. 2004.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed.: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL/MEC, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.

D'AMBRÓIO, Ubiratam. **Da realidade à ação**: reflexões sobre a educação matemática. Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DRUCK, Suely. **O drama do ensino da Matemática**. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtm>. Acesso em: 18/08/ 2013.

EVES, HOWARD. **Introdução à História da Matemática**, 1. ed. vol. 3. Campinas: Unicamp, 2004.

GENEROSO, Antônio José Santos. **Sistema de numeração das antigas civilizações**. 2011. Trabalho conclusão de curso (Graduação), Faculdades Integradas de Itararé, 2011.

GROSSNICKLE, Foster E.; BRUECKNER Leo J. **O Ensino da Aritmética pela compreensão**. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1965.

GUILHERME, Marisa. **A ansiedade matemática como um dos fatores geradores de problemas de aprendizagem em Matemática**. 1983. Dissertação (Mestrado) , Universidade Estadual de Campinas, 1983.

KAMII, C. **Aritmética: novas perspectivas**: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1996.

LUDKE, Menga; ANDRÈ, Marli E. D. A. **A pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARINOVITCH, L. et al (1989). **Civilizações Antigas do Oriente e do Ocidente**. Lisboa: Editorial Avante, 1989.

MOREIRA, Marco Antônio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa**: A teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

PROFISSIONAIS QUE DOMINAM OS NÚMEROS SÃO MAIS VALORIZADOS. **Jornal Hoje**. Rio de Janeiro: Globo, 19 de maio de 2014. Programa de Tv.

SILVA, Marcos. A multiplicação egípcia. Em: < http://mundoeducacao.com/matematica/a-multiplicacao-dos-egipcios.htm>. Acesso 15/11/2013.

SMOLE, Kátia S. **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática . Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

RAMOS, Adriana. **Multiplicação e divisão por números naturais base 10. Revista Nova Escola**. Em: < http: //http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/roteiro-didatico-sistema-numeracao-decimal-1-2-3-anos. Acesso em 03/07/2014.

APÊNDICE A - ATIVIDADES PROPOSTAS AOS ALUNOS

SOMA/SUBTRAÇÃO

1) Resolva as seguintes operações abaixo, através de **desenhos**:

a) 17 + 8 = b) 15 + 12 + 13=

c) 34 - 16 = d) 13 + 19 – 14 =

2) **Arme e efetue** cada uma das operações abaixo:

a) 23 + 9 = b) 120 + 230 + 150 = c) 62 – 56= d) 1234 – 39=

3) Calcule **mentalmente**:

a) 33 + 28 = ___ b) 10 + 70 - 20 = ___ c) 135 - 46 = ____ d) 8 – 12=____

4) Na sala de Giovana há 17 meninos e 23 meninas.

a) Quantas crianças há na sala?

Resp:____

b) E na sua sala, quantos são meninos?

Resp:____

c) Quantas são meninas?

Resp:____

d) Quantos são ao todo?

Resp:____

5) Tiago tinha 25 bolinhas de gude. Ganhou 11 bolinhas na primeira partida, perdeu 9 bolinhas na segunda e ganhou 13 bolinhas na terceira. No final emprestou 8 bolinhas para seu irmão. Com quantas bolinhas Tiago ficou? E seu irmão, quantas bolinhas ficou? Por quê?

MULTIPLICAÇÃO

1) Resolva através de **desenhos** cada uma das multiplicações abaixo:

a) 3x4 = b) 5 x 14 = c) 12 x 15 =

2) **Arme e efetue** as multiplicações abaixo:

a) 8 x 15 b) 12 x 38 c) 15 x 239

3) Calcule **mentalmente**:

a) 11 x 3 = b) 9 x 21= c) 14 x 17 =

4) Em uma festa de comemoração de copa do mundo, uma professora comprou 3 dúzias de azuis, 2 dezenas de balões amarelo e 2 dúzias de balões verdes e 5 balões brancos. Estavam furados 23 balões. Responda:

e) Quantos são os balões azuis?
Resp: ____

f) Quantos são os balões amarelos?
Resp: ____

g) Quantos são os balões verdes? Quantos balões são brancos?
Resp: ____

d) Quantos balões ficaram vazios?

Resp:____

f) Quantos balões haviam no total?

Resp: ____

5) Carlos está alugando a sua casa: "Casa com 3 quartos e demais dependências, o aluguel mensal é de R$720,00". Sendo assim:

a) Se a duração do contrato de aluguel é de 6 meses, quanto ela receberá de aluguel?

____

b) E se for de 12 meses?

____

c) Se alugarem por 4 meses, quanto o inquilino pagará por dia?

____

d) E se alugarem por quatro dias, quanto o inquilino pagará (1mês = 30 dias)?

____

DIVISÃO

1) Calcule as divisões abaixo através de **desenhos**:

a) 12 : 4 b) 17 : 3 c) 126 : 6 d) 180 : 15

2) **Arme e efetue** as divisões abaixo:

a) 32 : 5 b) 120 : 20 c) 13 : 2 d) 328 : 14 e) 101: 2

3) Um cinema de 5 sócios, teve um prejuízo de R$25.000,00 no final de um certo mês. Assim, o valor de prejuízo é igualmente dividido entre os sócios do cinema. Quanto cada sócio teve de pagar, para cobrir o valor que faltou?

4) Um auditório possui 23 filas com 25 assentos em cada uma delas, e uma fila com 20 assentos. Para um espetáculo nesse auditório já foram vendidos 420 ingressos.

a) Quantos ingressos ainda estão à venda?

Resp:____

b) Quanto custa cada ingresso se, com o auditório lotado a arrecadação foi de R$5.950,00?
Resp:____

5) (SAEB 2001) Uma doceira vende suas cocadas em embalagens de 24 unidades. Para vender 2448 cocadas quantas embalagens são necessárias?

APÊNDICE B- ENTREVISTA PARA OS PROFESSORES

Nome:

Ano da sala que leciona:

1) Você acredita que seus alunos compreendem o sistema numérico decimal?
Resp:____
____
____

2) Como faz a representação das quatro operações em sala de aula (formas de linguagem: desenho, linguagem escrita-problemas, linguagem matemática formal, etc) ?
Resp:
____
____
____
____
____

3) Quais são as operações que apresentam maior dificuldade? E facilidade? Por quais motivos você acha que isso ocorre?
Resp: ____
____
____
____
____
____

4) Como trabalha a adição?
Resp:____
____
____
____

5) A subtração?
Resp:____
____
____
____

6) A multiplicação?
Resp:____
____
____

7) A divisão?
Resp:____
____

8) Quais são as metodologias utilizadas?

Resp:

9) Usou algum tipo de material concreto? De que forma?

Resp:

10) Utilizou apostila/ livro didático?

Resp:

11) Você utilizou situações-problema para desenvolver as quatro operações? Se sim, tiveram mais facilidade ou dificuldade em entender tais operações? Por que você acredita?

Resp:

12) Como você avalia a turma em relação a capacidade de interpretar situações problemas e cálculos em relação as quatro operações?

Resp:

13) Após ultrapassar metade do fundamental I, você trabalharia de outra forma as quatro operações?

Resp:

APÊNDICE C- CRITÉRIOS NÃO TRADICIONAIS DE DIVISIBILIDADE

***DIVISIBILIDADE POR 2** – Um número é divisível por 2, quando o algarismo da unidade, subtraído do dobro da soma dos demais algarismos for divisível por 2.*

Demonstração: Seja o número natural x escrito no sistema decimal, ou seja:

$x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$, com coeficientes naturais.

Através da definição da congruência na observação abaixo, podemos fazer as seguintes afirmações.

***Definição:** Sejam a, b, m $\in$ Z, n > 0. Dizemos que a é congruente a b (módulo m) (denota-se $a \equiv b$ (módulo m)) se $m \,/\, (b – a)$.*

Temos:

$10^\circ \equiv 1 \pmod 2$;

$10^1 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^1 \equiv - 2 \pmod 2$;

$10^2 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^2 \equiv - 2$ mod 2) ;

$10^3 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^3 \equiv - 2 \pmod 2$;

$10^4 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^4 \equiv - 2 \pmod 2$;

$10^5 \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^5 \equiv - 2 \pmod 2$;

.

.

.

$10^n \equiv 0 \pmod 2$ ou $10^n \equiv - 2 \pmod 2$;

.

Dessa forma, temos:

$a^0.10^0 \equiv 1$ a0 (mod 2) ;

$a_1.10^1 \equiv 0\, a_1 \pmod 2$ ou $a_1.10^1 \equiv - 2\, a_1 \pmod 2$;

$a_2.10^2 \equiv 0$ a2 (mod 2) ou $a_2.10^2 \equiv - 2\, a_2 \pmod 2$;

$a_3.10^3 \equiv 0\, a_3 \pmod 2$ ou $a_3.10^3 \equiv - 2\, a_3 \pmod 2$;

$a_4.10^4 \equiv 0\, a_4 \pmod 2$ ou $a_4.10^4 \equiv - 2\, a_4 \pmod 2$;

.

.

.

$a_n.10^n \equiv 0\, a_n \pmod 2$ ou $a_n.10^n \equiv - 2\, a_n \pmod 2$.

Logo $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$ é divisível por 2 quando o algarismo da unidade for divisível por 2, ou pensando na definição de congruência, quando o algarismo da unidade, subtraído do dobro do restante dos algarismos for divisível por 2.$\square$

Exemplos: Seja o número 1576. Sabemos que esse número é divisível por 2, pois o algarismo da unidade é 6. Temos ainda, de forma mais interessante 6 – 2. (7 + 5 + 1) = 6 – 2.13 = 6 – 26 = -20 = 2. (-10). Como 6 é divisível por 2, pois 2 . 3 = 6 e - 20 é divisível por 2, pois 2 . (- 10) = 20, então o número 1576 também é divisível por 2, pois 1576 = 2 . 788.

DIVISIBILIDADE POR 3 - *Um número é divisível por 3, quando o algarismo da unidade subtraído do dobro da soma dos demais algarismos for divisível por 3.*

Demonstração: Seja o número natural x escrito no sistema decimal, ou seja:

$x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Temos por congruência que :

$10^0 \equiv 1 \pmod 3$;

$10^1 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 3$;

$10^2 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^2 \equiv -2 \pmod 3$;

$10^3 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^3 \equiv -2 \pmod 3$;

$10^4 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^4 \equiv -2$ (mod);

$10^5 \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod 3$;

.

.

.

$10^n \equiv 1 \pmod 3$ ou $10^n \equiv -2 \pmod 3$;

Dessa forma, temos:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 3$;

$a_1.10^1 \equiv 1\, a_1 \pmod 3$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\, a_1 \pmod 3$;

$a_2.10^2 \equiv 1\, a_2 \pmod 3$ ou $a_2.10^2 \equiv -2\, a_2 \pmod 3$;

$a_3.10^3 \equiv 1\, a_3 \pmod 3$ ou $a_3.10^3 \equiv -2\, a_3 \pmod 3$;

$a_4.10^4 \equiv 1\, a_4 \pmod 3$ ou $a_4.10^4 \equiv -2\, a_4 \pmod 3$;

$a_5.10^5 \equiv 1\, a_5 \pmod 3$ ou $a_5.10^5 \equiv -2\, a_5 \pmod 3$;

.

.

.

$a_n.10^n \equiv 1\, a_n \pmod 3$ ou $a_n.10^n \equiv -2\, a_n \pmod 3$.

Logo $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$ é divisível por 3 quando o algarismo da unidade subtraído do dobro da soma dos demais algarismos for divisível por 3. $\square$

Exemplos: Temos que o número 315 é divisível por 3, pois a soma 3 + 1 + 5 = 9 é divisível por 3, ou ainda, da forma como foi demonstrado acima 5 – 2.(3+1) = 5 – 8 = -3, que é divisível por 3. Logo 315 é divisível por 3, pois 3.105= 315 .

DIVISIBILIDADE POR 4 – *um número é divisível por 4, o algarismo da unidade somado ao sêxtuplo da dezena for divisível por 4 ou quando o algarismo da unidade subtraído do dobro do algarismo da dezena com a soma do quádruplo do algarismo da centena for divisível por 4.*

Demonstração: Seja o número natural x escrito no sistema decimal, ou seja:

$x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$.

Dessa forma, temos:

$10^\circ \equiv 1 \pmod 4$;

$10^1 \equiv 6 \pmod 4$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 4$;

$10^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^2 \equiv -4 \pmod 4$;

$10^3 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^3 \equiv -4 \pmod 4$;

$10^4 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^4 \equiv -4 \pmod 4$;

$10^5 \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^5 \equiv -4 \pmod 4$;

.
.
.

$10^n \equiv 0 \pmod 4$ ou $10^n \equiv -4 \pmod 4$;

Assim, temos:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 4$;

$a_1.10^1 \equiv 6\, a_1 \pmod 4$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\, a_1 \pmod 4$;

$a_2.10^2 \equiv 0\, a_2 \pmod 4$ ou $a_2.10^2 \equiv -4\, a_2 \pmod 4$;

$a_3.10^3 \equiv 0\, a_3 \pmod 4$ ou $a_3.10^3 \equiv -4\, a_3 \pmod 4$;

$a_4.10^4 \equiv 0\, a_4 \pmod 4$ ou $a_4.10^4 \equiv -4\, a_4 \pmod 4$;

$a_5.10^5 \equiv 0\, a_5 \pmod 4$ ou $a_5.10^5 \equiv -4\, a_5 \pmod 4$;

.
.
.

$a_n.10^n \equiv 0\, a_n \pmod 4$ ou $a_n.10^n \equiv -4\, a_n \pmod m$.

Portanto, vale a afirmação no critério de divisibilidade por 4.□

Exemplo: Temos que 1168 é divisível por 4, pois o algarismo da unidade é 8, o algarismo da dezena é 6 e, o algarismo da centena é 1. Verificando o critério obtemos que:

8 + 6.6 = 44 = 4.11 ou, 8 – (2.6 + 4.1) = 8 – 16 = -8 = 4. (-2).

TEOREMA DA DIVISIBILIDADE POR 5 *– Nesse critério, não sofrem alterações como aprendemos nas nossas escolas, ou seja, um número natural é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.*

Demonstração: Seja o número natural x escrito no sistema decimal, ou seja:

$x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$. Dessa forma, temos:

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 5$;

$10^1 \equiv 0 \pmod 5$;

$10^2 \equiv 0 \pmod 5$;

$10^3 \equiv 0 \pmod 5$;

$10^4 \equiv 0 \pmod 5$;

$10^5 \equiv 0 \pmod 5$

.
.
.

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 5$;

$a_1.10^1 \equiv 0\, a_1 \pmod 5$;

$a_2.10^2 \equiv 0\, a_2 \pmod 5$;

$a_3.10^3 \equiv 0\, a_3 \pmod 5$;

$a_4.10^4 \equiv 0\, a_4 \pmod 5$;

$a_5.10^5 \equiv 0\, a_5 \pmod 5$

.
.
.

$a_n.10^n \equiv 0\, a_n \pmod 5$.

Portanto, um número natural é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.□

DIVISIBILIDADE POR 6 *– Um número é divisível por 6 quando o algarismo das unidades somado ao quádruplo dos algarismos de ordem par e subtraído do dobro dos algarismos de ordem ímpar, também for múltiplo de 6.*

Demonstração: Seja o número natural x escrito no sistema decimal, ou seja:

$x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$. Dessa forma, temos:

Então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 6$;

$10^1 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^1 \equiv -2 \pmod 6$;

$10^2 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^2 \equiv -2 \pmod 6$;

$10^3 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^3 \equiv -2 \pmod 6$;

$10^4 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^4 \equiv -2 \pmod 6$;

$10^5 \equiv 4 \pmod 6$ ou $10^5 \equiv -2 \pmod 6$;

.
.
.

e assim sucessivamente. Dessa forma, temos:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 6$;

$a_1.10^1 \equiv 4\, a_1 \pmod 6$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\, a_1 \pmod 6$;

$a_2.10^2 \equiv 4\, a_2 \pmod 6$ ou $a_2.10^2 \equiv -2\, a_2 \pmod 6$;

$a_3.10^3 \equiv 4\, a_3 \pmod 6$ ou $a_3.10^3 \equiv -2\, a_3 \pmod 6$;

$a_4.10^4 \equiv 4\, a_4 \pmod 6$ ou $a_4.10^4 \equiv -2.a_4 \pmod 6$;

$a_5.10^5 \equiv 4\, a_5 \pmod 6$ ou $a_5.10^5 \equiv -2\, a_5 \pmod 6$;

.
.
.

$a_n.10^n \equiv 4\, a_n \pmod 6$ ou $a_n.10^n \equiv -2\, a_n \pmod 6$.

Portanto, um número é divisível por 6, quando o algarismo das unidades somado ao quádruplo dos algarismos de ordem par e subtraído do dobro dos algarismos de ordem ímpar, também for múltiplo de 6. □

Exemplo: Temos que 2436 é divisível por 6, pois o algarismo da unidade é 6, o algarismo de ordem par é 4 (2° algarismo) . Os algarismos da ordem ímpar são 2 e 3 (respectivamente). Aplicando o processo, temos: 6 + 4. 4 – 2.(2 + 3) = 6 + 16 – 10= 12 = 2.6. Portanto, 2436 é divisível por 6.

DIVISIBILIDADE POR 7 *- Neste processo de divisibilidade, é mais prático fazer a divisão do que aplicar qualquer critério. No critério de congruência, um número será divisível por 7, se* $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$*, tiver a operação* $(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - .... + (a_{n-2} + 3a_{n-1} + 2\, a_n)$ *também múltiplo de 7.*

Demonstração : Sendo $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$, temos:

$10^0 \equiv 1 \pmod 7$;

$10^1 \equiv 3 \pmod 7$ ou 10^1 ; $\equiv - 4 \pmod 7$;

$10^2 \equiv 2 \pmod 7$ ou $10^2 \equiv - 5 \pmod 7$;

$10^3 \equiv 6 \pmod 7$ ou $10^3 \equiv - 1 \pmod 7$;

$10^4 \equiv 4 \pmod 7$ ou $10^4 \equiv - 3 \pmod 7$;

$10^5 \equiv 5 \pmod 7$ ou $10^5 \equiv - 2 \pmod 7$;

$10^6 \equiv 1 \pmod 7$ ou $10^6 \equiv - 6 \pmod 7$;

$10^7 \equiv 3 \pmod 7$ ou $10^7 \equiv - 4 \pmod 7$;

$10^8 \equiv 2 \pmod 7$ ou $10^8 \equiv - 5 \pmod 7$;

$10^9 \equiv 6 \pmod 7$ ou $10^9 \equiv - 1 \pmod 7$;

$10^{10} \equiv 4 \pmod 7$ ou $10^{10} \equiv - 3 \pmod 7$;

.
.
.

e assim por diante, ou seja:

$a_0.10^0 \equiv 1\ a_0 \pmod 7$;

$a_1.10^1 \equiv 3\ a_1 \pmod 7$ ou $a_1.\ 10^1 \equiv - 4\ a_1 \pmod 7$;

$a_2.10^2 \equiv 2\ a_2 \pmod 7$ ou $a_2.\ 10^2 \equiv - 5\ a_2 \pmod 7$;

$a_3.10^3 \equiv 6\ a_3 \pmod 7$ ou $a_3.\ 10^3 \equiv - 1\ a_3 \pmod 7$;

$a_4.10^4 \equiv 4\ a_4 \pmod 7$ ou $a_4.\ 10^4 \equiv - 3\ a_4 \pmod 7$;

$a_5.10^5 \equiv 5\ a_5 \pmod 7$ ou $a_5.\ 10^5 \equiv - 2\ a_5 \pmod 7$;

$a_6.10^6 \equiv 1\ a_6 \pmod 7$ ou $a_6.\ 10^6 \equiv - 6\ a_6 \pmod 7$;

$a_7.10^7 \equiv 3\ a_7 \pmod 7$ ou $a_7.\ 10^7 \equiv - 4\ a_7 \pmod 7$;

$a_8.10^8 \equiv 2\ a_8 \pmod 7$ ou $a_8.\ 10^8 \equiv - 5\ a_8 \pmod 7$;

$a_9.10^9 \equiv 6\ a_9 \pmod 7$ ou $a_9.\ 10^9 \equiv - 1\ a_9 \pmod 7$;

$a_{10}.10^{10} \equiv 4\ a_{10} \pmod 7$ ou $a_{10}.10^{10} \equiv - 3\ a_{10} \pmod 7$;

.
.
.

Portanto, um número será divisível por 7, se $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$, tiver a operação $(a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - .... + (a_{n-2} + 3a_{n-1} + 2\ a_n)$ também múltiplo de 7. □

Exemplo: Temos que o número 412825 é divisível por 7, pois separando o número da direita para esquerda em blocos de 3 algarismos, temos: 5, 2, 8 é o primeiro bloco e 2, 1, 4 é o segundo bloco.

Usando o método temos:

$[(5 + 3.2 + 2.8) - (2 + 3.1 + 2.4)] = 5 + 6 + 16 - 2 - 3 - 8 = 27 - 13 = 14 = 2.7.$

Portanto, 412825 é divisível por 7, onde 58975.7 = 412825.

DIVISIBILIDADE POR 8 – *Um número é divisível por 8, quando o algarismo da unidade somado com o dobro do algarismo da dezena e ao quádruplo do algarismo da centena for divisível por 8 ou, quando o algarismo da unidade subtraído do sêxtuplo do algarismo da dezena , somado ao quádruplo do algarismo da centena for divisível por 8.*

Demonstração: Sendo $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$, temos:

$10^0 \equiv 1 \pmod 8$;

$10^1 \equiv 2 \pmod 8$ ou $10^1 \equiv -6 \pmod 8$;

$10^2 \equiv 4 \pmod 8$ ou $10^2 \equiv -4 \pmod 8$;

$10^3 \equiv 0 \pmod 8$;

$10^4 \equiv 0 \pmod 8$;

$10^5 \equiv 0 \pmod 8$;

.
.
.

$10^n \equiv 0 \pmod 8$.

Ou ainda:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 8$;

$a_1.10^1 \equiv 2\, a_1 \pmod 8$ ou $a_1.10^1 \equiv -2\, a_1 \pmod 8$;

$a_2.10^2 \equiv 4\, a_2 \pmod 8$ ou $a_2.10^2 \equiv -4\, a_2 \pmod 8$;

$a_3.10^3 \equiv 0\, a_3 \pmod 8$;

$a_4.10^4 \equiv 0\, a_4 \pmod 8$;

$a_5.10^5 \equiv 0\, a_5 \pmod 8$;

.
.
.

$a_n.10^n \equiv 0\, a_n \pmod 8$.

Portanto, um número é divisível por 8 se vale ao menos uma dos critérios acima. $\square$

Exemplo: Temos que o número 788376 é divisível por 8, pois sendo o algarismo da unidade sendo 6, o algarismo da dezena sendo 7 e, o algarismo da centena sendo 3 temos:

$6 + 2.7 + 4.3 = 6 + 14 + 12 = 32 = 4.8$, ou, $6 - (6.7 + 4.3) = 6 - 42 - 12 = -48 = (-6) . 8.$

Logo, 788376 é divisível por 8, onde 98547.8 = 788376.

DIVISIBILIDADE POR 9 *– Um número é divisível por 9 quando o algarismo da unidade subtraído do óctuplo da soma dos demais algarismos for divisível por 9.*

Demonstração: Sendo $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$, então:

$10^0 \equiv 1 \pmod 9$;

$10^1 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^1 \equiv -8 \pmod 9$;

$10^2 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^2 \equiv -8 \pmod 9$;

$10^3 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^3 \equiv -8 \pmod 9$;

$10^4 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^4 \equiv -8 \pmod 9$;

$10^5 \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^5 \equiv -8 \pmod 9$;

.
.
.

$10^n \equiv 1 \pmod 9$ ou $10^n \equiv -8 \pmod 9$.

Ou ainda:

$a_0.10^0 \equiv 1\, a_0 \pmod 9$;

$a_1.10^1 \equiv 1\, a_1 \pmod 9$ ou $a_1.10^1 \equiv -8\, a_1 \pmod 9$;

$a_2.10^2 \equiv 1\, a_2 \pmod 9$ ou $a_2.10^2 \equiv -8\, a_2 \pmod 9$;

$a_3.10^3 \equiv 1\, a_3 \pmod 9$ ou $a_3.10^3 \equiv -8\, a_3 \pmod 9$;

$a_4.10^4 \equiv 1\, a_4 \pmod 9$ ou $a_4.10^4 \equiv -8\, a_4 \pmod 9$;

$a_5.10^5 \equiv 1\, a_5 \pmod 9$ ou $a_5.10^5 \equiv -8\, a_5 \pmod 9$;

.
.
.

$a_n.10^n \equiv 1\, a_n \pmod 9$ ou $a_n.10^n \equiv -8\, a_n \pmod 9$.

Portanto um número é divisível por 9 quando o algarismo da unidade subtraído do óctuplo da soma dos demais algarismos for divisível por 9.□

Exemplo: 1836 é divisível por 9, pois de acordo com o critério: $6 – 8. (1 + 8 + 3) = 6 – 8.12 = 6 – 96 = -90 = 9. (-10)$. Portanto, 1836 é divisível por 9.