Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Curvas planas: uma visão para o Ensino Médio †

por

Breno da Silveira Cardim

sob orientação do

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Julho/2014
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Curvas planas: uma visão para o Ensino Médio

por

Breno da Silveira Cardim

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra -UFPB (Orientador)

Aurélio Menegon Neto

Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto - UFPB

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva - UFCG

Julho/2014

A ficha abaixo deverá ser impressa no verso da folha de rosto.

C267c Cardim, Breno da Silveira.

Curvas planas: uma visão para o ensino médio / Breno da Silveira Cardim.- João Pessoa, 2014.

70f. : il.

Orientador: Flank David Morais Bezerra

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Curvas planas. 3. Cálculo diferencial e integral. 4. Vetor tangente. 5. Área de curvas. 6. Cumprimento de curvas.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, que iluminou o meu caminho durante esta jornada.

Aos meus pais, Sérgio e Marilena, que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra, por sua dedicada e atenciosa orientação, constante empenho, sua paciência e conselhos valiosos.

Aos membros da banca de qualificação, o Prof. Dr. Aurélio Menegon Neto e o Prof. Dr. Severino Horácio da Silva, pelas sugestões que contribuiram para a versão final deste trabalho.

A coordenação do Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), nas pessoas dos senhores João Marcos do Ó e Bruno Ribeiro.

Aos professores do Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), com os quais pude aprofundar meus conhecimentos matemáticos. Agradeço pelas ideias, sugestões e pelo olhar cuidadoso em toda a minha caminhada no decorrer do curso.

A Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro durante a realização desse curso.

Aos colegas da turma de 2012 do PROFMAT/UFPB pela convivência e por todas as trocas de experiências que contribuíram ainda mais para a minha formação docente.

Obrigado por tudo!

Breno da Silveira Cardim

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, que muito me apoiaram em todas etapas de minha vida; e a todos os professores de Matemática que fizeram parte de minha caminhada de crescimento profissional e pessoal,em uma jornada repleta de desafios, mas também muito rica em aprendizado e conhecimento. Aprendizado e conhecimento que me fizeram descobrir toda a beleza e encantamento do maravilhoso mundo dessa Ciência. E por fim, um reconhecimento especial ao grande mestre Renato, professor e amigo, que me ensinou que por mais que achamos que o nosso conhecimento já está bem profundo, estamos enganados, pois o conhecimento é algo que sempre se renova.

Aula de Matemática

Pra que dividir sem raciocinar
Na vida é sempre bom multiplicar
E por A mais B
Eu quero demonstrar
Que gosto imensamente de você

Por uma fração infinitesimal,
Você criou um caso de cálculo integral
E para resolver este problema
Eu tenho um teorema banal

Quando dois meios se encontram desaparece a fração
E se achamos a unidade
Está resolvida a questão

Prá finalizar, vamos recordar
Que menos por menos dá mais amor
Se vão as paralelas
Ao infinito se encontrar
Por que demoram tanto dois corações a se integrar?
Se desesperadamente, incomensuravelmente,
Eu estou perdidamente apaixonado por você.

(Tom Jobim e Marino Pinto)

Resumo

Neste trabalho estudamos os princípios da teoria das curvas planas, inseridos no contexto do Ensino Médio. Propomos uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, apresentando as noções intuitivas de limite de uma função real de uma variável, de continuidade e diferenciabilidade de funções reais de uma variável, bem como integrabilidade, aos estudantes do Ensino Médio. Em seguida, fazemos um estudo sobre a teoria das curvas parametrizadas, ilustrando alguns exemplos clássicos e apresentando alguns conceitos, como o de vetor tangente, de área e comprimento de curvas.

Palavras-chave: curvas planas; cálculo diferencial e integral; vetor tangente; área de curvas; comprimento de curvas.

Abstract

In this work, we study the principles of the theory of plane curves, within the context of high school. We propose an introduction to differential and integral calculus, with intuitive notions of limit of a real function of one variable, continuity and differentiability of real functions of one variable, and integrability, to high school students. Then do a study on the theory of parameterized curves, illustrating some classic examples and presenting some concepts, such as the tangent vector, area and length of curves.

Keywords: plane curves; differential and integral calculus; tangent vector; area; curve length.

Sumário

Introdução

A **Geometria Diferencial** é o estudo da Geometria usando o Cálculo Diferencial e Integral. Essa junção criou, de certo modo, uma ciência aplicada, principalmente em questões originadas da Cartografia, de onde herdou parte de sua terminologia inicial. Posteriormente passou a ser de grande utilidade na Astronomia e na Engenharia. Embora o Cálculo fosse suficiente para o entendimento e a aplicação das leis de Newton, não o foi para a teoria da relatividade que nasceu sobre os alicerces do conhecimento estabelecido pela Geometria Diferencial. A interação entre a Geometria Diferencial e a Análise tem sido fator de desenvolvimento de ambas as disciplinas. No espírito da Geometria Analítica de Descartes, questões profundas de Análise têm sido resolvidas através da Geometria e vice-versa. A Computação Gráfica está começando a demonstrar que a Geometria Diferencial estará proximamente presente e acessível para um público bem mais amplo, quer na área científica, quer na área empresarial, fornecendo a interface gráfica adequada à apresentação de resultados, ao desenvolvimento de novas tecnologias e ao planejamento de novos produtos.

A história da Geometria Diferencial começa com o estudo de curvas, objeto de nosso estudo. Noções como retas tangentes a curvas já são encontradas entre os gregos Euclides, Arquimedes e Apolônio. No século XVII, os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) criam o método das coordenadas ou a Geometria Analítica enquanto que o alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) descobrem os algoritmos do Cálculo Infinitesimal, os quais permitirão o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais. A curvatura de uma curva plana em um ponto da curva é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de ser uma reta numa vizinhança daquele ponto: é a taxa de variação naquele ponto da direção tangente à curva em relação ao comprimento de arco . Os conceitos de curvatura de uma curva plana já eram conhecidos por Newton e Leibniz, mas o precursor do assunto talvez seja o holandês Christian Huygens (1629-1695), que ainda não conhecia o cálculo, mas que em 1673 publicou um trabalho sobre curvas planas introduzindo os conceitos de involuta e evoluta de uma curva o qual foi curiosamente motivado pelo seu interêsse em pêndulos e relógios.

Neste trabalho dissertamos sobre a teoria das curvas planas contínuas parametrizadas. A escolha do tema desta monografia objetiva estimular a formação de conhecimentos mais sólidos sobre curvas planas e de alguns conceitos relacionados, tais como, gráficos de funções reais de uma variável real, e Cálculo Diferencial e Integral.

O texto foi dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo, fazemos uma introdução com definições básicas que serão necessárias a compreensão do exposto neste trabalho. Apresentamos as ideias de funções reais de uma variável real e algumas definições do Cálculo Diferencial e Integral, tais como a definição de limites de funções reais de uma variável real, derivadas de funções reais de uma variável real, e da integral de Riemann para funções reais de uma variável real. Além de alguns exemplos, são feitas observações que servem de elo entre o que é estudado no Ensino Médio e a primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral estudada em cursos de Ciências Exatas, nas universidades e faculdades do mundo todo.

No segundo capítulo fazemos um estudo sobre curvas planas. Apresentamos seu conceito, suas formas de representação cartesiana e paramétrica, os principais tipos de curvas, bem como sua construção gráfica e determinação de seu comprimento e área. Finalizando, introduzimos uma pequena lista de exercícios, direcionada ao nosso público alvo, que poderá ser aplicada para verificar se o conteúdo exposto foi absorvido de forma plena e satisfatória.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos e resultados básicos para uma boa compreensão deste trabalho. No que segue, recodaremos algumas definições e resultados do cálculo diferencial e integral para funções reais de uma variável real.

1.1 Teoria dos conjuntos

Nesta seção recodaremos algumas definições e notações comumente utilizadas na teoria dos conjuntos. Não faremos uma abordagem axiomática, bem como não entraremos na questão da definição de conjunto. O ponto de vista adotadado é que o leitor possui a usual, humana e intuitiva compreensão do que são conjuntos.

Motivados pela teoria axiomática de Zermelo-Frankel, indicamos um conjunto C através de uma propriedade característica P de seus elementos x. Desta forma, podemos escrever:

$$C \ = \ \{x;\ x \text{ possui a propriedade } P\}.$$

Exemplo: $A = \{x;\ x$ é estado brasileiro iniciado pela letra $P\}$ é uma maneira de indicar o conjunto { Paraíba, Paraná, Pernambuco}.

Em relação a quantidade de elementos que formam um conjunto, podemos classificá-lo como:

I.**Conjunto finito**: é aquele que apresenta um número limitado de elementos.
II.**Conjunto infinito**: é aquele que apresenta um número ilimitado de elementos.

Observação 1 *Consideramos o* ***conjunto vazio****, aquele que não possui elementos, um conjunto finito. Usualmente, denotamos o conjunto vazio pelo símbolo* $\varnothing$*.*

Um outro tópico a se analisar são as relações de pertinência e inclusão.

Definição 1 *A **relação de pertinência** se dá da seguinte forma: dados um conjunto C e um elemento x quaisquer, se x faz parte de C, escrevemos $x \in C$ (lê-se: x pertence a C). Para sua negação, escrevemos $x \notin C$ (lê-se: x não pertence a C). A **relação de inclusão** procura estabelecer um elo entre conjuntos, da seguinte forma: dados os conjuntos A e B quaisquer, se todos os elementos de A pertencem a B, escreveremos $A \subset B$ (lê-se: A está contido em B). Para sua negação, escreveremos $A \not\subset B$ (lê-se: A não está contido em B).*

Finalizando esta seção, concentraremos nossa atenção sobre as operações com conjuntos.

Definição 2 *Se A e B são dois conjuntos, e se cada elemento de A também pertence a B, dizemos que A é subconjunto de B.*

Notação:

$$A \subset B \Leftrightarrow \ \forall x \in A \ \Rightarrow \ x \in \ B$$

Definição 3 *Sejam A e B dois conjuntos. A união $A \cup B$ (lê-se: A união B) é formada pelos elementos que pertencem a A ou a B.*

Notação:

$$A \cup \ B = \{x; \ x \ \in A \ \text{ ou } x \ \in B\}.$$

Definição 4 *Sejam A e B dois conjuntos. A interseção $A \cap B$ (lê-se: A interseção B) é formada pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B.*

Notação:

$$A \cap \ B = \{x; \ x \ \in \ A \text{ e } x \ \in \ B\}.$$

Definição 5 *Sejam A e B dois conjuntos. O complemento $A - B$ (lê-se: A menos B) é formada pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.*

Notação:

$$A - B = \{x; \ x \ \in \ A \text{ e } x \ \notin \ B\}.$$

Definição 6 *Dados os conjuntos não vazios A_1,...,A_n, definimos o produto cartesiano entre estes conjuntos como sendo o conjunto que contém todas as n-uplas $(a_1, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots n$. Denotamos tal conjunto por $A = A_1 \times \cdots \times A_n$.*

Caso os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ sejam todos iguais a um conjunto A, denotamos o produto cartesiano entre estes conjuntos por $A^n = A \times \cdots \times A$.

Exemplo: Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o espaço euclidiano real n dimensional, isto é, o conjunto de todas as n-uplas de números reais. Deste modo $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n cópias de $\mathbb{R}$, ou seja:

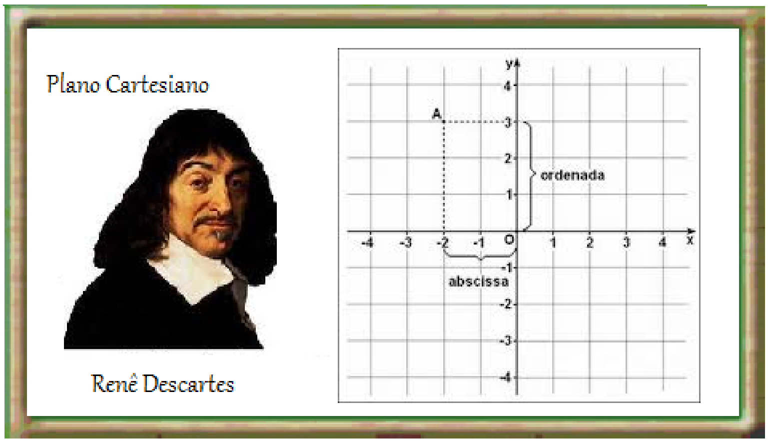
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

1.2 Sistemas de representação

São valores lineares ou angulares que indicam a posição ocupada por um ponto em um sistema de referência.

1.2.1 Sistemas de coordenadas cartesianas

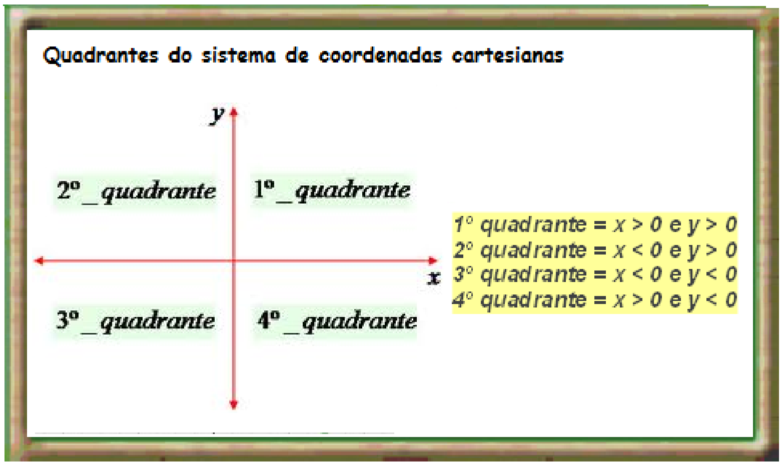
O Sistema de Coordenadas Cartesianas, mais conhecido como Plano Cartesiano, foi criado por René Descartes com o objetivo de localizar pontos. Ele é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas. O eixo horizontal é chamado de abscissa x e o vertical de ordenada y. Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais. Observe a seguir uma figura representativa do plano cartesiano:



As coordenadas cartesianas são representadas pelos **pares ordenados** (x, y), cujo primeiro valor se refere à **abscissa** e o segundo número a **ordenada.** Desta forma, o ponto $P_1(3, 2)$ tem abscissa **3** e ordenada **2**, no qual o símbolo **(3,2)** representa um **par ordenado**. Um ponto $P_2(2, 3)$ apresenta abscissa **2** e ordenada **3**. É importante ressaltar que os pontos P_1 e P_2 são distintos, pois em um par ordenado a ordem dos números é relevante.

Ao ponto localizado na interseção dos eixos, denominamos de origem do **sistema de coordenadas cartesianas**, expresso por $O(0,0)$.

Observamos que o **eixo** x e o **eixo** y dividem o plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes**. Podemos visualizar esta divisão na figura a seguir:

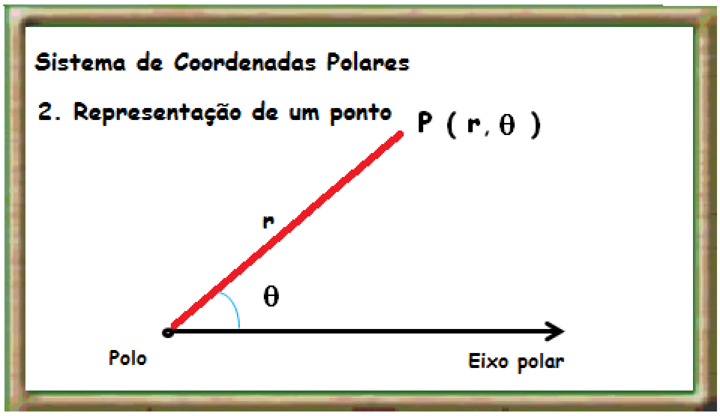


1.2.2 Sistema de coordenadas polares

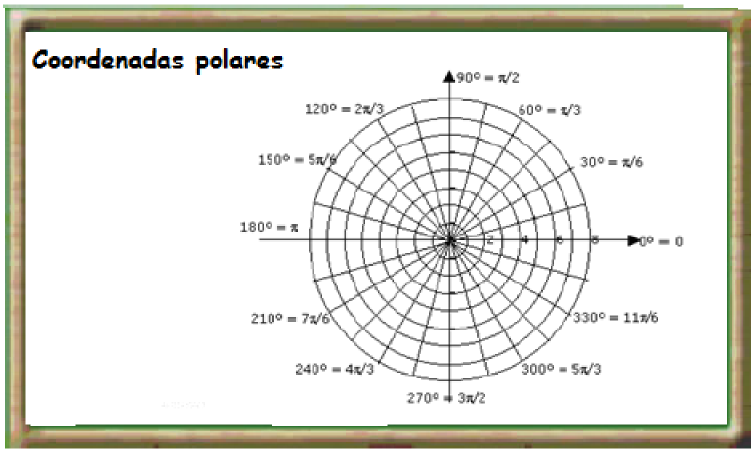
O sistema de coordenadas polares, criado por Jakob Bernoulli, tem, como referenciais, uma semi-reta orientada fixa, denominada *eixo polar*, e um ponto fixo O, denominado *polo*, localizado na origem do eixo polar, conforme observamos a seguir.

A cada ponto P do plano associamos um par de números reais r e θ denominados *coordenadas polares* de P, denotados por $P(r,\theta)$, onde r é a *coordenada radial* (raio) de P ou distância de P ao polo e θ é a *coordenada angular* ou *ângulo polar*.

O ângulo polar θ de um ponto $P(r,\theta)$ mede a abertura entre o eixo polar e o raio OP. Essa abertura é obtida considerando-se numa posição inicial o raio $\overline{OP}$ sobre o eixo polar e abrindo-se o raio até a medida dada de θ. Assim, o eixo polar é o lado origem e o segmento $\overline{OP}$ é o lado extremidade do ângulo. Vide figura abaixo:



Costuma-se representar um sistema de coordenadas polares através dos eixos cartesianos e um conjunto de círculos centrados na origem. Nesse círculo são marcados alguns ângulos, conforme indicado na figura.



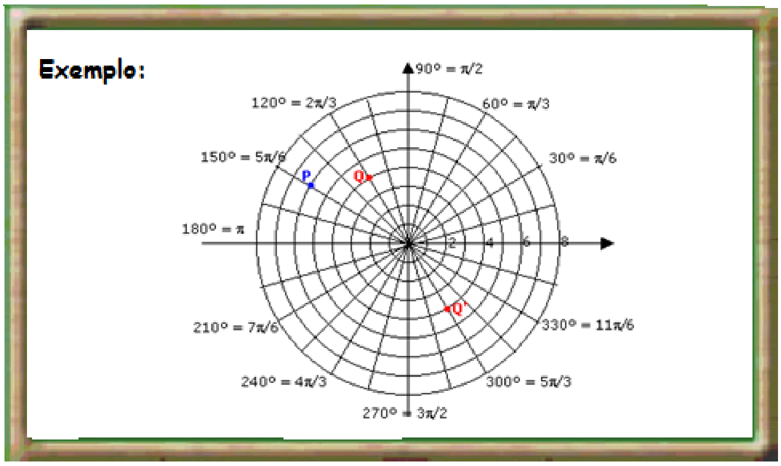
Como θ é um número real, θ deve ser medido em radianos. O ângulo polar θ é positivo se medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário.

Se o raio r for positivo, então ele deve ser marcado sobre o lado extremidade do ângulo polar. Se r for negativo, então ele deve ser marcado sobre o sentido oposto do lado extremidade do ângulo polar, na mesma distância igual ao valor absoluto do raio.

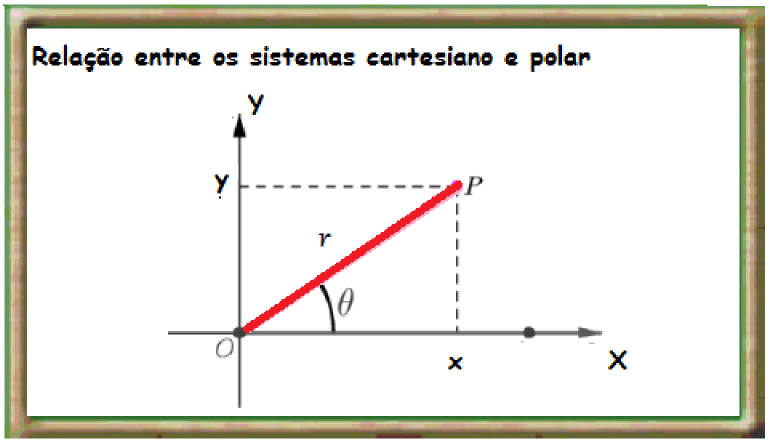
Exemplo: Vejamos como são representados alguns pontos no plano abaixo.

(i) $P\left(6, \dfrac{5\pi}{6}\right)$: este ponto está na circunferência de raio 6 e sobre o eixo referente ao ângulo $\dfrac{5\pi}{6}$.

(ii) $Q\left(-4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$: como r é negativo, Q será simétrico ao ponto $Q'\left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.



1.2.3 Relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas polares



Observando a figura anterior, façamos coincidir as origens e o eixo Ox e o polar dos sistemas de coordenadas cartesianas e polares, respectivamente. Seja P um ponto tal que, (x, y) são suas coordenadas cartesianas e (r, θ) suas coordenadas polares. Assim, se (x, y) é diferente da origem, podemos escrever:

(i) $x = r \cdot \cos\ \theta$;

(ii) $y = r \cdot \text{sen}\ \theta$;

(iii) $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$;

(iv) $\text{tg}\ \theta = \dfrac{y}{x}$.

1.3 Funções reais de variáveis reais

Definição 7 *Dados dois conjuntos não vazios A e B, define-se uma função f com domínio A e contra domínio B, como uma regra que associa a todo $a \in A$ um único elemento $b \in B$, e tal elemento b é denotado por $f(a)$. Para indicarmos uma função f acima, como definida, usaremos a notação:*

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ a & \mapsto & f(a) = b. \end{array}$$

Neste caso, o conjunto A é chamado domínio da função f, e o conjunto B é chamado contra domínio da função f. Além disso, destacamos o conjunto imagem da função f, denotado por

$$Im(f) = \{f(a); a \in A\},$$

e o conjunto

$$G(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a \in A,\ \ b = f(a)\},$$

chamado gráfico da funcão f.

Observação 2 *Quando A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, a função f com domínio A e contra domínio B é dita uma função real de uma variável real.*

Observação 3 *É usual representar uma função f de uma variável real a valores reias e com domínio A, simplesmente por*

$$y = f(x), x \in A.$$

Neste caso, diremos que x é a variável independente, e y, a variável dependente. É usual, ainda, dizer que y é função de x.

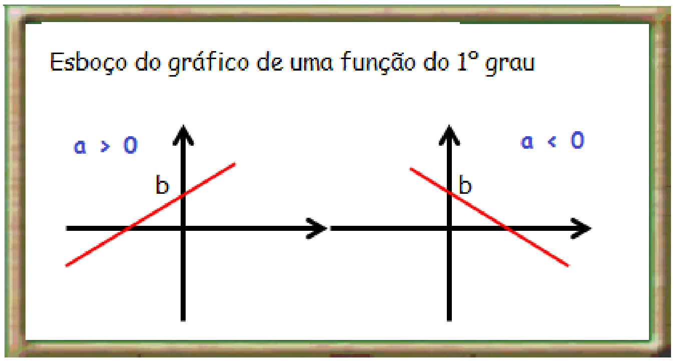
A seguir, apresentamos alguns exemplos de funções.

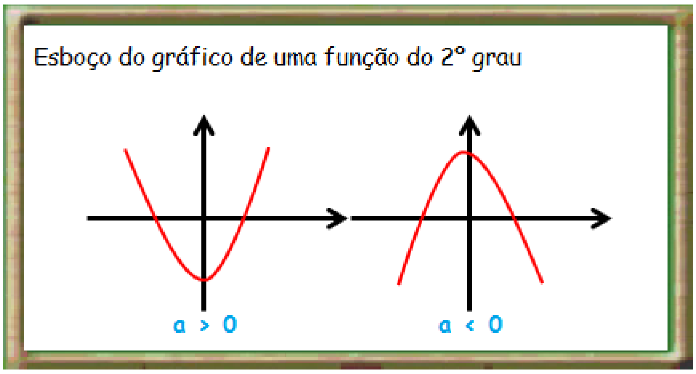
(i) Funções polinomiais. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \end{aligned}$$

onde $a_n \neq 0$, são chamadas funções polinomiais de grau n, com $n \in \mathbb{N}$.

Como ilustração, consideraremos os esboços dos gráficos das funções abaixo.

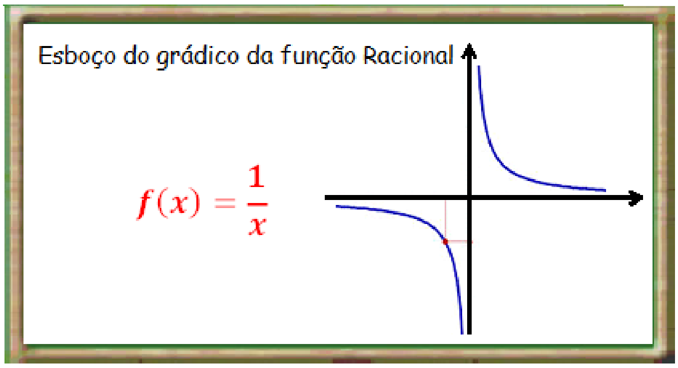




(ii) Funções racionais. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \end{aligned}$$

onde p e q são funções polinomais, são chamadas funções racionais. Note que o domínio da função f é dado por $A = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$. Como ilustração, apresentamos o esboço do gráfico da função racional definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

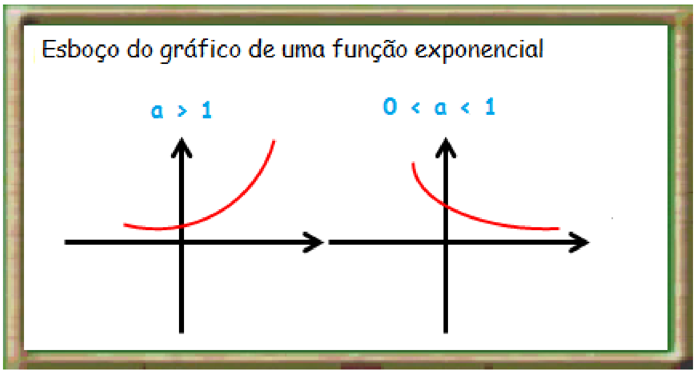


(iii) Funções exponenciais e logarítmicas. Seja $a > 0$ e $a \neq 1$.

– Funções exponenciais. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = a^x, \end{aligned}$$

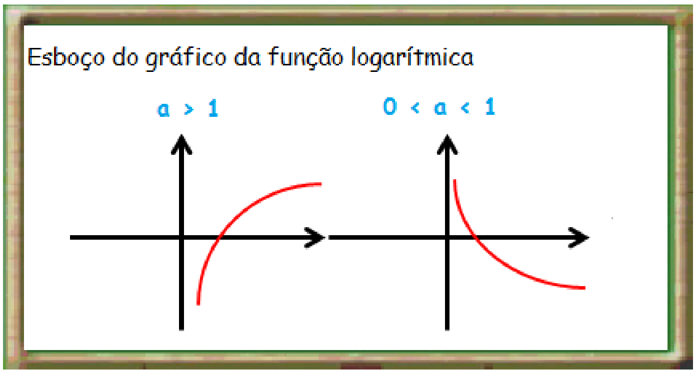
são chamadas funções exponenciais de base a.



– Funções logarítmicas. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \log_a(x), \end{aligned}$$

são chamadas funções logarítmicas de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

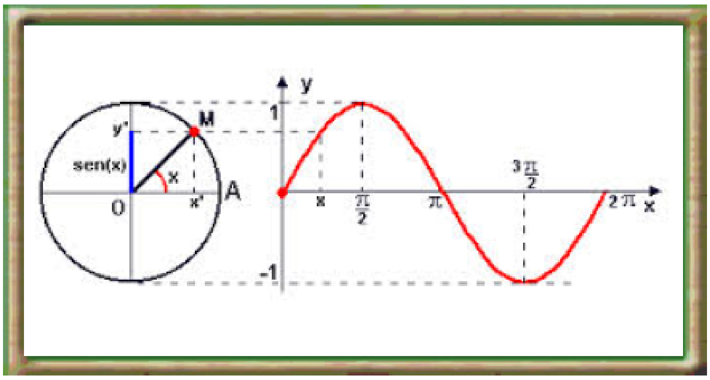


(iv) Funções trigonométricas.

– Função seno. A função definida por:

$$\begin{aligned} \text{sen} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \text{sen}(x), \end{aligned}$$

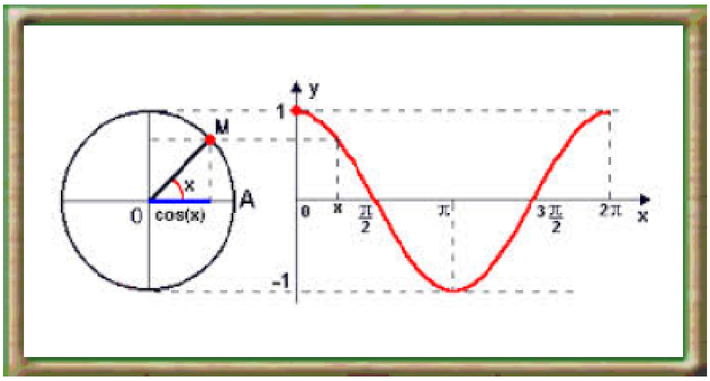
é chamada de função seno. A imagem desta função é o intervalo fechado $[-1, 1]$; a função seno é períodica de período 2π, isto é, $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Veja o seu gráfico a seguir, desenhado apenas no intervalo $[0, 2\pi]$.



– Função cosseno. A função definida por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

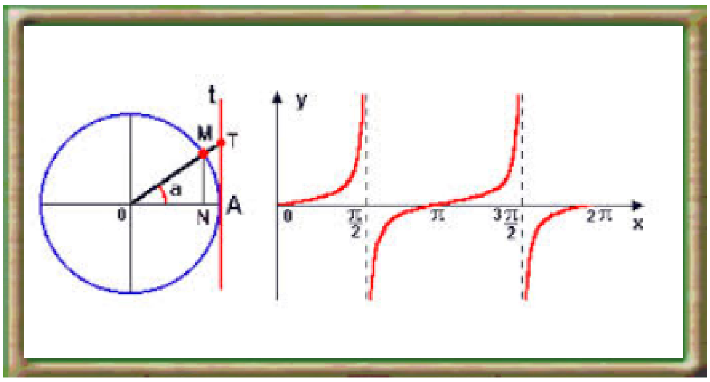
é chamada de função cosseno. A imagem desta função é o intervalo fechado $[-1, 1]$; a função cosseno é períodica de período 2π, isto é, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Veja o seu gráfico a seguir, desenhado apenas no intervalo $[0, 2\pi]$.



– Função tangente. A função definida por:

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} - S &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \end{aligned}$$

onde $S = \left\{ x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, é chamada de função tangente. A imagem desta função é $\mathbb{R}$; a função tangente é períodica de período π, isto é, $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - S$. Note que a função tangente não está definida em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um inteiro. Veja o seu gráfico a seguir, desenhado apenas no intervalo $[0, 2\pi]$.



1.4 Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral é um campo da Matemática com importantíssimas aplicações. Engenheiros, físicos, químicos, matemáticos, geólogos, biólogos, economistas, entre outros, utilizam os conceitos de Cálculo Diferencial Integral nas suas atividades profissionais.

O estudo do Cálculo Diferencial e Integral envolve as noções de limite, derivada e integral. Inicialmente, vamos nos concentrar em compreender as definições intuitivamente para funções reais de uma variável real.

1.4.1 Limites de funções reais de uma variável real

I. **Noção intuitiva de limite de uma função:**

Antes de apresentarmos um conceito formal de limite, observemos a situação a seguir.

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$. Vamos analisar o comportamento de $f(x)$ quando x estiver próximo de 1, mas não for igual a 1.

Inicialmente, consideremos para x os valores 0,9, 0,99, 0,999 e assim sucessivamente. Procedendo deste modo, estamos escolhendo valores cada vez mais próximos de 1, porém menores que 1. Em um segundo momento, consideremos para x os valores próximos de 1, porém maiores que 1. Desta forma, tomemos para x os valores 1,01, 1,001, 1,0001 e assim sucessivamente.

Escrevendo os dados numa tabela, temos:

x	$f(x) = x + 2$
0,9	2,9
0,99	2,99
0,999	2,999
1,01	3,01
1,001	3,001
1,0001	3,0001

À medida que tomamos valores de x cada vez mais próximos de 1, ou seja, $x \to 1$ (lê-se: x tende a 1), os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximos de 3, ou seja, $f(x) \to 3$ (lê-se: $f(x)$ tende a 3), independentemente da sucessão de valores de x usados. Pode-se observar que é possível tomar o valor de f(x) tão próximo de 3 quanto desejamos, desde que tomemos x suficientemente próximo de 1 $(x \neq 1)$.

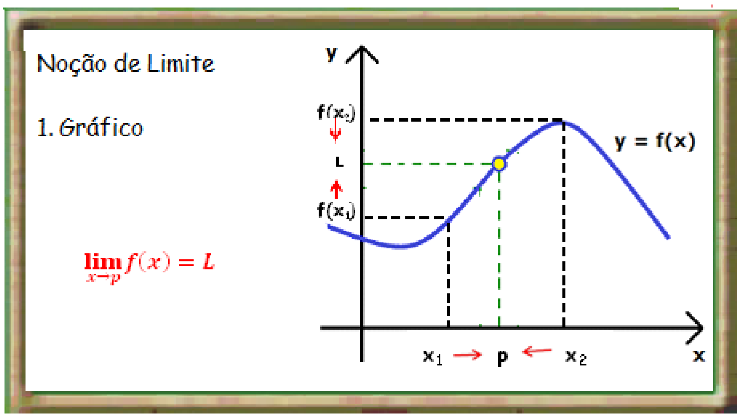
Este número 3, do qual $f(x)$ se aproxima, é denominado **limite** de $f(x)$ quando x tende ao ponto $x = 1$.

Para o correto entendimento do conceito de limite, devemos ter em mente que, como x não é igual a 1 (está próximo de 1), o valor de $f(x)$ consequentemente não é 3, mas está próximo de 3. Afirmamos que o seu limite, isto é, que o valor para o qual $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 1 é igual a 3.

Assim, intuitivamente, dizemos que uma função $f(x)$ tem limite L quando x tende para a, se é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de $x, x \neq a$, suficientemente próximos de a.

II. **Definição de Limite de uma função**

Consideremos o gráfico da função abaixo.



Definição 8 *Quando os valores de x tendem a um número p, pela direita e pela esquerda, e, consequentemente, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de um número L, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a p é igual a L e escrevemos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L,$$

para significar que para cada $\epsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ de tal forma que se x estiver no domínio da função f e satisfizer a desigualdade $0 < |x - a| < \delta$ (isto é, x um ponto do intervalo centrado no ponto a e de raio δ porém diferente de a) então a desigualdade $|f(x) - L| < \epsilon$ será válida.

Exemplo: Seja f uma função definida pela equação $f(x) = 4x - 1$. Dado que $\lim_{x \to 3} f(x) = 11$, encontre δ para $\epsilon = 0{,}01$.

Resolução:

Pela definição, $|f(x) - L| < \epsilon$. Assim:

$$|f(x) - 11| = |4x - 1 - 11| = |4x - 12| = 4\,|\,x - 3\,|\,.$$

Queremos que $4\,|x - 3| < 0,01$, o que equivale escrever $|x - 3| < 0,0025$. Como $0 < |x - 3| < \delta$, temos $0 < |x - 3| < 0,0025$. Logo:

$$0 < \delta < 0,0025.$$

Exemplo: Demonstre usando a definição que $\lim_{x \to 3} 2x - 4 = 2$.

Resolução:

Note que $f(x) = 2x - 4,\ a = 3$ e $L = 2$. Assim, é possível escrever:

$$| f(x) - 2 |< \epsilon, \text{ se } 0 <| x - 3 |< \delta.$$
$$| (2x - 4) - 2 |< \epsilon, \text{ se } 0 <| x - 3 |< \delta.$$
$$2 | x - 3 |< \epsilon, \text{ se } 0 <| x - 3 |< \delta.$$

Isso implica que:$| x - 3 |< \dfrac{\epsilon}{2}$. Escolhendo $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$, a definição se verifica.

III. **Limites laterais**

Ao considerarmos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, estamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de a, isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo a, mas diferentes de a, e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a. Desta forma, podemos escrever

- **Limite lateral à direita**

Definição 9 *O* ***limite lateral à direita*** *de uma função f definida em um intervalo aberto (a, b), quando x se aproxima de a pela direita, será L e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, se $a < x < a + \delta$. Deste modo, $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Notação:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a < x < a + \delta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

- **Limite lateral à esquerda**

Definição 10 *O* ***limite lateral à esquerda*** *de uma função f definida em um intervalo aberto (b, a), quando x se aproxima de a pela esquerda, será L e escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, se $a - \delta < x < a$. Assim, $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Notação:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } a - \delta < x < a \ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação 4 *Um resultado importante que decorre das definições acima pode ser visto a seguir:*

Teorema 11 *Seja I um intervalo aberto contendo a e seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Temos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e forem ambos iguais a L.*

IV. **Propriedades dos limites**

Para encontrarmos o limite de uma função de uma forma direta, necessitamos de alguns teoremas. A seguir, apresentamos algumas regras práticas que nos permitem mais facilmente determinar o limite de uma função. As demonstrações desses teoremas podem ser visualizadas no apêndice do trabalho.

Teorema 12 *O limite de uma função real de uma variável real quado existe é único.*

Teorema 13 *Sejam k um número real, e $f(x)$ e $g(x)$ funções reais de uma variável real, definidas num mesmo conjunto, de modo que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. As seguintes propriedades são verdadeiras.*

(i) $\lim_{x\to a} k = k$;

(ii) $\lim_{x\to a} kf(x) = kL_1$;

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x) + kg(x)] = L_1 + kL_2$;

(iv) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$;

(v) $\lim_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L_1}{L_2}$, *se* $L_2 \neq 0$.

Teorema 14 *O limite de uma função polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, para x tendendo para a, é igual ao valor de numérico de $f(x)$ para $x = a$. Ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*

Exemplo:

1. $\lim\limits_{x\to 1} 5 = 5$.

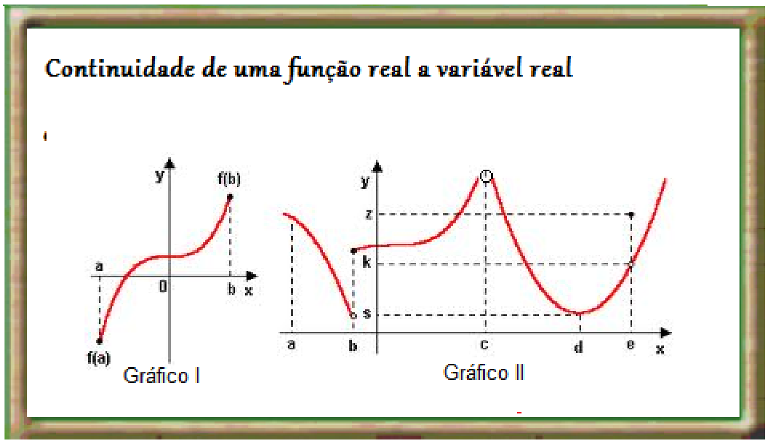
2. $\lim\limits_{x\to 2}(x + 3) = \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 3 = 2 + 3 = 5$.

3. $\lim\limits_{x\to 3} 5x = \lim\limits_{x\to 3} 5 \cdot \lim\limits_{x\to 3} x = 5 \cdot 3 = 15$.

4. $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{2}{x}) = \dfrac{\lim_{x\to 4} 2}{\lim_{x\to 4} x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

1.4.2 Continuidade de funções reais de uma variável real

Intuitivamente, podemos afirmar que uma função é contínua em um intervalo real se a curva representativa de seu gráfico não apresenta saltos nem furos. Diremos que uma função f é contínua em um ponto a do seu domínio quando o seu gráfico é um contínuo de pontos em torno do ponto que possui o número a como abscissa. Quando esta propriedade é válida em todos pontos do gráfico da função diremos que a função contínua.



De acordo com nossas considerações iniciais, podemos observar que o gráfico I, apresentado acima, não apresenta nenhuma interrupção em seu traçado. Desta forma, a função representativa desse gráfico é **função contínua**. Entretanto, o gráficos II apresenta interrupção, um "salto", como no ponto b ou "furo"em seu traçado, como no ponto e. Funções que apresentam estes gráficos são ditas **funções descontínuas**.

Definição 15 *Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo e seja **a** um ponto desse intervalo. Assim, a função $f(x)$ é contínua no ponto **a** se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Decorre desta definição e do conceito de existência de um limite que, uma função $f(x)$ é contínua no ponto **a** se e somente se são verificadas, simultaneamente, as seguites condições:

1. existe o valor $f(a)$.
2. existe $\lim_{x\to a} f(x)$, isto é, existem e são iguais os limites laterais.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Como exemplo, analisaremos as funções a seguir:

Exemplo: Verificaremos se a função definida a seguir é contínua em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x}{2} + 3, & \text{se} \quad 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Resolução: $f(x)$ será contínua em $x = 2$ se atender as três condições de continuidade citadas anteriormente. Assim:

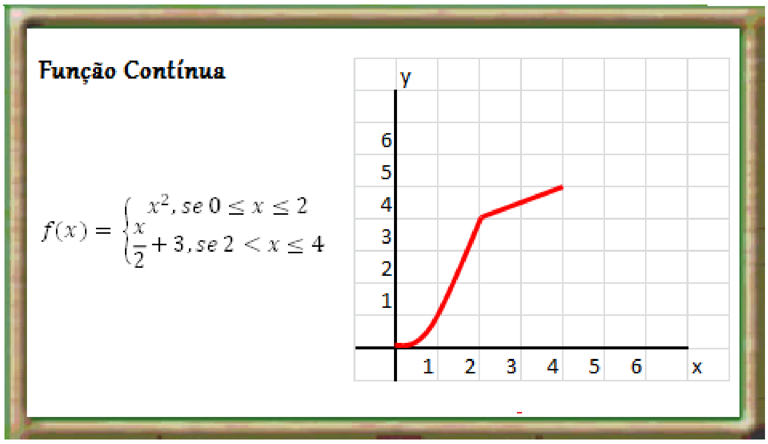
(i) existe o valor $f(2)$, pois $f(2) = 2^2 = 4$;

(ii) existe o $\lim_{x\to 2} f(x)$, pois aplicando a regra do limite da função polinomial, temos que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{2} + 3 = 4.$$

Portanto, existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Como $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, $f(x)$ **é contínua em** $x = 2$. Isso significa que, se olharmos o gráfico de $f(x)$, no ponto $x = 2$ não haverá salto ou furo, como podemos comprovar a seguir:



Exemplo: Verificaremos, a seguir, se a função definida a seguir é contínua.

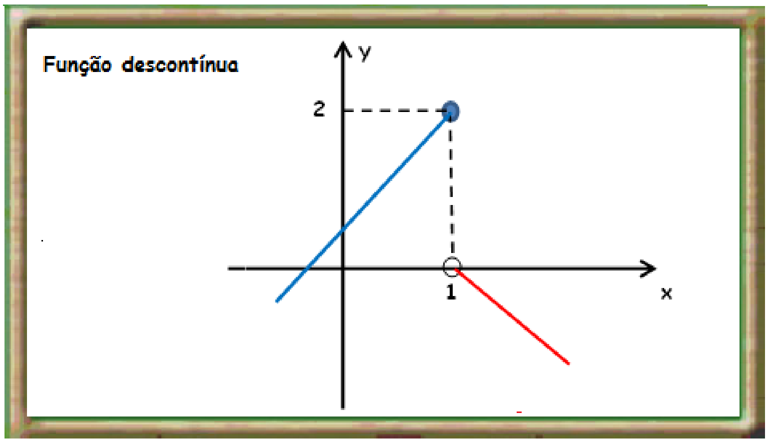
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1 - x, & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Resolução: Calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-x) = 0.$$

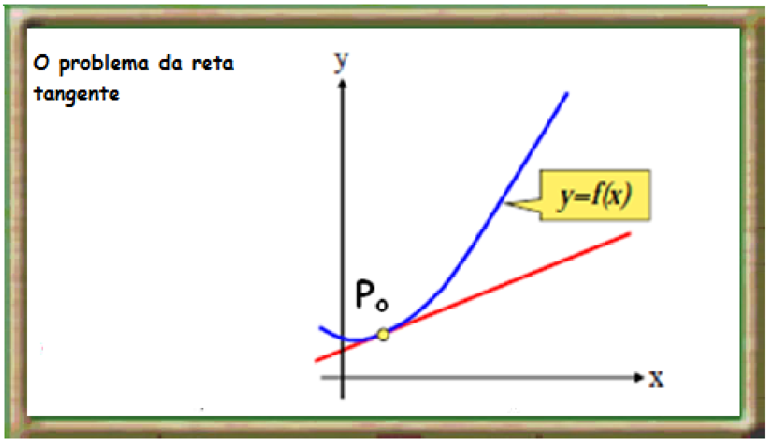
Como os limites laterais são distintos, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$. Logo, a função é descontínua.

A construção do esboço de seu gráfico ilustra a descontinuidade.

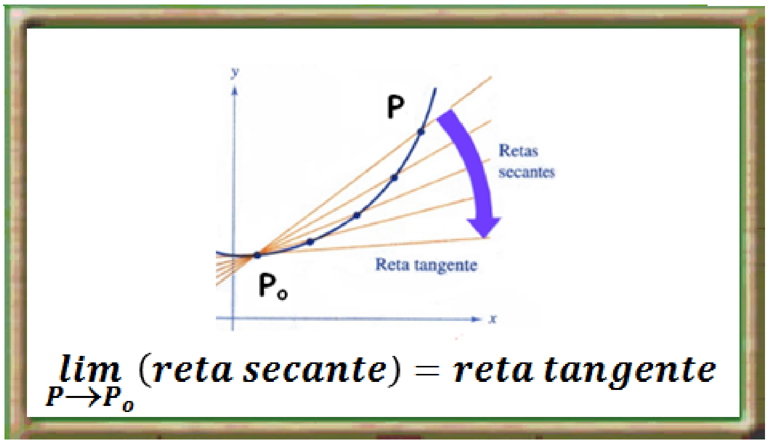


1.4.3 Diferenciabilidade de funções reais de uma variável real

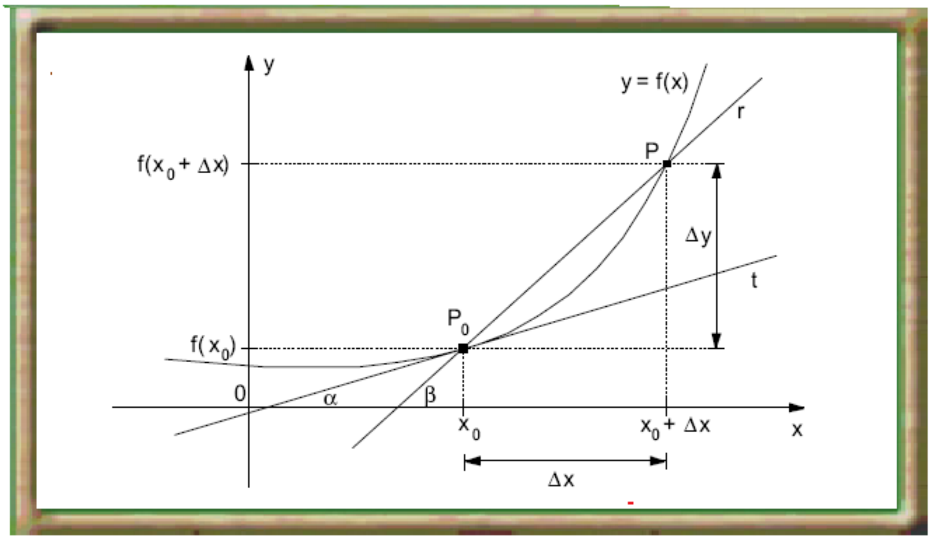
Considere o seguinte problema: determine a equação da **reta tangente** ao gráfico da função $f(x)$ no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ (pertencente ao gráfico da função f). Inicialmente, devemos considerar que este problema é equivalente ao de



encontrar o **coeficiente angular** da reta tangente no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$. Desta forma, é possível fazer uma aproximação desse coeficiente angular usando uma reta secante que passa pelo ponto de tangência P_o e um segundo ponto na curva P. Quando o ponto P se aproxima do ponto P_o, a reta secante vai inclinando até atingir uma posição limite. Essa posição limite é o que chamamos de reta tangente.



Compreendido o significado de reta tangente, considere a figura abaixo, que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$, definida num intervalo.



Observe que, se for acrescentado Δx a partir do ponto x_0, denotaremos $x_0+\Delta x = x$ ou $\Delta x = x - x_0$ (incremento da variável x). Em consequência disto, a função $f(x)$ também sofrerá um acréscimo Δy a partir de $f(x_0)$. Desta forma, temos $f(x_0) + \Delta y = f(x)$ ou $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ (incremento da função).

Definição 16 *Chamamos de* ***razão incremental*** *da função $f(x)$, a partir do ponto x_0, a razão entre os incrementos Δy e Δx, e expressamos por:*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se o limite da razão incremental $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ existir e for finito, dizemos que a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0. Desta forma, a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 será determinada pelo valor desse limite e denotada por $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Vimos, anteriormente, que $\Delta x = x - x_0$. Deste modo, concluímos que:

1. Se $x \to x_0$, então $\Delta x \to 0$;
2. $x = x_0 + \Delta x$;
3. $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$.

Sendo assim, o limite

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

pode ser reescrito da seguinte forma

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definição 17 *Denomina-se derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0, o limite, se existir e for finito, da razão $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero, ou seja:*

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

No estudo das derivadas, se faz necessário a compreensão do seu significado geométrico, principalmente ao conceito de coeficiente angular da reta. Deste modo, considere $f(x)$ contínua e definida em um intervalo I, cujo gráfico é expresso pela curva C. A reta r, secante à curva C, é definida pelos pontos $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$. Assim, podemos afirmar que o coeficiente angular de s é dado por:

$$\tan\beta=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

o que corresponde à razão incremental de $f(x)$ no ponto x_0.

Observando o gráfico anterior, quando Δx tende a 0, ou seja, quando x tende a x_0, o ponto P se aproxima de P_0 e a reta secante r tenderá a uma reta t, que denominamos de reta tangente à curva C no ponto P_0.

Se a reta r tende à reta t, então β tende a α, onde β é o coeficiente angular da reta secante.

Portanto:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha.$$

Assim, concluímos que:

$$f'(x_0) = \text{tg } \alpha.$$

A derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular (tg β) da reta t, tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $P(x_0; f(x_0))$. Desta forma, a equação da reta t pode ser representada por:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Apresentamos a seguir, algumas regras práticas que nos permitem mais facilmente determinar a derivada de uma função.

Teorema 18 *Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções reais de uma variável real, definidas e deriváveis num mesmo conjunto. Desta forma, as seguintes propriedades são verdadeiras.*

(i) Derivada da soma de funções derivavéis.

$$\textit{Se } f(x) = u(x) + v(x), \textit{ então } f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

(ii) Derivada do produto de funções derivavéis.

$$\textit{Se } f(x) = u(x).v(x), \textit{ então } f'(x) = u'(x).v(x) + v'(x).u(x).$$

(iii) Derivada do quociente de funções derivavéis.

$$\textit{Se } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \textit{ com } v(x) \neq 0, \textit{ então } f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{[v(x)]^2}.$$

Usando a definição e as propriedades acima podemos mostrar a derivada de inúmeras funções elementares como exponencial, logarítmica, trigonométricas e suas inversas. A seguir, apresentamos um resumo das derivadas de várias destas funções elementares.

1. **Derivada da função afim:** se $f(x) = ax + b$, então $f'(x) = a$.

2. **Derivada da função identidade:** se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.
3. **Derivada da função constante:** se $f(x) = k$ então $f'(x) = 0$.
4. **Derivada da função exponencial, com expoente natural:** se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$.
5. **Derivada da função seno:** se $f(x) = \text{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$.
6. **Derivada da função cosseno:** se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) =$ - sen x.
7. **Derivada da função logarítmica natural:** se $f(x) = \ell n x$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemplo:

1. $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2$.
2. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.
3. $f(x) = 8 \Rightarrow f'(x) = 0$.
4. $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$.
5. $f(x) = 2 \cdot \text{ sen} x \ \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \cos x$.
6. $f(x) = 3 \cdot \ell n x + 2x^3 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{x} - 6x^2$.

Teorema 19 (Regra da cadeia) *Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções reais de uma variável real, deriváveis tais que o conjunto imagem da função v esteja contido no domínio da função u, então a função composta entre u e v, definida por $f(x) = u(v(x))$ é bem definida e é derivável com*

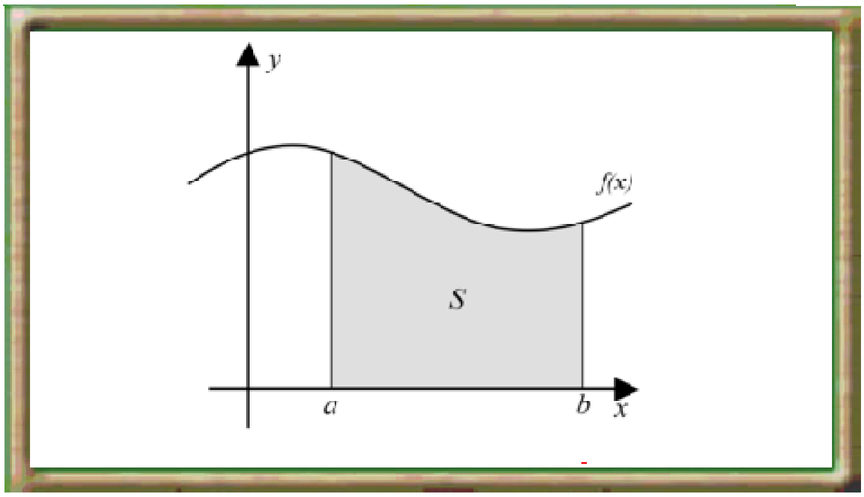
$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

Definição 20 *Diremos que uma função f é de classe C^1, ou continuamente diferenciável, quando esta for uma função derivável e a sua derivada definir uma função contínua. Também, diremos que f é de classe C^2, ou duas vezes continuamente diferenciável, quando esta for uma função duas vezes derivável (e isto significa dizer que a derivada da função f define uma função derivável) e a sua derivada de segunda ordem define uma função contínua. Seguindo este raciocínio, diremos que f é de classe C^∞, ou infinitamente continuamente diferenciável, quando esta for uma função de classe C^n, seja qual for $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo: Todas funções polinomiais, funções exponenciais, e as funções seno e cosseno são de classe C^∞.

1.4.4 Integrabilidade

Considere o seguinte problema: dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, obtenha a área da região S delimitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, eixo x e pelo gráfico da função f.



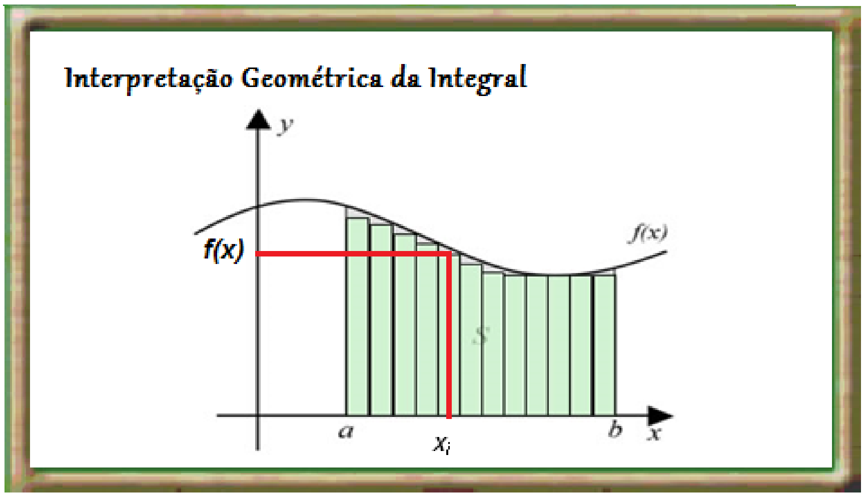
Pensando em responder o problema proposto acima, façamos as seguintes considerações: se f é uma função de x, então a sua integral definida é uma integral restrita à valores em um intervalo específico, digamos, $a \leq x \leq b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x. Vejamos a definição:

Definição 21 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ e seja x_i um número pertencente ao iésimo intervalo, para $i = 1, 2, ..., n$. Neste caso, a integral definida de f em $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left[\sum_{n}^{i=1} f(x_i) \right] \Delta x,$$

se este limite existir.

Observação 5 *Intuitivamente a integral de uma função $f(x)$ pode ser entendida como sendo o limite da soma das áreas dos retângulos de altura $f(x_i)$ e base Δx, quando a base tende a zero. Note que, o produto $\Delta x f(x_i)$ é a área de cada um retângulos. A soma de todas estas áreas, fornece a área total abaixo da curva. Mais precisamente, definimos a integral definida da função sobre o intervalo de extremidades a e b como sendo o valor deste limite, quando o mesmo existe.*



Pode-se mostrar que se a função $y = f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$, então ela é integrável em $[a, b]$.

Definição 22 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A integral indefinida da função f é uma função (ou família de funções), expressa por $\int f(x)dx = F(x)$ tal que $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, ou seja*

$$\int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Observação 6 *A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número. Este não depende da variável x. A integral indefinida, ao contrário, é uma função ou família de funções. A conexão entre elas é dada pelo teorema fundamental do cálculo (apresentado abaixo). Se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$, então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 23 (Teorema fundamental do cálculo) *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função contínua e seja F uma primitiva de f em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

No segue que, apresentaremos as propriedades da integral que utilizaremos ao longo do texto.

Teorema 24 *Seja $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então*

1. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

2. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$;

3. *Para cada* $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4. *Se* f *é integrável em* $[a, b]$, *então a função* $|f|$ *é integral e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

1.5 Equações paramétricas

Na análise das funções definidas por equações cartesianas, geralmente consideramos uma variável como independente e a outra como dependente, ou seja $y = f(x)$ ou $x = h(y)$. Entretanto, alguns movimentos ou caminhos são inconvenientes, difíceis ou impossíveis de serem representados por uma função de uma variável da forma $y = f(x)$. Para solucionar este impasse, introduzimos o conceito de equações paramétricas. Em vez de definir y em termos de x, ou x em termos de y, definimos ambos x e y em termos de uma terceira variável chamada de parâmetro.

Definição 25 *Sejam um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *e,* $x(t)$ *e* $y(t)$ *funções contínuas definidas em* I*. Deste modo, podemos afirmar:*

1.
$$\begin{array}{rcl} \lambda : I & \rightarrow & \mathbb{R}^2. \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$
é uma curva parametrizada.

2. *O conjunto* $C = \{f(x(t), y(t));\ t \in I\}$ *(imagem da função* λ*) é uma curva parametrizada contínua.*

3. *As equações*
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in I,$$
são equações paramétricas da curva C*. Dizemos também que essas equações parametrizam a curva* C*.*

O parâmetro t pode ser interpretado como tempo e $(x(t), y(t))$ nos dá a posição de um ponto no instante t, que se desloca no plano xOy . A curva C é a trajetória descrita pelo ponto. Assim como é possível fazer um percurso de várias maneiras (mais rápida ou mais devagar, num sentido ou no outro, etc) uma dada curva pode ter várias equações paramétricas.

Observação 7 *O gráfico de qualquer função pode ser representado como uma curva parametrizada. É necessário, apenas, que dado uma função $y = f(x)$, observemos que seu gráfico é determinado pelos pontos $(x, f(x))$, onde x percorre os valores permitidos do domínio. Deste modo, podemos escrever:*

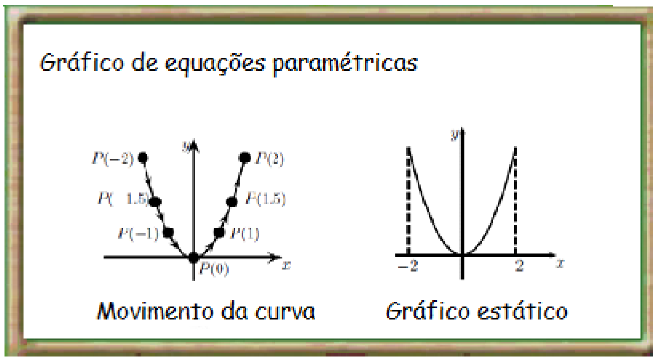
$$\begin{cases} x &= x(t) = t, \\ y &= y(t) = f(t). \end{cases}$$

Assim, determinando os pontos $P(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$, temos o gráfico de f.

Exemplo: Considere a função $y = x^2 + 1$ no domínio $-2 \leq x \leq 2$. Vamos expressar o gráfico da função como uma curva parametrizada. Considerando $x = t$, podemos escrever:

$$\begin{cases} x &= t, \\ y &= t^2 + 1, \end{cases} - 2 \leq x \leq 2.$$

Desta forma, temos $P(t) = (t, t^2 + 1)$, então $P(-2) = (-2, 5)$ e $P(1) = (1; 2)$ e assim sucessivamente.

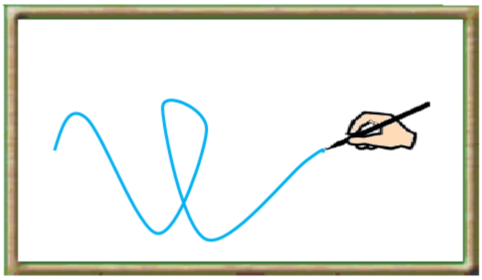


Capítulo 2

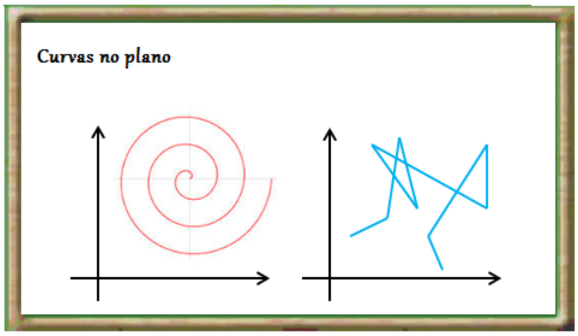
Curvas planas

2.1 Conceitos iniciais

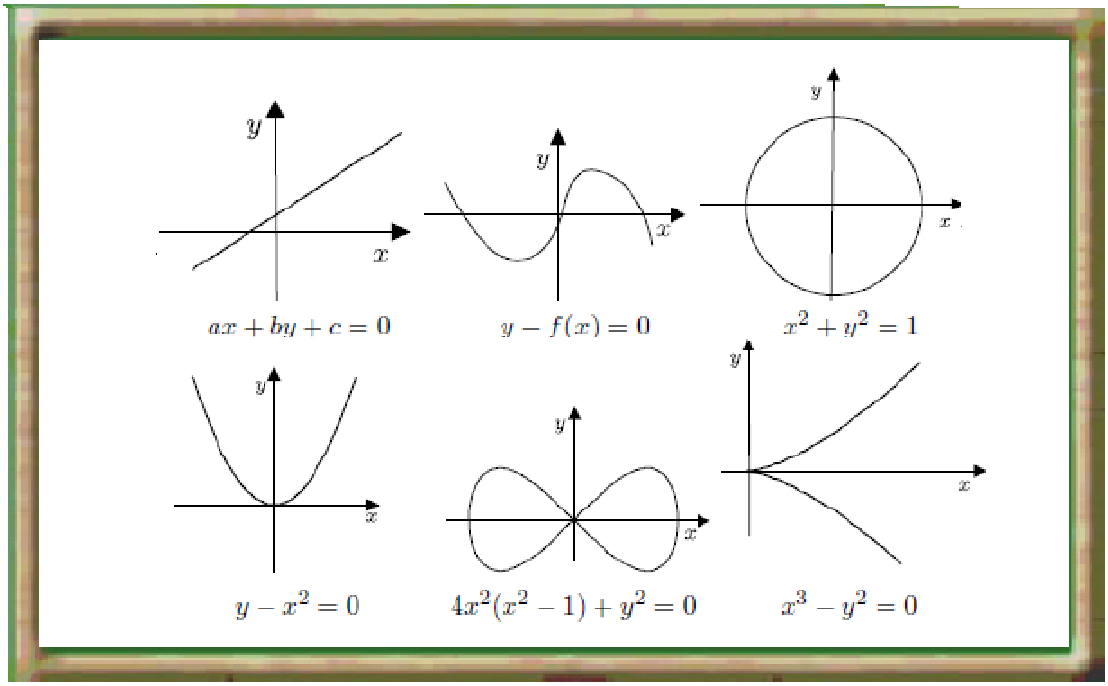
De modo intuitivo, uma curva no plano pode ser entendida como o gráfico de funções de uma variável real ou figuras desenhadas com um único traço, sem tirar o lápis do papel.



De forma um pouco mais precisa, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano. Como exemplos, observe as figuras a seguir:



Um primeiro ponto a considerar, seria, de acordo com a Geometria Analítica, considerar uma curva em $\mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem equações do tipo $f(x, y) = 0$, dada uma função real de duas variáveis real f. São vários os exemplos que podemos considerar como curvas que estão nessa classe de subconjunto do plano. Vejamos alguns abaixo:



Devemos salientar que, mesmo para funções bem comportadas, esse tipo de conjunto por vezes se afasta do que entendemos por uma curva. Por exemplo, para a função definida por $F(x, y) = xy$, a equação $F(x, y) = 0$ descreve o conjunto formado pelos eixos coordenados, que aparentemente não se enquadra na nossa ideia original, ou seja, de uma figura "traçada"sem tirarmos o lápis do papel.

Em contrapartida, existem conjuntos que desejaríamos considerar como curvas, mas os mesmos não podem ser descritos como tal. Em muitas situações, considerar o caso especial em que curvas são descritas por uma equação da forma $F(x, y) = 0$ pode ser útil. Um caso especialmente importante é quando $F(x, y)$ é um polinômio em duas variáveis. Nesse caso, o conjunto $F(x, y) = 0$ é chamado uma curva algébrica. O estudo desse tipo de "curva"é o ponto inicial da Geometria Algébrica, um importante ramo da Matemática.

No entanto, no âmbito que concerne a Geometria Diferencial, em vez de considerarmos curvas definidas por equações, vamos retornar à ideia intuitiva que uma curva deve descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto $\lambda(t)$ representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $[a;b]$, o conjunto que iremos considerar é:

$$C = \{\lambda(t) \in \mathbb{R}^2;\ t \in [a;b]\}.$$

A vantagem dessa abordagem é que ela poderá ser facilmente formalizada e conterá várias informações sobre como o ponto $\lambda(t)$ percorre o conjunto C, o sentido que o ponto "anda"sobre C. Podemos, ainda, definir sua velocidade, sua aceleração, e etc.

Cabe-nos, agora, introduzir uma definição formal de curva plana. Faremos isso na seção seguinte.

2.2 Curvas planas

Definição 26 *Uma curva contínua no plano $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação contínua $\lambda : I \to \mathbb{R}^2$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação λ, dada por $\lambda(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x; y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

O conjunto imagem C da aplicação λ, dado por

$$C = \{\lambda(t) = (x(t), y(t));\ t \in I\}.$$

é chamado de traço de λ. Devemos observar que, de acordo com a definição acima, estamos analisando todo o movimento da partícula e não somente o conjunto C. Nesse caso, λ é dita uma parametrização de C e denominamos t o parâmetro da curva λ.

Definição 27 *Se a curva λ está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\lambda(a)$ e $\lambda(b)$ são ditos ponto inicial de λ e ponto final de λ, respectivamente.*

Definição 28 *Se λ está definida num intervalo $I = [a, b]$ e $\lambda(a) = \lambda(b)$, dizemos que λ é uma curva fechada. Uma curva $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dita periódica se existe um número real $l > 0$, tal que*

$$\lambda(t + l) = \lambda(t),$$

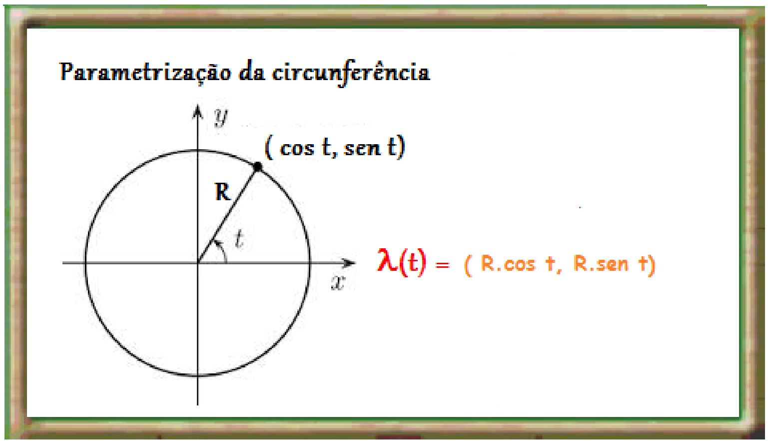
para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor de l_0 para o qual a equação acima se verifica é chamado de período de λ. Desta forma, a curva λ fica completamente determinada por sua restrição a um intervalo da forma $[t_0, t_0 + l_0]$.

Definição 29 *Uma curva $\lambda : I \to \mathbb{R}^2$ é dita simples, se a aplicação for injetiva. Quando temos que $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que λ possui um ponto duplo (ou múltiplo) em t_1 e t_2.*

Definição 30 *Uma curva fechada $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita fechada e simples se $\lambda(t) \neq \lambda(s)$, para todo $t \neq s \in [a, b)$e $\lambda(a) = \lambda(b)$, isto é, se o único ponto duplo de λ ocorre nos seus pontos inicial/final. Quando λ é uma curva fechada e simples, ela é denominada curva de Jordan. Em muitas situações, quando não houver prejuzízo no entendimento, iremos denominar o traço da curva de Jordan também como curva de Jordan.*

Dentre as curvas planas contínuas, temos a circunferência, a elipse, a parábola, a hipérbole, a cardióde, as rosáceas de n pétalas, a lemniscata, a ciclóide, a astróide, cissóide, entre outras. Algumas delas são expressas na forma paramétrica, no entanto, outras se expressam melhor no sistema de coordenadas polares $r = F(\theta)$. A seguir, apresentamos as equações e os traços de algumas delas.

1. Círculo: o círculo de raio R e centro na origem O, denotado por $S_R(O)$, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cuja distância ao ponto (0; 0) é constante e igual a R, isto é:
$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

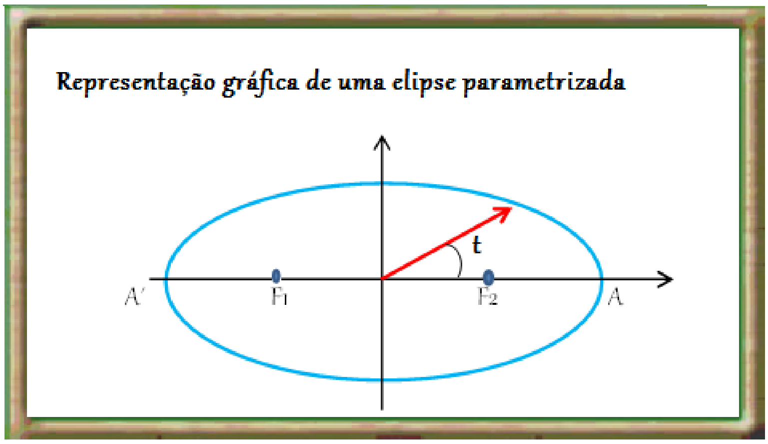


O círculo $S_R(O)$ é o traço da curva contínua λ, definida por $\lambda(t) = (R \cdot \cos t, R \cdot \text{sen}(t))$; $t \in \mathbb{R}$. O parâmetro t representa o ângulo que $\lambda(t)$ faz com o eixo Ox. De modo mais amplo, para um círculo de centro $(a; b)$ e raio R, $S_R((a, b))$, é o traço da curva $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\lambda(t) = (a+R\cdot\cos t, b+R\cdot\text{sen}t)$. Devemos observar que, quando t percorre a reta real, $\lambda(t)$ move-se sobre $S_R((a, b))$ no sentido anti-horário um número infinito de vezes. Ao restringirmos o domínio de λ a um intervalo de comprimento 2π, $\lambda(t)$ percorrerá $S_R((a, b))$ uma única vez. A curva $\lambda||_{[0,2\pi]}$ é uma curva de Jordan.

2. Elipse: Entende-se por elipse o lugar geométrico de um plano onde a soma da distância de sua extremidade a dois pontos fixos, chamados de focos, F_1 e

F_2, resulta em uma constante 2a, onde 2a > 2c. Se escolhemos o sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^2$ de modo que $F_1 = (-c; 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, com $c > 0$, então a elipse é descrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere t o ângulo que o vetor com o ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz com o semi-eixo Ox positivo. Assim, podemos parametrizar a elipse pelo traço da curva $\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\lambda(t) = (a \cdot \cos t, b \cdot \text{sen} t).$$

3. Parábola de Neill: consiste no conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $x^3 - y^2 = 0$. Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere t o ângulo que o vetor, com ponto inicial na origem e ponto final (x, y), faz com o semi-eixo Ox positivo.

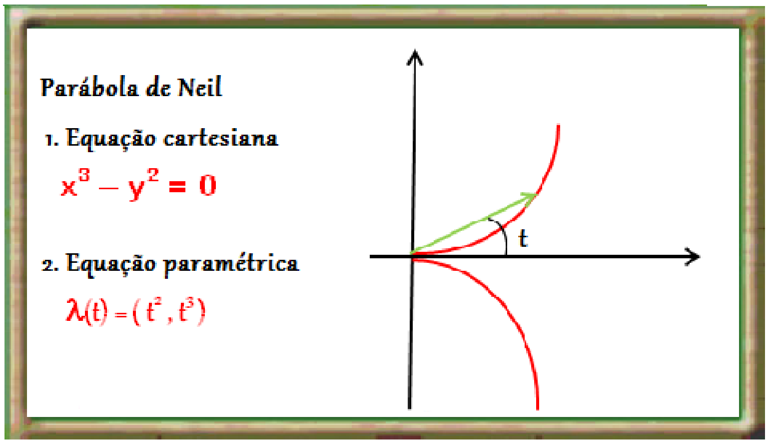
   Assim podemos parametrizar a Parábola de Neill pelo traço da curva $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

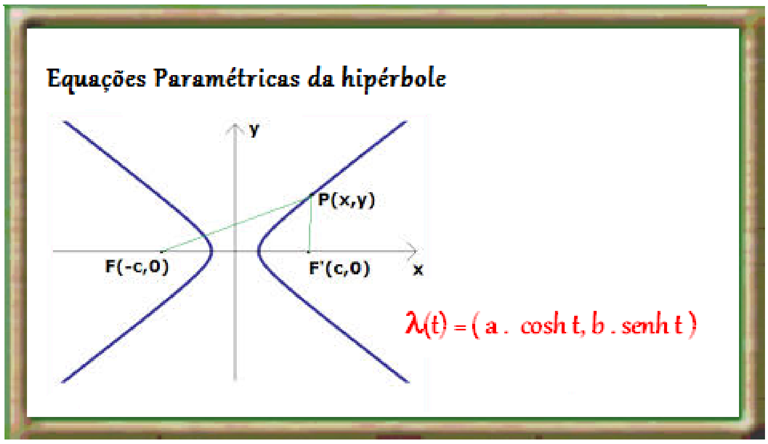
$$\lambda(t) = (t^2, t^3).$$

4. Hipérbole: A hipérbole de focos P_1 e P_2 é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja diferençaa das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é, em valor absoluto, uma constante.

   Se escolhemos o sistema de coordenadas cartesianas, a hipérbole é descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$





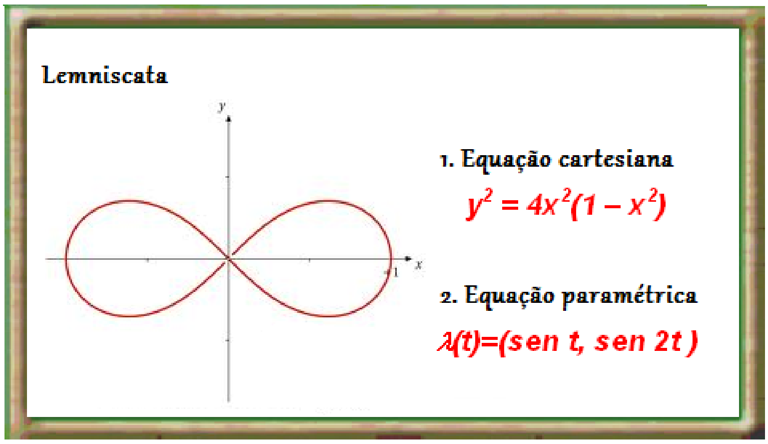
Observando que as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas, respectivamente, por

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ e } \mathrm{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

podemos escrever $\cosh^2 t - \mathrm{senh}^2 t = 1$. Assim, o ramo direito da hipérbole, tem como parametrização

$$\lambda(t) = (a \cdot \cosh t,\ b \cdot \mathrm{senh} t).$$

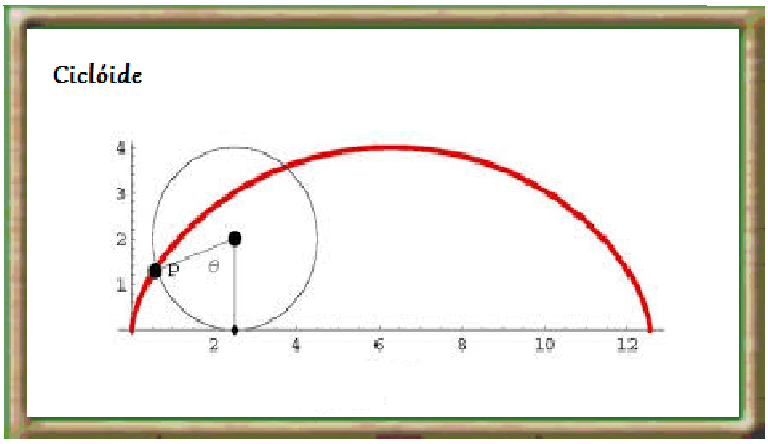
5. Lemniscata: é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cuja forma cartesiana é dada por $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$. Observamos que o parâmetro t deve ser compreendido como o ângulo entre um vetor de $\mathbb{R}^2$, com ponto final (x, y), e o eixo Ox. Desta forma, a lemniscata tem como parametrização o traço da curva $\lambda : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por



$$\lambda(t) = (\text{sen}t;\ \text{sen}2t).$$

6. Ciclóide: é gerada pelo movimento de um círculo de raio r que rola ao longo do eixo Ox. Sua expressão na forma paramétrica é

$$\lambda(t) = (rt \ - \ r\cdot\text{sen}t;\ r \ - \ r.\cos t).$$

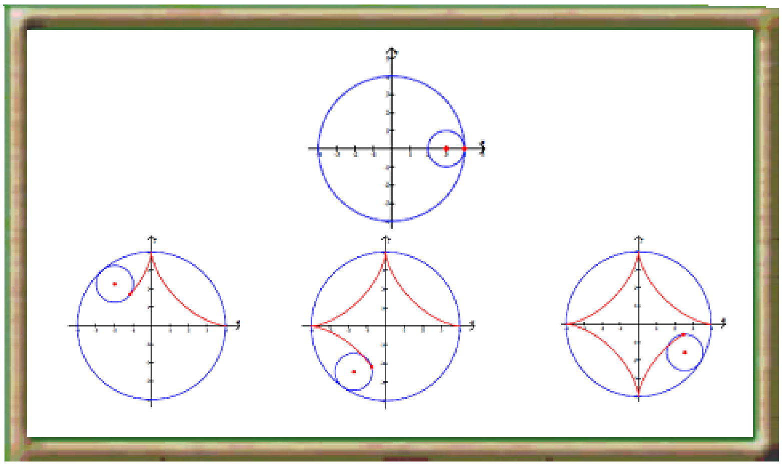


Fazendo $\cos t = 1 - \dfrac{y}{r}$, temos que $t = \arccos(1 - \frac{y}{r})$, obtemos a equação cartesiana

$$x = r\cdot\arccos(1-\frac{y}{r}) \ \mp \ \sqrt{2.ry - y^2}.$$

7. Astróide: (também chamada hipociclóide) é o lugar geométrico descrito por um ponto de uma circunferência de raio $\frac{r}{4}$ que rola sobre outra circunferência de raio r sempre dentro da circunferência maior. Pode-se mostrar que o

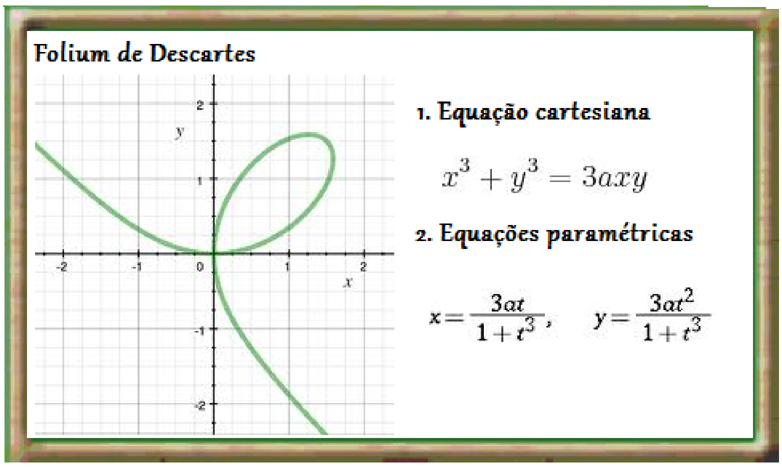
comprimento da ciclóide é $6r$. Considerando que a equação do círculo maior é expressa por $x^2 + y^2 = 16$ (raio 4), temos que o círculo gerador tem raio 1 e tangencia o círculo maior. Logo sua equação é $(x-3)^2 + y^2 = 1$, como na figura abaixo. O centro desse círculo gira em torno de um círculo de raio 3. Logo a equação desse ponto genérico é $P = (3\cos(a), 3\sin(a))$. Conseqüentemente o círculo gerador tem equação $(x - 3\cos(a))^2 + (y - 3\sin(a))^2 = 1$. As



equações paramétricas da astróide são

$$\begin{cases} x = r(\cos(t))^3 \\ y = r(\sin(t))^3 \end{cases} ; 0 \leq x \leq 2\pi.$$

8. O Folium de Descartes: possui um aspecto de uma folha. Sua forma cartesiana é $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

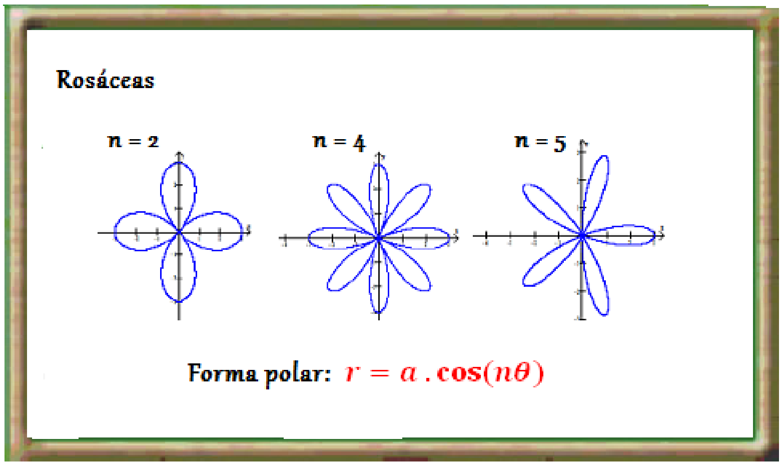


Sua expressão na forma paramétrica é

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} ; -\infty < x < +\infty.$$

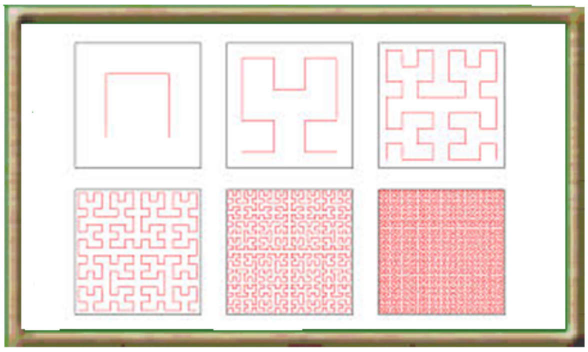
Devemos observar que a constante a dá o tamanho da folha.

9. Rosáceas de n pétalas: são curvas descritas na forma polar por $r = a\cos(n\theta)$, onde a é o raio do círculo onde está inscrita a rosácea.

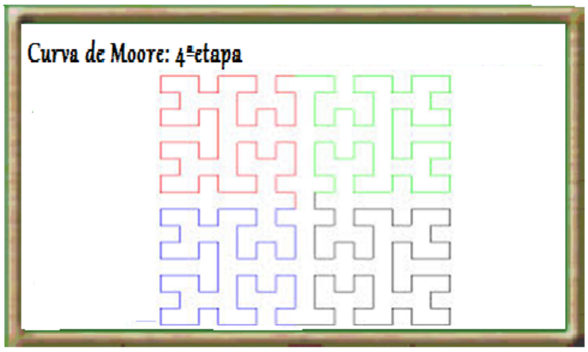


Curiosamente, quando n é par a rosácea tem 2n pétalas, e quando n é ímpar ela tem o mesmo número n de pétalas.

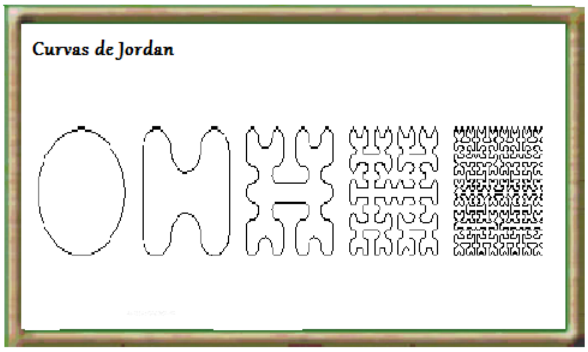
10. Curvas que preenchem o espaço - Curva de Peano e Curva de Hilbert: as curvas de preenchimento do espaço são denominadas curvas de Peano em homenagem ao seu primeiro pesquisador, Giuseppe Peano, matemático do século XIX. Outros pesquisadores, como David Hilbert, deram continuidade a pesquisa das curvas de preenchimento do espaço estendendo-as para espaços n-dimensionais. As curvas de Peano-Hilbert funcionam baseadas na partição do espaço, de forma contínua e única. Como cada partição é um subespaço similar ao original, a construção pode ser novamente aplicada a cada partição, gerando novas partições e assim sucessivamente. A curva de Hilbert é a aplicação limite desse processo, aplicado ao conjunto formado por três segmentos de reta de comprimento um, dois a dois ortogonais, formando uma figura U. As figuras a seguir mostram os traços das seis primeiras etapas da construção da curva de Hilbert.



A curva limite obtida por esse processo será uma curva contínua cujo traço é todo o quadrado $[0,1] \times [0,1]$. Eliakim Moore obteve uma construção similar. Tomando-se inicialmente um quadrado, construiu uma curva chamada *curva de Moore*, cujo traço preenche $[0,1] \times [0,1]$. Porém, em cada etapa da construção, temos uma curva de Jordan. A figura a seguir ilustra a quarta etapa da construção da curva de Moore.



Podemos fazer uma construção similar à essa, onde, em cada etapa, temos ua curva de Jordan diferenciável. Observe as figuras a seguir:



2.3 Curvas suaves

Nesta seção, iremos analisar localmente uma curva λ no plano, isto é, fixado t_0, observaremos como se comporta $\lambda(t)$ para valores de t próximos de t_0. Para esta análise, o ideal seria que pudéssemos ter uma reta que fosse uma boa aproximação para esta curva. Entretanto, somente com a definição de curvas contínuas, isso nem sempre é possível.

Ao escrevermos λ como

$$\lambda(t) = (x(t), y(t)),$$

então λ é uma aplicação *suave*, se e somente se, cada função coordenada $x, y : I \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞, isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de I. Assim, é possível escrever:

Definição 31 *Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano $\mathbb{R}$ é uma aplicação suave*

$$\lambda : I \to \mathbb{R}^2$$

que a cada $t \in I$ associa $\lambda(t) \in \mathbb{R}^2$.

Observemos alguns exemplos:

Exemplo: (Curva constante) A aplicação $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t) = (a, b)$ é uma curva parametrizada suave cujo traço se reduz ao ponto (a, b)

Exemplo: A aplicação $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $\lambda(t) = (t, |t|)$ não é uma curva parametrizada suave, pois a função definia por $y(t) = |t|$ não é diferenciável em $t = 0$. A função modular definida por $f(x) = \|x\|$ tem derivada lateral à direita no ponto $x = 0$ igual a $+1$ e derivada lateral à esquerda no ponto $x = 0$ igual a -1, o que significa que tais derivadas laterais no mesmo ponto são diferentes. Para todo x não nulo, as derivadas laterais à esquerda e à direita coincidem.

2.4 Retas tangentes de curvas paramétricas suaves

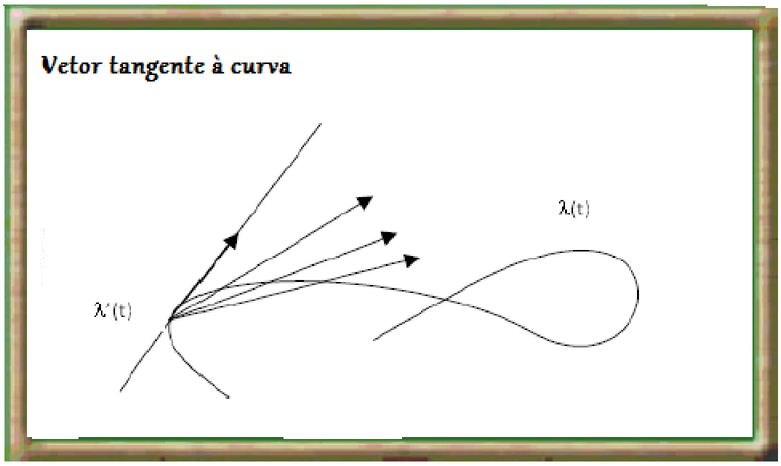
Seja $\lambda \in \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada suave, dada por $\lambda(t) = (x(t); y(t))$. O vetor tangente (ou vetor velocidade) de λ em $t_0 \in I$ é dado por

$$\lambda'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0)).$$

A velocidade escalar de λ em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo do vetor velocidade $\lambda'(t_0)$, isto é,

$$\|\lambda'(t_0)\| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}.$$

Quando $\lambda'(t_0) \neq (0; 0)$, o vetor aponta na direção tangente à curva λ em t_0.



O vetor $\lambda'(t_0)$ aponta na direção da reta tangente à curva λ no ponto $\lambda(t_0)$ e esta reta é a reta limite das retas secantes à curva λ passando por $\lambda(t_0)$ e por $\lambda(t)$, quando fazemos t tender a t_0.

Para determinar a equação da reta tangente à curva parametrizada, definida por $\lambda(t) = (x(t); y(t))$, devemos relembrar que a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = F(x)$ no ponto $P(x_0; F(x_0))$ é definida por

$$y = F(x_0) + m(x - x_0), \text{ onde } m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = F'(x_0)$$

Deste modo, se podemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para as equações paramétricas, podemos usar $y = F(x) + m(x - x_0)$ para determinar a equação da reta tangente.

• Cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$:

Inicialmente, devemos eliminar o parâmetro t em $x(t)$ e $y(t)$ e reescrever a função na forma $y = F(x)$. Se substituirmos $x = f(t)$ e $y = g(t)$ na equação $y = F(x)$, obteremos

$$g(t) = F(f(t)).$$

Derivando a igualdade, usando regra da cadeia, obteremos

$$g'(t) = F'(f'(t)).$$

Se alterarmos as notações, poderemos escrever:

$$\frac{dy}{dt} = F'(x) \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Como

$$F'(x) = \frac{dy}{dx}, \text{ podemos escrever}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ com } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Analogamente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}, \text{ com } \frac{dy}{dt} \neq 0.$$

Exemplo: Como ilustração, iremos determinar as retas tangentes a curva paramétrica definida por: $\begin{cases} x &= t^3 - 2t \\ y &= 2t^2 - 2 \end{cases}$; no ponto $(0, 2)$.

Resolução:

(i)

$$m = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{4t}{3t^2 - 2}$$

(ii) Para $x = 0$ e $y = 2$, temos que $t = \pm\sqrt{2}$

(iii) Para $t = -\sqrt{2} \Rightarrow m = -\sqrt{2}$. Então, a reta tangente no ponto $(t = -\sqrt{2})$ é $y(x) = 2 - \sqrt{2}x$.

(iv) De modo análogo, para $t = \sqrt{2}$, temos $y(x) = 2 + \sqrt{2}x$

• Cálculo de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

O cálculo da segunda derivada nos fornece a concavidade da curva parametrizada no ponto considerado.Ou seja:

(i) se $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$, a concavidade da curva no ponto considerado será **para cima**;

(ii) se $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, teremos a **concavidade para baixo**.

Para a sua determinação utilizamos a regra da cadeia duas vezes. Assim, escrevemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Do exemplo citado acima, verificaremos a sua concavidade. Para tal, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{4t}{3t^2-2}\right)}{3t^2-2} = \frac{-12t^2-8}{(3t^2-2)^3}.$$

Como visto acima, para $x = 0$ e $y = 2$, temos que $t = \pm\sqrt{2}$. Desta forma

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pm\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} < 0$$

Logo, a concavidade é para baixo no ponto $(0, 2)$.

2.5 Construção de gráficos de curvas paramétricas

Neste seção, iremos analisar maneiras de esboçar gráficos de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

• **Método I**: **Construindo uma tabela**.

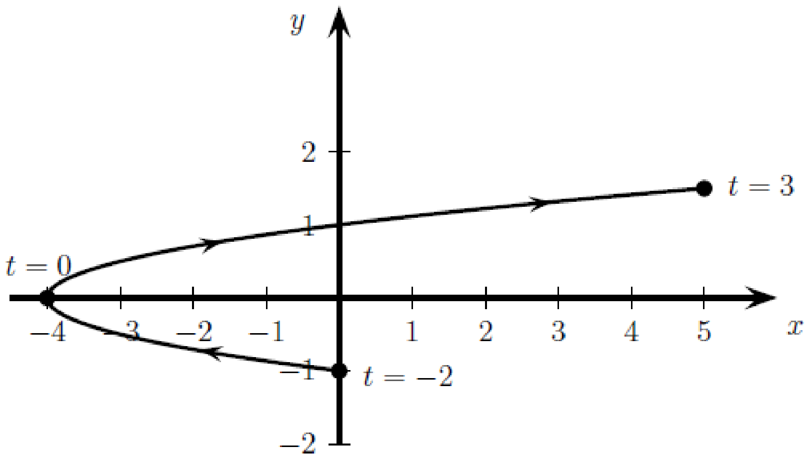
Por vezes podemos esboçar o gráfico de uma curva construindo uma tabela, escolhendo alguns valores de t. Este método não é sempre aconselhável, pois é difícil concluir quantos valores de t deveremos escolher para poder esboçar o gráfico de forma mais precisa.

Exemplo: No que segue, vamos esboçar a curva descrita pelas equações paramétricas $\begin{cases} x &= t^2 - 4 \\ y &= \dfrac{t}{2} \end{cases} ; -2 \leq t \leq 3.$

Resolução:

A partir da construção da tabela a seguir, temos:

t	x	y
-2	0	-1
-1	-3	-0,5
0	-4	0
1	-3	0,5
2	0	1
3	5	1,5



- **Método II: Transformando a equação paramétrica para cartesiana.**

Sempre que possível, podemos esboçar o gráfico de uma equação paramétrica transformando-a para cartesiana. Para tal, devemos tão somente eliminar o parâmetro t entre as equações.

Exemplo: Como ilustração, eliminaremos o parâmetro t na seguinte equação paramétrica e esboçaremos seu gráfico.

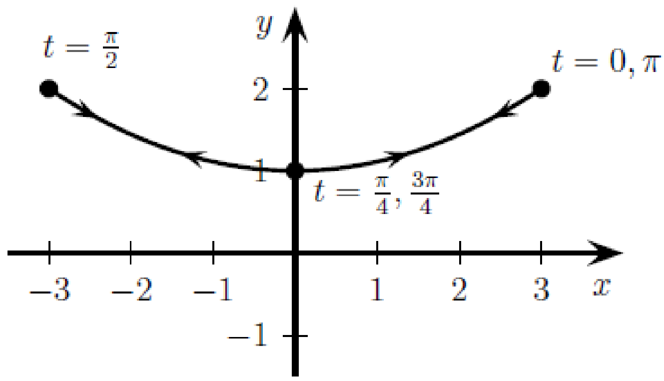
$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 1 + 2\cos^2 2t \end{cases} ; 0 \leq t \leq \pi.$$

Resolução:

(i) $x = 3\cos 2t \Rightarrow \cos 2t = \dfrac{x}{3}$.
(ii) Substituindo em $y = 1 + 2\cos^2 2t$, temos:

$$y = 1 + \frac{2x^2}{9}$$

Ou seja, o gráfico é parte do gráfico da parábola $y = 1 + \dfrac{2x^2}{9}$, com $-3 \leq x \leq 3$ e $1 \leq y \leq 2$. Um esboço do gráfico é apresentado a seguir:



• **Método III: Usando noções de cálculo.**

Para esboçar o gráfico de uma equação paramétrica, utilizando noções de Cálculo, devemos determinar:

1. Pontos de interseção com os eixos, caso existam, e sejam fáceis de calcular
2. Pontos de auto-interseção - pontos onde o traço da curva se encontram, caso existam,
3. As tangentes horizontais $\left(\dfrac{dy}{dt} = 0 \text{ e } \dfrac{dx}{dt} \neq 0\right)$, caso existam,
4. As tangentes verticais $\left(\dfrac{dx}{dt} = 0 \text{ e } \dfrac{dy}{dt} \neq 0\right)$, caso existam,
5. Estudo de crescimento e decrescimento de x e y.

Exemplo: Como ilustração, considere a construção do gráfico da curva definida por

$$\begin{cases} x &= t^2 + 1 \\ y &= \dfrac{-t^3}{3} + t + 1 \end{cases}$$

Resolução:

• **Determinando as interseções com os eixos:**

(1) $y = 0 \Rightarrow \dfrac{-t^3}{3} + t + 1 = 0$, que é difícil de resolver.

(2) $x = 0 \Rightarrow\ t^2 + 1 = 0 \Rightarrow\ t^2 = -1$ e $t = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$. Assim, $x \neq 0,\ \forall t$. Então a curva não intersecta o eixo y.

• **Determando as auto-interseções:**

Sejam $t_1 < t_2$ tais que $x(t_1) = x(t_2)$ e $y(t_1) = y(t_2)$. Deste modo,

(1) $x(t_1) = x(t_2)\ \Rightarrow\ (t_1)^2 + 1 = (t_2)^2 + 1\ \Rightarrow\ t_1 = \pm t_2$.

Como:

$$t_1 < t_2\ \Rightarrow\ t_1 = -t_2.$$

(2) $\begin{cases} y(t_1) & = \ y(t_2) \\ & \text{e} \\ t_1 & = \ -t_2 \end{cases} \Rightarrow\ \frac{(t_1)^3}{3} - t_1 = 0\ \Rightarrow\ t_1 = 0$ ou $t_1 = \pm\sqrt{3}$.

Como:

$$t_1 < t_2\ \Rightarrow\ t_1 = -\sqrt{3} \text{ e } t_2 = \sqrt{3}.$$

Desta forma, para $t = \pm\sqrt{3}$, temos que: $\begin{cases} x & = 4 \\ y & = 1 \end{cases}$

• **Obtendendo as retas tangentes:**

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 0\ \Rightarrow\ 2t = 0\ \Rightarrow\ t = 0$. Substituindo t por 0 nas equações paramétricas dadas, temos que $x = 1$ e $y = 1$. ou seja a função tem uma reta tangente vertical no ponto (1, 1).

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 0\ \Rightarrow\ -t^2 + 1 = 0\ \Rightarrow\ t = \pm 1$. De modo análogo ao descrito acima, verificamos que a função tem duas retas tangentes horizontais nos pontos $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$ e $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$.

• Verificando os intervalos de crescimento e decrescimento:

Calculadas as derivadas das equações paramétricas, para determinarmos os intervalos de crescimento e decrescimento devemos:

(i) Determinar as raízes de cada uma das derivadas das equações paramétricas;

(ii) Posicionar as raízes acima numa reta numérica, determinando os intervalos a serem analisados.

(iii) Escolher, arbitrariamente, para cada intervalo I determinado, um x interior a I, substituindo-o em nas equações paramétricas derivadas e observar o resultado encontrado. Cada intervalo determinado será classificado de acordo com o teorema abaixo:

Teorema 32 *Seja f contínua num intervalo I.*

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será extritamente crescente em I.

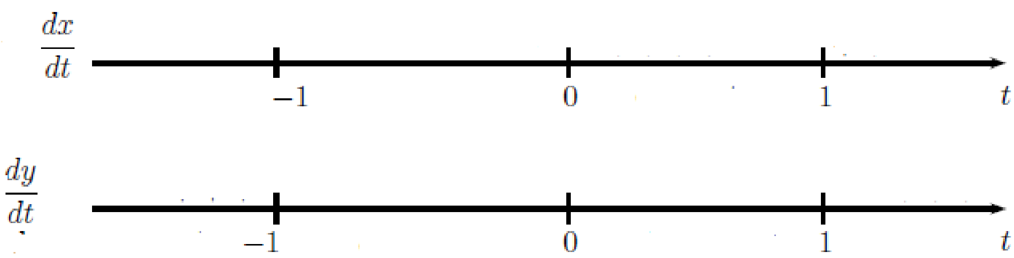
(b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será extritamente decrescente em I.

Observação 8 *Dizer que x interior a I significa que $x \in I$, mas x não é extremidade de I.*

Assim:

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; 2t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0.$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; -t^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; t = \pm 1.$



(3) Estudando o crescimento e decrescimento de $\dfrac{dx}{dt}$:

$*$ Para $t < -1$: (Fazendo $t = -2$) $\dfrac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -4.$

$*$ Para $-1 < t < 0$: (Fazendo $t = -0,5$) $\dfrac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -1$.

$*$ Para $0 < t < 1$: (Fazendo $t = 0,5$) $\dfrac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 1$.

$*$ Para $t > 1$: (Fazendo $t = 2$) $\dfrac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 4$.

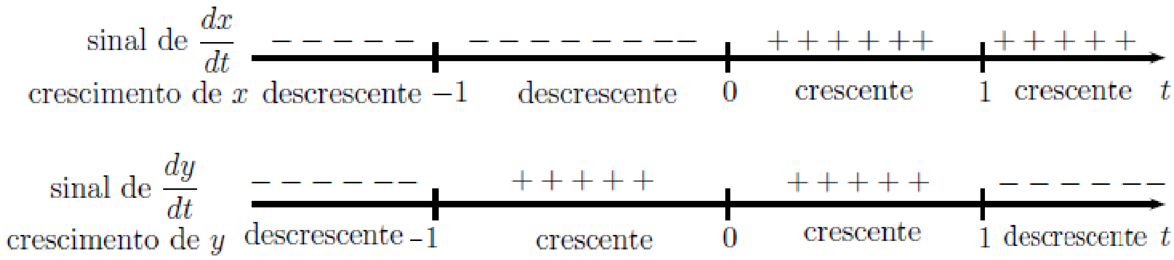
(4) Estudando o crescimento e decrescimento de $\dfrac{dy}{dt}$:

$*$ Para $t < -1$: (Fazendo $t = -2$) $\dfrac{dy}{dt} = -t^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -3$.

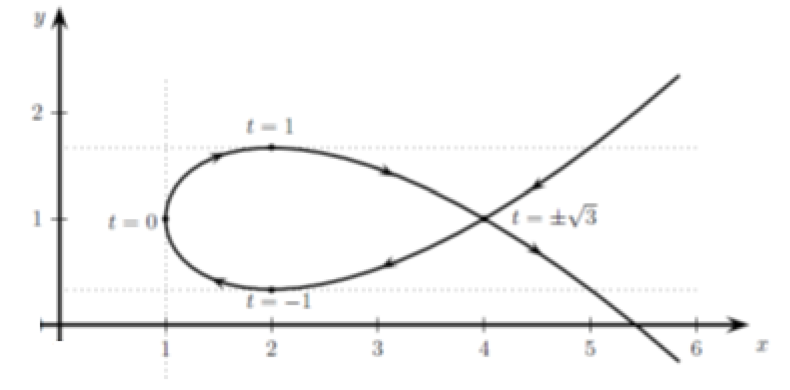
$*$ Para $-1 < t < 0$: (Fazendo $t = -0,5$) $\dfrac{dy}{dt} = -t^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \frac{3}{4}$.

$*$ Para $0 < t < 1$: (Fazendo $t = 0,5$) $\dfrac{dy}{dt} = -t^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \frac{3}{4}$.

$*$ Para $t > 1$: (Fazendo $t = 2$) $\dfrac{dy}{dt} = -t^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -3$.



- **Esboçando o gráfico**

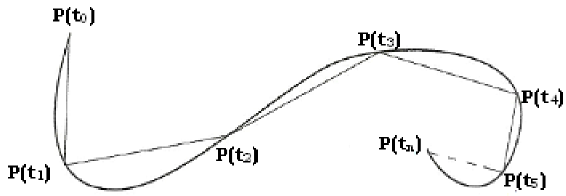


2.6 Comprimento de arco

Seja uma curva dada por equações paramétricas contínuas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

tais que $t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, pois não queremos repetir trechos da curva. Vamos determinar (ou melhor, definir) o comprimento L da curva. Tomemos números $t_0, t_1, ..., t_n$ tais que $a = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ...t_n = b$ e pontos sobre a curva $P_i = (x(t_i), y(t_i))$, para $i = 1, ..., n$.



O comprimento da linha poligonal $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, ..., \overline{P_{i-1}P_i}, ..., \overline{P_{n-1}P_n}$ é uma estimativa para L, e tomando-se pontos P_i cada vez mais próximo uns dos outros, espera-se que este comprimento se aproxime cada vez mais de L. Isto é, indicando a distância entre P_{i-1} e P_i por $d(P_{i-1}, P_i)$ temos:

$$L \approx d(P_0, P_1) + d(P_1, P2_) + ... + d(P_{n-1}, P_n).$$

Da geometria analítica temos,

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (x(t_i) - x(t_{i-1}))^2}.$$

Supondo que cada uma das funções $y(t)$ e $x(t)$ tenham derivadas contínuas, pelo teorema do valor médio para derivadas, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ existem $\alpha_i,\ \mu_i\ \in [t_{i-1}, t_i]$ tais que

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\alpha_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \text{ e } y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\mu_i) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Indicando $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ temos

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(y'(\mu_i))^2 + (x'(\mu_i))^2}\ \Delta t_i.$$

Então,

$$L \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(y'(\mu_i))^2 + (x'(\mu_i))^2}\ \Delta t_i,$$

e definimos

$$L = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{(y' \cdot (\mu_i))^2 + (x' \cdot (\mu_i))^2} \ \right) \Delta t_i.$$

Se Δt é o valor máximo dos Δt_i e, como $y'(t)$ e $x'(t)$ são contínuas, do Cálculo Diferencial e Integral, sabemos que o limite da soma acima, quando Δt tende a zero (ou seja, $n \to \ \infty$), se existe, é a integral de a até b, na forma:

$$L = \int_a^b y'(t)^2 + x'(t)^2 dt.$$

Observação 9 *Se $v(t)$ é o vetor velocidade da curva parametrizada então $L = \int_a^b \|v(t)\| dt$. Isto é "a integral do módulo da velocidade é igual à distância percorrida".*

Exemplo: Como exemplo, usaremos a integral para calcular o comprimento do circulo de raio 4 e centro (1,2). Observamos que as equações paramétricas do círculo são definidas por

$$(a + R \cdot \cos t, \ b + R \cdot \sin t).$$

Assim, é possível escrever:

$$\begin{cases} x = 4 \cdot \cos t + 1. \\ y = 4 \cdot \sin t + 2. \end{cases} ; t \in [0, 2\pi].$$

Com estas equações, não há repetição de trechos da curva. Assim

$$\begin{cases} x(t) & = 4 \cdot \cos t + 1 \Rightarrow x'(t) = -4 \cdot \sin t. \\ y(t) & = 4 \cdot \sin t + 2 \Rightarrow x'(t) = 4 \cdot \cos t. \end{cases}$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-4 \cdot \sin t))^2 + (4 \cdot \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(16 \cdot \sin^2 t + 16 \cdot \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{16 \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)} \ dt \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

2.7 Área de curvas paramétricas

Seja uma curva dada por equações paramétricas contínuas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; t \in [a, b]$$

tais que $t_1 \neq t_2 \Rightarrow (x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, pois não queremos repetir trechos da curva. Vamos determinar (ou melhor, definir) a área abaixo da curva.

Inicialmente, devemos observar que a área sob uma curva $y = F(x)$ de $a \leq x \leq b$ é

$$A = \int_a^b F(x)\ dx, \text{ onde } F(x) > 0.$$

Usando as equações paramétricas acima definidas como uma mudança na integral definida, temos que:

$$\begin{array}{c} (1)\ x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt. \\ (2)\ y = F(x) = F(x(t)) = y(t). \end{array}$$

Logo, podemos escrever que área sob uma curva é:

$$A = \int_a^b y(t) \cdot x'(t)\ dt.$$

Exemplo: Para efeito de exemplificação, determinaremos a área da curva definida por baixo da ciclóide $\begin{cases} x = 6 \cdot (t - \sin t) \\ y = 6 \cdot (1 - \cos t), \end{cases} t \in [0, 2\pi]$.

Observe que não há trechos repetidos. Logo

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} y(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 6(1 - \cos t) \cdot 6(1 - \cos t) dt \\ &= 36 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t) dt \\ &= 36 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cdot \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= 36 \int_0^{2\pi} (\frac{2 - 4 \cdot \cos t + 1 + \cos 2t}{2}) dt \\ &= 18 \int_0^{2\pi} (3 - 4 \cdot \cos t + \cos 2t) dt \\ &= 108\pi \end{aligned}$$

2.8 Exercícios

Nesta seção final, propomos alguns exercćios para fixar os conceitos anteriormente apresentados.

1. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$, determine:

   a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

2. Dada a função $f(x) = x^3 - 3x + 2$, determine:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

   b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

   c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

3. Determine os valores de:

   a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

   b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

   c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

4. Verifique se a função $f(x)$ definida por:

   a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & \text{se} \quad x < 2 \\ x - 2, & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}$ é contínua em $x = 1$.

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é contínua em $x = 3$.

5. Determine a derivada das seguintes funções:

   a) $f(x) = \cos x$

   b) $f(x) = 7x^8$

c) $f(x) = x^{-4}$

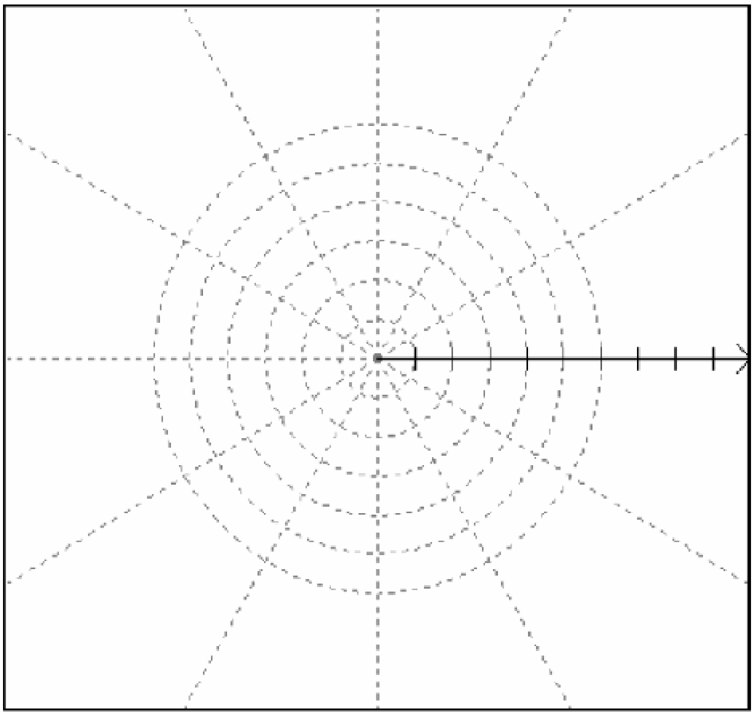
d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

e) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$

f) $f(x) = \dfrac{\text{sen x}}{\cos x}$

g) $f(x) = \text{sen 3x} - \cos 2x$

6. Representar no sistema de coordenadas polares os pontos $P(3, \frac{5\pi}{4})$, $Q(-2, \frac{3\pi}{2})$ e $R(3, -\frac{\pi}{4})$.



7. Calcule as integrais definidas abaixo:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 6x^4 dx$

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} (5x^{-4} + 8x^{-3}) dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \text{sen x} dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 (6x-1)dx$

e) $\displaystyle\int_1^2 x(1+x^3)dx$

8. Esboçar os gráficos das seguintes curvas paramétricas. Escreva também as equações na forma cartesiana.

a) $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t^3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x &= \sqrt{t} \\ y &= t \end{cases} ; t \geq 0$

c) $\begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= \frac{1}{2t-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x &= t \cdot (t^2-2) \\ y &= 2 \cdot (t^2-1) \end{cases}$

9. Calcule as expressões das derivadas e os seus respectivos valores no ponto dado, para a curva $\begin{cases} x &= 6t \cdot (1+t^2)^{-1} \\ y &= 6t^2 \cdot (1+t^2)^{-1} \end{cases}, 0 \leq t \leq 1, \dfrac{dy}{dx}$, no ponto de abscissa $\dfrac{12}{5}$.

10. Esboce a curva e determine a área limitada:

a) pelo laço da curva $\begin{cases} x &= t^3-t \\ y &= t^2-1 \end{cases}$

b) pelo laço da curva $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t-\frac{t^3}{3} \end{cases}$

11. Esboce a curva e calcule o comprimento das curvas descritas abaixo:

a) $\begin{cases} x &= t^2-t \\ y &= 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

b) $\begin{cases} x &= \text{sen t} \\ y &= 2 \text{ sen t} \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $\begin{cases} x &= 4t+3 \\ y &= 2t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 5$

d) do laço de curva $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t-\frac{t^3}{3} \end{cases}$

Apêndice A

Apêndice

A.1 Demonstrações dos teoremas

• **Teorema 12:** O limite de uma função real de uma variável real em um ponto, quando existe, é único.

Demonstração:

Proponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, mas $L_1 \neq L_2$.

Pela definição de limite, temos que admitir que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|f(x) - L_1| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Além disso, existe $\delta_2 > 0$ para o qual vale:

$$|f(x) - L_2| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Como L_1 e L_2 não são iguais, a diferença $L_1 - L_2$ é não nula. Assim, escrevemos $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ e aplcando a desigualdade triangular, teremos:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|.$$

Se tivermos um $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ e $0 < |x - a| < \delta$, serão válidas as condições:

(i) $|f(x) - L_1| < \epsilon$.

(ii) $|f(x) - L_2| < \epsilon$.

Com isso, $|L_1 - L_2| < 2\epsilon$, para todo x para o qual $0 < |x - a| < \delta$. Como podemos arbitrar ϵ, teremos, ao fazer $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$, que:

$$|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|.$$

Mas isto é contraditório. Portanto $L_1 = L_2$. $\square$

Exemplo: $\lim_{x \to a} k = k$;
Devemos provar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - k| < \epsilon.$$

Isso é sempre verdade, pois $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon$. $\square$

• **Teorema 13(iii):** Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, cujo limite em um ponto a exista. O limite da soma (ou da diferença) das funções no ponto a, é:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \ \pm \ g(x)) \ = \ \lim_{x \to a} f(x) \ \pm \lim_{x \to a} g(x).$$

Demonstração:

Faremos a demonstração apenas para o caso da soma de funções, deixando a cargo do leitor verificar que a propriedade análoga para a diferença de funções pode ser provada de forma parecida.

Tomando $\lim_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim_{x \to a} g(x) = B$, devemos, pela definição, provar que:

Dado qualquer ϵ positivo, existe algum δ positivo, para o qual $|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \epsilon$, sempre que $x \in D_f$ satisfaz $0 < |x - a| < \delta$.

Posto que existem os limites de $f(x)$ e $g(x)$ em a, já sabemos que para quaisquer k e p positivos, existem δ_1 e δ_2 positivos satisfazendo:

(i) $|f(x) - A| < k,$ para todo $x \in D_{f(x)}$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1$

(ii) $|g(x) - B| < p,$ para todo $x \in D_{f(x)}$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2$

Aplicando desigualdade triangular, temos:

$$|f(x) + g(x) \ - \ (A + B)| \ \leq \ |f(x) - A| \ + \ |g(x) - B|.$$

Então, ao arbitrar $\epsilon = p + k > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, de modo que $0 < |x - a| < \delta$ vale $|f(x) - A| + |g(x) - B| < k + p = \epsilon$, ou seja, $|f(x) + g(x) - (A + B)| < \epsilon$. $\square$

• **Teorema 13(iv):** Se existem os limites das funções $f(x)$ e $g(x)$ em um ponto a, então o limite do produto das funções neste ponto existe, e é dado por:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \ \cdot \ g(x)) \ = \ \lim_{x \to a} f(x) \ \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Demonstração:

Consideremos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Queremos verificar se para cada ϵ positivo, existe algum δ positivo, tal que $|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| < \epsilon$, para todo $x \in D_{f(x)}$ que verifica $0 < |x - a| < \delta$.

Considerando que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, é possível encontrar certo $\delta_1 > 0$, de tal forma que:

$$|f(x) - L| < 1^{\mathbf{(1)}}$$

sempre que $x \in D_{f(x)}$ e $0 < |x - a| < \delta_1$.

Assim, podemos concluir que, para estes valores de x, vale $|f(x)| < |L| + 1$.

Mas para qualquer $\epsilon = p + k$, com $p > 0$ e $k > 0$, também existem valores positivos δ_2 e δ_3, de modo que:

(i) $|g(x) - M| < \frac{p}{|L|-1}^{\mathbf{(2)}}$, quando $x \in D_{f(x)}$ e $0 < |x - a| < \delta_2$.

(ii) $|f(x) - L| < \frac{k}{|M|+1}^{\mathbf{(3)}}$, se $x \in D_{f(x)}$ e $0 < |x - a| < \delta_3$.

Então, se $\delta < \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, e $0 < |x - a| < \delta$, valem as desigualdades **(1), (2) e (3)**.

Analisando a expressão $|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M|$, concluimos que ela fica menor que ϵ para estes valores de x. Primeiramente, observe que:

$$|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| = |f(x)\cdot(g(x) - M) + M\cdot(f(x) - L)|.$$

Usando a desigualdade triangular nesta última expressão, e observando que $|M| < |M| + 1$, obtemos:

$$|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| \leq |f(x)|\cdot|g(x) - M| + (|M| + 1)\cdot|f(x) - L|.$$

Aplicando as desigualdades **(1), (2) e (3)**, resulta:

$$|f(x)|\cdot|g(x) - M| + (|M|+1)\cdot|f(x)-L| < |f(x)|\cdot\frac{p}{|L| - 1} + (|M|+1)\cdot\frac{k}{|M| + 1}$$

Como $\frac{f(x)}{|L|-1} < 1$, concluimos que$|f(x)|\cdot|g(x) - M| + (|M|+1)\cdot|f(x)-L| < p+k$.

Portanto, $|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| < \epsilon$, o que confirma a validade do teorema.

□

• **Teorema 13(v):** Se existem os limites das funções $f(x)$ e $g(x)$ em um ponto a, então o limite do quociente das funções neste ponto existe, e é dado por:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L_1}{L_2}.$$

Antes de iniciarmos a demonstração devemos considerar o seguinte lema:

Lema: Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}$.

Demonstração:

De acordo com o lema acima, podemos escrever:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}.$$

Então:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]=L_1\cdot\frac{1}{L_2}.\square$$

• **Teorema 14:** O limite de uma função polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, para x tendendo para a, é igual ao valor de numérico de $f(x)$ para $x = a$. Ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Demonstração:

É claro que $\lim_{x\to a} = a$, pois, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta = \epsilon$ e se $0 \mid x - a \mid < \delta = \epsilon$, então $\mid x - a \mid < \epsilon$. Assim:

$$\lim_{x\to a} x^i = [\lim_{x\to a} x]^i = a^i, \text{ para } i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Temos, então:

$$lim_{x\to a}f(x) = lim_{x\to a}\sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n}[lim_{x\to a}a_ix^i] = \sum_{i=0}^{n} a_i\, lim_{x\to a}x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ia^i = f(a).\square$$

• **Teorema 18(i):** Derivada da soma de funções derivavéis.

$$\text{Se } f(x) = u(x) + v(x), \text{ então } f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Demonstração:

Pela definição temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x) - u(x) \mp v(x)}{\Delta x}.$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x) \pm v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Portanto:

$f'(x) = u'(x) \pm v'(x).$ □

- **Teorema 18(ii):** Derivada do produto de funções derivavéis.

$$\text{Se } f(x) = u(x) \cdot v(x), \text{ então } f'(x) = u'(x).v(x) + v'(x).u(x).$$

Demonstração:

Pela definição temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

Somamos e subtraímos $v(x+\Delta x) \cdot u(x)$ na equação anterior. Assim:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - v(x+\Delta x) \cdot u(x) + v(x+\Delta x) \cdot u(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x] \cdot [u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}.$$
$$f'(x) = v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Portanto:

$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) \ + \ v(x) \cdot u'(x)$. $\square$

- **Teorema 18(iii):** Derivada do quociente de funções derivavéis.

$$\text{Se } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ com } v(x) \neq \ 0, \text{ então } f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{[v(x)]^2}.$$

Demonstração:

Pela definição temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x)}{v(x) \cdot v(x+\Delta x) \cdot \Delta x}.$$

Podemos lançar mão de mais um artifício algébrico e somar e subtrair $u(x) \cdot v(x)$, o que nos dá:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+\Delta x)}{v(x) \cdot v(x+\Delta x) \cdot \Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot [u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x) \cdot [v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x) \cdot v(x+\Delta x) \cdot \Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot \left[\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right] - u(x) \cdot \left[\dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]}{v(x) \cdot v(x+\Delta x)}.$$

Depois que aplicamos os limites, resulta em:

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) \ - \ u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.\square$$

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, Hilário e Santos, Walcy, *Geometria Diferencial das Curvas Planas.* Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

[2] Barreto Filho, Benigno, *Matemática Aula por Aula, Volume 3.* São Paulo: FTD, 1998.

[3] Dante, Luiz Roberto, *Matemática: Contexto & Aplicação, Volume 3.* São Paulo: Ática, 1999.

[4] Leithold, Louis, *O Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1.* São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1982.

[5] Prates, Elaine, et al,*Cálculo B: Notas de Aula.* Disponível em: < http: www.twiki.ufba.br/twiki/pub/cálculoB/NotasDeaula/parametricas.pdf> acesso em 29 de março de 2014.