Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

PROFMAT

UFPB

Uma Introdução ao Cálculo Quântico

por

Brunno de Castro Trajano

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

Uma Introdução ao Cálculo Quântico

por

Brunno de Castro Trajano

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta - UFPB

(Orientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

(Membro externo)

Agosto/2014

Agradecimentos

A **Deus**, por me iluminar nos momentos difíceis e desestimulantes, pois sem Ele este trabalho no teira sido concluído.

Ao meu orientador, **Napoleón Caro Tuesta**, que além de exercer com seu papel de orientador, mostrou-se sempre disponível para as orientações e para esclarecimentos sobre qualquer outro assunto.

A minha esposa, **Tatiana Fernandes Sant'Ana**, por todo o seu incetivo, dedicação e paciência em todos os momentos que antecederam a conclusão deste curso de pós-graduação, como, também, fazer a correção deste trabalho.

Ao meu pai, **Ernesto Trajano de Lima Filho**, por estar sempre por perto durante todo o curso, mostrando o caminho certo a seguir e por sua disponibilidade em retirar dúvidas, assim como exercer sua função de pai.

A minha mãe, **Ana de Fátima Castro de Lima**, que se mostrou sempre preocupada com meus estudos e sempre me incentivou nos momentos mais difíceis na caminhada, aconselhando-me para o melhor caminho a ser seguido.

Ao meu irmão, **Ernesto Trajano de Lima Neto**, que se mostrou sempre preocupado com meus estudos.

A todos os professores que contribuíram para que eu chegasse à conclusão desse mestrado.

Aos amigos, Allan, Cristiano e Genaldo.

Dedicatória

*Dedico esse trabalho ao meu filho **Bernardo Sant'Ana Trajano**.*

Resumo

O Cálculo Quântico consiste em uma outra abordagem da disciplina Cálculo, comumente estudada em cursos como Matemática e Física. Assim, optamos por abordar este tema, tendo como objetivo apresentar a q-derivada e suas aplicações, bem como a integração quântica e suas aplicações. Para isso, baseamo-nos em preceitos tais como q-cálculo e h-cálculo, que consistem em duas áreas do Cálculo Quântico.
Palavras chaves: cálculo quântico, q-derivada, integração quântica.

Abstract

Quantum Calculus consists of a different approach to the subject Calculus, which is commonly studied in courses such as Mathematics and Physics. We therefore chose to address this theme, aiming to present the q-derivative and its applications, as well as quantum integration and its applications. For this, we rely on principles such as q-calculus and h-calculus, which consist of two topics of Quantum Calculus.
Keywords: quantum calculus, q-derivative, quantum integration.

Sumário

Introdução

A expressão

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é bastante familiar quando fazemos $x \to x_0$ e quando aplicamos o limite que resulta na derivada ordinária, se existir o limite $\frac{df}{dx}$. Porém, se fizermos $x = qx_0$ ou $x = x_0+h$, com $q \neq 1$ fixo ou $h \neq 0$ também fixo e não aplicarmos o limite, daremos assim uma nova abordagem ao cálculo, o chamado **Cálculo Quântico**, que é dividido em duas áreas; o q-cálculo e o h-cálculo que, por sua vez, subdividem-se em q-derivada e q-integral de $f(x)$, e h-derivada e h-integral de $f(x)$. Isto pode ser melhor observado no esquema abaixo:

$$\textit{q-cálculo} \begin{cases} q - derivada \\ q - integral \end{cases}$$

$$\textit{h-cálculo} \begin{cases} h - derivada \\ h - integral \end{cases}$$

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, descobriremos importantes resultados da matemática, como por exemplo, a q-derivada de x^n é $[n]x^{n-1}$, em que

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

é o q-análogo de n, no sentido de que n é o limite de $[n]$ quando $q \to 1$.

Ainda na q-derivada, investigaremos o q-análogo do binômio, que é a função, $(x - a)_q^n$ que tem um comportamento com respeito a q-derivada, da mesma forma que $(x - a)^n$ tem na derivada ordinária, obtendo a função

$$(x - a)_q^n = (x - a)(x - qa) \cdots (x - q^{n-1}a).$$

A partir deste binômio, estabelecemos a q-fórmula de Taylor, bastante utilizada nos séculos XVIII e XIX, na obtenção de resultados na matemática.

Após o estudo da q-derivada, passaremos a estudar a q-antiderivada e a q-integral definida. A q-integral definida foi introduzida por Frank Hilton Jackson no início do século XX, sendo o pioneiro a desenvolver o q-cálculo de forma sistemática.

Para encerrar nosso estudo do q-cálculo estudaremos as funções gama e beta de Euler.

Em relação ao h-cálculo, perceberemos que este apesar de semelhante ao q-cálculo, no que se refere ao comportamento e as propriedades, é muito diferente deste, pois o h-cálculo possui uma analogia mais sistemática com o cálculo ordinário, tornando-o mais transparente. Por exemplo, a h-fórmula de Taylor nada mais é que a fórmula de interpolação de Newton, enquanto que a h-integração por partes é simplesmente a transformação de Abel.

Estes e outros aspectos do Cálculo Quântico serão considerados neste estudo. Assim, estudar e apresentar o q-cálculo e o h-cálculo constituem os objetivos de nosso trabalho.

Para tanto, as assertivas que seguem estão organizadas em dois capítulos e dois apêndices. No primeiro capítulo, enfatizamos a q-derivada, suas propriedades e algumas aplicações, como a Fórmula Binomial de Gauss e sua não comutatividade. Já no segundo, enfocamos a q-integral, que define as funções q-Gama e q-Beta, importantes em estudos como o da Teoria da Probabilidade. Ainda neste capítulo, estudamos a h-derivada e a h-integral, e apresentamos o Teorema Fundamental do h-Cálculo. Finalizamos nossas contribuições com os apêndices, um, contemplando alguns resultados não demonstrados ao longo do capítulo um, e, outro, contando um pouco da história do q-cálculo.

Capítulo 1

Estudo da q-Derivada e suas Aplicações

1.1 q-Derivada e h-Derivada

A derivada de uma função de uma variável real é definida pelo seguinte limite:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

No entanto, tomando a expressão $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e fazendo $x = qx_0$ com $q \neq 1$ fixo ou $x = x_0 + h$, com $h \neq 0$ fixo, podemos definir a chamada *q-Derivada* e a *h-Derivada*. Essas derivadas definem um novo campo de estudo, o **Cálculo Quântico**.

Existem variantes da q-derivada que foram estudads por Euler e Heine, porém a q-derivada foi apresentada por Frank Hilton Jackson (1870 - 1960), em 1908, que apresentaremos a seguir.

Definição 1 *Sejam $q, h \in \mathbb{R}$ tais que $q \neq 1$ e $h \neq 0$. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. A* ***q-diferencial de f****, denotada por $d_q f$, é a expressão*

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x). \tag{1.1}$$

A ***h-diferencial de f****, denotada por $d_h f$, é a expressão*

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x). \tag{1.2}$$

Sendo assim, em particular, temos:

$$d_q x = qx - x = (q-1)x$$

e

$$d_h x = x + h - x = h.$$

Um fato importante dos diferenciais quânticos é que a derivada do produto de duas funções não são simétricas, ou seja, $d_q(f(x)g(x)) \neq d_h(f(x)g(x))$ pois dadas duas funções f e g quaisquer temos:

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx) + f(qx)g(x) - f(qx)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)(g(qx) - g(x)) + g(x)(f(qx) - f(x)) \\ &= f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

e

$$\begin{aligned} d_h(f(x)g(x)) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+h)d_h g(x) + g(x)d_h f(x). \end{aligned}$$

Contudo, podemos definir, a partir dos diferenciais quânticos, as correspondentes **derivadas quânticas**.

Definição 2 *As expressões*

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

e

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

são ditas ***q-derivada*** *e* ***h-derivada****, respectivamente, da função f.*

Notemos que:

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \lim_{h\to o} D_h f(x) = \frac{df}{dx}$$

se f for diferenciável.

Consideremos a e b constantes arbitrárias, então:

$$\begin{aligned} D_q(af(x) + bg(x)) &= \frac{af(qx) + bg(qx) - af(x) - bg(x)}{(q-1)x} \\ &= a\frac{(f(qx) - f(x)}{(q-1)x} + b\frac{g(qx) - g(x)}{(q-1)x} \\ &= d_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x). \end{aligned}$$

E ainda

$$\begin{aligned} D_h(af(x) + bg(x)) &= \frac{af(x+h) + bg(x+h) - af(x) - bg(x)}{h} \\ &= a\frac{(f(x+h) - f(x)}{h} + b\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= d_h(af(x) + bg(x)) = aD_h f(x) + bD_h g(x). \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que a q-derivada e a h-derivada de uma função são operadores lineares.

Exemplo: Vamos calcular a q-derivada da função $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, pois dela resultará uma notação que iremos utilizar bastante em nosso trabalho. Por definição,

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n - 1)x^{n-1}}{q-1}.$$

Utilizaremos a seguinte notação em nosso trabalho:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Utlizando a notação acima temos

$$D_q x^n = [n]x^{n-1}. \tag{1.5}$$

Observemos a semelhança que há com a derivada ordinária de x^n, e mais, tomando $q \to 1$ temos $[n] \to n$. Por outro lado, a h-derivada da função $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ é:

$$\begin{aligned} D_h x^n &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}. \end{aligned}$$

Note que, se fizermos h tender a zero, recuperamos a fórmula clássica do cálculo ordinário.

Com isso, observamos que o estudo da função x^n no h-cálculo já não é tão simples, então direcionaremos nossa atenção apenas para o q-cálculo.

Passemos a estudar as regras do produto e do quociente da q-derivada. Consideremos duas funções f e g, então:

$$D_q(f(x)g(x)) = \frac{d_q(f(x)g(x))}{(q-1)x} = \frac{f(qx)d_qg(x) + g(x)d_qf(x)}{(q-1)x}.$$

Logo,

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x). \tag{1.6}$$

Por simetria, podemos trocar f e g, e obter:

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x), \tag{1.7}$$

que é equivalente a (1.6).

Observação 1 *Note que a fórmula (1.7) é o q-análogo da regra do produto do cálculo clássico.*

Suponhamos que $g(x) \neq 0$, então para todo $x \in Dom(g)$ temos,

$$g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = f(x), \tag{$*$}$$

então, aplicando a fórmula (1.6) a (*) temos:

$$g(qx)D_q\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x) = D_qf(x).$$

Donde,

$$g(qx)D_q\frac{f(x)}{g(x)} = D_qf(x) - \frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x).$$

Portanto,

$$D_q\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)}{g(qx)g(x)}. \tag{1.8}$$

Com isso, temos a seguinte proposição

Proposição 1 *Desde que $g(x) \neq 0$, temos:*

$$D_q \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(qx)g(x)}.$$

Agora, se aplicarmos a q-regra do produto (1.7) a (*) temos:

$$g(x)D_q \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f(qx)}{g(qx)} D_q g(x) = D_q f(x).$$

Daí,

$$g(x)D_q \frac{f(x)}{g(x)} = D_q f(x) - \frac{f(qx)}{g(qx)} D_q g(x).$$

Portanto,

$$D_q \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \tag{1.9}$$

Observação 2 *Utilizando a q-regra do produto (1.7) obtemos a seguinte q-regra do quociente:*

$$D_q \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}.$$

Mesmo obtendo duas q-regras do produto o resultados obtidos em (1.6) é mais utilizada em determinados momentos.

Assim, acabamos de apresentar uma regra geral da q-derivada para o produto e para o quociente. No entanto, não há como generalizar a regra da cadeia para a q-derivada.

Se, por acaso, tomarmos a q-derivada de uma função $f(u)$, na qual $u = u(x) = \alpha x^{\beta}$, com α e β constantes, obtemos:

$$\begin{aligned} D_q f(u(x)) &= \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{(q-1)x} = \\ &= \frac{f(\alpha q^{\beta} x^{\beta}) - f(\alpha x^{\beta})}{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}} \frac{\alpha q^{\beta} x^{\beta} - \alpha x^{\beta}}{(q-1)x} = \\ &= \frac{f(q^{\beta} u) - f(u)}{q^{\beta} u - u} \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x}. \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$D_q f(u(x)) = (D_{q^{\beta}} f)(u(x)) D_q u(x). \tag{1.10}$$

Observação 3 *Considere uma função $f(u)$, na qual $u = u(x) = \alpha x^{\beta}$, com α e β constantes, então:*

$$D_q f(u(x)) = (D_{q^{\beta}} f)(u(x)) D_q u(x).$$

No entanto, tomando $u(x) = x + x^2$ ou $u(x) = cosx$, fica impossível escrever $u(qx)$ em termos de u de maneira simples, ou seja, não tem como descrever uma regra da cadeia geral.

1.2 Generalização da Fórmula de Taylor

No cálculo ordinário, uma função f que possui derivadas de todas as ordens é **analítica** numa vizinhaça do ponto **a** quando puder ser expressa como uma série de potências numa vizinhança do ponto **a**. O Teorema de Taylor diz que a série de potências é:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

A expansão de Taylor de uma função analítica, muitas vezes, permite-nos estender a definição da função para um domínio maior e mais interessante. Por exemplo, utilizando sua expansão em e^x definimos o exponencial dos números complexos e das matrizes quadradas.

O teorema que segue é o q-análogo da Fórmula de Taylor clássica.

Teorema 3 *Seja a um número, D um operador linear no espaço dos polinômios e* $P_0(x), P_1(x), \ldots$ *uma sequência de polinômios satisfazendo as seguintes condições:*

(i.) $P_0(a) = 1$ *e* $P_n(a) = 0, \forall n \geq 1$*;*

(ii.) $degP_n = n$*;*

(iii.) $DP_n(x) = P_{n-1}(x), \forall n \geq 1, eD(1) = 0.$

Então, para todo polinômio $f(x)$ *de grau N, tem-se a seguinte generalização da Fórmula de Taylor.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a)P_n(x).$$

Demonstração: Seja V o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a N. Então $dimV = N+1$. Pelo item *(ii)* o conjunto dos polinômios $\beta = \{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_N(x)\}$ é linearmente independente, pois a sequência de seus graus são estritamente crescente, ou seja, escrevendo $c_N P_N(x) + c_{N-1}P_{N-1}(x) + \cdots + c_1P_1(x) + c_0P_0(x) = 0$ e observando os coeficientes, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_N & = 0 \\ c_N + c_{N-1} & = 0 \\ c_N + c_{N-1} + c_{N-2} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_N + c_{N-1} + c_{N-2} + \ldots + c_1 + c_0 & = 0 \end{cases},$$

consequentemente, $c_N = c_{N-1} = c_{N-2} = \ldots c_1 = c_0$. Logo, β é uma base para V. Sendo assim, qualquer que seja $f(x) \in V$, temos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x). \quad c_n \in \mathbb{R}$$

Fazendo $x = a$ temos:

$$f(a) = c_N P_N(a) + c_{N-1} P_{N-1}(a) + c_{N-2} P_{N-2}(a) + \cdots + c_1 P_1(a) + c_0 P_0(a) = 0$$

e por *(i)* encontramos $f(a) = c_0$. Aplicando o operador D n vezes na equação, no qual $1 \leq n \leq N$ e por *(ii)* e *(iii)* temos:

$$\begin{aligned}(Df)(x) &= c_0 DP_0(x) + c_1 DP_1(x) + c_2 DP_2(x) + c_3 DP_3(x) + \cdots + c_N DP_N(x) = \\ &= c_0 D(1) + c_1 P_0(x) + c_2 P_1(x) + c_3 P_2(x) + \cdots + c_N P_{N-1}(x) = \\ &= c_1 + c_2 P_1(x) + c_3 P_2(x) + \cdots + c_N P_{N-1}(x).\end{aligned}$$

Calculando $(D^2 f)(x)$ temos:

$$\begin{aligned}(D(Df))(x) &= Dc_1 + c_2 DP_1(x) + c_3 DP_2(x) + \cdots + c_N DP_{N-1}(x) = \\ &= c_1 D(1) + c_2 P_0(x) + c_3 P_1(x) + \cdots + c_N P_{N-2}(x) = \\ &= c_2 + c_3 P_1(x) + \cdots + c_N P_{N-2}(x).\end{aligned}$$

Prosseguindo, obtemos:

$$(D^n f)(x) = \sum_{i=n}^{N} c_i P_{i-n}(x).$$

E novamente fazendo $x = a$ e por *(i)* obtemos $c_n = (D^n f)(a)$, com $0 \leq n \leq N$, então

$$f(x) = f(a)P_0(x) + (Df)(a)P_1(x) + \cdots + (D^N f)(a)P_N(x).$$

Portanto:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} (D^i f)(a) P_i(x).$$

Provando assim o teorema. ■

Exemplo: Para efeito de ilustração, tome $D = \frac{d}{dx}$ o operador diferencial e $P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$, então:

(i.) $P_0(a) = \frac{(a-a)^0}{0!} = 1$ e para todo $n \geq 1$ temos $P_n(a) = \frac{(a-a)^n}{n!} = \frac{0^n}{n!} = 0, \forall n \geq 1$;

(ii.) Desenvolvendo o binômio $(x-a)^n$, obtemos que o mesmo possui grau n, então $P_n(x)$ tem grau n;

(iii.) $DP_n(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{n!} = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$, e ainda, $D(1) = 0$.

1.3 q-Análogo de $(x-a)^n$ e q-Derivadas dos Binômios

Sabemos que o operador q-diferencial D_q é linear no espaço dos polinômios. Vamos aplicar o Teorema 3 para $D \equiv D_q$. Para isso, necessitamos do seguinte q-análogo do fatorial $n!$ de um inteiro não negativo:

$$[n]! = \begin{cases} 1 & \text{, se } n = 0 \\ [n][n-1][n-2]\cdots[1], & \text{se } n = 1, 2, ... \end{cases} .$$

Vamos construir a sequência dos polinômios $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), ...\}$, que atende às três condições do teorema 3 com respeito ao operador linear D_q.

Se $a = 0$ tomemos:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!}, \tag{3.1}$$

pois (i) $P_0(0) = \dfrac{0^0}{[0]!} = 1$, nesse caso foi escolhido que $P_0(0) = 1$. $P_n(0) = \dfrac{0^n}{[n]!} = \dfrac{0}{[n]!} = 0$, qualquer que seja $n \geq 1$; (ii), claramente vemos que $degP_n(x) = n$; e (iii) para $n \geq 1$ e usando (1.4) temos:

$$D_qP_n(x) = \frac{D_qx^n}{[n]!} = \frac{[n]x^{n-1}}{[n][n-1]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x).$$

Suponhamos agora $a \neq 0$. Neste caso, poderíamos pensar em $P_n(x) = \dfrac{(x-a)^n}{[n]!}$, porém isso seria um equívoco, pois:

$$\begin{aligned}
D_q\frac{(x-a)^2}{[2]!} &= \frac{\frac{(qx-a)^2}{(q-1)x} - \frac{(q-a)^2}{(q-1)x}}{[2]!} = \frac{\frac{q^2x^2 - 2qax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2}{(q-1)x}}{[2]!} \\
&= \frac{q^2x - 2qa + 2a - x}{(q-1)x[2]!} = \frac{x(q^2-1) - 2a(q-1)}{(q-1)[2]!} = \frac{qx + x - 2a}{[2]!} \\
&\neq x - a.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que determinar os primeiros $P_n(x)$ para em seguida mostrar por indução a fórmula geral.

Sabemos que $P_0(x) = 1$, então para que $D_qP_1(x) = P_0(x) = 1$ e $P_1(a) = 0$, devemos ter $P_1(x) = x - a$, pois:

$$D_qP_1(x) = \frac{qx - a - x + a}{(q-1)x} = \frac{(q-1)x}{(q-1)x} = 1$$

Da mesma forma, devemos ter $D_qP_2(x) = P_1(x) = x - a$ e $P_2(a) = 0$, então tomemos:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 = \frac{x^2-(q+1)ax-a^2+(q+1)a^2}{[2]} \\
&= \frac{x^2-qax-ax-a^2+qa^2+a^2}{[2]} = \frac{(x-a)x-qa(x-a)}{[2]} \\
&= \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}.
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[3]!},$$

para que tenhamos $D_qP_3(x) = P_2$ e $P_3(a) = 0$. E assim por diante. Logo:

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)\cdots(x-q^{n-1}a)}{[n]!},$$

que está de acordo com (3.1), quando $a = 0$. Antes da verificação de (iii) vamos ver o seguinte resultado.

Definição 4 *O q-análogo de $(x-a)^n$ é o polinômio*

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & , se\ n = 0 \\ (x-a)(x-qa)(x-q^2a)\cdots(x-q^{n-1}a), & se\ n \geq 1 \end{cases}.$$

Proposição 2 *Para $n \geq 1$ temos:*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}.$$

Demonstração: Provaremos por indução. Para $n = 1$ é verdade, pois:

$$D_q(x-a)_q = \frac{qx-a-x+a}{(q-1)x} = 1 = \frac{q-1}{q-1}(x-a)_q^{1-1} = [1](x-a)_q^{1-1}.$$

Suponhamos válido para $n = k$, ou seja, $D_q(x-a)_q^k = [k](x-a)_q^{k-1}$ e provemos para $n = k+1$. Então, utilizando a q-regra do produto (1.7), temos:

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= D_q[(x-a)_q^k(x-q^ka)_q] \\ &= (x-a)_q^k\frac{(qx-q^ka-x+q^ka)}{(q-1)x} + (qx-q^ka)[k](x-a)_q^{k-1} \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1}a)[k](x-a)_q^{k-1}. \end{aligned}$$

Observemos que $(x-a)_q^{k-1} = (x-a)(x-qa)(x-q^2a)\cdots(x-q^{k-2}a)$, segue que $(x-a)_q^{k-1}(x-q^{k-1}a) = (x-a)_q^k$. Além disso:

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k + q[k](x-a)_q^k = (1+q[k])(x-a)_q^k \\ &= \left(1+q\frac{q^k-1}{q-1}\right)(x-a)_q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}(x-a)_q^k \\ &= [k+1](x-a)_q^k. \end{aligned}$$

Portanto, $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Segue da Proposição acima que $D_qP_n = P_{n-1}$. De fato:

$$\begin{aligned} D_q\frac{[(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a)]}{[n]!} &= D_q\frac{(x-a)_q^n}{[n]!} \\ &= [n]\frac{(x-a)_q^{n-1}}{[n]!} = \frac{(x-a)_q^{n-1}}{[n-1]!} \\ &= P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Podemos extender a definição acima para todos os inteiros definindo

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n}, \forall n \geq 1.$$

Verificamos que tal extenção é ideal, ou seja, faz sentido a partir das proposições que seguem, porém não as demonstraremos, pois podem ser encontradas em [1, pp 9-10].

Proposição 3 *Quaisquer que sejam $m,n \in \mathbb{Z}$ temos*

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n.$$

Para uma generalização da Proposição 1, faz-nos necessário uma extenção da definição de $[n]$.

Definição 5 *Para qualquer número real α, não nulo, faça*

$$[\alpha] = \frac{1-q^\alpha}{1-q}.$$

Proposição 4 *Qualquer que seja n inteiro temos:*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}.$$

Não podemos utilizar a Proposição supracitada para encontrarmos as q-derivadas de $f_q(x) = \dfrac{1}{(x-a)_q^n}$, $g_q(x) = (a-x)_q^n$ e $h_q(x) = \dfrac{1}{(a-x)_q^n}$. Para ilustrarmos, consideremos $n \geq 1$, então:

$$\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)\cdots(a-q^{n-1}x) \\
&= (a-x)q(q^{-1}a-x)q^2(q^{-2}a-x)\cdots(q^{n-1}(q^{-n+1}a-x) \\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)\cdots(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a) \\
&- (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)_q^n.
\end{aligned}$$

Essa igualdade é válida para $n=0$ e $n<0$, cuja verificação é facil.

Por fim, vamos calcular a derivada das três q-funções $f_q(x)$, $g_q(x)$ e $h_q(x)$:

$$\begin{aligned}
D_q f_q(x) &= D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = D_q \frac{1}{(x-q^{-n}q^n a)} = D_q(x-q^n a)_q^{-n} \\
&= [-n](x-q^n a)_q^{-n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_q g_q(x) &= D_q(a-x)_q^n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}[n](x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} \\
&= -[n]q^{n-1}(-1)^{n-1}q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\
&= -[n]q^{n-1}(q^{-1}a-x)_q^{n-1} = -[n](a-qx)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_q h_q(x) &= D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{-[n](a-qx)_q^{n-1}}{(a-x)_q^n(a-qx)_q^n} \\ &= \frac{[n]}{(a-qx)_q^n(a-q^{n+1}x)} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}. \end{aligned}$$

1.4 A q-Fórmula de Taylor para Polinômios

Nesta seção, iremos obter a q-versão da *Fórmula de Taylor*, tendo em vista que $P_n(x) = \dfrac{(x-a)_q^n}{[n]!}$ satisfaz as três condiçoes do Teorema 3, com relação ao operador linear D_q.

Teorema 6 *Para todo polinômio $f(x)$ de grau N e um número c qualquer, o polinômio*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

é a expansão q-Taylor.

Para exemplificarmos o Teorema supracitado, consideremos $f(x) = x^n$ e $c = 1$, no qual $n \in \mathbb{Z}_+$. Para $j = 1$ temos $(D_q f)(x) = [n]x^{n-1}$, já para $j = 2$, temos $D_q((D_q f)(x)) = D_q([n]x^{n-1}) = [n][n-1]x^{n-2}$. Prosseguindo dessa forma, temos para $j \leq n$

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1]\cdots[n-j+1]x^{n-j} \tag{4.1}$$

Com isso,

$$(D_q^j f)(1) = [n][n-1]\cdots[n-j+1]$$

Portanto, a q-Fórmula de Taylor para f com $c = 1$ é:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n][n-1]\cdots[n-j+1]}{[j]!}(x-1)_q^j = \sum_{j=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] (x-1)_q^j, \tag{4.2}$$

onde:

$$\left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] = \frac{[n][n-1]\cdots[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} \tag{4.3}$$

são chamados de **coeficientes q-binomiais**.

Observe que fazendo $q \to 1$, os coeficientes q-binomiais se reduzem aos coeficientes binomiais ordinários.

1.5 A Fórmula Binomial de Gauss e a não comutatividade da Fórmula Binomial

Nesta seção, encontraremos duas fórmulas binomiais envolvendo coeficientes q-binomimais. Para isso, faremos o seguinte exemplo: sejam n um inteiro não-negativo e a um número. Vamos expandir $f(x) = (x+a)_q^n$ sobre $c = 0$ utilizando a q-Fórmula de Taylor. Sabemos que para $j \leq n$ temos:

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1]\cdots[n-j+1](x+a)_q^{n-j} \tag{5.1}$$

e por, $(x+a)_q^n = (x+a)(x+qa)\cdots(x+q^{n-j-1}a)$ e como $c = 0$ obtemos:

$$(D_q^j f)(c) = [n][n-1]\cdots[n-j+1]q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j}.$$

Logo, a q-Fórmula Taylor será:

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j} x^j. \tag{5.2}$$

Podemos melhorar ainda (5.2) substituindo $n-j$ por j e como

$$\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix},$$

temos:

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}. \tag{5.3}$$

A fórmula (5.3) é denominada de **Fórmula Binomial de Gauss**.

Pensando na Fórmula de Gauss, poderíamos indagar: será que essa fórmula é comutativa, ou seja, podemos comutar x com a? A partir de agora vamos voltar nossas atenções para responder a tal pergunta. Antes observemos o seguinte exemplo:

Exemplo: Sejam x' e $M_q^{'}$ operadores lineares no espaço dos polinômios cujas as ações num polinômio *f(x)* são:

$$x'[f(x)] = xf(x) \text{ e } M_q^{'}[f(x)] = f(qx).$$

Então, para qualquer $f(x)$, temos:

$$M_q^{'}x'[f(x)] = M_q^{'}[xf(x)] = qxf(qx) = qx'f(qx) = qx'M_q^{'}[f(x)],$$

ou seja,

$$M_q^{'}x'[f(x)] = qx'M_q^{'}[f(x)]. \tag{5.4}$$

◇

No teorema que segue, veremos que a Fórmula Binomial é não comutativa, mesmo envolvendo dois elementos que satisfazem uma relação especial como em (5.4).

Teorema 7 *Se $yx = qxy$, onde q é o número que comuta com ambos x e y, então:*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}. \tag{5.5}$$

Demonstração: Faremos a prova por indução. Para $n = 1$, temos $x + y = x^0 + y^{1-0} + x^1 + y^{1-1} = y + x$. Consideremos que (5.5) é válido para $n = k$, ou seja,

$$y^k x = q y^{k-1} x y = q^2 y^{k-2} x y^2 = q^k x y^k$$

e provemos para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} &= (x+y)^k (x+y) = \left(\sum_{j=0}^{k} x^j y^{k-j} \right) (x+y) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j} + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j (q^{k-j} xyk - j) + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} q^{k-j+1} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} + \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k-j+1} \\
&= y^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left(q^{k-j+1} \begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} \right) x^j y^{k-j+1} + x^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix} x^j y^{k+1-j}.
\end{aligned}$$

Aqui, utilizamos a regra q-Pascal, que será apresentada na próxima seção. Fica assim provado o teorema. ■

1.6 Propriedade dos coeficientes q-Binomiais

Nesta seção, estudaremos algumas propriedades dos coeficientes q-binomiais. Lembrando que definimos esses coeficientes como sendo

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\cdots[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}, \forall n \in \mathbb{Z}_+^*, n \geq j.$$

Mais uma vez, podemos observar que se fizermos $q \to 1$, teremos o coeficiente binomial ordinário.

Observemos que a regra de Pascal não é válida para os coeficientes q-binomiais. Com efeito,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{[2]!}{[1]![2-1]!} = \frac{\frac{q^2-1}{q-1}}{1} = q+1 \neq 2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A proposição que segue mostra a existência de duas regras q-Pascal.

Proposição 5 *Existem duas regras q-Pascal que são:*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-2 \\ j \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

e

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-2 \\ j \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

onde $1 \leq j \leq n-1$.

Demonstração: Qualquer que seja $1 \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} [n] &= 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} \\ &= (1+q+q^2+\cdots+q^{j-1}) + q^j(1+q+q^2+\cdots+q^{n-j-1}) \\ &= [j] + q^j[n-j]. \end{aligned}$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \frac{[n][n-1]!}{[j]![n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]!([j]+q^j[n-j])}{[j]![n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]![j]}{[j][j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-1]![n-j]}{[j]![n-j][n-j-1]!} \\ &= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-1]!}{[j]![n-j-1]!} = \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por fim, pela simetria dos coeficientes temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fica assim provado a proposição. ■

Corolário 5.1 *Cada coeficiente q-binomial é um polinômio em q de grau $j(n-j)$, cujo coeficiente lider é 1.*

Demonstração: Tomando n um inteiro não negativo, sempre temos:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n]![0]!} = 1,$$

que evidentemente é um polinômio de grau $0 = 0(n-0) = n(n-n)$. Consideremos agora $1 \leq j \leq n-1$. Pela Proposição acima, o coeficiente q-binomial é a soma de dois polinômios, que é um polinômio e será em q, pois $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ é a razão de dois polinõmios em q. Por fim, observemos que:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-j+1})}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\cdots(q-1)},$$

então o grau de $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ é

$$\begin{aligned} &(n+n-1+\cdots+n-j+1)-(j+j-1+\cdots+1) \\ = &\frac{(n+n-j+1)j}{2} - \frac{(j+1)j}{2} = \frac{j}{2}(2n-2j) = j(n-j). \end{aligned}$$

Com isso, encerramos a demonstração do corolário. ■

Veremos que os coeficientes q-binomiais também têm propriedades combinatórias, assim como os coeficientes binomiais ordinários.

Teorema 8 *Sejam $A_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ e $A_{n,j}$ a coleção de todos os subconjuntos se A_n com j elementos, onde $0 \leq j \leq n$. Então:*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \sum_{S \in A_{n,j}} q^{w(S)-\frac{j(j+1)}{2}}, \tag{6.3}$$

no qual $w(S) = \sum_{s \in S} . s$

Demonstração: Inicialmente, para $n = 1$ temos $j \in 0, 1$. Fazendo $j = 0$ temos $A_{1,0} = \{\phi\}$ e $w(\{\phi\}) = 0$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[1]!}{[0]![1]!} = 1 = \sum_{S \in A_{1,0}} q^{0-\frac{0(0+1)}{2}}$$

e para $j = 1$, obtemos $A_{1,1} = \{1\}$ e $w(\{1\}) = 1$, então:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{[1]!}{[1]![0]!} = 1 = \sum_{S \in A_{1,1}} q^{1-\frac{1(1+1)}{2}} = \sum_{S \in A_{1,1}} q^{0}.$$

Logo, para $n = 1$ temos que (6.3) é válido. Agora suponhamos válido para $n = k$, $k \geq 2$ e provemos para $n = k + 1$. O caso em que $j = 0$ é análogo ao já feito acima. Para $j \geq 1$, façamos $A_{m,j} = A \cup A'$, onde $A = \{S \in A_{m,j}; m \notin S\}$ e $A' = \{S \in A_{m,j}; m \in S\}$. Dessa forma, os elementos de A são os subconjuntos de A_{m-1} com j elementos e os elementos de A' estão em bijeção com os subconjuntos de A_{m-1} com $j - 1$ elementos. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \sum_{S \in A_{n,j}} q^{w(S)-\frac{j(j+1)}{2}} &= \sum_{S \in A} q^{w(S)-\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in A'} q^{w(S)-\frac{j(j+1)}{2}} = \\ &= \sum_{S \in A_{m-1,j}} q^{w(S)-\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in A_{m-1,j-1}} q^{(w(S)+m)-\frac{j(j+1)}{2}} = \\ &= \sum_{S \in A_{m-1,j}} q^{w(S)-\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S \in A_{m-1,j-1}} q^{w(S)-\frac{j(j-1)}{2}} q^{m-j} = \\ &= \begin{bmatrix} m-1 \\ j \end{bmatrix} + a^{m-j} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A última linha segue da regra de q-Pascal. ∎

1.7 Funções q-Trigonométricas

Definiremos aqui as funções q-análogas do seno e do cosseno, fazendo uso das expressões de Euler em termos da função q-exponencial, que é uma das mais importatntes funções do q-cálculo, pois permite obter uma grande quantidade de fórmulas.

Mas, antes disso, veremos algumas definições e resultados, que podemos encontrar mais detalhes no apêndice.

As duas definições que seguem são referentes à clássica função exponencial.

Definição 9 *O* ***q-análogo da função*** e^x *é*

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}.$$

Observação: Notemos que quando $|q| < 1$, o produto infinito $(1 + x)_q^\infty = (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots$ converge a algum número finito. Mais ainda, se $|q| < 1$, temos

(i.) $\lim_{n\to\infty}[n] = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$;

(ii.)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} = \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}.\end{aligned}$$

Se aplicarmos *(i)* e *(ii)* as fórmulas binomiais de Gauss e Heine, obtemos as duas seguintes identidades de séries de potências formais em x (supondo $|q| < 1$):

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}.$$

Definição 10 *O q-análogo da função exponencial é:*

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^\infty.$$

Proposição 6 *As q-derivadas de e_q^x e E_q^x são:*

$$D_q e_q^x = e_q^x \quad e \quad D_q E_q^x = E_q^{qx}.$$

A prova dessa Proposição encontra-se na página 52 deste trabalho.

Lema 10.1 *São válidas as igualdades $e_{\frac{1}{q}}^x = E_q^x$ e $e_q^x . E_q^{-x} = 1$.*

A prova desse Lema encontra-se na página 52.
Isto posto, podemos definir as funções q-seno e q-cosseno.

Definição 11 *As funções q-trigonométricas são:*

$$sen_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \quad ou \quad Sen_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}$$

$$e$$

$$cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \quad ou \quad Cos_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}.$$

A partir do Lema 10.1, temos $Sen_q x = sen_{\frac{1}{q}} x$ e $Cos_q x = cos_{\frac{1}{q}} x$ e ainda:

$$\begin{aligned}
cos_q x Cos_q x &= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \\
&= \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{ix} E_q^{-ix} + e_q^{-ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix}}{4} \\
&= \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + (e_q^{x} E_q^{-x})^i + (e_q^{-x} E_q^{x})^i + e_q^{-ix} E_q^{-ix}}{4} \\
&= \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sen_q x Sen_q x &= \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \\
&= -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} - (e_q^{x} E_q^{-x})^i - (e_q^{-x} E_q^{x})^i + e_q^{-ix} E_q^{-ix}}{4} \\
&= -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}
\end{aligned}$$

Sendo assim:

$$cos_q x . Cos_q x + sen_q x . Sen_q x = 1,$$

que é o q-análogo da relação fundamental da trigonometria.

Para finalizar, vamos calcular a q-derivada da função q-seno e q-cosseno.

$$\begin{aligned} D_q sen_q x &= D_q \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} = \frac{e_q^{ix} i + e_q^{-ix} i}{2i} \\ &= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} = cos_q x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D_q cos_q x &= D_q \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} = \frac{e_q^{ix} i - e_q^{-ix} i}{2} \\ &= i^2 \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} = -sen_q x \end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} D_q Sen_q x &= D_q \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} = \frac{E_q^{qix} i + E_q^{-qix} i}{2i} \\ &= \frac{E_q^{qix} + E_q^{-qix}}{2} = Cos_q x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_q Cos_q x &= D_q \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} = \frac{E_q^{qix} i - E_q^{-qix} i}{2} \\ &= i^2 \frac{E_q^{qix} - E_q^{-qix}}{2i} = -Sen_q x. \end{aligned}$$

Capítulo 2

A Integração Quântica e suas Aplicações

Após ter estudado um pouco sobre a q-derivada, podemos pensar: qual o comportamento da q-integração? Pensando nisso, destinamos esse capítulo para este fim.

2.1 q-Antiderivada

Para iniciarmos nossa seção, devemos entender o que é uma q-antiderivada. Sendo assim, segue a definição.

Definição 12 *A função $F(x)$ é uma q-antiderivada de $f(x)$ se $D_qF(x) = f(x)$ e a notação usada é:*

$$\int f(x)d_qx.$$

Podemos observar, a partir da definição acima, uma diferença entre o cálculo ordinário do cálculo quântico. No ordinário, existem várias funções $F(x)$, que são as antiderivadas de uma única função $f(x)$, isto se deve ao fato de um acréscimo de uma constante qualquer em $F(x)$. No entanto, no cálculo quântico é mais sutil, pois $D_q\varphi(x) = 0$ se, e somente se, $\varphi(qx) - \varphi(x) = 0$, ou seja, $\varphi(qx) = \varphi(x)$, que não implica necessariamente em φ ser uma constante. Por outro lado, se considerarmos φ uma série de potência, a condição $\varphi(qx) = \varphi(x)$ implica $q^n c_n = c_n$, para cada n, onde c_n é o coeficiente de x^n, mas isto só é possível quando $c_n = 0$, $\forall n \geq 1$, ou seja, φ é uma constante. Portanto, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é uma série de potência, então $f(x)$ possui uma única q-antiderivada a menos de uma constante, a saber

$$\int f(x) d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{[n+1]} + C.$$

Se $f(x)$ é uma função geral, então podemos melhorar a situação impondo algumas restrições na q-antiderivada. Para generalizar tais pensamentos, vamos expor a seguinte proposição.

Proposição 7 *Seja $0 < q < 1$. Então, a menos de uma adição constante, toda função $f(x)$ possui no máximo uma q-antiderivada que é contínua em $x = 0$.*

Demonstração: Suponhamos F_1 e F_2 duas q-antiderivadas de f contínuas em $x = 0$. Consideremos uma função $\varphi = F_1 - F_2$, que é contínua em $x = 0$, que atende a propriedade $\varphi(qx) = \varphi(x)$, $0 < q < 1$, para todo x, desde que $D_q\varphi = 0$. Sejam

$$m = inf\{\varphi(x); qA \leq x \leq A\} \quad \text{e} \quad M = sup\{\varphi(x); qA \leq x \leq A\},$$

nos quais $A > 0$. Observemos que m ou M pode ser mais ou menos infinito no caso em que φ for ilimitado superiormente ou inferiormente, respectivamente. Assumindo $m < M$, temos que pelo menos $\varphi(0) \neq m$ ou $\varphi(0) \neq M$ é verdadeiro. Então, vamos supor $\varphi(0) \neq m$. Segue por continuidade que dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos obter um $\delta > 0$ tal que

$$m + \epsilon \notin \varphi(0, \delta).$$

No entanto, tomando N suficientemente grande, temos $q^N A < \delta$. Desde que $\varphi(qx) = \varphi(x)$, temos:

$$m + \epsilon \in (m, M) \subset \varphi[qA, A] = \varphi[q^{N+1}A, q^N A] \subset \varphi(0, \delta),$$

levando a uma contradição. Portanto, $m = M$ e φ é uma constante em $[qA, A]$, ou seja, φ é uma constante sempre. ■

Observemos que a proposição expõe apenas a unicidade. Discutiremos a existência posteiormente.

Por fim, determinaremos a fórmula para **mudança de variável**. Sejam α e β constantes e $u = u(x) = \alpha x^\beta$. Se $F(x)$ é a q-antiderivada de $f(x)$, então:

$$\int f(u) d_q u = F(u) = F(u(x)).$$

Temos para qualquer q' e usando observação 3, do capítulo 1, q-regra da cadeia, temos o seginte:

$$\begin{aligned} F(u(x)) &= \int D_{q'} F(u(x)) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^\beta} F)(u(x)) D_{q'} u(x) d_{q'} x \\ &= \int (D_{q'^\beta} F)(u(x)) d_{q'} u(x), \end{aligned}$$

que fazendo $q' = q^{\frac{1}{\beta}}$, obtemos $D_{q'^\beta} F = D_q F = f$, segue que:

$$\int f(u) d_q u = \int f(u(x)) d_{q^{\frac{1}{q}}} u(x). \tag{1.1}$$

Com isso, $f(u(x)) D_{q^{\frac{1}{q}}} u(x)$ é uma das q-antiderivadas de $f(u)$.

2.2 A Integral de Jackson

Em 1869, Thomae, que foi o aluno de Heine, introduziu a chamada q-integral. Porém, Thomae provou que a transformação de Heine ${}_2\phi_1(a, b; c(q; z))$ é o q-análogo da integral de beta de Euler, que pode ser expresso como um quociente de funções q-gama. Já em 1910, Frank Hilton Jackson (1870 - 1960), definiu a q-integral geral.

Nosso intuito aqui será o de apresentar a **Integral de Jackson** e algumas aplicações. Para isso, consideremos $f(x)$ uma função qualquer e $F(x)$ sua q-antiderivada, então por definição da q-derivada temos:

$$\frac{1}{(q-1)x}(M'_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = D_q F(x) = f(x),$$

onde $M'_q(F(x)) = F(qx)$, que definimos na Seção 1.5. Observemos ainda que podemos escrever a q-antiderivada formalmente como sendo

$$F(x) = \frac{1}{(1 - M'_q)}\left((1-q)xf(x)\right).$$

Como $\dfrac{1}{(1 - M'_q)} = M'_q + (M')^2_q + (M')^3_q + \cdots$, então

$$\begin{aligned} F(x) &= (1-q)(1 + M'_q + (M')^2_q + (M')^3_q + \cdots)xf(x) \\ &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}(M')^j_q(xf(x)) \end{aligned}$$

e pela expansão das séries geométricas, chegammos a:

$$\int f(x)d_qx = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}(M')^j_q(xf(x)),$$

que fazendo uso da expansão das séries geométricas obtemos:

$$\int f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^j f(q^j x). \tag{2.1}$$

Na qual (2.1) é chamda de **Integral de Jackson** de $f(x)$.

Da integral de Jackson obtemos uma fórmula mais geral, como mostra abaixo:

$$\begin{aligned}\int f(x)D_qg(x)d_qx &= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^jx)D_qg(q^jx)\\ &= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^jx)\frac{g(q^jx)-g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^jx}\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\int f(x)d_qg(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^jx)\left(g(q^jx)-g(q^{j+1}x)\right). \tag{2.2}$$

O teorema que segue nos fornece condições suficientes para examinar sob quais condições $\int f(x)d_qx$ converge para uma q-antiderivada.

Teorema 13 *Suponha $0 < q < 1$. Se $|f(x)x^{\alpha}|$ é limitada pelo intervalo $(0, A]$ para algum $0 \leq \alpha < 1$, então a integral de Jackson definido em (2.1) converge para a função $F(x)$ em $(0, A]$, que é a q-antiderivada de $f(x)$. Além disso, $F(x)$ é contínua em $x = 0$ e $F(0) = 0$.*

Demonstração: Considere $M \in (0, A]$, tal que $|f(x)x^{\alpha}| < M$, segue que:

$$-M < f(x)x^{\alpha} < M \Leftrightarrow -Mx^{-\alpha} < f(x) < Mx^{-\alpha} \Leftrightarrow |f(x)| < Mx^{-\alpha}$$

Daí, para todo $0 < x < A$ e $j \geq 0$ temos:

$$\begin{aligned}|f(q^jx)| < M(q^jx)^{-\alpha} &\Leftrightarrow |q^jf(q^jx)| < Mq^j(q^jx)^{-\alpha}\\ &= Mq^jq^{-j\alpha}x^{-\alpha} = Mx^{-\alpha}q^{(1-\alpha)j}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Desde que $1-\alpha > 0$ e $0 < q < 1$, vemos que as séries são majoradas por uma série geométrica convergente. Com isso, a equação (2.1), converge pontualmente para alguma função $F(x)$. E ainda de (2.1) temos $F(0) = 0$. Observando que $1-q > 0$ e $x > 0$, então $(1-q)x > 0$ e por (2.3) temos:

$$\begin{aligned}\left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx)\right| &< (1-q)x\left|\sum_{j=0}^{\infty}Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j\right| \\ &= (1-q)xMx^{-\alpha}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(q^{1-\alpha})^j\right|.\end{aligned}$$

Como $\sum_{j=0}^{\infty}(q^{1-\alpha})^j = q^{1-\alpha}+(q^{1-\alpha})^2+(q^{1-\alpha})^3+\cdots = \dfrac{1}{1-q^{1-\alpha}}$, então:

$$\left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx)\right| < \frac{(1-q)x^{1-\alpha}M}{1-q^{1-\alpha}}, \quad 0<x\leq A.$$

Por fim, mostremos que $F(x)$ é a q-antiderivada. Para isso, devemos ter $D_qF(x) = f(x)$, então:

$$\begin{aligned}D_qF(x) &= \frac{1}{(1-q)x}\left((1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx)-(1-q)qx\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^{j+1}x)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx)-\sum_{j=0}^{\infty}q^{j+1}f(q^{j+1}x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx)-\sum_{j=1}^{\infty}q^jf(q^jx) \\ &= f(x)+\sum_{j=1}^{\infty}q^jf(q^jx)-\sum_{j=1}^{\infty}q^jf(q^jx) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Note que, se $x\in(0,A]$ e $0<q<1$, então $qx\in(0,A]$, e, portanto, a q-diferenciação é válida. ■

Pela Proposição 6, da seção 2.1, se as hipóteses do teorema acima forem satisfeitas, a integral de Jackson fornece uma única q-antiderivada que é contínua em $x=0$, até a adição de uma constante.

Por outro lado, se $F(x)$ é a q-antiderivada de $f(x)$ e $F(x)$ é contínua em $x=0$, então $F(x)$ deve ser dada, até a adição de uma constante, pela fórmula de Jackson, uma vez que as somas parciais da integral de Jackson são:

$$\begin{aligned}
(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) &= (1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j D_q F(t)|_{t=q^j x} \\
&= (1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j \left(\frac{F(q^j x)-F(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j q}\right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{N} F(q^j x)-F(q^{j+1}x)\right) \\
&= F(x)-F(q^{N+1}x),
\end{aligned}$$

que obviamente tende a $F(x) - F(0)$, quando $N \to \infty$, pela continuidade de $F(x)$ em $x = 0$.

Podemos aplicar a fórmula de Jackson para definir a q-integral definida.

Definição 14 *Sejam $0 < a < b$. Definimos a q-integral definida como sendo:*

$$\int_0^b f(x)d_q x = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{2.4}$$

e

$$\int_a^b f(x)d_q x = \int_0^b f(x)d_q x - \int_0^a f(x)d_q x.$$

Utilizando (2.2), deriva de (2.4) uma fórmula mais geral.

$$\int_0^b f(x)d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j b)\left(g(q^j b) - g(q^{j+1}b)\right).$$

A interpetação geométrica da integral

$$\int_0^b f(x)d_q x = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b)$$

é análoga à da Integral de Riemann, ou seja, corresponde a soma das áreas de uma quantidade infinita de retângulos, como mostra a figura 1.1.

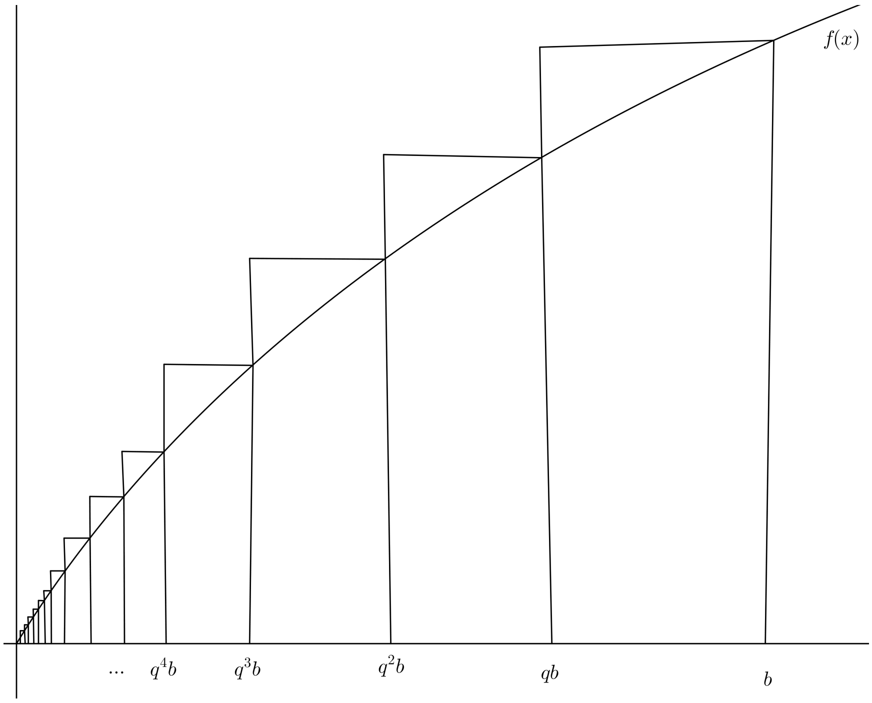

Figura 2.1:

Mais ainda, se fizermos $q \to 1$, a largura dos retângulos tende a zero, logo a soma tende a Integral de Riemann, isto é,

$$\lim_{q\to 1}\int_0^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)dx$$

Passemos agora a definir a q-integral imprópria de forma mais elegante.

Definição 15 *A q-integral imprópria de f em* $[0,+\infty)$ *é definida por:*

$$\int_0^{+\infty} f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx \tag{2.5}$$

se $0 < q < 1$ *ou*

$$\int_0^{+\infty} f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)d_qx$$

se $q > 1$.

Antes de apresentar a próxima proprosição, façamos a seguinte observação:

$$\begin{aligned}
\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx &= \int_0^{q^j} f(x)d_qx - \int_0^{q^{j+1}} f(x)d_qx \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{+\infty} q^{j+k}f(q^{j+k}) - (1-q)\sum_{k=0}^{+\infty} q^{j+k+1}f(q^{j+k+1}) \\
&= (1-q)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(q^{j+k}f(q^{j+k}) - q^{j+k+1}f(q^{j+k+1})\right) \\
&= (1-q)\left(q^jf(q^j) - q^{j+1}f(q^{j+1}) + q^{j+1}f(q^{j+1}) - q^{j+2}f(q^{j+2}) + \cdots\right) \\
&= (1-q)q^jf(q^j). \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Proposição 8 *A q-integral imprópria defnida acima converge se* $x^\alpha f(x)$ *é limitada numa vizinhança de* $x = 0$ *com algum* $\alpha < 1$ *e para x suficientemente grande com algum* $\alpha > 1$.

Demonstração: Substituindo (2.6) em (2.5), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)d_qx &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (1-q)q^jf(q^j) \\
&= |1-q| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^jf(q^j).
\end{aligned}$$

No qual:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^j f(q^j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^j f(q^j) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^{-j} f(q^{-j}).$$

Note que não se altera o resultado se substituírmos q por q^{-1}, sendo assim, basta considerar o caso $q < 1$. Note que, $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^j f(q^j)$ converge tendo em vista o Teorema 13 dessa seção. Dessa forma, nossa atenção estará voltada para o outro somatório. Por hipótese $|x^\alpha f(x)| < M$, na qual $\alpha > 1$ e $M > 0$. Então, para um j suficientemente grande temos:

$$\begin{aligned}
|q^{-j} f(q^{-j}| &= |q^{-j} q^{j\alpha} q^{-j\alpha} f(q^{-j})| \\
&= q^{-j(1-\alpha)} |(q^{-j})^\alpha f(q^{-j})| \\
&< M q^{-j(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Logo, o somatório é majorado por uma série geométrica convergente, ou seja, o somatório converge. ∎

Nosso estudo agora estará voltado à **Mudança de Variável** $u = u(x) = \alpha x^\beta$ na q-integral definida. A partir de (1.1) e utilizando (2.2) temos:

$$\begin{aligned}
\int f(u(x)) d_{q^{\frac{1}{\beta}}} u(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} f(u(q^{\frac{j}{\beta}} x))(u(q^{\frac{j}{\beta}} x) - (q^{\frac{j+1}{\beta}} x)) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f(\alpha(q^{\frac{j}{\beta}} x)^\beta (\alpha(q^{\frac{j}{\beta}} x)^\beta - \alpha(q^{\frac{j+1}{\beta}} x)^\beta) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f(\alpha q^j x^\beta)(\alpha q^j x^\beta - \alpha q^{j+1} x^\beta) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j u)(q^j u - q^{j+1} u) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j u)(q^j (u - qu)) \\
&= (1-q) u \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j u),
\end{aligned}$$

que substituindo x por a e b acima obtemos:

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)d_q u = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u(x))d_{q^{\frac{1}{\beta}}} u(x). \tag{2.7}$$

2.3 O Teorema Fundamental do q-Cálculo e a Integração por Partes

No cálculo ordinário temos um teorema que une a derivada e a integral, chamado de Teorema Fundamental do Cálculo de autoria de *Newton-Leibniz*. Análogo ao cálculo ordinário, o q-cálculo, possui a q-versão para esse teorema denotado por **Teorema Fundamental do q-Cálculo** e o mérito também é dado à *Newton-Leibniz*.

Teorema 16 (Teorema Fundamental do q-Cálculo) *Se $F(x)$ é a q-antiderivada de $f(x)$ e $F(x)$ é contínua em $x = 0$, então:*

$$\int_a^b f(x)d_q x = F(b) - F(a) \tag{3.1}$$

na qual $0 \leq a < b < \infty$.

Demonstração: Por hipótese, temos $F(x)$ a q-antiderivada de $f(x)$, que é contínua em $x = 0$, então, a menos da adição de uma constante, $F(x)$ é dado pela integral de Jackson (2.1).

$$F(x) = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) + F(0).$$

Por definição, temos:

$$\int_o^a f(x)d_q x = (1-q)a \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a),$$

então:

$$\int_0^a f(x)d_qx = F(a) - F(0).$$

Analogamente:

$$\int_0^b f(x)d_qx = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b),$$

ou seja:

$$\int_0^b f(x)d_qx = F(b) - F(0).$$

Segue que:

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx = F(b) - F(a).$$

Fazendo $a = q^{j+1}$ (ou q^j) e $b = q^j$ (ou q^{j+1}), na qual $0 < q < 1$ (ou $q > 1$), e pela definição da integral imprópria (2.5), vemos que o teorema é válido se o $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existe. Fica assim provado o teorema. ■

Corolário 8.1 *Se $f'(x)$ existe numa vizinhança de $x = 0$ e é contínua em $x = 0$, na qual $f'(x)$ é a derivada ordinária de $f(x)$, então:*

$$\int_a^b D_qf(x)d_qx = f(b) - f(a).$$

Demonstração: De fato:

$$\int_a^b D_qf(x)d_qx = \int_a^b \lim_{x\to 0}\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}d_qx.$$

Por $f'(x)$ ser a derivada ordinária de $f(x)$, então podemos fazer uso da Regra de L'Hopital, ou seja:

$$\begin{aligned}\int_a^b D_q f(x) d_q x &= \int_a^b \lim_{x\to 0} \frac{qf'(qx) - f'(x)}{(q-1)} d_q x \\ &= \int_a^b \lim_{x\to 0} \frac{f'(qx)(q-1)}{(q-1)} d_q x \\ &= \int_a^b f'(0) d_q x.\end{aligned}$$

Com isso, $D_q f(x)$ pode ser contínua em $x = 0$ se considerarmos $(D_q f)(0) = f'(0)$. Logo, segue do teorema que:

$$\int_a^b D_q f(x) d_q x = \int_a^b f'(0) d_q x = f(b) - f(a).$$

Provando, assim, o corolário. ∎

Na definição da q-integral definida, devemos ter que a função seja contínua em $x = 0$ independentemente se o zero pertencer ou não ao intervalo de integração. Essa continuidade é condição para a convergência da integral de Jackson.

Para finalizar essa seção, vamos estudar a q-integração por partes. Sendo assim, consideremos duas funções $f(x)$ e $g(x)$, cujas derivadas ordinárias existem numa vizinhança de $x = 0$ e são contínuas em $x = 0$. Então, pela regra do produto temos:

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x)).$$

Aplicando a q-integraçao temos:

$$\int_a^b D_q(f(x)g(x)) = \int_a^b f(x)(D_q g(x)) d_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x)) d_q x.$$

Desde que o produto de funções diferenciaveis também é diferenciavel no cálculo ordinário, podemos aplicar o corolário supracitado na igualdade acima, então:

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b f(x)(D_q g(x))d_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x))d_q x \\ &= \int_a^b f(x)d_q g(x) + \int_a^b g(qx)d_q f(x). \end{aligned}$$

Sendo assim, para a q-integral por partes fica análogo à integração por partes do cálculo ordinário fazemos:

$$\int_a^b f(x)d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)d_q f(x).$$

Para efeito de aplicações da q-integração por partes, temos o teorema abaixo que obtém a q-Fórmula de Taylor com resto de Cauchy.

Teorema 17 *Considere $D_q^j f(x)$ contínua em $x = 0$ para todo $j \neq n+1$. Então, temos a q-análoga fórmula de Taylor com resto de Cauchy.*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} (D_q^j f)(a)\frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!}\int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n d_q x. \tag{3.3}$$

Demonstração: A prova será feita por indução. Então, para $n = 0$ temos:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f(x)d_q x = f(a) + f(b) - f(a) = f(b).$$

Suponha agora que (3.3) é válido para $n-1$, ou seja:

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} (D_q^j f)(a)\frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n-1]!}\int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} d_q x.$$

Na seção 1.3, vimos que:

$$D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}. \tag{*}$$

Fazendo uso de (*) e aplicando a q-integração por partes temos:

$$\begin{aligned}\int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} d_q x &= -\frac{1}{[n]}\int_a^b D_q^n f(x) d_q (b-a)_q^n \\ &= D_q^n f(a)\frac{(b-a)_q^n}{[n]} + \frac{1}{[n]}\int_a^b (b-qx)_q^n D_q^{n+1} f(x) d_q x.\end{aligned}$$

Provando assim o teorema. ■

2.4 As Funções q-Gama e q-Beta

Leonard Euler, com sua genialidade, introduziu duas funções, em termos da integral definida, que possui uma vasta aplicabilidade. Entre elas, estão a Teoria da Probabilidade, a Física, a Engenharia, entre outros.

Estas funções são denotadas por *Função Gama* e *Função Beta* que são definidas, respectivamente, por:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

e

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1} dx, \quad t, s > 0.$$

Algumas de suas propriedades são:

(i.) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$;

(ii.) $\Gamma(n+1) = n!$, se n é inteiro positivo;

(iii.) $B(t,s) = \dfrac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

Observemos que a propriedade *(ii)* listada acima generaliza o fatorial de um inteiro positivo.

Passemos a estudar as q-análogas dessas funções, assim como as q-análogoas propriedades listadas acima. A partir de agora, assumamos que $0 < q < 1$.

Definição 18 *Para todo* $t > 0$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

é dita ***Função q-Gama****.*

Lembrando que $D_q E_q^x = E_q^{qx}$, então:

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t E_q^{-qx} d_q x = \int_0^\infty x^t d_q E_q^{-x}$$

e pela q-integração por partes

$$\Gamma(t+1) = \infty^t E_q^{-q\infty} - 0^t E_q^{-q0} - \int_0^\infty E_q^{-qx} [t] x^{t-1} d_q x.$$

Mas da Seção 1.7 temos:

$$E_q^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e_q^x} = 0, \qquad E_q^0 = 1$$

logo,

$$\begin{aligned}
\Gamma(t+1) &= 0 - 0 - [t] \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \\
&= [t]\Gamma(t)
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Sendo

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x = E_q^0 - E_q^{-\infty} = 1,$$

temos para todo inteiro n não negativo

$$\Gamma(n+1) = [n]!.$$

Embora a função q-beta seja mais complicada, ela será bastante útil para os próximos resultados.

Definição 19 *Para todo $t, s > 0$*

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x$$

*é denominada de **Função q-Beta**.*

Pela definição das integrais definidas e impróprias temos:

$$\begin{aligned} B_q(t,\infty) &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^j)^{t-1}(1-q^{t+1})_q^{\infty} \\ &= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j (q^j)^{t-1}(1-q^{t+1})_q^{\infty} \\ &= \int_0^{\infty} x^{t-1}(1-qx)_q^{\infty} d_q x. \end{aligned}$$

Na qual usamos $(1-q^{j+1})_q^{\infty} = 0$, para todo inteiro n negativo. Tendo em vista que $E_q^x = (1+(1-q)x)_q^{\infty}$, então:

$$B_q(t,\infty) = \int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-\frac{qx}{(1-q)}} d_q x$$

e fazendo $x = (1-q)y$ temos:

$$B_q(t,\infty) = (1-q)^t \int_0^{\infty} y^{t-1} E_q^{-qy} d_q x.$$

Daí, a relação entre $\Gamma_q(t,\infty)$ e $B_q(t,\infty)$ é:

$$\Gamma(t) = \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t}. \tag{4.1}$$

A inserção dessa nova variável s parece só fazer complicar, porém ela facilitará em muitos problemas.

Proposição 9 *i. Se $t > 0$ e n é um inteiro, então:*

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}; \tag{4.2}$$

ii. Para todo $t, s > 0$, temos:

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}(1-q^{t+s})_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}}. \tag{4.3}$$

Demonstração: Observemos inicialmente que $D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$ e pela integração por partes temos, para todo $t, s > 0$

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= -\frac{1}{[s]}\int_0^1 x^{t-1} d_q(1-x)_q^s \\ &= -\frac{1}{[s]}\left[1^{t-1}(1-1)_q^s - 0^{t-1}(1-0)_q^s - \int_0^1 (1-qx)_q^s [t-1] x^{t-2} d_q x\right] \\ &= \frac{[t-1]}{[s]}\int_0^1 x^{t-2}(1-qx)_q^s d_q x. \end{aligned}$$

Segue que:

$$B_q(t,s) = \frac{[t-1]}{[s]} B_q(t-1, s+1).$$

Observando ainda que:

$$\begin{aligned} B_q(t,n+1) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^n d_q x \\ &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1}(1-q^n x) d_q x \\ &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1} d_q x - q^n \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1} d_q x \end{aligned}$$

e assim

$$B_q(t,n+1) = B_q(t,n) - q^n B_q(t+1,n). \tag{4.5}$$

Segue de (4.4) e (4.5) que

$$B_q(t,n+1) = B_q(t,n) - \frac{q^n[t]}{[n]} B_q(t,n+1)$$

ou ainda,

$$B_q(t,n+1) = \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}} B_q(t,n),$$

para todo $t > 0$ e n inteiro positivo. A partir de

$$B_q(t,1) = \int_0^1 x^{t-1} d_q x = \frac{1}{[t]}$$

temos

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q^{(t+n-1)\cdots(1-q^{t+1})[t]})} = \frac{(1-q)\cdots(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}$$

o que prova a parte *(i)*. Para a parte *(ii)* temos, a partir de *(i)*, que

$$(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty} \quad e \quad \frac{1}{(1-q^t)_q^n} = \frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty}$$

é válido para $s = 1, 2, \cdots$. Dessa forma, podemos escrever

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x = \int_0^1 \frac{x^{t-1}(1-qx)_q^\infty}{(1-q^s x)_q^\infty} d_q x$$

e ainda, o segundo membro de (4.3) é

$$\frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^s q^t)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty}.$$

Assim, observamos que (4.3) pode ser escrito como uma série de potência em q. E que seus coeficientes correspondentes são iguais a um número infinito de valores de q^s que são $q, q^2, q^3, \cdots$. No entanto, uma vez que todos os coeficientes são polinômios em q^s e polinômios distintos podem coincidir apenas numa quantidade finita de pontos, as duas séries têm coeficientes idênticos, provando assim a igualdade. ∎

Substituindo o resultado de *(i)* da proposição acima, com $n \to \infty$, em

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t}\\ &= \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty}{(1-q)^t(1-q^t)_q^\infty}\\ &= \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty},\end{aligned}$$

que é uma expanssão mais explícita da função q-gama.

Já a parte *(ii)* da proposição nos mostra que $B_q(t,s) = B_q(s,t)$, ou seja, a função q-beta é simétrica em relação a t e s. Para finalizar, observemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} &= \frac{\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{s-1}(1-q^s)_q^\infty}}{\dfrac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t+s-1}(1-q^{t+s})_q^\infty}}\\ &= \frac{(1-q)_q^\infty(1-q)_q^{t+s-1}(1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty(1-q)_q^{s-1}(1-q^s)_q^\infty}\\ &= \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty(1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty(1-q^s)_q^\infty}\\ &= B_q(t,s),\end{aligned}$$

que é o q-análoga a propriedade *(iii)* desta seção.

2.5 h-Derivada e h-Integral

Até o momento estudamos apenas o q-cálculo, porém, como já havíamos mencionado o Cálculo Quântico está dividido em duas partes, o q-cálculo e o h-cálculo. Sendo assim, faremos uma introdução da segunda parte.

Vimos, no Capítulo 1, que a h-derivada é definida por:

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

na qual $h \neq 0$.

Com o intuito de facilitar o entendimento do h-cálculo, seguiremos um caminho análogo ao feito no q-cálculo.

Como ponto de partida, calcularemos o regra do produto e do quociente. Para isso, consideremos as funções f e g, então:

$$\begin{aligned}
D_h(f(x)g(x)) &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)D_h g(x) + g(x+h)D_h f(x)
\end{aligned}$$

e ainda, desde que $g(x) \neq 0$ e $g(x+h) \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
D_h\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\
&= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= \frac{g(x)D_h f(x) - f(x)D_h g(x)}{g(x+h)g(x)}.
\end{aligned}$$

A regra do produto nos sugere que a definição do h-binomial pode ser dado de forma similar.

Definição 20 *O h-análogo do binomial $(x-a)^n$ é:*

$$(x-a)_h^n = (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)$$

quando $n \geq 1$ e $(x-a)_h^0 = 1$.

Observemos que a definição do h-binomial está adequada, pois:

$$\begin{aligned}
D_h(x-a)_h^n &= \frac{(x-a+h)(x-a)\cdots(x-a-(n-2)h)}{h} \\
&- \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)}{h} \\
&= (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h) \\
&\quad \frac{(x-a+h)-(x-a-(n-1)h)}{h} \\
&= (x-a)_h^{n-1}\frac{x-a+h-x+a+(n-1)h}{h} \\
&= n(x-a)_h^{n-1}. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Sendo $h \neq 0$ temos, por definição, $(x-0)_h^n \neq x^n$. Considerando (5.1), a sequência dos polinômios $\{(x-a)_h^0, (x-a)_h, (x-a)_h^2, \cdots, (x-a)_h^n\}$ satisfaz as três condições do Teorema 3, da seção 1.2, tomando o operador linear D_h. Consequentemente, a h-Fórmula de Taylor para o polinômio $f(x)$ de grau N é dado por:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_h f)(a)\frac{(x-a)_h^j}{j!}.$$

Passemos a estudar algumas propriedades do h-cálculo:

(i.) Por definição temos:

$$\begin{aligned}
(x-a)_h^{m+n} &= (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(m-1)h)(x-a-mh) \\
&\quad (x-a-mh-h)\cdots(x-a-mh-(n-1)h) \\
&= (x-a)_h^m(x-a-mh)_h^n; \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

(ii.) Pela regra do quociente temos:

$$\begin{aligned}
D_h \frac{1}{(x-a)_h^n} &= \frac{-n(x-a)_h^{n-1}}{(x-a)_h^n (x+h-a)_h^n} \\
&= \frac{-n(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-2)h)}{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)(x+h-a)_h^n} \\
&= \frac{-n}{(x-a-(n-1)h)(x+h-a)_h^n} \\
&= \frac{-n}{(x+h-a)_h^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Temos ainda duas propriedades as quais não apresentaremos sua demonstração, mas que são demonstradas por indução finita.

(iii.) $D_h(a-x)_h^n = -n(a-h-x)_h^{n-1}$;

(iv.) $D_h \dfrac{1}{(a-x)_h^n} = \dfrac{n}{(a-x)_h^{n+1}}$.

Essas quatro propriedades podem ser extendidas para todos os inteiros, se definirmos

$$(a-x)_h^{-n} = \frac{1}{(x-a+nh)_h^n},$$

que podemos obtê-la substituindo em (5.2) m e n por n e -n, respectivamente, pois:

$$(x-a)_h^{n-n} = (x-a)_h^{-n}(x-a+nh)_h^n.$$

Portanto,

$$(x-a)_h^{-n} = \frac{1}{(x-a+nh)_h^n}.$$

Passemos a estudar a h-integral, que posteriormente apresentaremos e provaremos o Teorema Fundamental do h-Cálculo.

Denotamos de h-antiderivada de $f(x)$, a função $F(x)$ quando $D_hF(x) = f(x)$ for verdadeira e sua notação é:

$$\int f(x) d_h x = F(x).$$

Definição 21 *Sendo $b - a \in h\mathbb{Z}$, definimos a **h-integral definida** por:*

$$\int_a^b f(x)d_hx = \begin{cases} h\left(f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b-h)\right) & , se\ a < b \\ 0 & , se\ a = b \\ -h\left(f(b) + f(b+h) + \cdots + f(a-h)\right) & , se\ a > b. \end{cases}$$

Observe que o intervalo $[a, b]$ é particionado de forma que os subintervalos possuem o mesmo comprimento. Logo a h-integral, assim definida, nada mais é do que as somas de Riemann da função $f(x)$.

O teorema que segue mostra que a h-integral fica bem definida dessa forma.

Teorema 22 (Teorema Fundamental do h-Cálculo) *Se $F(x)$ é a h-antiderivada de $f(x)$ e $b - a \in h\mathbb{Z}$, então*

$$\int_a^b f(x)d_hx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: No caso em que $a = b$ temos,

$$\int_a^a f(x)d_hx = F(a) - F(a) = 0,$$

que atende a nossa definição. Consideremos agora $a < b$, segue da definição que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)d_hx &= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh)\\
&= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} D_hF(a+jh)\\
&= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} \frac{F(a+jh+h)-F(a+jh)}{h}\\
&= \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} F(a+(j+1)h)-F(a+jh)\\
&= F(a+h)-F(a)+F(a+2h)-F(a+h)+\cdots\\
\cdots &\ \ +F\left(a+\left(\frac{b-a}{h}-1+1\right)h\right)-F\left(a+\left(\frac{b-a}{h}-1\right)h\right)\\
&= F(b)-F(a).
\end{aligned}
$$

No caso em que $a > b$ é análogo, pois

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)d_hx &= -h\sum_{j=0}^{\frac{(a-b)}{h}-1} f(b+jh)\\
&= -h\sum_{j=0}^{\frac{(a-b)}{h}-1} D_hF(b+jh)\\
&= -h\sum_{j=0}^{\frac{(a-b)}{h}-1} \frac{F(b+jh+h)-F(b+jh)}{h}\\
&= -\sum_{j=0}^{\frac{(a-b)}{h}-1} F(b+(j+1)h)-F(b+jh)\\
&= -F(b+h)+F(b)-F(b+2h)+F(b+h)-\cdots\\
\cdots &\ \ -F\left(b+\left(\frac{a-b}{h}-1+1\right)h\right)+F\left(b+\left(\frac{a-b}{h}-1\right)h\right)\\
&= F(b)-F(a).
\end{aligned}
$$

Portanto, fica assim provado o teorema. ■

Com o Teorema Fundamental do h-Cálculo, podemos obter a h-integração por partes. Para isso, sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções, então:

$$D_h(f(x)g(x)) = f(x)D_hg(x) + g(x+h)D_hf(x),$$

que aplicando a h-integral, no qual $b - a \in h\mathbb{Z}$ com $a < b$, temos:

$$\int_a^b (f(x)g(x))d_hx = \int_a^b f(x)D_hg(x)d_hx + \int_a^b g(x+h)D_hf(x)d_hx.$$

Então:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)d_hg(x) + \int_a^b g(x+h)d_hf(x).$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)d_hg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x+h)d_hf(x).$$

Observemos ainda que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d_hg(x) &= \int_a^b f(x)D_hg(x)d_hx \\ &= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh)\left(g(a+(j+1)h) - g(a+jh).\right)\end{aligned}$$

Tomando $h = 1$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, no qual $a < b$. Definamos a função $\varphi(x)$ por:

$$f(x) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(x-1),$$

onde x é um inteiro positivo. Sendo assim:

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &= \varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(x-1)+\varphi(x)- \\ &- \varphi(0)-\varphi(1)-\varphi(2)-\cdots-\varphi(x-1) \\ &= \varphi(x), \end{aligned}$$

que da h-integração por partes temos:

$$\sum_{j=a}^{b-1}\varphi(j)g(j+1) = g(b)f(b)-g(a)f(a)-\sum_{j=a}^{b-1} f(j)\left(g(j+1)-g(j)\right).$$

Essa fórmula é denominada de **Transformação de Abel**.

Para finalizar, discutiremos a **Fórmula de Interpolação de Newton**. Para isso, consideremos $x-a \in h\mathbb{Z}$. Inicialmente, obervemos que:

$$\int_a^x f(t)d_h t = F(x)-F(a)$$

ou ainda,

$$\int_a^x D_h f(t)d_h t = D_h(F(x)-F(a)) = f(x)-f(a).$$

Sendo assim:

$$f(x)-f(a) = \int_a^x D_h f(t)d_h t = -\int_a^x D_h f(t)d_h(x-t).$$

que utilizando a h-integração por partes temos:

$$f(x)-f(a) = -(D_h f)(x)(x-x)+(D_h f)(x-a)+\int_a^x (x-h-t)D_h^2 f(t)d_h t$$

e pela propriedade *(iii)* desta seção temos:

$$f(x)-f(a) = (D_h f)(a)(x-a)-\frac{1}{2}\int_a^x D_h^2 f(t)d_h(x-t)_h^2$$

e novamente pela h-integração por partes temos:

$$f(x) - f(a) = (D_h f)(a)(x-a) + \frac{1}{2} D_h^2 f(a)(x-a)_h^2 - \frac{1}{6}\int_a^x D_h^3 f(t) d_h (x-t)_h^3,$$

prosseguindo dessa forma temos, para qualquer inteiro n não negativo

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(D_h^j f)(a)}{j!}(x-a)_h^j - \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x D_h^{n+1} f(t) d_h (x-t)_h^{n+1}$$

ou ainda:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(D_h^j f)(a)}{j!}(x-a)_h^j - \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t-h)_h^n D_h^{n+1} f(t) d_h t,$$

a qual é denotada de **Fórmula de Interpolação de Newton**.

Do ponto de vista do h-cálculo, a Fórmula de Interpolação de Newton é a h-Fórmula de Taylor com resto.

Para verificarmos o por quê de a fórmula acima ser chamada de interpolação, basta tomar $x = a + mh$, na qual m é um inteiro positivo, então pela definição de integral

$$\int_a^x (x-t-h)_h^n D_h^{n+1} f(t) d_h t = \sum_{j=0}^{m-1} ((a+mh) - (a+jh) - h)_h^n \, D_h^{n+1} f(a+jh).$$

Considerando a função $g(t)(a+mh-t-h)_h^n$, que some quando $t = a + (m-i)h$, $i = 1, 2, ...n$, o resíduo desaparece quando $m \in (1, n)$ e claramente a integral se anula quando $m = 0$. Portanto, a soma é de fato a interpolação polinomial de grau n, que aproxima de forma arbitrária para $f(x)$ no intervalo $[a, a+nh]$.

Apêndice A

Apêndice

Trazemos aqui resultados referentes à Seção 1.7, para complementar nosso trabalho e, também, para os leitores mais curiosos. E como ponto de partida observemos que para $|q| < 1$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right] &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})...(1-q^{n-j+1}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

E ainda

$$\lim_{n\to\infty} [n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}. \tag{A.2}$$

Considere as fórmulas binomiais abaixo:

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}. \tag{A.3}$$

e

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)} \tag{A.4}$$

As fórmulas (A.3) e (A.4) são chamadas de *Fórmula Binomial de Gauss* e *Fórmula Binomial de Heine*, respectivamente.

Agora vamos estudar as q-derivadas das funções e_q^x e E_q^x. Observemos que:

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j]x^{j-1}}{[j][j-1]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

e

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{[j]x^{j-1}}{[j][j-1]!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{j-1(j-2)}{2}} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{q^j x^j}{[j]!} \\ &= E_q^{qx}. \end{aligned}$$

Por fim, demonstraremos o Lema 10.1, então:

$$\begin{aligned} e_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-\frac{1}{q})^j x^j}{(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{q^2})\cdots(1-\frac{1}{q^j})} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{q-1}{q}\right)^j x^j}{\frac{(-1)^j(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}{q^{\frac{j(j+1)}{2}}}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j+1)}{2}} \frac{(-1)^j \frac{(q-1)^j}{q^j} x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j+1)}{2}-j} \frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{\frac{(1-q)}{1-q}\frac{(1-q^2)}{1-q}\cdots\frac{(1-q^j)}{1-q}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!} \\ &= E_q^x. \end{aligned}$$

E para mostrar que $e_q^x E_q^{-x}$, devemos observar que:

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}.$$

Sendo assim:

$$e_q^x E_q^{-x} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}(1+(1-q)(-x))_q^\infty = 1.$$

Apêndice B

Apêndice

O *q-cálculo* teve início no século XVIII, com *Leonard Euler* (1707 - 1783). O estudo do q-cálculo é considerado por muitos matemáticos como difícil. Isso se deve por dois motivos, um, por apresentar um grande número de fórmulas e, dois, por ser utilizada uma grande variedade de notações. A justificativa desse alto número de notações está ligada aos 300 anos de seu estudo, pois são 13 pontos de partida, distintos, para o q-cálculo a saber:

1. o estudo das funções elípticas no séuclo vinte;
2. o desenvolvimento da função teta;
3. teoria analítica aditiva dos números;
4. as funções hipergeométricas;
5. teoria da função gama;
6. polinômios de Bernoulli e Euler;
7. cálculo umbral;
8. teoria das diferenças finitas;
9. identidades combinatórias e coeficientes q-binomiais;
10. teoria do campo finito e raízes primitivas;
11. funções teta de Mock;
12. funções hipergeométricas múltiplas;
13. integrais elípticas e função eta de Dedekind.

As duas principais escolas da q-análise são Austríaca e Watson, mas várias outras escolas veem desenvolvendo a q-análise ao longo de 300 anos, desde os Bernoullis e Euler, embora hoje tenha certa dificuldade na comunicação em virtude de sua língua materna, o latim. Um exemplo desse fato é que os estudiosos de Watson não compreendem o desenvolvimento da Islândia por conta que no início do estudo de q-cálculo faziam uso de uma lingua escandinavia. E nós temos na área q-análise uma tendência para desenvolver novas linguagens específicas, como as notaçoes.

Wolfgang Hahn (1911 - 1998) ocupou o cargo de professor em Graz, na Austria, a partir de 1964. Então, por ter sido um célebre matemático de Berlim, Alemanha, a escola foi nomeada de Escola Autríaca. Hahn estudou juntamente com Heine, que o influenciou bastante, consequentemente, a Escola Autríaca estudou profundamente o cálculo de q-Heine umbral a partir de meados do século XIX.

Já o nome da Escola Watson é uma homenagem ao matemático inglês George Neville Watson(1886-1965), que escreveu sobre a Teoria da Funções de Bessel, e forneceu uma prova rigorosa para as identidades de Rogers-Ramanujan.

Hoje em dia é possível dividir o q-cálculo em várias escolas ou tradições, diferenciando-se apenas por:

i. sua história;

ii. especificação da linguagem moderna;

iii. as diferentes notações.

Embora a Escola Autríaca ser de grande importância para o desenvolvimento da q-análise, ela passa despercebida entre os países cuja lingua mãe é o inglês. As razões são duas: (a)após a primeira guerra mundial, os matemáticos autríacos e alemães, nacionalidade dos matemáticos da Escola Austríaca, foram proibidos de participar das importantes conferências, pois eram considerados políticos impuros pelos fraceses, mas felizmente não durou muito tempo esse impasse; a outra, mais relevante, é que os matemáticos da Escola Austríaca escreviam em alemão ou em francês e os mais antigos como Euler, Gauss e Jacobi escreviam em latim, e os matemáticos de língua inglesa eram pouco familiarizados que essa escrita, dificultando assim a comunicação entre as escolas.

Contrário à Escola Austríaca, a Watson é bastante difundida justamente por sua língua ser o inglês. Logo, essa escola termina sendo aceita, praticamente, automaticamente, pois hoje em dia a abordagem dos matemáticos é o inglês. No entanto, isso não significa que o mais correto ou o mais suave ou ainda o melhor caminho a percorrer.

Um importante estudo que vem sendo desenvolvido no q-cálculo são as séries q-hipergométricas, pois estas séries têm um importante papel na física e na matemática, pois muitas das funções elementares podem ser expressas por meio das funções q-hipergeométricas que, consequentemente, ganham características importantes, pois, com essa caracterização, podemos utilizar vários resultados dessas séries.

Referências Bibliográficas

[1] CHEUNG, Pokman, KAC, Victor. **Quantum Calculus - Universitext**. New York: Board,2002.

[2] ERNST, Thomas. **A Comprehensive Treatment of q-Calculus**. New York: Birkhauser, 2012).

[3] ——————. **The History of q-Calculus and a New Method**. Disponível em <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.63.274& rep=rep1& type=pdf>. Acesso em 22 de abril de 2014.

[4] GONÇALVES, Ícaro, ROCHA JR, Roldão da. **Cálculo Quântico** Disponível em <http://gradmat.ufabc.edu.br/iniciacao/2009/paper_ 5_ 22.pdf>. Acesso em 21 de abril de 2014.

[5] ONTURK, Nusah, YESIKAYA, Zuhal. **Q-Calculus**. 2013. Disponível em <http://www.mcs.cankaya.edu.tr/proje/2013/guz/zuhal-nursah/Rapor.pdf>. Acesso em 01 de abril de 2014.